# MATEMÁTICA

**FRENTE:** MATEMÁTICA IV

**PROFESSOR(A):** MARCELO MENDES

## EAD – ITA

## AULAS 05 A 07

**ASSUNTO:** PROGRESSÃO ARITMÉTICA

## Resumo Teórico

### Sequência

Sequência ou sucessão é todo conjunto cujos elementos estão dispostos em uma determinada ordem. Assim, nas sequências, diferentemente dos conjuntos, a ordem é um fator relevante.

### Progressão aritmética

Uma progressão aritmética (P.A.) é um tipo especial de sequência em que cada termo é gerado a partir do anterior adicionando-se uma constante chamada razão **r** da P.A. Portanto, são necessários um termo inicial e uma razão para determinarmos a P.A.

Podemos escrever $a_{n+1} = a_n + r$.

### Consequência da definição

(a, b, c) P.A. $\Rightarrow$ 2b = a + c.

### Termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$ ou $a_n = a_m + (n - m)r$

### Soma dos n primeiros termos

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

## Exercícios de Fixação

**01.** (EUA) Os quatro primeiros termos de uma P.A. são **a**, **x**, **b**, 2x. A razão a/b é:
A) 1/4
B) 1/3
C) 1/2
D) 2/3
E) 2

**02.** (ITA) Sabe-se que (x + 2y, 3x – 5y, 8x – 2y, 11x – 7y + 2z) é uma progressão aritmética com o último termo igual a – 127. Então, o produto xyz é igual a:
A) –60
B) –30
C) 0
D) 30
E) 60

**03.** (IME) Determine a relação que deve existir entre os números **m**, **n**, **p**, **q** para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos de uma mesma progressão aritmética não constante: $a_n + a_m = a_p + a_q$.

**04.** Em uma P.A., a soma dos 50 primeiros termos é 200 e a soma dos 50 próximos é 2700. O primeiro termo dessa sequência é:
A) –1221
B) –21,5
C) –20,5
D) 3
E) 3,5

**05.** (ITA) Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é:
A) –96
B) –85
C) 63
D) 99
E) 115

## Exercícios Propostos

**01.** (ITA) Se $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, um polinômio tendo 3 raízes em P.A., então:
A) 2b = a + c
B) $b^2 = ac$
C) $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$
D) $2a^3 + 27c = 9ab$
E) $2a^3 = b^3 + c^3$

**02.** (ITA) Um lado de um triângulo ABC mede $\ell$. Os valores dos ângulos e dos lados do triângulo formam duas progressões aritméticas. A área S desse triângulo é:
A) $\ell^2\left(\sqrt{3} + 1\right)$
B) $\ell^2\left(\sqrt{3} - 1\right)$
C) $\ell^2\sqrt{3}$
D) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
E) NDA

**03.** (IME) A quantidade **k** de números naturais positivos, menores do que 1000, que não são divisíveis por 6 ou 8, que satisfaz a condição:
A) $k < 720$
B) $720 \leq k < 750$
C) $750 \leq k < 780$
D) $780 \leq k < 810$
E) $k \geq 810$

**04.** Dadas duas progressões aritméticas $(2, 5, 8, 11, ..., a_{60})$ e $(3, 5, 7, 9, ..., b_{50})$, qual o número de termos em comum?
A) 13
B) 15
C) 17
D) 19
E) NDA

**05.** Se a soma dos 10 primeiros termos e a soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética são 100 e 10, respectivamente, então a soma dos 110 primeiros termos é:
A) 90
B) –90
C) 110
D) –110
E) –100

**06.** (ITA) Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_{50})$ de razão **d**. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a:
A) 3
B) 6
C) 9
D) 11
E) 14

**07.** (IME) Uma progressão aritmética $(a_n)$, onde $n \in N^*$, tem $a_1 > 0$ e $3a_8 = 5a_{13}$. Se $S_n$ é a soma dos **n** primeiros termos desta progressão, o valor de **n** para que $S_n$ seja máxima é:
A) 10
B) 11
C) 19
D) 20
E) 21

**08.** Se numa P.A. a soma dos **m** primeiros termos é igual à soma dos **n** primeiros termos, $m \neq n$, mostre que a soma dos $m + n$ primeiros termos é igual a zero.

**09.** (ITA) Provar que, se uma P.A. é tal que a soma dos seus **n** primeiros termos é igual a $n + 1$ vezes a metade do n-ésimo termo, então $r = a_1$.

**10.** As somas dos **n** primeiros termos de duas P.A.s estão na razão $\dfrac{7n+1}{4n+27}$. Determine a razão entre seus sétimos termos.

## Exercícios Extras

**01.**
A) Mostre, através de um exemplo, que existem progressões aritméticas não constantes de termos inteiros positivos que não contêm nenhum termo que seja um quadrado perfeito.
B) Mostre que, se uma P.A. de termos inteiros positivos contiver um quadrado perfeito, então ela terá, necessariamente, infinitos quadrados perfeitos.

**02.** As somas dos **n** primeiros termos de 3 progressões aritméticas são $S_1$, $S_2$ e $S_3$. O primeiro termo de cada uma é 1 e as razões são 1, 2 e 3, respectivamente. Mostre que $S_1 + S_3 = 2S_2$.

**03.** Qual dos inteiros positivos abaixo satisfaz à seguinte equação
$$\frac{4}{n^4} + \frac{5}{n^4} + \frac{6}{n^4} + \ldots + \frac{n^4-6}{n^4} + \frac{n^4-5}{n^4} + \frac{n^4-4}{n^4} = 309?$$
A) 2007
B) 309
C) 155
D) 25
E) 5

**04.** Numa P.A., tem-se $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, em que $S_m$ e $S_n$ são as somas dos **m** primeiros termos e dos primeiros **n** termos, respectivamente, com $m \neq n$. Prove que a razão da P.A. é o dobro do primeiro termo.

**05.** (IME) O quadrado de qualquer número par 2n pode ser expresso como a soma de **n** termos, em progressão aritmética. Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

## Anotações

## Gabarito

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO**

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 |
|---|---|---|---|---|
| B | A | – | C | A |

– Demonstração

## Resolução

**01.** P.A.: a, x, b, 2x

- $x = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2x = a + b \Rightarrow \boxed{a = 2x - b}$
- $b = \frac{x+2x}{2} \Rightarrow \boxed{2b = 3x}$

$$\frac{a}{b} = \frac{2x-b}{b} \underset{(\times 2)}{\overset{(\times 2)}{=}} \frac{4x-2b}{2b} = \frac{4x-3x}{3x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

**Resposta: B**

**02.** $\left(x+2y,\ 3x-5y,\ 8x-2y,\ \overbrace{11x-7y+23}^{-127}\right)$ P.A.

(3x – 5y) – (x + 2y) = (8x – 2y) – (3x – 5y) = –127 – (8x – 2y)
2x – 7y = 5x + 3y = –127 –8x + 2y

$$\begin{cases} 2x-7y = 5x+3y \\ 5x+3y = -127-8x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -10y \xrightarrow{\times 13} \\ 13x = -y-127 \xrightarrow{\times 3} \end{cases} \begin{cases} 39x = -130y \\ 39x = -3y-3\cdot 127 \end{cases}$$

$\Rightarrow -130y = -3y - 3\cdot 127 \Rightarrow 127y = 3\cdot 127 \Rightarrow \boxed{y = 3}$
$3x = -10\cdot y \Rightarrow 3\cdot x = -10\cdot 3 \Rightarrow \boxed{x = -10}$
$11x - 7y + 2z = -127 \Rightarrow 11\cdot(-10) - 7\cdot 3 + 2z = -127 \Rightarrow$
$\Rightarrow -110 - 21 + 2z = -127 \Rightarrow \boxed{z = 2}$

x · y · z = (–10) · (3) · (2) = –60

**Resposta: A**

**03.** Seja ak = $a_0$ + k · r, o k-enésimo termo da P.A. de razão **r**.
Então $a_n + a_m = a_p + a_q \Leftrightarrow (a_0 + n \cdot r) + (a_0 + m \cdot r) =$
$= (a_0 + p \cdot r) + (a_0 + q \cdot r) \Leftrightarrow n \cdot r + m \cdot r = p \cdot r + q \cdot r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r\,(n + m) = r(p + q)$.

Como a P.A. é não constante, $r \neq 0$.
Assim, cancelando o **r** em ambos os lados, temos:
$a_n + a_m = a_p + a_q \Leftrightarrow n + m = p + q$

**04.**
$S_{50} = 200$
$S_{100} - S_{50} = 2700$

Seja $a_q$ o primeiro termo da P.A. e **r** a razão da P.A. Temos:

$S_{50} = (a_1 + a_{50})\cdot\frac{50}{2} \Rightarrow$
$S_{50} = (a_1 + a_1 + 49\cdot r)\cdot\frac{50}{2} = (2a_1 + 49r)\cdot 25$
$S_{100} = (a_1 + a_{100})\cdot\frac{100}{2} = (a_1 + a_1 + 99r)\cdot 50 = (2a_1 + 99r)\cdot 50$
$S_{50} = 200 \Rightarrow (2a_1 + 49r)\cdot 25 = 200 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 8 \quad (I)$

$S_{100} - S_{50} = 2700 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2a_1 + 99r)\cdot 50 - (2a_1 + 49r)\cdot 25 = 2700\ (\div 25)$
$\Rightarrow (2a_1 + 99r)\cdot 2 - (2a_1 + 49r) = 108$
$\Rightarrow 4a_1 + 198r - 2a_1 + 49r = 108$
$\Rightarrow 2a_1 + 149r = 108 \quad (II)$

De (I) e (II):
$$\begin{cases} 2a_1 + 49r = 8 \\ 2a_1 + 149r = 108 \end{cases} (-) \Rightarrow 100r = 100 \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

$2a_1 + 49r = 8 \Rightarrow 2a_1 + 49\cdot 1 = 8 \Rightarrow 2a_1 = -41$
$\Rightarrow a_1 = \frac{-41}{2} \Rightarrow \boxed{a_1 = -20{,}5}$

**05.** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. P.A. Seja **r** a razão da P.A.
$S_n = 2n^2 + 5n$

$S_1 = a_1 + 2\cdot 1^2 + 5\cdot 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}$
$S_2 = a_1 + a_2 = 2\cdot 2^2 + 5\cdot 2 \Rightarrow 7 + a_2 = 18 \Rightarrow \boxed{a_2 = 11}$
$r = a_2 - a_1 = 11 - 7 \Rightarrow \boxed{r = 4}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7+2 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix} =$$

$7\cdot 23\cdot 39 + +11\cdot 27\cdot 33 + 15\cdot 19\cdot 35 -$
$-15\cdot 23\cdot 33 - 7\cdot 27\cdot 35 - 11\cdot 19\cdot 39 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7+2 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = -96$$

**Resposta: A**

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | D | C | C | D | D | D | – | – | – |

– Demonstração.

## Resolução

**01.** $P(x) = x^3 + ax^2 + 6x + c$

3 raízes em P.A.: $x - r$, $x$, $x + r$, onde **r** é a razão da P.A.

Por Girard, temos:

$$(x - r) + x + (x + r) = -a \Rightarrow 3x = -a \Rightarrow \boxed{x = \frac{-a}{3}} \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{a^2}{9}}$$

$$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -c \Rightarrow x(x^2 - r^2) = -c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{3}\left(\frac{a^2}{9} - r^2\right) = -c \Rightarrow \left(\frac{a^2}{9} - r^2\right) = \frac{3 \cdot c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{3c}{a} \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{a^3 - 27c}{9a}}$$

$$(x - r) \cdot x \cdot (x - r)(x + r) + (x) \cdot (x + r) = -b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - rx + x^2 - r^2 + x^2 + rx = b \Rightarrow \boxed{3x^2 - r^2 = b}$$

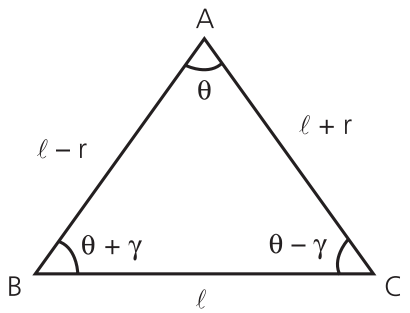
$$3x^2 - r^2 = b \Rightarrow 3 \cdot \frac{a^2}{9} - \left(\frac{a^3 - 27c}{9a}\right) = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3a^3 - a^3 + 27c}{9a} = b \Rightarrow 2a^3 + 27c = 9ab \Rightarrow$$

$$\therefore \boxed{2a^3 + 27c = 9 \cdot a \cdot b}$$

**Resposta: D**

**02.**




Seja $\ell$ a medida do lado BC do triângulo ABC, e seja $r \geq 0$ a razão da P.A. formada pelos medidas dos lados do triângulo. Sejam $(\ell - r)$ a medida do lado AB e $(\ell + r)$ a medida do lado AC.
Veja que $\ell - r \leq \ell \leq \ell + r$.

Seja $\theta$ o ângulo em A. Seja $\gamma$ a razão da P.A. formada pelos ângulos, com $\gamma \geq 0$. Veja que $(\theta + \gamma)$ deve ficar em B (oposto a AC) e $(\theta - \gamma)$ deve ficar em C (oposto a AB).

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\ell - r}{\operatorname{sen}(\theta - \gamma)} = \frac{\ell + r}{\operatorname{sen}(\theta + \gamma)} = \frac{2\ell}{\operatorname{sen}(\theta - \gamma) + \operatorname{sen}(\theta + \gamma)}$$

propriedade de números proporcionais

Assim, temos:

$$\frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\ell}{\operatorname{sen}\theta\cos\gamma - \cancel{\operatorname{sen}\gamma\cos\theta} + \operatorname{sen}\theta\cos\gamma - \cancel{\operatorname{sen}\gamma\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\ell}{2\operatorname{sen}\theta\cos\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta\cos\gamma}}$$

Como $\ell$ é lado de triângulo, então $\ell \neq 0$. Como $\theta$ é ângulo de triângulo, então $0 < \theta < 180° \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \neq 0$. Assim, temos:

$$\cancel{\ell} \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\gamma = \cancel{\ell} \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \boxed{\cos\gamma = 1} \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

Logo, os três ângulos são iguais, ou seja, $\theta = 60° \Rightarrow$ temos um triângulo equilátero de lado $\ell$. Portanto, a área do triângulo é:

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

**Resposta: D**

**03.** Dividiremos a resolução em algumas etapas:

I. Quantidade de números de 1 a 999 divisíveis por 6:

$$\left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{"}\lfloor\ \rfloor\text{" representa a função piso} \\ \lfloor x \rfloor \equiv \text{maior número inteiro menor} \\ \text{ou igual a } \mathbf{x}\end{array}\right)$$

II. Quantidade de números de 1 a 999 divisíveis por 8:

$$\left\lfloor \frac{999}{8} \right\rfloor = 124$$

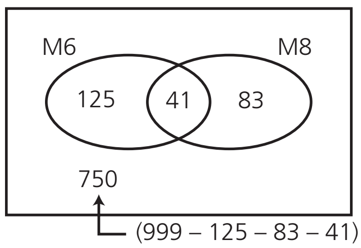
III. Quantidade de números de 1 a 999 divisíveis por 6 e 8: (divisiveis por 24)

$$\left\lfloor \frac{999}{24} \right\rfloor = 41$$

Assim, temos 999 números (1 a 999), dos quais:

- 166 são múltiplos de 6;
- 124 são múltiplos de 8;
- 41 são múltiplos de 6 e 8.

Pondo no diagrama de Venn, temos:




Logo, a quantidade **k** que satisfaz o enunciado é:

$\boxed{k = 750}$

$\Rightarrow 750 \leq k < 780$

**Resposta: C**

**04.**

$(2, 5, 8, 11, ..., a_{60})$ e $(3, 5, 7, 9, ..., b_{50})$

$a_n = 2 + 3(n - 1)$ $\quad b_m = 3 + 2(m - 1)$

$1 \le n \le 60$ $\quad 1 \le m \le 50$

Queremos saber quantos são os termos tais que $a_n = b_m$:

$a_n = b_m \Rightarrow 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3 + (m - 1) \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 3n - 3 = 3 + 2m - 2 \Rightarrow 2m = 3n - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m = \dfrac{3n-2}{2}}$

Veja que **m** $\in \mathbb{N}$, ou seja, $3n - 2$ deve ser par, o que implica **n** par.

$$1 \le m \le 50 \Rightarrow 1 \le \frac{3n-2}{2} \le 50 \Rightarrow 2 \le 3n - 2 \le 100$$

$$\Rightarrow 4 \le 3n \le 102 \Rightarrow \frac{4}{3} \le n \le 34.$$

Assim, **n** pode assumir qualquer número par, tal que $\frac{4}{3} \le n \le 34$.

Possibilidades: $n = 2, 4, 6, 8, ..., 30, 32, 34$ (17 termos).

**Resposta: C**

**05.** P.A. $(a_1, a_2, ..., a_n)$ Seja **r** a razão da P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r; \quad S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

$$S_{10} = 100 \Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2}\right) \cdot 10 = 100 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 9r) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 20 \Rightarrow \boxed{2a_1 = 20 - 9r} \ (1)$$

$$S_{100} = 10 \Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_{100}}{2}\right) \cdot 100 = 10 \Rightarrow a_1 + a_{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 99r) = \frac{1}{5} \Rightarrow 2a_1 + 99r = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{2a_1 = \frac{1}{5} - 99r} \ (2)$$

De (1) e (2):

$$20 - 9r = \frac{1}{5} - 99r \Rightarrow 20 - \frac{1}{5} = -90r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100-1}{5} = -90r \Rightarrow \frac{99}{5} = -90r \Rightarrow \boxed{r = -\frac{11}{50}} \ (3)$$

$$2a_1 = 20 - 9r \Rightarrow 2a_1 = 20 - 9 \cdot \left(\frac{-11}{50}\right) \Rightarrow \boxed{2a_1 = \frac{1099}{50}} \ (4)$$

$$S_{110} = \left(\frac{a_1 + a_{110}}{2}\right) \cdot 110 = (a_1 + a_{110}) \cdot 55 = (a_1 + (a_1 + 109r)) \cdot 55$$

$$S_{110} = (2a_1 + 109r) \cdot 55 \overset{(3) \text{ e } (4)}{\Longrightarrow} S_{110} = \left(\frac{1099}{50} - \frac{109 \cdot 11}{50}\right) \cdot 55$$

$$S_{110} = \left(\frac{-100}{50}\right) \cdot 55 = -2 \cdot 55 \Rightarrow \boxed{S_{110} = -110}$$

**Resposta: D**

**06.** P.A. $(a_1, a_2, ..., a_{50})$; Razão: d

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 10 + 25d$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2}\right) 10 = 10 + 25d \Rightarrow (a_1 + a_{10}) 10 = 20 + 50d \Rightarrow$$

$$[a_1 + (a_1 + 9d)] \cdot 10 = 20 + 50d \Rightarrow 2a_1 + 9d = 2 + 5d \Rightarrow$$

$$2a_1 = 2 - 4d \Rightarrow \boxed{a_1 = 1 - 2d} \ (1)$$

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{50} = 4550 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_{50}}{2}\right) 50 = 4550 \Rightarrow a_1 + a_{50} = 182 \Rightarrow$$

$$a_1 + (a_1 + 49d) = 182 \Rightarrow 2a_1 + 49d = 182 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{182 - 49d}{2}} \ (2)$$

De (1) e (2):

$$1 - 2d = \frac{182 - 49d}{2} \Rightarrow 2 - 4d = 182 - 49d \Rightarrow$$

$$45d = 180 \Rightarrow \boxed{d = 4}$$

De (1):

$$a_1 = 1 - 2d \Rightarrow a_1 = 1 - 2 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = -7}$$

$$d - a_1 = 4 - (-7) = 11$$

**Resposta: D**

**07.** $(a_n) \rightarrow$ P.A. $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 > 0$. Seja **r** a razão da P.A.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$3a_8 = 5a_{13} \Rightarrow 3[a_1 + 7r] = 5 \cdot [a_1 + 12r] \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a_1 + 21r = 5a_1 + 60r \Rightarrow \boxed{2a_1 = -39r} \ (1)$

Como $a_1 > 0$, temos que $r < 0$,

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n = \left(\frac{a_1 + [a_1 + (n-1) \cdot r]}{2}\right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{2a_1 - r + n \cdot r}{2}\right) \cdot n$$

De (1), temos:

$$S_n = \left(\frac{-39r - r + n \cdot r}{2}\right) \cdot n \Rightarrow S_n = \left(\frac{-40r + n \cdot r}{2}\right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{(n - 40) \cdot r \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{r}{2} \cdot r^2 - 20r \cdot n$$

Seja $f(x) = \frac{r}{2} \cdot x^2 - 20 \cdot r \cdot x$. Veja que f(x) representa uma parábola com concavidade voltada para baixo, pos $r < 0$. Assim, para encontramos o valor máximo de f(x), calculemos o **x** do vértice $x_v = \frac{-b}{2a}$. Veja que $b = -20r$ e $a = \frac{r}{2}$. Assim, $x_v = \dfrac{-(-20r)}{2 \cdot \frac{r}{2}} = 20$.

Como $S_n = f(n)$, para $n \in \mathbb{N}$, temos que o valor máximo de $S_n$ é: $(S_n)_{máx} = S_{20}$.
$n = 20$

**Resposta: D**

**08.** P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$; Seja **r** a razão da P.A.

Assim, temos:

$$S_m = S_n \Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_m}{2}\right)\cdot m = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)\cdot n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1 + a_m)\cdot m = (a_1 + a_n)\cdot n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[a_1 + a_1 + (m-1)\cdot r\right]\cdot m = \left[a_1 + a_1 + (n-1)\cdot r\right]\cdot n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a_1\cdot m + (m-1)\cdot m\cdot r = 2a_1\cdot n + (n-1)\cdot n\cdot r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a_1(m-n) + r\left[(m-1)\cdot m - (n-1)\cdot n\right] = 0$$
$$\Rightarrow 2a_1(m-n) + r\left[m^2 - m - n^2 + n\right] = 0$$
$$\Rightarrow 2a_1(m-n) + r\left[(m^2 - n^2) - (m-n)\right] = 0$$
$$\Rightarrow 2a_1(m-n) + r\left[(m-n)(m+n) - (m-n)\right] = 0$$
$$\Rightarrow (m-n)\left[2a_1 + (m+n-1)\cdot r\right] = 0.$$

Veja que $m - n \neq 0$, pois $m \neq n$.

$$\Rightarrow \left[2a_1 + (m+n-1)\cdot r\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{2a_1 + (m+n-1)\cdot r}{2}\right]\cdot(m+n) = 0$$

(Veja que $m + n \neq 0$)

$$\Rightarrow \left\{\frac{a_1 + \left[a_1 + (m+n-1)\right]\cdot r}{2}\right\}\cdot(m+n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_{m+n}}{2}\right)\cdot(m+n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{m+n} = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

**09.** P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$; Seja **r** a razão de P.A.

$$S_n = (n+1)\cdot\frac{a_n}{2} \Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)\cdot n = (n+1)\cdot\frac{a_n}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{a_1\cdot n}{2} + \cancel{\frac{a_n\cdot n}{2}} = \cancel{\frac{n\cdot a_n}{2}} + \frac{a_n}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a_1\cdot n}{2} = \frac{a_n}{2} \Rightarrow n\cdot a_1 = a_n$$
$$\Rightarrow n\cdot a_1 = a_1 + (n-1)\cdot r$$
$$\Rightarrow (n-1)\cdot a_1 = (n-1)\cdot r$$

Como $n > 1$, temos:

$\boxed{a_1 = r}$ c.q.d.

**10.** Sejam as P.A'.s $(a_1, a_2, ..., a_n)$, com razão **r**, e $(b_1, b_2, ..., b_n)$, com razão **q**.
Temos que:

$$\frac{(S_a)_n}{(S_b)_n} = \frac{7n+1}{4n+27}.\ \text{Assim, temos:}$$

$$\frac{\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)\cdot n}{\left(\frac{b_1 + b_n}{2}\right)\cdot n} = \frac{7n+1}{4n+27} \Rightarrow \frac{a_1 + a_n}{b_1 + b_n} = \frac{7n+1}{4n+27} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2b_1 + (n-1)\cdot q} = \frac{7n+1}{4n+27} \Rightarrow \boxed{\frac{(2a_1 - r) + n\cdot r}{(2b_1 - q) + n\cdot q} = \frac{1+7n}{27+4n}}$$

Veja que apenas as razões **r** e **q** dependem de **n**, ou seja:

$$\begin{cases} r = 7 \\ q = 4 \end{cases}$$

Anolagamente, com os termos independentes de **n**, temos:

$$\begin{cases} 2a_1 - r = 1 \Rightarrow 2a_1 - 7 = 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 4} \\ 2b_1 - q = 27 \Rightarrow 2b_1 - 4 = 27 \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{31}{2}} \end{cases}$$

Logo, a razão $\frac{a_7}{b_7}$ é:

$$\frac{a_7}{b_7} = \frac{a_1 + 6\cdot r}{b_7 + 6\cdot q} = \frac{4 + 6\cdot 7}{\frac{31}{2} + 6\cdot 4} = \frac{46}{\frac{79}{2}} = \frac{92}{79} \Rightarrow \boxed{\frac{a_7}{b_7} = \frac{92}{79}}$$

**Anotações**

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: MARCELO MENDES
DIG.: GEORGENES – 04/12/2020 – REV.: SARAH