

FRENTE: MARCOS HAROLDO

PROFESSOR(A): FÍSICA III

ASSUNTO: RESISTORES – ASSOCIAÇÃO

EAD – ITA/IME

AULAS 24 A 26



Resumo Teórico

Introdução

Para fazer uma corrente fluir, você tem que empurrar as cargas. A velocidade com que elas se movem em resposta a um determinado empurrão depende da natureza do material. Para a maioria das substâncias, a densidade de corrente \vec{J} é proporcional à força por unidade de carga, \vec{f} :

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

O fator de proporcionalidade σ (que não deve ser confundido com a densidade superficial de carga) é uma constante empírica que varia de um material para outro. Já vimos anteriormente que é chamado de **condutividade**. É interessante salientar que até mesmo os isolantes são ligeiramente condutores, embora a **condutividade** do metal seja astronômicamente maior (por um fator de 10^{22}). De fato, para a maioria dos fins, os metais podem ser considerados como condutores perfeitos, com $\sigma = \infty$.

Em princípio, a força que move as cargas para produzir a corrente pode ser de qualquer natureza: química, gravitacional ou até mesmo pulgas (treinadas em um circo russo) puxando com cordas minúsculas. Para nosso objetivo, no entanto, é geralmente uma força eletromagnética que realiza tal ação. Logo:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Normalmente, a velocidade das cargas é tão pequena que o segundo termo pode ser ignorado¹:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

A equação acima é conhecida como **Lei de Ohm**. Acalme-se, eu já ia falar da outra forma que ela pode aparecer. Como vimos anteriormente, podemos reescrever tal expressão da seguinte maneira:

$$V = RI$$

Demonstramos isso na apostila anterior! Se não lembra, volte e leia novamente.

A Lei de Ohm pode ser enunciada da seguinte maneira:

Para alguns materiais, mantidos a uma temperatura constante, a sua resistência elétrica é constante e determinada pela razão entre a d.d.p. aplicada sobre a corrente percebida.

Agora eu acho que você deve estar confuso porque foi dito que $\vec{E} = 0$ dentro de um condutor. Mas isso para cargas estacionárias ($\vec{J} = 0$). Além disso, para condutores perfeitos $\vec{E} = 0$ mesmo que a corrente esteja fluindo. Na prática, os metais são condutores tão bons que neles o campo elétrico necessário para movimentar a corrente é desprezível. Assim, rotineiramente tratamos os fios conectores dos circuitos elétricos como equipotenciais. Os resistores, em contrapartida, são feitos de materiais mal condutores.

¹Nos plasmas, por exemplo, a contribuição magnética para \vec{f} deve ser significativa.

Resistores

Denominamos resistor a todo condutor que, ao ser atravessado por corrente elétrica, transforme energia elétrica exclusivamente em energia térmica. Percebemos, portanto, que a característica fundamental de um componente e resistivo é a resistência oferecida à passagem da corrente elétrica.

Como vimos, a resistência de um condutor é dada pela razão entre a d.d.p. aplicada em seus terminais e a corrente elétrica que nele se estabelece:

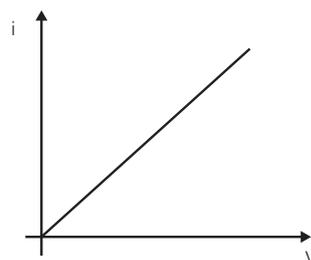
$$R = V/I$$

Num circuito, um resistor aparece comumente representado na forma:



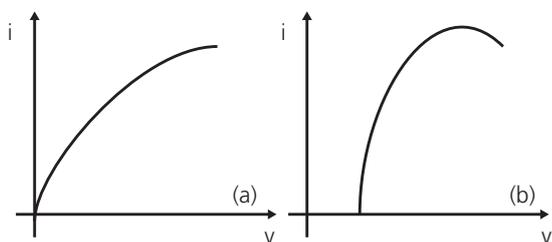
Representação convencional de um resistor.

Quando a resistência de um condutor não varia, diz-se que o resistor é ôhmico. Da 1ª Lei de Ohm, que é a equação que descreve o resistor, podemos mostrar que a curva característica (gráfico de corrente contra tensão) de um resistor é uma reta:



Curva característica de um resistor ôhmico.

No caso de R não ser constante, o resistor (ou o material) é dito não ôhmico, tendo um comportamento não linear. Alguns exemplos de curvas de resistores não ôhmicos são apresentadas a seguir:

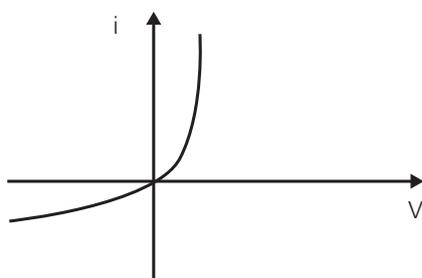


Curva característica de um resistor não ôhmico (a) e de um eletrólito (b).

Entre os resistores não ôhmicos encontramos os termistores, cuja resistência varia com a temperatura, os varistores, cuja resistência varia com a corrente elétrica, resistores que dependem da incidência de luz etc. Entretanto, dos resistores não lineares, os mais importantes e que formam a base da eletrônica são aqueles baseados em junções de semicondutores, com diodo de função **pn** (positivo-negativo) que apresenta baixa resistência em "polarização direta" e alta resistência em "polarização inversa" e o transistor ("transfer resistor"). O diodo tem a sua representação e sua curva característica apresentadas abaixo:

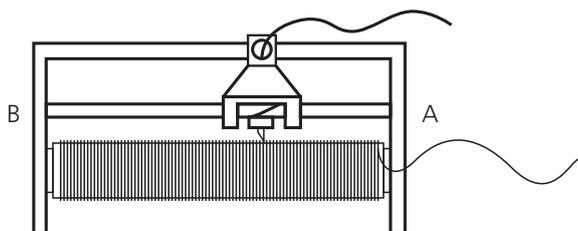


Esquema de um diodo de junção **pn** (a) e sua representação em circuitos (b)



Curva característica de um diodo semicondutor, mostrando a baixa resistência em tensão direta e a alta resistência em tensão reversa.

Um reostato é um resistor de resistência ajustável. Um exemplo típico de reostato é o reostato de cursor, ilustrado a seguir:



No reostato de cursor a resistência R varia continuamente de $R = 0$ a um valor máximo $R = R_{\text{máx}}$, de acordo com a porção do fio que participa do circuito. No caso da figura a seguir, quando o cursor está na posição A, a resistência é nula, e quando o cursor está na posição B, a resistência é máxima.

Um reostato é simbolizado, em circuitos, pela notação:



Representação de um reostato.

Já comentamos anteriormente que a resistividade pode variar com a temperatura. Lembre-se que:

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$$

Para uma aproximação de primeira ordem.

Existem materiais, como a grafite, em que a resistividade diminui quando a temperatura aumenta, tendo, pois, coeficiente de temperatura α negativo.

Existe ainda um fenômeno chamado **supercondutividade**, onde para uma dada temperatura, a resistência se torna nula.

Em 1911, o físico holandês Heike Kamerlingh Onnes, trabalhando com mercúrio em baixas temperaturas, descobriu que a sua resistividade desaparecia totalmente para temperatura abaixo de 4,2 K, denominada **temperatura crítica** (T_c).
Na realidade, ela caía repentinamente a zero quando a temperatura se aproximava de 4,2 K. Tal fenômeno é conhecido como supercondutividade.
Uma característica importante do supercondutor é a seguinte: se fizermos um anel de material supercondutor, criamos nele uma corrente elétrica e, a seguir, retiramos a fonte, a corrente elétrica continuará a circular. Não haverá perda de energia elétrica na forma de calor; ou seja, a corrente continuará a circular por tempo indefinido.
As aplicações tecnológicas da supercondutividade logo após a sua descoberta eram poucas, pois o custo operacional para trazer o metal até a temperatura crítica era muito alto. Atualmente, novas e recentes descobertas foram feitas e já são conhecidas muitas substâncias, supercondutores. Por exemplo: alumínio, titânio, vanádio, zinco, estanho etc são supercondutores para a temperatura abaixo de T_c . Alguns metais como prata, cobre e o ouro não apresentam supercondutividade.

Unidade de resistência

A unidade de resistência elétrica no Sistema Internacional é o Ohm (Ω), dado por:

$$V = RI$$

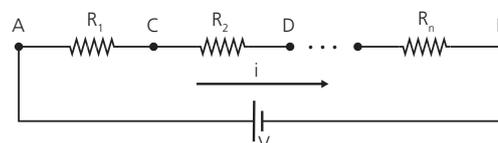
$$1 \text{ ohm} = \frac{1 \text{ volt}}{\text{ampère}}$$

Associação de resistores

Dois ou mais resistores podem ser conectados entre si, formando uma associação. Definimos o resistor equivalente como um único resistor que, submetido à mesma d.d.p. da associação, é atravessado por uma corrente elétrica igual à corrente total da associação. Podemos formar associações de resistores em série, em paralelo ou misto.

Associação em série

Um conjunto de resistores ligados sem terminais sucessivos formam uma associação em série, como indica a figura. Ao aplicarmos uma d.d.p. entre os terminais A e B da associação, verificamos facilmente, pela continuidade da corrente elétrica, que todos os resistores são percorridos pela **mesma corrente i**.

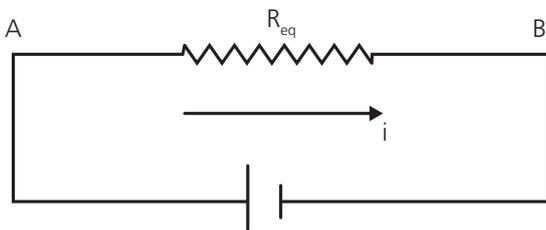


Chamaremos $V_A - V_C = V_1$ (que é a d.d.p. sentida pelo resistor R_1), $V_C - V_D = V_2$, que é a d.d.p. sentida pelo resistor R_2 e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 I \\ V_2 &= R_2 I \\ &\vdots \\ V_n &= R_n I \\ \sum_{i=1}^n V_i &= \sum_{i=1}^n R_i I \\ V_{\text{total}} &= V_A - V_B = R_{\text{eq}} I \end{aligned}$$

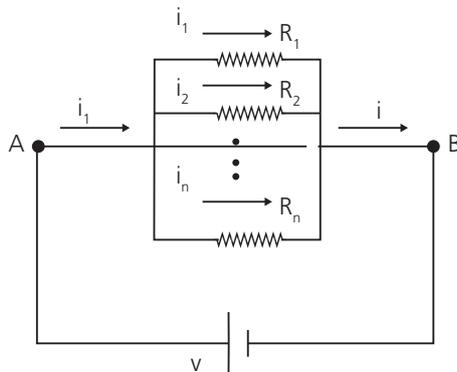
Concluimos que:

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n R_i$$



Associação em paralelo

Um conjunto de resistores ligados de tal forma que os seus terminais estejam submetidos à mesma diferença de potencial.



Pela lei de Ohm, temos:

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_n I_n$$

Pela lei da conservação da continuidade da corrente, devemos ter:

$$i = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{V}{R_i} = \frac{V}{R_{\text{eq}}}$$

Como devemos ter a seguinte relação para a resistência equivalente

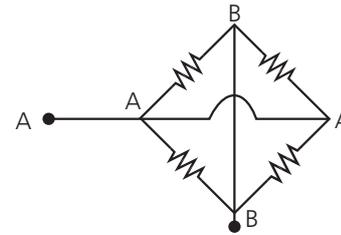
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

É importante analisar bem o circuito antes e perceber quais resistências estão em série e quais estão em paralelo. Além disso, devemos atentar para duas situações em um primeiro instante: Fio liso e curto-circuito.

Fio liso: os fios, que não contêm resistência ($R = 0$), têm o mesmo potencial em todos os pontos, pois, da Lei de Ohm, qualquer corrente finita i , produz uma d.d.p. nula:

$$V = RI \rightarrow V = 0$$

Daí, todos os pontos ligados por fios de resistência nula são equivalentes entre si, podemos "transportar" os pontos A e B ao longo dos mesmos. No exemplo dado é visível que todos os resistores se ligam aos mesmos terminais, estando, portanto, ligados em paralelo.

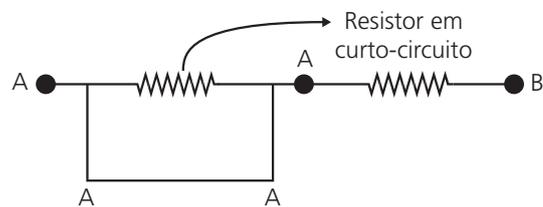


Exemplo de resistores em paralelo.

Curto-circuito: quando um resistor (bem como qualquer componente) está ligado entre pontos de mesmo potencial, dizemos que ele está em curto-circuito. No caso de um resistor, se a d.d.p. em seus terminais é nula, temos:

$$V = RI = 0 \rightarrow I = 0$$

Pelo fato de não haver corrente elétrica percorrendo o resistor, o mesmo não "funciona", podendo, portanto, ser eliminado do circuito, como se vê no exemplo:

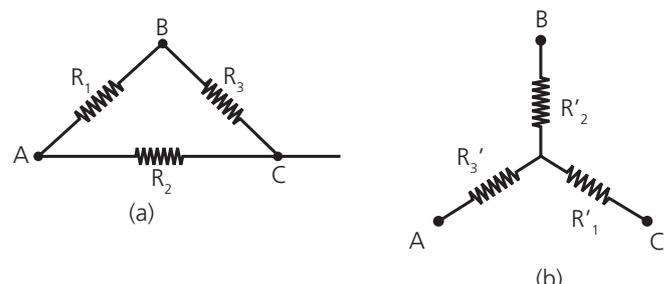


Resistor em curto.

Transformação $\Delta \rightarrow Y$

A transformação de um delta de resistores para uma estrela de resistores é bastante útil na solução de problemas. O procedimento é bem simples, porém as vezes pode cair num mar de contas.

Podemos encontrar um par de configurações, uma em Δ e outra em Y, que possuem a mesma resistência equivalente entre quaisquer dois pontos dentre três pontos dados A, B e C.



Associações em Δ (a) e y (b) equivalentes

Da figura (a) e (B) encontramos a resistência equivalente entre os pontos A e B, B e C, A e C:

$$R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_{AB} = R_2' + R_3'$$

$$R_{BC} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_{BC} = R_1' + R_2'$$

$$R_{AC} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_{AC} = R_1' + R_3'$$

Como desejamos que estes valores de resistência sejam os mesmos em ambas as associações, temos:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (I)$$

$$R_1' + R_2' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (II)$$

$$R_2' + R_3' = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (III)$$

Resolvendo o sistema para as variáveis R_1' , obtemos:

$$R_1' = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_2' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_3' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Estes são os valores dos resistores partindo do formato delta e indo para o formato estrela. Se a transformação for contrária ($Y \rightarrow \Delta$), obtemos:

$$R_1 = \frac{R_1' R_2' + R_1' R_3' + R_2' R_3'}{R_1'}$$

$$R_2 = \frac{R_1' R_2' + R_1' R_3' + R_2' R_3'}{R_2'}$$

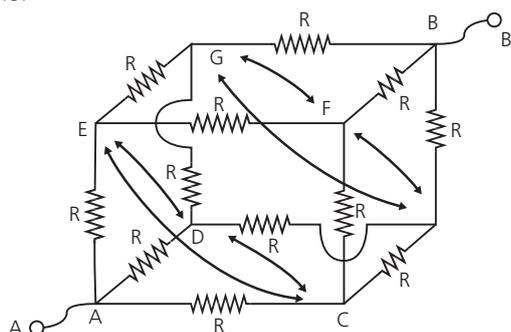
$$R_3 = \frac{R_1' R_2' + R_1' R_3' + R_2' R_3'}{R_3'}$$

Esse truque tirará você de sérios apuros.

Simetrias

A presença de simetrias numa associação nos permite encontrar, em geral, pontos submetidos ao mesmo potencial.

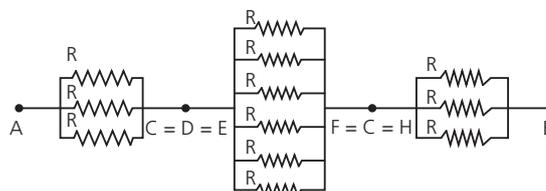
1º exemplo: Consideremos o tradicional exemplo da associação de resistores idênticos, localizados nas arestas de um cubo, em que se deseja encontrar a resistência equivalente entre pontos de diagonal do mesmo:



Associação "em cubo" de resistores idênticos

Se permutarmos os pontos C, D e E entre si e os pontos F, G e H entre si, não modificamos a associação, e, portanto, os pontos C, D e E são equivalentes, bem como os pontos F, G e H.

Daí, podemos rearranjar a associação na forma:

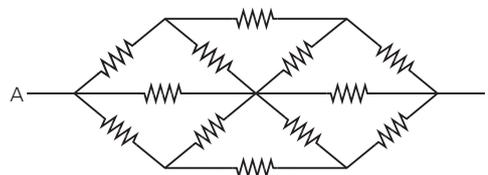


Circuito reescrito com ajuda da simetria.

Assim, fica fácil encontrar que a resistência equivalente da associação é:

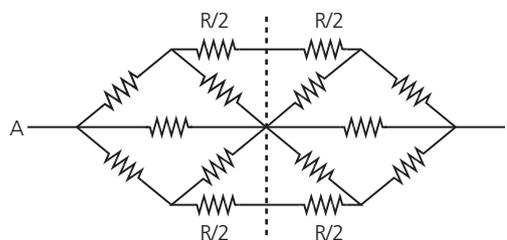
$$R_{eq} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6}$$

2º exemplo: Tomemos o circuito abaixo, também um clássico. Todas as resistências do circuito valem R. O que fazemos para determinar a resistência equivalente entre A e B?



Primeiramente, olhamos para o circuito e facilmente imaginamos um plano de simetria que passa pelo circuito perpendicular à reta AB e corta exatamente na metade.

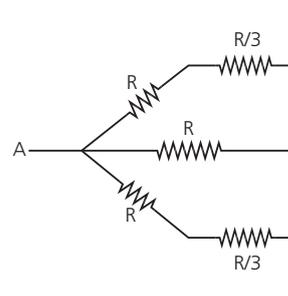
Perceba que para haver simetria, devemos separar a resistência de cima e a de baixo em duas resistências em série:



O plano de simetria é um equipotencial. A questão se resume a calcular a resistência equivalente entre A e o plano e depois multiplicar por 2 (devido à simetria). Calculemos então a resistência equivalente entre R e R/2 em paralelo.

$$\frac{R \cdot \frac{R}{2}}{R + \frac{R}{2}} = \frac{R}{3}$$

Veja como fica o circuito:



Calculamos agora R e R/3 em série:

$$R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$$

Calculamos o restante em paralelo:

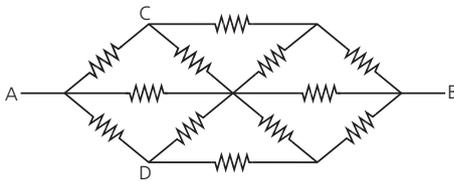
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{3}{4R} + R + \frac{3}{4R}$$

$$R_{eq} = \frac{2R}{5}$$

E agora, para finalizar, multiplicamos por 2. Concluindo que a resistência equivalente entre A e B é:

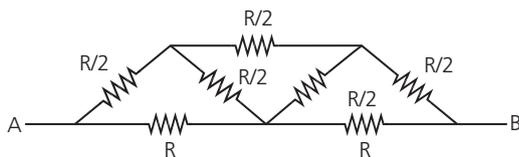
$$R_{AB} = \frac{4R}{5}$$

3º exemplo: Vamos analisar o mesmo circuito e determinar a resistência equivalente por outro método de simetria. Imaginemos agora um plano de simetria que passa pela reta AB. Vamos então analisar as correntes que saem de A (caso A e B sejam expostos a uma d.d.p.).

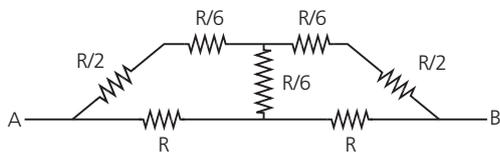


Perceba que C e D possuem o mesmo potencial. Isso é devido à simetria, pois a corrente enxerga os dois caminhos igualmente, ou seja, não existe caminho preferencial. Logo, a queda de potencial – Ri é igual entre AC e AD. Esse raciocínio é aplicado aos outros pontos de simetria e isso permite dizer que todos os resistores que formam par objeto imagem em relação à AB estão em paralelo. Por exemplo, o resistor AC está em paralelo com o resistor AD.

Fechamos então o circuito e reduzimos à metade cada resistor que forma um par objeto imagem. Veja:



Transformando o delta em estrela, temos:



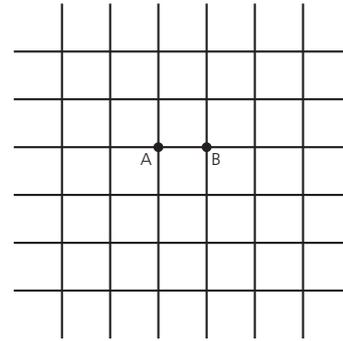
Aqui encontramos uma ponte equilibrada e fica fácil terminar.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2R} + \frac{3}{4R}$$

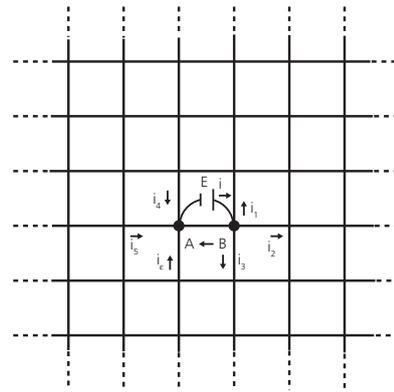
$$R_{AB} = \frac{4R}{5}$$

Cuidado para não confundir quando dividimos por dois e quando multiplicamos por dois. Estude bem as técnicas antes de sair aplicando!

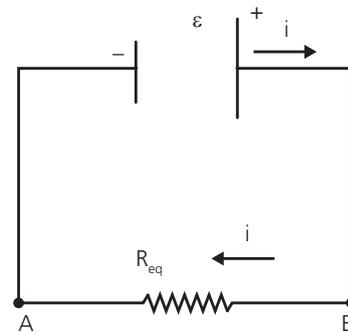
4º exemplo: Deseja-se calcular a resistência equivalente entre os pontos A e B da rede bidimensional infinita (ver figura abaixo) formada por células quadradas cujos lados são resistores de resistência R. Far-se-á uso dos princípios da simetria e superposição.



Devido à simetria da rede, os nós no infinito estão a um mesmo potencial, façamos, então, igual a zero.



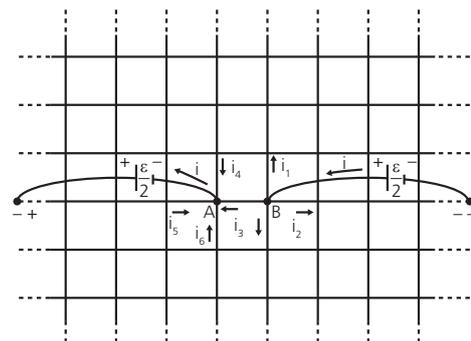
Ligaremos aos pontos A e B um gerador de força eletromotriz \mathcal{E} ideal, o qual será responsável pela produção da corrente elétrica i . Podemos então imaginar o circuito como sendo:



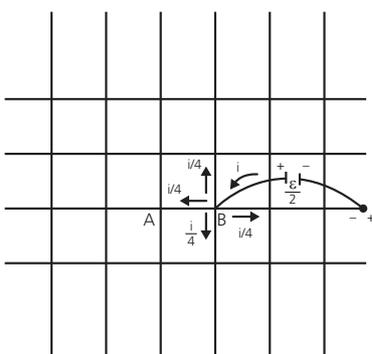
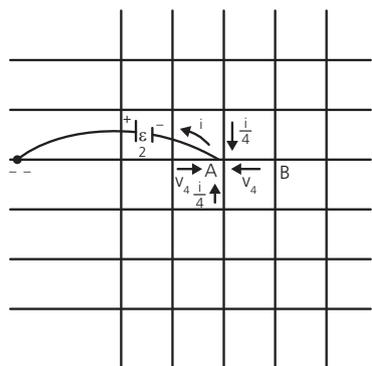
Em que:

$$R_{eq} = \mathcal{E}/i$$

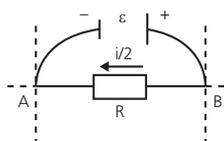
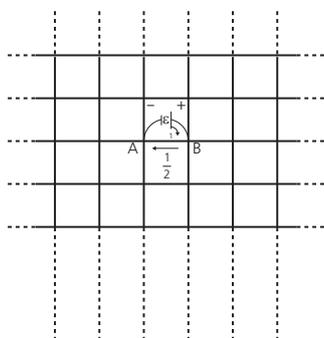
Pela suposta simetria, só podemos garantir que: $i_1 = i_3 = i_4 = i_6$ e $i_5 = i_2$ e mais nada. Não podemos garantir que as quatro direções possíveis para a corrente no nó B são equiprováveis, se o sorvedouro estiver em A. E se tivermos sorvedouros no infinito?



Veja que agora podemos afirmar que todas as correntes são igualmente prováveis se pegarmos cada lado separadamente.



Procedendo à superposição dos dois circuitos imediatamente anteriores, a única corrente conhecida será a corrente do ramo AB, felizmente a que precisamos:

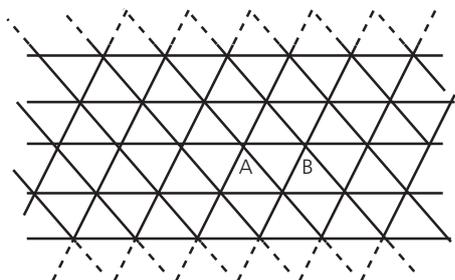


Substituindo, teremos:

$$U_{AB} = R \cdot i/2; U_{AB} = R_{eq} \cdot i \Rightarrow R_{eq} = R/2$$

Este método é bem útil quando se trabalha nessa linha de problemas.

Veja outra aplicação desse método. Determine a resistência equivalente entre dois pontos consecutivos sabendo que a cada dois pontos existe uma resistência R.



Rapidamente utilizamos o resultado anterior para concluir que a resistência equivalente entre AB vale $R/3$. Podemos generalizar o resultado da seguinte maneira: caso a malha seja infinita e exista simetria nas resistências, a resistência equivalente entre dois pontos consecutivos é dada por:

$$R_{AB} = \frac{2R}{n}$$

Em que n é o número de resistores ligados ao ponto A ou ao ponto B.

Esses são alguns dos métodos de simetria. Existem vários e não temos como abordar todos aqui. Trabalharemos mais em sala de aula e através dos exercícios.

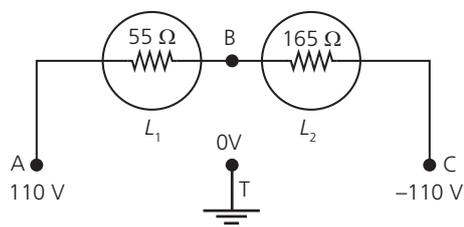
Compreendendo o curto-circuito

Geralmente um curto-circuito é visto como algo perigoso.

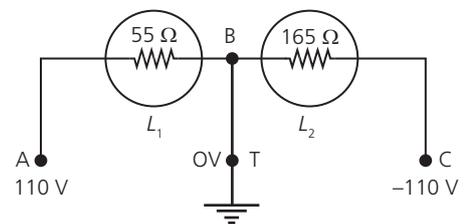
De fato, um acidente ou um incêndio podem até ser efeitos de um curto-circuito, mas não é o que ocorre na maioria dos casos.

Vejam um exemplo:

Considere, na figura a seguir, que as lâmpadas L_1 e L_2 tenham sido fabricadas para funcionar sob tensão de 110 V. Da maneira como estão ligadas, a corrente no circuito é de 1,0 A. Como $U = Ri$, a lâmpada L_1 está operando sob tensão de 55 V (portanto, subalimentada), enquanto a lâmpada L_2 está operando com 165 V (sobrecarregada e com sério risco de queimar).



Entretanto, se fizermos um curto-circuito ligando os pontos **b** e **t**, ambas as lâmpadas passam a funcionar em condições normais, pois agora a tensão sobre as lâmpadas é de 110 V:

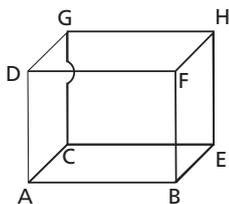


Após um curto entre os pontos B e T as lâmpadas funcionam normalmente.

Para não sermos parciais, vejamos também um exemplo desastroso. Considere uma lâmpada L_3 com resistência de 108 Ω ligada por dois fios de resistência 1 Ω cada a uma tomada de 110 V.

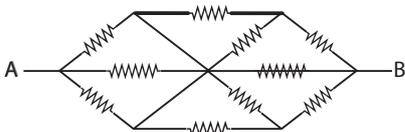


03. Encontre a resistência de um cubo em que cada aresta tem resistência R , entre os pontos:

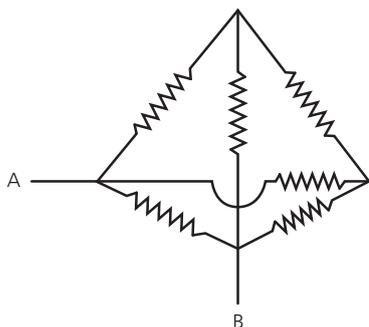


- A) A e H
- B) A e E
- C) A e B

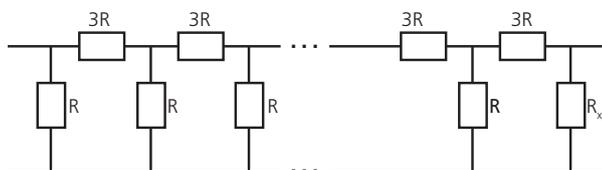
04. Encontre a resistência equivalente entre os pontos A e B. Cada resistor vale R .



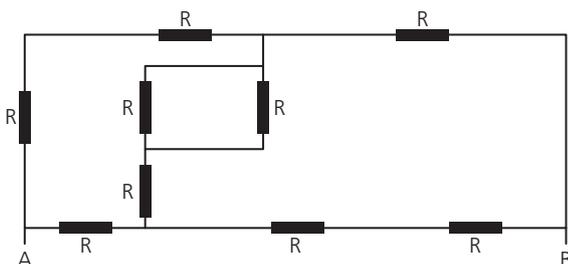
05. Encontre a resistência equivalente entre os pontos A e B. Cada resistor vale R .



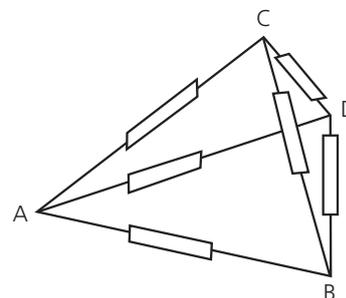
06. Qual deve ser o valor da resistência R_x no circuito abaixo para que a resistência entre os pontos A e B não dependa do número de células?



07. Encontre a resistência equivalente do trecho do circuito entre os pontos A e B.

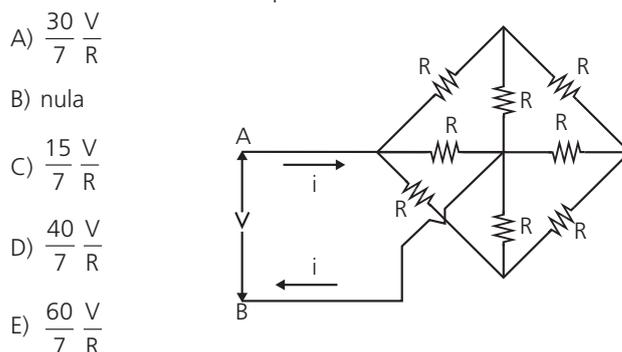


08. (ITA) Considere um arranjo em forma de tetraedro construído com 6 resistências de 100Ω , como mostrado na figura. Pode-se afirmar que as resistências equivalentes R_{AB} e R_{CD} entre os vértices A, B e C, D, respectivamente, são:



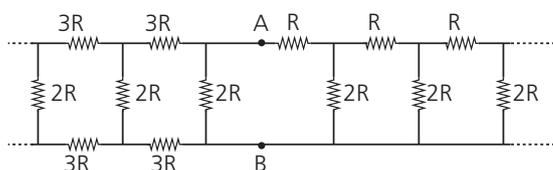
- A) $R_{AB} = R_{CD} = 33,3 \Omega$
- B) $R_{AB} = R_{CD} = 50 \Omega$
- C) $R_{AB} = R_{CD} = 66,7 \Omega$
- D) $R_{AB} = R_{CD} = 83,3 \Omega$
- E) $R_{AB} = 66,7 \Omega$ e $R_{CD} = 83,3 \Omega$

09. Na figura, todas as resistências são iguais a R . A diferença de potencial entre os pontos A e B é V . Determine a intensidade de corrente elétrica entre os pontos A e B.



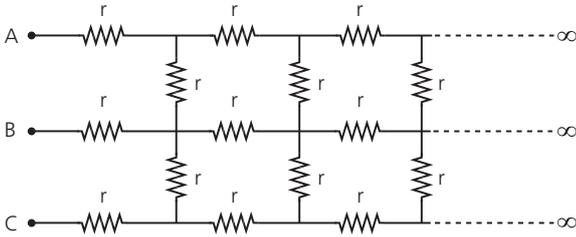
- A) $\frac{30}{7} \frac{V}{R}$
- B) nula
- C) $\frac{15}{7} \frac{V}{R}$
- D) $\frac{40}{7} \frac{V}{R}$
- E) $\frac{60}{7} \frac{V}{R}$

10. O circuito da figura estende-se infinita e periodicamente nos dois sentidos indicados. A resistência elétrica equivalente entre A e B vale:

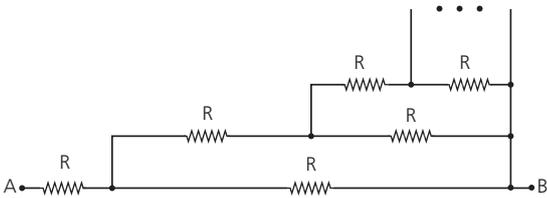


- A) $\frac{R}{2}$
- B) $\left(\frac{9 - \sqrt{21}}{5}\right)R$
- C) $\left(\frac{9 + \sqrt{21}}{5}\right)R$
- D) $\frac{\sqrt{21}}{20}R$
- E) n.r.a.

11. Considere a rede de resistores a seguir. Cada resistor tem resistência r . Determine a resistência equivalente entre os pontos A e C.

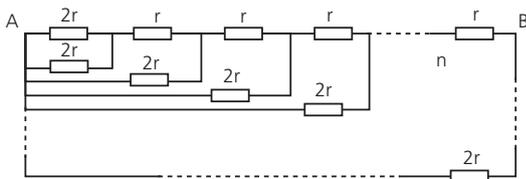


12. Sabendo que todos os resistores da malha infinita da figura têm resistência R , a resistência equivalente entre A e B é:



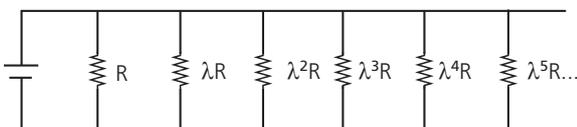
- A) $\frac{R(1 + \sqrt{2})}{2}$
- B) $\frac{R(1 + \sqrt{3})}{2}$
- C) $\frac{3R}{2}$
- D) $\frac{R(1 + \sqrt{5})}{2}$
- E) $\frac{R(1 + \sqrt{6})}{2}$

13. A resistência equivalente entre os pontos A e B do esquema abaixo vale:



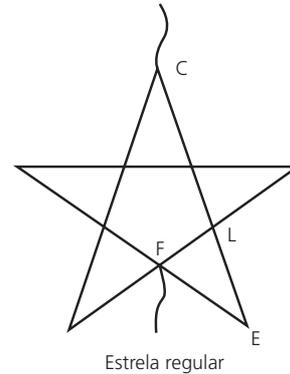
- A) $\frac{nr}{n+1}$
- B) $\frac{r}{n}$
- C) $\frac{r}{n^2}$
- D) $\frac{r}{2}$
- E) r

14. Considere a associação infinita de resistores em paralelo, representada na figura abaixo. As resistências são $R, \lambda R, \lambda^2 R, \lambda^3 R, \lambda^4 R, \dots$ em que $\lambda = 1,8$ e $R = 3 \Omega$. A associação é ligada a uma bateria de 12 V. Assinale a alternativa que corresponde à corrente drenada da bateria.



- A) 3 A
- B) 12 A
- C) 9 A
- D) ∞
- E) 0 A

15. A estrela regular abaixo é formada por um fio uniforme. Sabendo que a resistência entre os pontos E e F é R , determine a resistência equivalente entre os pontos F e C.



Dado: Use $\sin 18^\circ = 1/3$

- A) R
- B) $2R$
- C) $\frac{R}{2}$
- D) $\frac{3R}{2}$
- E) $\frac{R}{4}$

Gabarito

01	02	03	04	05
*	C	*	*	*
06	07	08	09	10
*	*	B	C	B
11	12	13	14	15
*	D	E	C	A

- * 01. $\frac{a(L-a)R}{L^2}$
- 03. A) $\frac{5R}{6}$ B) $\frac{3R}{4}$ C) $\frac{7R}{12}$
- 04. $\frac{R}{3}$
- 05. $\frac{R}{2}$
- 06. $\left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)R$
- 07. $\frac{17R}{12}$
- 11. $(\sqrt{5}+1)R$