OBJETIVO

ITA Matemática

12

MÓDULO 45

TRIGONOMETRIA II

1. Considere a equação

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - 6\,\text{tg}\,\frac{x}{2} = 0.$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.
b) Para as soluções encontradas em a), determine cotg x.

2. Sobre a equação tg x + cotg x = 2 sen 6x podemos afirmar que:

a) Apresenta uma raiz no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{4}$

b) Apresenta duas raízes no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) Apresenta uma raíz no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

d) Apresenta uma raíz no intervalo $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

e) Não apresenta raízes reais.

3. Seja a um número real não nulo, satisfazendo $-1 \leq a \leq 1$.

Se dois ângulos agudos de um triângulo são dados por arc sen a e arc sec $\frac{1}{a}$, então o seno trigonométrico do terceiro ângulo desse triângulo é igual a:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Num triângulo ABC considere conhecidos os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{B}A$ e a medida d do lado AB. Nestas condições, a área S deste triângulo é dada pela relação:

a) $S = \dfrac{d^2}{2\,\text{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

b) $S = \dfrac{d^2\,(\text{sen}\,B\hat{A}C)\,(\text{sen}\,C\hat{B}A)}{2\,\text{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

c) $S = \dfrac{d^2\,\text{sen}\,C\hat{B}A}{2\,\text{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

d) $S = \dfrac{d^2\,\text{sen}\,B\hat{A}C}{2\cos(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

e) $S = \dfrac{d^2\,(\text{sen}\,B\hat{A}C)\,(\text{sen}\,C\hat{B}A)}{2\cos(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

MÓDULO 46

TRIGONOMETRIA II

1. **(ITA)** – O conjunto-solução de $(\text{tg}^2x - 1)(1 - \text{cotg}^2x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é:

a) $\{\pi/3 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{\pi/4 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{\pi/6 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{\pi/8 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\{\pi/12 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

2. Prove que $\dfrac{tg^2 2\alpha - tg^2\alpha}{1 - tg^2 2\alpha \,.\, tg^2\alpha} = tg^3\alpha \,.\, tg\,\alpha$

3. O valor do sen 47° + sen 61° – sen 11° – sen 25° é igual a:

a) cos 47°   b) sen 25°   c) cos 18°

d) sen 12°   e) cos 7º

MÓDULO 47

TRIGONOMETRIA II

1. A equação [sen (cos x)] . [cos (sen x)] = 1 é satisfeita para

a) $x = \dfrac{\pi}{4}$.

b) x = 0.

c) nenhum valor de x.

d) todos os valores de x.

e) todos os valores de x pertencentes ao terceiro quadrante.

2. Sabendo que $\text{tg}^2\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, determine sen x.

3. O valor de

$\text{tg}^{10}x - 5\text{tg}^8x\,\sec^2x + 10\text{tg}^6x\,\sec^4x - 10\text{tg}^4x\,\sec^6x + 5\text{tg}^2x\,\sec^8x - \sec^{10}x$, para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, é:

a) 1 b) $\dfrac{-\sec^2x}{1 + \text{sen}^2x}$ c) $-\sec x + \text{tg}\,x$

d) -1 e) zero

MÓDULO 48

TRIGONOMETRIA II

1. A equação em x,

$$\text{arctg}\,(e^x + 2) - \text{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.
b) admite uma única solução, e esta é positiva.
c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.
d) admite apenas soluções negativas.
e) não admite solução.

2. O valor da soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$.

b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

c) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.

d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

e) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

3. **(IME)** – Resolva a equação $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(2\alpha) = 2\operatorname{tg}(3\alpha)$, sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

4. Resolva a equação $2 \operatorname{sen} 11x + \cos 3x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 3x = 0$.

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 45

1. **(ITA)** – Seja **a** um número real tal que $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$. Se $(x_0; y_0)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} (2 \sec a) \cdot x + (3 \operatorname{tg} a) \cdot y = 2 \cdot \cos a \\ (2 \operatorname{tg} a) \cdot x + (3 \sec a) \cdot y = 0 \end{cases},$$

então podemos afirmar que

a) $x_0 + y_0 = 3 - 2 \operatorname{sen} a$

b) $\left(\frac{2}{3} x_0\right)^2 - (y_0)^2 = \frac{4}{9} \cdot \cos^2 a + 2$

c) $x_0 - y_0 = 0$

d) $x_0 + y_0 = 0$

e) $\left(\frac{2}{3} x_0\right)^2 - (y_0)^2 = \frac{4}{9} \cdot \cos^2 a$

2. A expressão $\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$, $0 < \theta$, π, é idêntica a

a) $\sec \frac{\theta}{2}$ b) $\operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}$ c) $\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$

d) $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ e) $\frac{\theta}{2}$

■ MÓDULO 46

1. Mostre que $\operatorname{sen} 18^o \cdot \cos 36^o = \frac{1}{4}$.

■ MÓDULO 47

1. O número de raízes reais da equação

$\sum_{n=1}^{5} (\cos x)^{2n} = 5$, no intervalo $[0; 4\pi]$, é

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

2. Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \le \alpha \le \beta$, maximizam a soma $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta$, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. b) $\frac{2\pi}{3}$. c) $\frac{3\pi}{5}$. d) $\frac{5\pi}{8}$. e) $\frac{7\pi}{12}$ ·

■ MÓDULO 48

1. Resolver em ℝ, a equação

$5\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 5$

2. Resolver, em ℝ, a equação $\arccos x - \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{6}$

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 45

1) $\begin{cases} (2 \sec a)x + (3 \operatorname{tg} a)y = 2 \cos a \\ (2 \operatorname{tg} a)x + (3 \sec a)\, y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sec^2 a\, x^2 + 12 \sec a \cdot \operatorname{tg} a\, xy + 9 \operatorname{tg}^2 a\, y^2 = 4 \cos^2 a \\ 4 \operatorname{tg}^2 a\, x^2 + 12 \sec a \cdot \operatorname{tg} a\, xy + 9 \sec^2 a\, y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a)x^2 + 9(\operatorname{tg}^2 a - \sec^2 a)y^2 = 4 \cos^2 a \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 9y^2 = 4 \cos^2 a \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - y^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a$

Se $(x_0;y_0)$ é solução do sistema, então

$\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - (y_0)^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a$

Resposta: E

2) Sabe-se que:

$\operatorname{sen} \theta = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$

$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$

$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$

Assim, para $0 < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, tem-se:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Resposta: D

■ MÓDULO 46

1) $\text{sen } 18° \cdot \cos 36° = \dfrac{\text{sen } 18° \cdot \cos 18° \cdot \cos 36°}{\cos 18°} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2 \cdot \text{sen } 18° \cdot \cos 18° \cdot \cos 36°}{\cos 18°} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2 \cdot \text{sen } 36° \cos 36°}{\cos 18°} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\text{sen } 72°}{\cos 18°} =$

$= \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$, pois $\text{sen } 72^o = \cos 18^o$

Resposta: Demonstração

■ MÓDULO 47

1) Como $0 \leq (\cos x)^{2n} \leq 1$, tem-se que

$\sum\limits_{n=1}^{5} (\cos x)^{2n} = 5 \Leftrightarrow (\cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0,$

$x = \pi, x = 2\pi, x = 3\pi$ ou $x = 4\pi$, pois $x \in [0; 4\pi]$

Resposta: D

2)

1) $\left.\begin{array}{r}\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \\ \alpha + \beta = \dfrac{4\pi}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = \sqrt{3} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{3} \cos \left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

2) $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = \sqrt{3} \cdot \cos \left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ é máximo para

$\alpha - \dfrac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

■ MÓDULO 48

1) $5\text{sen}^2 x + \sqrt{3}\text{sen } x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5.(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3}\text{sen } x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\sqrt{3}\text{sen } x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\text{tg } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Resposta:
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{N}\}$

2) Fazendo $a = \text{arccos } x$ temos $\cos a = x$, com $0 \leq a \leq \pi$ e $\text{sen } a = \sqrt{1 - x^2}$.
Fazendo $b = \text{arcsen } x$ temos $\text{sen } b = x$, com $-\dfrac{\pi}{2} \leq b \leq \dfrac{\pi}{2}$ e $\cos b = \sqrt{1 - x^2}$.

Desta forma, $\text{arccos } x - \text{arcsen } x = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - b = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos(a - b) = \cos \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} \cdot x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 . x . \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 16x^2(1 - x^2) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x^4 - 16x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$ ou

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como durante a resolução tivemos que elevar a equação ao quadrado, devemos experimentar as respostas obtidas.

Para $x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \text{arccos } x - \text{arcsen } x =$

$= \text{arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \text{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

Para $x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \text{arccos } x - \text{arcsen } x =$

$= \text{arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) - \text{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) =$

$= \dfrac{5\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{6}$

Para $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{arccos } x - \text{arcsen } x =$

$= \text{arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \left(\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= -\dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{6}$

Para $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{arccos } x - \text{arcsen } x =$

$= \text{arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \text{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= \dfrac{7\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{6}$, portanto, apenas $x = \dfrac{1}{2}$ é solução.

Respostas: $V = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$