
VESTIBULARES
2021
ITA
Estratégia
Vestibulares

Sumário

Apresentação

Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

SOBRE O BIZUÁRIO: Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

Instruções Gerais

Geometria Analítica é uma das matérias mais importantes no vestibular. A frequência que ela cai no vestibular é certa de 10%. Então, com certeza, aparecerá no mínimo uma questão de geometria analítica no final do ano. Geralmente, as questões dessa disciplina envolvem muitas contas e, consequentemente, exige muita atenção para não errar “besteiras”. Historicamente, o ITA cobra mais questões de retas e circunferências, sendo hipérbole a curva menos frequente na prova. Para as questões dessa matéria que caem no vestibular é muito importante que você faça organizadamente na folha de rascunho lá na hora, ainda mais quando você for fazer a representação geométrica da questão. Tendo isso em mente, vamos adiante.

Quanto à questão de como estudar o Bizuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.

- "Sangue no olho" e "faca nos dentes" são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

Observação: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

Análise da aula

Essa Disciplina no Vestibular

Sobre geometria analítica II no vestibular temos algumas tendências no ITA. O Instituto gosta muito de pedir questões envolvendo retas tangentes às cônicas, interseções entre as cônicas e posição relativas entre elas, então fique ligado. É também nessa aula que o IME se distancia mais ainda do ITA em termos de conteúdo. O conteúdo de geometria analítica do IME é bem mais denso e aprofundando. Já as questões do ITA são mais rápidas e mais clássicas, geralmente, mas também envolvem bastante conta. Uma dica para essa aula é: deixe tudo documentado. Todas as questões que você for fazer, toda a teoria que você for anotar, deixe tudo documentado em algum caderno, de preferência. Se você está começando, evite folhas soltas. Além de deixar tudo mais organizado você terá sempre um meio de analisar seu volume de estudo através da velocidade com que você usa as folhas do caderno e também, caso ocorra qualquer dúvida ou você queira verificar a solução que fez, vai estar lá documentado. Sabendo disso, vamos para o roteiro!

Roteiro da Aula

- A aula começa com a apresentação das cônicas através da interseção de alguns planos com um cone. Existem alguns detalhes relacionados a esses planos que apresentarei na seção de bizus.
- Em **1.1** temos a circunferência, uma curva mais que comum na prova do ITA. Preste bastante atenção nos casos de posição relativa entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre circunferências, pois eles caem e você não pode errar questão disso.
- Em **1.2** temos a parábola. Perceba que o critério matemático de construção da parábola é relativamente simples, distância entre pontos = distância de ponto a reta. Isso vai ser bem explorado pelo ITA com questões de lugar geométrico
- Em **1.3** temos a elipse. Curva bem importante na prova. Além de saber todas as propriedades e a equação reduzida, você deve prestar atenção nos valores de b e de a, para decidir se a elipse está no eixo x ou y.
- Em **1.4** temos a hipérbole. A demonstração da fórmula é muito parecida com a da elipse. Preste atenção no fato de que existe um certo conjunto de retas que não são tangentes à hipérbole. Essas retas estão compreendidas entre as assíntotas.
- Em **1.5** temos o reconhecimento de cônicas. Ao receber uma equação, ela pode vir com o termo xy ou não. Se não vier esse termo, tente fazer aparecer quadrados perfeitos e ver a cara final da equação e verificar se ela se parece com a da elipse, hipérbole, parábola ou circunferência. Se tiver, suspeite que é um par de retas concorrentes, e então você resolve a equação do segundo grau para uma das variáveis. Se não for um par de retas, a cônica estará rotacionada. Mais adiante na aula você saberá como lidar com esse tipo de problema.
- Para problemas de tangência com cônicas vamos aprender várias técnicas e decorar vários resultados que vão facilitar sua vida. Para esse tipo de problema, saber cálculo pode ajudar bastante. Só o comecinho de derivadas polinomiais já é o suficiente.
- Em **2.1** temos a demonstração da matriz de rotação. É bom saber demonstrar essa matriz, pois você pode esquecer na hora da prova. Não é muito complicado e não demanda muito tempo.
- Em **2.2** o método de resolver cônicas rotacionadas é: calcular o ângulo com a fórmula $tg(2\theta) = \frac{B}{A-C}$. Após isso, usar a matriz de rotação para mudar as variáveis para o novo par de eixos e achar a equação.
- É bizu decorar a tabela de **2.3**, mas faça isso bem perto da prova de matemática, pois a tendência é esquecer.
- **3.1** e **3.2** costumam cair bastante no ITA, principalmente sistemas. Pode cair sistemas de desigualdades de retas ou pode cair também desigualdades com elipses e hipérbole. Mas sem estresse! Uma vez que você determinou e equação da curva, fica muito mais fácil usar

os critérios que o professor passou em aula e analisar a representação gráfica daquela desigualdade.

- O exemplo (ITA/2004) foi mencionado na trilha da aula de trigonometria! Fique ligado pois uma mesma questão pode ter vários meios de resolução diferentes. Essa é uma delas.
- O capítulo **4**, se você tem uma noção de cálculo ou já estudou essa parte antes, pode pular direto para os exercícios de vestibulares anteriores. Caso nunca tenha estudado cálculo na vida, é bom estudar esse capítulo.
- Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar com exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Tente fazer de forma ligeira, sem pensar muito. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula mais ou menos a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizado possível. Você que já é mais experiente pode seguir as questões na ordem que aparecerem.

Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Geometria Analítica II que caem no ITA são fáceis e médias, mais médias do que fáceis. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

Fáceis	Médias	Difíceis
1, 2, 4, 5, 6, 7, 11 {a, b, c}, 19, 21 até 67, 87, 93, 95, 103, 104, 110, 111, 113	3, 8, 10, 11 {d, e}, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 105, 106, 107, 108, 109, 112, 114, 115, 126, 127, 128, 129, 131, 132	9, 17, 71, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 130, 133

Bizus

- O primeiro passo para entender as cônicas é entender como funciona a construção de cada uma delas. Saiba bem quais são os critérios de construção.
- Dada a equação de uma cônica e um ponto $P(x_p, y_p)$ dessa cônica. Para achar a equação da reta tangente, basta fazermos as seguintes substituições na equação da cônica.

$$x^2 \rightarrow xx_p$$

$$y^2 \to \; yy_p$$

$$xy \to \frac{x_p y \; + \; xy_p}{2}$$

$$x \to \frac{x + x_p}{2}$$

$$y \to \frac{y + y_p}{2}$$

Caso o ponto não esteja na reta, essas substituições darão a equação da reta que passa pelos pontos de tangência que as retas a partir de um ponto P fora da curva determinam. **Esse é o bizu do x, x do ponto.**

❖ A partir do coeficiente angular m de uma reta tangente a uma cônica é possível determinar a equação dessa reta. Essas equações podem ser obtidas fazendo $y = mx + b$ e substituindo y na equação da curva. É tranquilo de fazer, mas dá um certo trabalho. Se você tiver as equações decoradas, a questão sai bem mais rápido! Abaixo estão as equações das retas tangentes à curva dado um coeficiente angular para aquela reta.

Circunferência: $y \; = \; mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$

Elipse: para $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $y \; = \; mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

Hipérbole: para $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, $y \; = \; mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

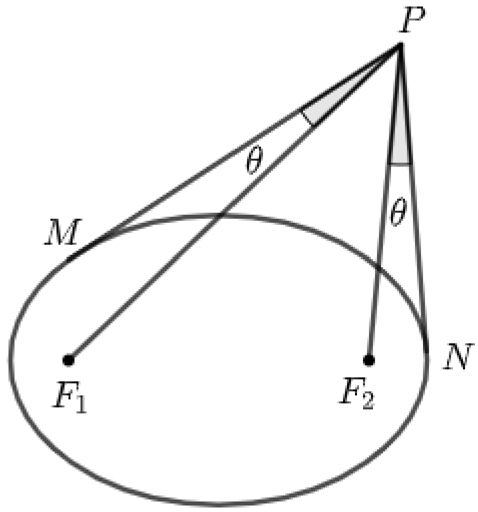
Parábola: $y^2 = 2px$ $\qquad y = mx + \frac{p}{2m}$

$x^2 = 2py$ $\qquad y = mx - \frac{pm^2}{2}$

❖ **Fatos sobre elipse**

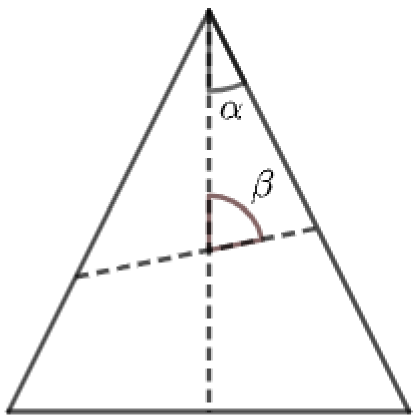
- Tome uma elipse com focos $F_1 \; e \; F_2$ e uma reta r tangente à elipse no ponto P. É sabido que o ângulo que a reta F_1P faz com a normal a partir do ponto P é o mesmo que F_2P faz com essa normal. Ou seja, ou ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão!
- Vamos supor que você tenha um lazer posicionado em um dos focos da elipse. Mirando o lazer para qualquer um dos pontos da elipse, ele sempre refletirá no outro foco!

- Existe um teorema bem famoso, que já caiu no IME, mas nunca caiu no ITA. A título de ilustração, vamos enunciá-lo aqui. É o teorema de Poncelet. Seja uma elipse com focos F_1 e F_2 e um ponto P de onde partem duas retas tangentes à essa elipse em M e N. O teorema afirma que os ângulos $M\hat{P}F_1$ e $N\hat{P}F_2$ são iguais!



❖ Aqui eram pra ser os fatos de hipérbole e parábola. Porém, essas curvas, na prova do ITA, caem com pouca frequência e, quando caem, são as equações clássicas. Nada que as técnicas abordadas na aula e nas resoluções não resolvam. Elipse já é mais frequente e possui fatos mais famosos.

❖ Se você seccionar um cone com um plano, dependendo do ângulo que o plano faz com o eixo vertical do cone, é possível obter diferentes tipos de curvas.



O valor da excentricidade é definido como $e = \frac{cos\beta}{cos\alpha}$

Se $0 < e < 1$, a secção cônica é uma elipse.

Se $e > 1$, a secção cônica é uma hibérbole.

Se $e = 1$, a secção cônica é uma parábola.

Se $e = 0$, a secção é uma circunferência.

❖ Se você inscrever duas esferas em um cone e passar um plano secante a esse cone de tal forma que ele tangencie as duas esferas e a seção seja uma elipse, então as esferas tangenciarão a elipse cada uma em um foco diferente!

❖ A área da elipse é dada por $A = \pi ab$.

❖ Aproveite essa aula para aprender cálculo. Muito alunos pensam que talvez seja necessário pegar um livro de cálculo para aprender e usar no ITA. NÃO é necessário estudar por livros. As aplicações do cálculo no vestibular são pontuais e abordaremos todas nas aulas e nos bizuários. O cálculo no vestibular tem aplicação em:

Polinômios:

Em polinômios, é muito comum questões falando sobre raízes de multiplicidade maior que 1. O fato é que, se uma raiz tem multiplicidade 2, essa raiz é raiz do polinômio P e da derivada P'. De forma geral, se uma raiz tem multiplicidade $n \geq 2$, essa raiz será raiz de $P^{(n-1)\prime}$.

Caso não tenha pegado esse último exemplo, não se preocupe que na trilha de polinômios vamos retomar esse bizu.

Funções:

Em funções, o cálculo é muito usado para calcular máximos e mínimos de uma função.

Para isso, deriva-se a função e encontra-se o valor em que a derivada é zero. Esses valores são os que acontecem máximos ou mínimos. Para decidir se é máximo ou mínimo, olha-se a derivada segunda. Se for positiva naquele ponto, é ponto de mínimo. Se for negativa, é de máximo. Esses são os casos possivelmente relevantes no vestibular.

Geometria analítica:

Utiliza-se para calcular o coeficiente angular de uma reta tangente a partir de uma curva.

Combinatória:

A aplicação em combinatória é muito elegante. Tomemos o seguinte somatório:

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Para resolver isso, vamos tomar, do binômio de Newton, o seguinte resultado:

$$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} x^p$$

Derivando em relação à x nos dois lados da equação, temos:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} p x^{p-1}$$

Fazendo $x = 1$, temos que:

$$n2^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

Caso não tenha pegado esse último exemplo, não se preocupe que na trilha de combinatória vamos retomar esse bizu.

❖ Questão 70 é praticamente de geometria plana. Por isso é muito bizu representar graficamente o que está acontecendo na questão.

❖ A questão 73 também, representar graficamente o que está acontecendo ajuda muito. Torne isso um hábito nas questões de GA do ITA.

❖ 80 é, de novo, uma questão que representar graficamente ajuda bastante, pois as retas formam 90° entre si. A ideia de visualizar o que está acontecendo no plano cartesiano é para que você possa usar passos de geometria plana e resolver o problema mais facilmente.

❖ A questão 82 sai muito rápido se você testar os itens a e b primeiro. Os itens d e e são bem mais complicados. E essa é uma boa estratégia em questões de analisar itens. Sempre comece pelo mais fácil de analisar ou calcular.

- Na questão 87 é possível aplicar o bizu do x, x do ponto para achar a reta tangente e, com isso, achar a reta perpendicular.
- 109 é uma ideia muito, muito boa. O tipo de questão que pode cair a qualquer momento na parte objetiva do ITA.
- Questão 112 é um exemplo que, representando graficamente a situação da questão, fica bem mais fácil resolvê-la.

12