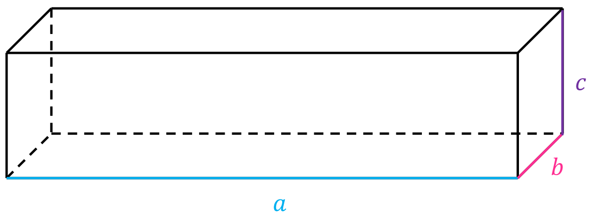
PARALELEPÍPEDO E CUBO

Os paralelepípedos estão muito presentes em nosso cotidiano (quem nunca andou por uma rua cheia de paralelepípedos?). Apesar de estarmos tratando de um poliedro conhecido, vamos apresentar a definição matemática de paralelepípedo para que fique claro sobre qual tipo de sólido estamos falando.

Paralelepípedo

Definição 1. Um paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos.

Para o nosso estudo, nos concentraremos nos seguintes casos especiais de paralelepípedo: o **paralelepípedo retângulo** e o **cubo**. O primeiro caso é formado quando os paralelogramos das suas bases são retângulos, conforme ilustrado na figura a seguir.

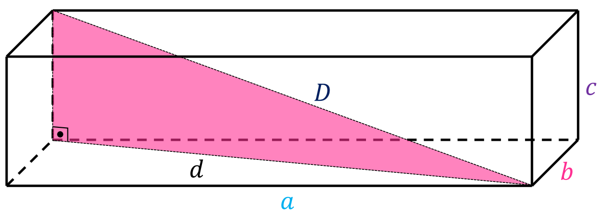


O paralelepípedo retângulo acima, que possui comprimento medindo a, largura medindo b e altura medindo c, possui uma área total que pode ser calculada como a soma das áreas das superfícies. Há 2 faces retangulares de lados a e b, duas faces retangulares de lados a e c e duas faces retangulares de lados b e c:

$$A_T = 2.(a.b+a.c+b.c)$$

Obs.: podemos definir também a área lateral do paralelepípedo retângulo como sendo a soma das áreas das faces laterais. No nosso exemplo acima, a área lateral é calculada como $2.(a.c + b.c)$.

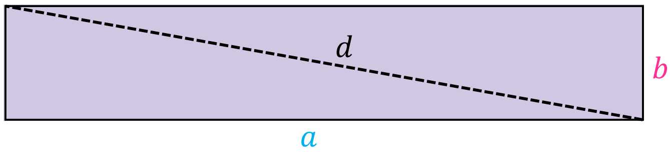
A diagonal D do paralelepípedo é a distância entre um dos vértices superiores até o vértice inferior oposto a ele, como mostrado na figura abaixo:



Observe que esta diagonal D é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos calculá-la através do teorema de Pitágoras:

$$D^2 = d^2 + c^2$$

Onde c é a já conhecida altura do paralelepípedo e d é diagonal do retângulo da base mostrado abaixo:



Este valor d também pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Além disso, define-se o volume do paralelepípedo como o produto de suas dimensões:

$$V = a.b.c$$

EXERCICIO RESOLVIDO

As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética de razão 2. Se sua área total é de 88 cm², descubra o valor da maior aresta.

Primeiramente, sabemos que a área total de um paralelepípedo pode ser calculada pela fórmula abaixo:

$$A_T = 2.(a.b + a.c + b.c)$$

Como as dimensões estão em progressão aritmética de razão 2, se considerarmos a dimensão a como referência, as outras serão $a+2$ e $a+4$. Assim:

$$88 = 2.[a.(a+2) + a.(a+4) + (a+2)(a+4)]$$

$$44 = a^2 + 2a + a^2 + 4a + a^2 + 4a + 2a + 8$$

$$3a^2 + 12a + 8 = 44$$

$$3a^2 + 12a - 36 = 0$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0$$

Utilizando a técnica da soma e produto para resolver essa equação do segundo grau:

$$a_1 + a_2 = -4$$
$$a_1 . a_2 = -12$$

Resolvendo estas equações, chega-se em $a_1=2$ e $a_2= -6$. Como estamos falando de uma dimensão do paralelepípedo, certamente ela não pode ser negativa. Assim, temos $a=2\ cm$.

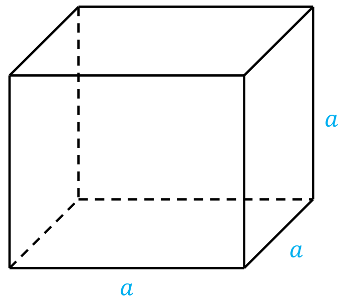
Como as outras arestas estão na progressão aritmética de razão 2, temos $b=4\ cm$ e $c=6\ cm$. Temos então a solução da maior aresta como sendo de comprimento $6\ cm$.

Cubo

Vamos agora falar do outro caso especial de paralelepípedo, chamado de cubo. Definimos ele abaixo:

Definição 2. O cubo é um paralelepípedo que possui as bases e as faces quadradas.

A imagem abaixo mostra um cubo.

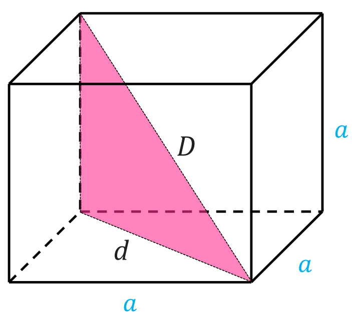


A área total de um cubo é calculada da mesma forma que a de um paralelepípedo retângulo. Este cálculo é simplificado pelo lado de que o cubo é formado por 6 faces quadradas; logo podemos calcular sua área da seguinte forma:

$$A_T=6a^2$$

Obs.: podemos definir também a área lateral do cubo como sendo a soma das áreas das faces laterais. No nosso exemplo acima, a área lateral é calculada como $4a^2$.

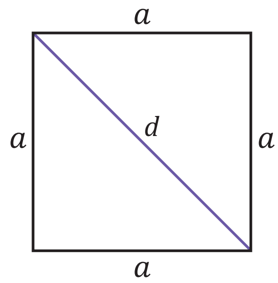
Define-se a diagonal D do cubo também como a distância entre um dos vértices superiores até o vértice inferior oposto a ele, como mostrado abaixo:



Perceba que a diagonal D é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos calculá-la através do teorema de Pitágoras:

$$D^2 = d^2 + a^2$$

Onde a é a aresta do cubo e d é a diagonal do quadrado da base, conforme abaixo:



$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

O que nos leva de volta à diagonal do cubo:

$$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$

$$D^2 = 3a^2$$

$$D = a\sqrt{3}$$

Por fim, de forma bastante similar ao feito no paralelepípedo retângulo, o volume é definido como o produto de suas dimensões:

$$V = a^3$$

EXERCICIO RESOLVIDO

Um cubo possui um volume de 125 cm³. Se quisermos diminuir sua área total para 80 cm², qual vai ser o valor da diferença entre a aresta anterior e a aresta atual do cubo?

Resolução:

Note que o exercício já nos dá o volume anterior do cubo. Com isso, podemos calcular quanto era o valor da sua aresta inicial:

$$a^3 = 125$$

$$a = 5\ cm$$

A sua nova área total será de 80 cm², logo podemos calcular o valor da sua nova aresta:

$$6a'^2 = 80$$

$$a'^2 = 16$$

$$a' = 4\ cm$$

Assim, temos solução que a diferença das arestas será de $5 - 4 = 1\ cm$.

ANOTAÇÕES