Mente MATEM4TICA

MATERIAL TEÓRICO

2020

BLOCO 1: ANÁLISE DE DADOS E PROBABILIDADE

BLOCO 2: GEOMETRIA

BLOCO 3: NÚMEROS E OPERAÇÕES

BLOCO 4: FUNÇÕES

PROF. FREDÃO | PROF. LOBO

ÍNDICE

Bloco 1

Análise de Dados e Probabilidade

- Entendendo o Bloco de Análise de Dados e Probabilidade

Os conteúdos do bloco Análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico. Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de balas de determinada cor em uma caixa.

- Estatística

O estudo da estatística viabiliza a aprendizagem da formulação de perguntas que podem ser respondidas com uma coleta de dados, organização e representação. Durante o ensino médio, os alunos devem aprimorar as habilidades adquiridas no ensino fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados. Recomenda-se um trabalho com ênfase na construção e na representação de tabelas e gráficos mais elaborados, analisando sua conveniência e utilizando tecnologias, quando possível. Problemas estatísticos realísticos usualmente começam com uma questão e culminam com uma apresentação de resultados que se apoiam em inferências tomadas em uma população amostral.

Durante o ensino médio, os alunos precisam adquirir entendimento sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas, bem como sobre o processo de investigação. Deve-se possibilitar aos estudantes o entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. Isso inclui entender a relação entre síntese estatística, representação gráfica e dados primitivos. Por exemplo, os estudantes precisam ser capazes de explicar como o ponto médio é influenciado por valores extremos num intervalo de dados, e o que acontece com o ponto médio e a mediana em relação a esses valores.

Vale destacar a necessidade de se intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão), abordadas de forma mais intuitiva no ensino fundamental.

Os alunos devem exercitar a crítica na discussão de resultados de investigações estatísticas ou na avaliação de argumentos probabilísticos que se dizem baseados em alguma informação. A construção de argumentos racionais baseadas em informações e observações, veiculando resultados convincentes, exige o apropriado uso de terminologia estatística e probabilística. É também com a aquisição de conhecimento em estatística que os alunos se capacitam para questionar a validade das interpretações de dados e das representações gráficas, veiculadas em diferentes mídias, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra.

O que dizer, por exemplo, do gráfico abaixo, veiculado na Globo News?

O gráfico foi corrigido dias depois. Conseguem notar as diferenças?

- Combinatória

O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem interrelação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações.

A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Note que não há uma preocupação em descrever os modelos estudados em combinatória, tais como permutações, arranjos e combinações, uma vez que todos esses modelos derivam do que denominamos Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo. Logicamente, conhecer tais modelos e saber associá-los aos problemas propostos é extremamente útil. Mas o fundamental é entender e dominar a ideia central e as variações dos problemas que envolvem o princípio multiplicativo.

- Probabilidade

Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance.

(Problema de Monty Hall) Se você já assistiu aos seriados *NUMB3RS* ou *Brooklyn Nine-Nine*, ou ao filme *Quebrando a Banca*, você provavelmente deve se lembrar de um dos problemas mais contraintuitivos envolvendo probabilidades: o Problema de Monty Hall ou problema das três portas. Não conhece? Então descubra um pouco mais nos links abaixo!

← Vídeo curto do canal Me Salva (cerca de 3 minutos) com a explicação do problema de Monty Hall (em português).

Vídeo mais extenso (e mais completo) a respeito do problema de Monty Hall, do canal D!NG, do mesmo criador do VSauce (em inglês). →

← Quer entender melhor o funcionamento do jogo e brincar por conta própria? Com o QR ao lado você acessará um site em que pode simular o problema de Monty Hall para mais do que três portas!

Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado.

E aí? Conseguiu entender um pouco melhor do que se trata o bloco de análise de dados e probabilidade e o que se espera do estudante? Então, é hora de trabalharmos!

E não se desespere! Especialmente os blocos de combinatória, por conter muitos modelos distintos de problemas de contagem, e o de probabilidade, por ser muitas vezes contraintuitivo, demandarão mais tempo e uma quantidade maior de exercícios resolvidos para que você se sinta confortável com o conteúdo. Então, não desanime caso esteja muito travado no início! Faz parte do processo ;D

========== **AULA 1. Combinatória I** ==========

- 1.1 Uma Breve **Introdução**

Imagine que você tenha sido o primeiro ser vivo do universo. Imagine também que, desde então, você dispõe de um baralho convencional com 52 cartas. Por ser o seu único passatempo, digamos ainda que você seja capaz de, em cada segundo de vida, embaralhar devidamente as 52 cartas, anotando em seguida a sequência de cartas geradas nessa pilha.

Por fim, suponha que você venha fazendo isso há cerca de 13 bilhões de anos. Provavelmente, depois de tanto tempo, todas as possíveis sequências de cartas provavelmente já teriam sido geradas, correto? Meio óbvio, né?

Só que não!

Você, certamente, *não chegou sequer perto de gerar todas as possíveis configurações* de pilhas de cartas! Essa afirmação pode parecer exagerada, absurda, inconsequente! Mas, antes de nos exaltarmos, devemos nos perguntar o seguinte: *quantas são as possíveis sequências de 52 cartas que podemos obter com o embaralhamento*?

Esse é um típico problema de contagem (que estudaremos adiante), um dos objetos de estudo da *Análise Combinatória* (ou apenas, *Combinatória*). Tais problemas são, por vezes, considerados extremamente complicados por alunos e professores, mas, em essência, envolvem as quatro operações básicas – adição, subtração, multiplicação e divisão –, e uma boa dose de raciocínios, por vezes simples.

Porém, os problemas de combinatória vão muito além de apenas contar, com diversas aplicações na álgebra, geometria, teoria de grafos, probabilidades, teoria dos números, ciência da computação, etc. Podemos estar interessados não na contagem, mas sim no estudo da *existência de determinadas configurações* ou na enumeração/descrição de configurações formadas com elementos de um conjunto finito, por exemplo.

Outro problema clássico, extremamente interessante e tão intrigante quanto o das 52 cartas é o problema das quatro cores.

(Problema das Quatro Cores) Dispondo de apenas quatro cores, é sempre possível colorir um mapa plano, dividido em regiões simples e fechadas, de tal forma que cada região tenha apenas uma cor e regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Abaixo, temos um exemplo com o mapa dos Estados Unidos. Note que apenas quatro cores foram utilizadas na pintura: verde, roxo, vermelho e amarelo.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_das_quatro_cores#/media/File:Map_of_USA_with_state_names_pt.svg

Esse problema aparentemente inofensivo foi proposto por Frederick Guthrie, aluno de Augustus De Morgan, para o seu professor, em 1852. 27 anos depois, em 1879, Alfred Bray Kempe propôs uma solução. Porém, em 1890, mais de uma década após a prova de Kempe, Percy Heawood encontra um exemplo de mapa que expõe uma falha na prova de Kempe e o problema continua "aberto". São necessários quase 125 anos desde a apresentação do problema, até que ele seja provado por Wolfgang Haken e Kenneth Appel em 1976... com a ajuda de um computador. Tal prova foi simplificada em 1994, mas segue assim: sendo uma prova baseada em um computador!

Vídeo do excelente canal Numberphile a respeito do Problema das Quatro Cores ou *Four Color Map Theorem* (inglês) →

Talvez seja esse o ponto da combinatória que mais assusta e encanta ao mesmo tempo: a existência de diversos problemas de simples compreensão e de difícil resolução. Mas não se assuste: com a devida paciência e a resolução de vários e vários exercícios, dos mais diversos tipos, eu te garanto que você vai começar a encontrar padrões que antes julgava impossíveis e, quem sabe, começar também a se encantar com a combinatória. Sem mais delongas, vamos ao 1º tópico do nosso estudo em combinatória: o Princípio Fundamental da Contagem.

- 1.2 O **Princípio Fundamental da Contagem**

Assim como em todo o restante do curso, utilizaremos diversos exemplos para que possamos construir a teoria em combinatória e probabilidade. Vejamos um primeiro exemplo, que ilustra o *Princípio Aditivo*.

Exemplo 01. Em fevereiro de 2019, a Netflix disponibilizou quatro novos filmes e dois documentários em sua programação. Sabendo que Enzo só terá tempo de assistir a um filme ou a um documentário, de quantas formas Enzo poderá escolher o que assistirá no primeiro final de semana de fevereiro?

Solução: utilizando a linguagem de conjuntos – algo que será frequente no estudo de combinatória e probabilidade –, observemos a representação do problema de acordo com o Diagrama de Venn abaixo:

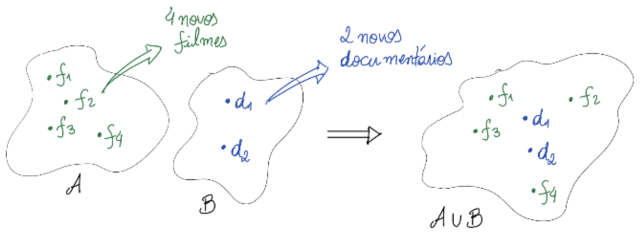


Figura 1

A **Figura 1** acima ilustra um princípio básico de contagem:

(Princípio de Adição) Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos.

Vejamos agora uma pequena alteração com relação ao Exemplo 01.

Exemplo 02. Em fevereiro de 2019, a Netflix disponibilizou quatro novos filmes e dois documentários em sua programação. Sabendo que Enzo só terá tempo de assistir a um filme e a um documentário, de quantas formas Enzo poderá escolher o que assistirá no primeiro final de semana de fevereiro?

Solução: denotando por f_1, f_2, f_3 e f_4 os quatro novos filmes e por d_1 e d_2 os dois novos documentários, é fácil ver que, escolhido o filme f_1, haverá duas opções para o documentário (d_1 e d_2). O mesmo ocorrerá para os filmes f_2, f_3 e f_4. Logo, o número de formas de se escolher um filme e um documentário é dado por $2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8$.

O exemplo acima ilustra o *Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)*, ou *Princípio Multiplicativo*.

(Princípio Fundamental da Contagem) Se uma decisão D_1 pode ser tomada de m maneiras e, uma vez tomada a decisão D_1, uma decisão D_2 pode ser tomada de n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é igual a $m \times n$.

No Exemplo 02, eram necessárias duas decisões:

D_1: escolha do filme.

D_2: escolha do documentário.

Como D_1 pode ser tomada de 4 maneiras e, depois dela, a decisão D_2 pode ser tomada de 2 maneiras, há $4 \times 2 = 8$ maneiras de se tomar as decisões D_1 e D_2.

O Princípio Multiplicativo permite a obtenção do número de elementos do conjunto constituído por todos os pares de filme/documentário possíveis, sem a necessidade de enumeração de seus elementos.

Podemos, por fim, enxergar o problema por meio do surgimento de ramificações, como mostra a **Figura 2**.

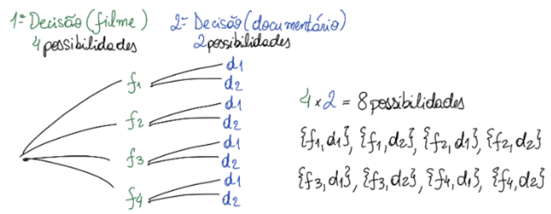


Figura 2

Exemplo 03. O cardápio do restaurante Mosaico conta com quatro opções de prato principal, cinco opções de *drinks* e três opções de sobremesa. De quantas formas um cliente poderá escolher um prato principal, um *drink* e uma sobremesa?

Solução: veja que, agora, é necessário tomar três decisões:

D_1: escolha do prato principal.

D_2: escolha do *drink*.

D_3: escolha da sobremesa.

Usando o Princípio Multiplicativo, teremos $4 \times 5 \times 3 = 60$ maneiras de escolhermos um prato principal, um drink e uma sobremesa, o que pode ser visualizado na **Figura 3**.

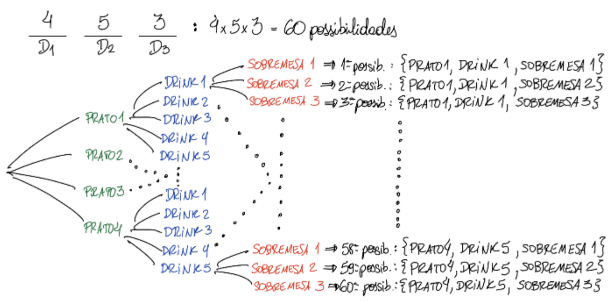


Figura 3

Exemplo 04. Um edifício tem 8 portas. De quantas uma pessoa poderá

a) entrar e sair do edifício por estas portas?

b) entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Solução: na letra a) a pessoa terá 8 maneiras de entrar no edifício e as mesmas 8 maneiras para sair do edifício. Logo, pelo P.F.C., ela disporá de $8 \times 8 = 64$ maneiras de entrar e sair do edifício por estas portas. Já na letra b) são 8 maneiras de entrar no edifício e, independentemente da porta escolhida para entrada, 7 maneiras de escolher a porta pela qual sairá do edifício, totalizando $8 \times 7 = 56$ maneiras.

Nos próximos exemplos, vamos lidar com problemas que podem lidar com o princípio aditivo, multiplicativo ou ambos. Em determinadas situações será impossível resolver o problema “*em uma tacada só*” e precisaremos *abrir* ou *quebrar* o problema em um ou mais casos.

Além disso, vamos nos deparar com situações nas quais há uma ou mais restrições no problema. Sempre que isso ocorrer, veremos que *se há uma decisão a ser tomada que é mais complicada ou restrita do que as demais, ela deverá ser tomada em primeiro lugar*.

Exemplo 05. (UnB Adaptada)

Para ir de um acampamento A para um acampamento B, um escoteiro dispõe de 4 trilhas diferentes, enquanto que para ir de B ao acampamento C existem 6 trilhas distintas (qualquer trajeto de A até C, ou vice-versa, passa necessariamente por B). Com base nisso, julgue os itens.

(1) Se um escoteiro pretende ir de A até C e voltar a A sem utilizar, no percurso de volta, qualquer trecho do trajeto utilizado na ida, então ele dispõe de 360 maneiras distintas de fazer esse percurso.

(2) Admitindo que as trilhas de B a C estejam numeradas de 1 a 6 e que o escoteiro pretenda fazer o percurso de A até C e voltar até B, sem repetir na volta a paridade da trilha de B a C usada na ida, então o número de trajetos é igual a 60.

(3) Em razão de fortes chuvas, uma das trilhas de B a C foi completamente destruída. Admitindo, agora, que as trilhas ainda existentes entre B e C estejam numeradas de 1 a 5 e que o escoteiro pretenda fazer o percurso de A até C e voltar até B, sem repetir na volta a paridade da trilha de B a C usada na ida, então o número de trajetos é igual a 48.

Exemplo 06. (Vestibular UnB 2015)

Considere a seguinte situação hipotética. Um turista, depois de fotografar cada uma das doze estatuas, separou as fotos dos quatro principais profetas do Antigo Testamento das fotos dos outros oito profetas. Com essas doze fotos, ele pretende montar painéis, cuja estrutura e mostrada na ilustração abaixo. Em cada painel, constarão fotos de três profetas diferentes, e a figura central será sempre a de um dos quatro profetas principais.

Com base nessas informações, calcule a quantidade de painéis distintos que o turista poderá montar. Depois de efetuados todos os cálculos solicitados, marque, no **Caderno de Respostas**, o resultado final obtido.

Exemplo 07. (ENEM 2015)

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito *Bateria* tornariam campeã a Escola II?

a) 21

b) 90

c) 750

d) 1 250

e) 3 125

Exemplo 08. (FUVEST 2015)

Um “alfabeto minimalista” é constituído por apenas dois símbolos, representados por * e #. Uma palavra de comprimento n, $n \geq 1$, é formada por n escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, # é uma palavra de comprimento 1 e #**# é uma palavra de comprimento 4. Usando esse alfabeto minimalista,

a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?

b) qual é o menor valor de n para o qual é possível formar 1.000.000 de palavras de tamanho menor ou igual a n?

- 1.3 **Fatorial**

Você provavelmente já deve ter escutado falar em somatórios, correto? Mas e produtórios, você sabe do que se tratam?

Comecemos relembrando a ideia de um somatório, que nada mais é do que um operador matemático que representa a soma de termos de uma sequência.

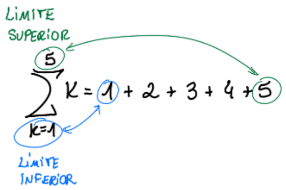


Figura 4

No caso acima, o primeiro e o último termos eram números. Logo, a resposta seria também numérica (e igual a 15). Porém, podemos estar interessados em um somatório cuja resposta será literal.

E é esse o caso do somatório abaixo, que gera uma igualdade que pode ser demonstrada por meio da soma de termos de uma progressão aritmética, por construção geométrica ou até mesmo por indução matemática (ferramenta muito utilizada para demonstrações mais formais/avançadas).

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(1+n) \times n}{2}.$$

Outro somatório que tem como resultado uma igualdade conhecida é o somatório dos n primeiros quadrados perfeitos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}.$$

Por fim, como você representaria por meio de somatório a soma dos 10 primeiros múltiplos de 7: $7 + 14 + 21 + \cdots + 70$?

A resposta: $\sum_{k=1}^{10} 7k$.

Um produtório segue a mesma lógica de um somatório. Porém, ao invés de somarmos os termos da sequência, nós multiplicamos! Logo, temos que $\prod_{k=1}^{5} k = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

De maneira geral: $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n$,

o que podemos reescrever como

$$\prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!.$$

Assim, denominamos $n!$ como n fatorial (ou fatorial de n), que nada mais é do que o produto dos n primeiros naturais.

Vejamos abaixo alguns exemplos dos primeiros fatoriais:

$0! = 1 \Rightarrow$ Convenção!

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 x 6 = 24$

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

$6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$

$7! = 7 \times 6! = 7 \times 720 = 5040$

(Curiosidade: Superfactorial) Em 1995, Neil Sloane e Simon Plouffe definiram o *superfactorial* como o produto dos n primeiros fatoriais: $sf(n) = \prod_{k=1}^{n} k!$. Dessa forma, temos

$sf(1) = 1! = 1$,

$sf(2) = 1! \times 2! = 2$,

$sf(3) = 1! \times 2! \times 3! = 12$,

$sf(4) = 1! \times 2! \times 3! \times 4! = 288$,

$sf(5) = 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! = 34560$

e assim por diante. Qual a utilidade disso? Sinceramente, não sei! Mas achei interessante e resolvi compartilhar =D.

Voltando à ideia do fatorial, note que $n!$ pode ser reescrito como $n\times(n-1)!$ ou, caso necessário, como $n\times(n-1)\times(n-2)!$. Vejamos a utilidade desse tipo de "expansão" dos fatoriais.

Exemplo 09. Calcule o valor de

a) $\dfrac{2017!}{2015!}$. **b)** $\dfrac{10!}{5!\times 5!}$.

Soluções:

a) note que $\dfrac{2017!}{2015!}$ pode ser reescrita como

$$\frac{2017\times 2016\times \underbrace{2015\times 2014\times\cdots\times 2\times 1}_{2015!}}{2015!}$$

Logo, $\dfrac{2017!}{2015!}=\dfrac{2017\times 2016\times 2015!}{2015!}=2017\times 2016$.

b) note que $\dfrac{10!}{5!\times 5!}$ pode ser reescrita como

$$\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times \underbrace{5\times 4\times 3\times 2\times 1}_{5!}}{\underbrace{5\times 4\times 3\times 2\times 1}_{5!}\times\underbrace{5\times 4\times 3\times 2\times 1}_{5!}}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=252$$

Exemplo 10. Com quantos zeros termina o número $30!$? E o número $2020!$?

========== AULA 2. Combinatória II ==========

Vamos começar a aula retomando uma pergunta feita na AULA 1: *quantas são as possíveis sequências de 52 cartas que podemos obter com o embaralhamento de 52 cartas distintas de um baralho convencional*?

Solução: note que há *52 opções* para a carta do topo da pilha, *51 opções* para a segunda carta, *50 opções* para a terceira carta e assim sucessivamente, até a 52ª carta, com apenas *1 opção*. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $52\times51\times50\times\cdots\times3\times2\times1=52!$ formas distintas de se formar uma pilha de 52 cartas.

← Você consegue imaginar o quão grande é o fatorial de 52? Não? Te garanto que você vai se impressionar ao assistir ao vídeo ao lado!

- ### 2.1 **Permutações**

O exemplo das 52 cartas ilustra o primeiro tipo de contagem que enunciaremos: o da permutação simples.

> **(Permutação Simples)** A quantidade de maneiras de ordenarmos n objetos distintos é dada por $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$. Cada forma de ordenação é denominada uma *permutação simples de* n *objetos*. Logo, a quantidade de permutações simples, representada por P_n, é dada por $P_n=n!$.

Assim, poderíamos ter, desde o início, caracterizado o problema como uma permutação simples e teríamos

$$P_{52}=52!=80658175170943878571660636856403766\\975289505440883277824000000000000.$$

Observação*: lembra-se do Exemplo 10 da AULA 1? De acordo com a lógica estabelecida nesse exemplo, o número* $52!$ *deveria ter 12 zeros no final, que é exatamente o que ocorreu =D*

Exemplo 01. (IMPA)

Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO

a) possíveis?

b) que começam e terminam por vogal?

c) que têm as letras C, A e P juntas, nessa ordem?

d) que têm as letras C, A e P juntas, em qualquer ordem?

e) que têm as letras C e A separadas por pelo menos uma letra?

Exemplo 02. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números formados em ordem crescente. Determine:

a) que lugar ocupa o número 62417.

b) a soma de todos os números formados.

- ### 2.2 **Arranjos** e **Combinações**

No Exemplo 01 vimos que a quantidade de anagramas da palavra CAPÍTULO é igual a $8!=40320$, o que corresponde a um problema de permutação simples de 8 objetos (as 8 letras distintas da palavra).

Vejamos agora uma pequena variação desse problema.

Exemplo 03. Utilizando as letras da palavra CAPÍTULO apenas uma vez, quantas palavras

a) de 6 letras poderíamos formar?

b) de 3 letras poderíamos formar?

c) de k letras poderíamos formar?

O tipo de problema acima é definido em alguns materiais e por alguns professores como um problema de *arranjo*. De certa forma, é um tipo de contagem que envolve a permutação simples de n objetos disponíveis em uma quantidade reduzida de espaços, que denominaremos k. Assim, podemos enunciar o arranjo de n objetos tomados k a k.

> **(Arranjo)** A quantidade de maneiras de ordenarmos n objetos distintos em k espaços $(k\le n)$ é dada por
>
> $$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)\times(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$
>
> Cada forma de ordenação é denominada um arranjo de n objetos, tomados k a k. Logo, a quantidade de arranjos, representada por $A_{n,k}$, é dada por $A_{n,k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Observação 1*: quando* $n=k$ *temos um problema de permutação simples. Em alguns materiais, inclusive, problemas de arranjo são sequer definidos. No livro do Morgado, por exemplo, não há qualquer menção a problemas de arranjo. No portal Khan Academy, esse tipo de problema de contagem é tratado como uma permutação de* n *objetos, tomados* k *a* k*. Porém, há um costume no Brasil de utilizar a nomenclatura arranjo, termo que já foi inclusive cobrado no ENEM 2009.*

Observação 2: *em geral, diz-se que em um problema de arranjo a ordem importa. Isto é: escolher um objeto A na primeira decisão do problema e um objeto B na segunda decisão, por exemplo, é uma situação distinta de escolher um objeto B na primeira decisão e um objeto A na segunda decisão. É isso, inclusive, que em certas situações difere problemas de arranjo dos de combinação, que veremos adiante.*

Observação 3: *problemas de arranjo podem ser resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), sem que sequer percebamos que estamos lidando com um problema de arranjo. Talvez, por esse motivo, alguns autores simplesmente desconsiderem a definição de problemas de arranjo.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 04. Em uma turma de 30 alunos, de quantas maneiras podemos escolher três alunos, sendo que um deles representará a turma na OBM, outro na OBF e outro na OBQ?

Solução: comecemos escolhendo o aluno que representará a turma na OBM. Essa primeira decisão pode ser tomada de $30\ maneiras$. Em seguida, escolhemos o aluno que representará a turma na OBF, o que pode ser feito de $29\ maneiras$, uma vez que o mesmo aluno da OBM não poderá ser escolhido novamente. Por fim, temos $28\ maneiras$ de escolher o aluno que representará a turma na OBQ. Logo, temos um total de $30 \times 29 \times 28 = 24360\ maneiras$ de escolhermos os três alunos para as três olimpíadas citadas.

Note que esse problema também pode ser caracterizado como um problema de arranjo de 30 elementos, tomados 3 a 3, donde temos $A_{30,3} = \dfrac{30!}{(30-3)!} = \dfrac{30!}{27!} = 30 \times 29 \times 28 = 24360$.

Exemplo 05. Considerando as 32 seleções participantes da Copa do Mundo da Rússia em 2018, de quantas maneiras distintas poderia ter sido composto o pódio (1º colocado, 2º colocado e 3º colocado) ao final do torneio?

Note que os dois exemplos anteriores poderiam ter sido facilmente colocados no contexto do P.F.C., na nossa primeira aula, que ainda assim seriam resolvidos com tranquilidade, mesmo sem o conhecimento de arranjo.

Vejamos agora dois problemas que se parecem muito com os anteriores, mas que tem resultados bem diferentes.

Exemplo 06. Em uma turma de 30 alunos, de quantas maneiras podemos escolher três alunos que representarão a turma na OBM?

Solução: sejam A, B, C, D, E, F, ... os 30 alunos da turma e tomemos um subconjunto com seis soluções distintas do Exemplo 04: $\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$. Note que, agora, todas elas representam o mesmo grupo, uma vez que os três alunos representarão a turma na OBM, sem qualquer diferença entre quem foi escolhido em primeiro ou último lugar. O mesmo vale para vários outros subconjuntos, tais como o subconjunto $\{DEF, DFE, EDF, EFD, FDE, FED\}$ ou o subconjunto $\{ABE, AEB, BAE, BEA, EAB, EBA\}$, por exemplo. Logo, temos que dividir o nosso resultado por 6 (permutação dos três elementos escolhidos) e temos como resultado

$$\frac{30 \times 29 \times 28}{3!} = \frac{24360}{6} = 4060\ maneiras.$$

Exemplo 07. Considerando as 32 seleções que participarão da Copa do Mundo do Qatar em 2022, de quantas maneiras distintas podem ser dados palpites a respeito das três primeiras colocadas, sem distinção entre 1º, 2º e 3º colocados?

Podemos generalizar a ideia utilizada para resolver os Exemplos 06 e 07 de duas maneiras análogas:

i. De quantos modos podemos escolher k objetos distintos dentre n objetos distintos dados?
ii. Quantos são os subconjuntos com k elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Problemas de contagem como esses são conhecidos como combinações de n objetos tomados k a k e podem ser definidos da maneira abaixo.

(Combinação) A quantidade de maneiras de escolhermos k objetos distintos entre n objetos distintos é dada por

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+2) \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Cada subconjunto assim formado é denominado uma combinação de n objetos tomados k a k. Logo, a quantidade de combinações, representada por $C_{n,k}$ ou $\binom{n}{k}$ é dada por $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

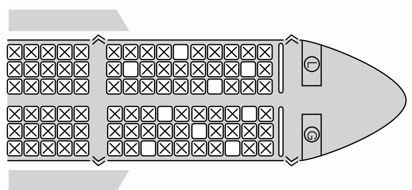
Observação: *de certa forma, as combinações podem ser encaradas como problemas de arranjo nos quais a ordem das escolhas não importa. Isto é, permutar os objetos escolhidos ou a ordem em que eles são escolhidos não altera a configuração do problema. Porém, ficar preso a essa ideia de "ordem importa" e "ordem não importa" para distinguir problemas de arranjo dos de combinação pode trazer problemas em algumas situações e acabar limitando o entendimento desses dois tipos de problema. Dessa forma, sempre que possível, evitaremos seguir essa linha de raciocínio.*

Exemplo 08 (UFMG)

A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

Exemplo 09 (ENEM 2015)

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculada por

a) $\dfrac{9!}{2!}$

b) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$

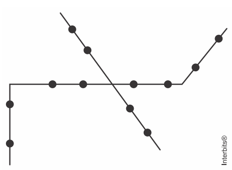
c) $7!$

d) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$

Exemplo 10 (FUVEST 2018)**.**

Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é

a) 200. b) 204. c) 208. d) 212. e) 220.

Exemplo 11. Quantos são os anagramas da palavra URUGUAI? E da palavra MISSISSIPPI?

Solução: Como temos *três* letrais iguais (letra U) e *sete* espaços para permutar as letras, poderíamos começar o problema escolhendo em quais das sete posições deveríamos posicionar as três letras, o que pode ser feito de $C_{7,3}$ formas. Assim, estaremos livres para permutar as demais letras – todas distintas – nos quatro espaços restantes, o que poderá ser feito de $P_4 = 4!$ maneiras.

Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $\dfrac{7!}{3! \times 4!} \times 4! = \dfrac{7!}{3!}$ anagramas possíveis para a palavra URUGUAI. De maneira análoga, poderíamos obter a quantidade de anagramas da palavra MISSISSIPPI da seguinte forma:

$$\underbrace{C_{11,4}}_{\text{letras S}} \times \underbrace{C_{7,4}}_{\text{letras I}} \times \underbrace{C_{3,2}}_{\text{letras P}} \times \underbrace{C_{1,1}}_{\text{letra M}}$$
$$= \frac{11!}{4!7!} \times \frac{7!}{4!3!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{1!}{1!0!} = \frac{11!}{4! \times 4! \times 2! \times 1!}.$$

O que veremos agora, é uma maneira alternativa de pensarmos nesse tipo de problema.

- 2.3 Permutação **com Repetição**

Exemplo 12. Quantos são os anagramas da palavra BOLA? E das palavras BALA, URUGUAI e AVADAKEDAVRA?

Solução: a palavra BOLA possui $P_4 = 4! = 24$ anagramas. São eles:

AOBL	ABOL	ABLO	AOLB	ALOB	ALBO
OABL	OBAL	OBLA	OALB	OLAB	OLBA
BAOL	BALO	BLAO	LAOB	LABO	LBAO
BOAL	BOLA	BLOA	LOAB	LOBA	LBOA

Na palavra BALA, basta trocar todas as letras O por letras A.

AABL	ABAL	ABLA	AALB	ALAB	ALBA
~~AABL~~	~~ABAL~~	~~ABLA~~	~~AALB~~	~~ALAB~~	~~ALBA~~
BAAL	BALA	BLAA	LAAB	LABA	LBAA
~~BAAL~~	~~BALA~~	~~BLAA~~	~~LAAB~~	~~LABA~~	~~LBAA~~

Para a palavra BALA não podemos apenas fazer P_4, pois haveria uma contagem excessiva. Para desconsiderar essa contagem excessiva, devemos dividir P_4 pelas permutações entre as duas letras A's iguais (que geram um mesmo anagrama), isto é, $\dfrac{P_4}{P_2} = \dfrac{4!}{2!} = 12$. Assim, a palavra BALA possui 12 anagramas (mostradas de verde).

Assim, podemos definir esse tipo de permutações, nas quais nem todos os elementos são distintos, da maneira abaixo.

(Permutação com Repetição) A quantidade de maneiras de ordenarmos n objetos, nem todos distintos, dentre os quais há n_1 objetos do "tipo 1" (que compartilham determinada característica), n_2 objetos do "tipo 2", e assim sucessivamente, é

$$PR_n^{n_1,n_2,n_3,\cdots} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots}.$$

Cada forma de ordenação é denominada uma *permutação com repetição* dos n objetos.

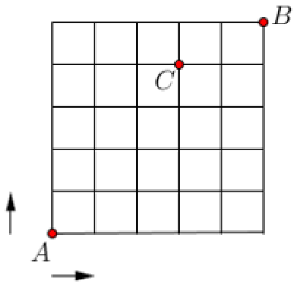
Logo, para a palavra URUGUAI teremos

$$\frac{7!}{\underset{\text{letras U}}{3!}} = 840,$$

enquanto para a palavra AVADAKEDAVRA teremos

$$\frac{12!}{\underset{\text{letras A}}{5!} \times \underset{\text{letras V}}{2!} \times \underset{\text{letras D}}{2!}} = 1.088.640.$$

Exemplo 13. No quadriculado abaixo, que representa o mapa de uma cidade na qual há 6 avenidas na direção norte–sul e outras 6 avenidas na direção leste–oeste, encontram as casas de Valentina (ponto A), Enzo (ponto C) e a escola onde ambos estudam (ponto C).



Calcule a quantidade de trajetos de comprimento mínimo que Valentina pode fazer para ir à escola passando pela casa de Enzo.

Exemplo 14. De quantas formas podemos organizar uma fila com 10 mulheres e 5 homens de tal forma que as mulheres estejam em ordem crescente de altura e os homens em ordem descrescente de altura?

Exemplo 15. Quantos são os anagramas da palavra DESAFIO nos quais

a) a letra D aparece antes da letra E.

b) as vogais aparecem em ordem alfabética.

========== **AULA 3. Probabilidade** ==========

- 3.1 O **Conceito** de Probabilidade

Probabilidade é um número real que exprime o quão provável é a chance de ocorrer um particular resultado de um *experimento aleatório*. Em sua essência, a probabilidade é uma *medida de incerteza*.

Alguns dos exemplos mais comuns de experimentos aleatórios estão relacionados a jogos, como é o caso do lançamento de dados ou da seleção de cartas de um baralho.

O estudo de probabilidades, entretanto, vai muito além dos jogos e pode ser utilizado em situações muito mais complexas, como é o caso da **Teoria das Filas**. Tal teoria busca calcular a quantidade de recursos e a maneira de disponibilizá-los para que uma fila de solicitação de serviços seja atendida, com *investimento mínimo de recursos* e *tempo mínimo de espera* por parte dos clientes da fila. Exemplos:

- Determinar o número de caixas num supermercado ou em um banco, por faixa de horários;
- Determinar o número de pistas num aeroporto;
- Determinar a quantidade de equipamentos telefônicos necessários para atender uma área geográfica.

Para começarmos o estudo de probabilidades, vejamos duas definições fundamentais: espaço *amostral* e *evento*.

- 3.2 **Espaço Amostral** e **Evento**

O primeiro passo em problemas mais simples de probabilidade consiste em explicitar qual é o *conjunto de possíveis resultados do experimento aleatório* e calcular o número de elementos contidos nele. Este conjunto é chamado de **Espaço Amostral** e é representado por Ω. Em um lançamento de um dado convencional, por exemplo, temos $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Os elementos do espaço amostral são denominados *eventos elementares*. Por sua vez, os subconjuntos do espaço amostral são chamados **eventos**. O subconjunto $A=\{2,3,5\}$ é o evento que acontece caso o resultado do lançamento do dado seja um número primo. Intuitivamente, temos a primeira *noção do que seria a probabilidade de ocorrência do evento A*: ao repetirmos o experimento diversas (muitas) vezes, em aproximadamente a metade dos casos ocorrerá um número primo.

- 3.3 Probabilidade de **Laplace**

A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, a qual é, portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.

Pierre Simon Laplace
Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades

Suponha que os experimentos aleatórios têm as seguintes características:

- Há um número finito (n) de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral Ω.
- Os eventos elementares são equiprováveis.
- Todo evento A é uma união de m eventos elementares, onde $m \le n$.

Define-se então a probabilidade de ocorrência do evento A como $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \dfrac{m}{n}$.

Seguem algumas consequências da definição e propriedades de probabilidade:

- Para todo evento A, $0 \le P(A) \le 1$;
- $P(\Omega)=1$;
- $P(\varnothing)=0$;
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$;
- $P(A^C)=1-P(A)$.

Exemplo 01. Um barulho tradicional é composto por 52 cartas divididas igualmente em 4 naipes (ouros, copas, espadas e paus). Cada um dos naipes possui o conjunto de cartas igual a $\{A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K\}$.

Escolhendo uma carta ao acaso, determine a probabilidade de retirar

a) o 4 de ouros.

b) carta de copas.

c) figura (J, Q ou K).

Exemplo 02. Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter exatamente 2 caras?

Solução: indicando "cara" com a letra K e "coroa" com a letra C, podemos descrever o espaço amostral Ω como o conjunto

$\{(KKK),(KKC),(KCK),(CKK),(KCC),(CKC),(CCK),(CCC),\}$

Logo, $n(\Omega)=8$. Note que, desses oito casos possíveis, apenas três satisfazem ao nosso evento

$$A=\{obter\ 2\ caras\}=\{(KKC),(KCK),(CKK)\}$$

Assim, $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$.

- 3.4 **Espaço** de **Probabilidades**

Até o momento, utilizamos apenas a probabilidade de Laplace para a resolução dos nossos exemplos. Porém, são vários os problemas nos quais o nosso espaço amostral não é equiprovável.

Em geral, sejam Ω um conjunto com n elementos,

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n\}$$

e $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ n números não negativos e tais que

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1\ .$$

Definamos $P(\{\omega_1\})=p_i$, $i=1,2,3,\ldots,n$ e, em geral, para $A\subset\Omega$, $P(A)=soma\ dos\ P(\{\omega_1\})=soma\ dos\ p_i$, com $\omega_i\in A$ (ou seja, $P(A)$ é a soma das probabilidades associadas aos elementos pertencentes a A).

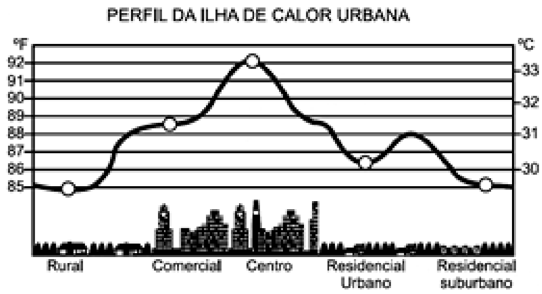
A função P assim obtida é uma probabilidade sobre Ω. Em geral ela é diferente da probabilidade de Laplace. Porém, se $p_1=p_2=p_3=\ldots=p_n=\dfrac{1}{n}$ obtemos a probabilidade de Laplace como caso particular.

Assim, um fenômeno aleatório é representado matematicamente por um par de objetos: o *espaço amostral* Ω e uma *probabilidade* P definida sobre Ω. O par (Ω,P) é chamado **Espaço de Probabilidades**. (*Uma leitura mais detalhada pode ser encontrada a partir da página 118 do livro do Morgado*).

Parece complicado, né? Mas vejamos um exemplo para percebermos que é bem mais simples do que parece!

Exemplo 03. Um dado é viciado de modo que a probabilidade de observarmos qualquer número par é a mesma, e a de observarmos qualquer número ímpar é também a mesma. Porém, a probabilidade de ocorrer um número par é três vezes a probabilidade de ocorrer um número ímpar. Lançando-se esse dado, qual é a probabilidade de ocorrer um número primo?

Exemplo 04 (ENEM 2011)**.** Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31ºC. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{2}{5}$. d) $\frac{3}{5}$. e) $\frac{3}{4}$.

Solução: apenas 3 das 5 regiões apresentam temperaturas inferiores a 31ºC. Logo, boa parte dos alunos tende a dar como resposta a letra **d)**. Porém, contudo, todavia, entretanto, alguns problemas de probabilidade trazem uma *informação adicional* que deve ser levada em consideração e que *altera o conjunto de possíveis resultados do experimento*.

É o que acontece no Exemplo 04. Note que, ao dizer "*...Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar...*", o Centro deixa de ser uma possibilidade, reduzindo o espaço amostral de 5 para 4 regiões. Logo, a alternativa correta é a letra **e)**.

- 3.5 Probabilidade **Condicional**

O Exemplo 04 utiliza a ideia da probabilidade condicional, enunciada abaixo.

(Probabilidade Condicional) Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de ocorrência do evento B, sabendo-se que o evento A ocorreu (também enunciado como *probabilidade condicional de B dado A*) é denotada $P(B/A)$ e calculada como

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ .$$

Note que esta probabilidade só está definida quando $P(A)>0$ e pode ser reescrita como

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\ .$$

Exemplo 05. Considerando o lançamento de um dado convencional honesto, calcule

a) a probabilidade de sair um número primo.

b) a probabilidade de ter saído um número primo sabendo que o resultado do lançamento foi um número par.

Exemplo 06 (ENEM 2013)**.** Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{5}{14}$

Exemplo 07 (UnB)**.** Uma pesquisa publicada pela revista Veja de 07.06.2006 sobre os hábitos alimentares dos brasileiros mostrou que, no almoço, aproximadamente 70% dos brasileiros comem carne bovina e que, no jantar, esse índice cai para 50%. Supondo que a probabilidade condicional de uma pessoa comer carne bovina no jantar, dado que ela comeu carne bovina no almoço, seja $\frac{6}{10}$, determine a probabilidade de a pessoa comer carne bovina no almoço ou no jantar.

Observação: veremos adiante que um dispositivo chamado *árvore de possibilidades* poderia ter sido utilizado.

- 3.6 **Produto** de Probabilidades

Caso seja necessário calcular a probabilidade de ocorrência da interseção de n eventos, estendemos a expressão $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ seguindo o Teorema do Produto.

(Teorema do Produto) Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdots \cdots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})).$$

Exemplo 08. Três cartas são retiradas ao acaso de um baralho convencional, sucessivamente e sem reposição. Calcule a probabilidade de que sejam retiradas(os)

a) três ases (A).

b) um rei (K), uma dama (Q) e um valete (J).

Solução:

a) Seja $A_i = \{\text{retirada de um A na } i\text{-ésima retirada}\}$. Logo, queremos calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}.$$

b) Sejam $K = \{\text{retirada de um rei}\}$, $Q = \{\text{retirada de uma dama}\}$ e $J = \{\text{retirada de um valete}\}$, queremos calcular $P(K \cap Q \cap J)$

$$P(K \cap Q \cap J) = \frac{12}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{16}{5525}.$$

Exemplo 09 (UFU 2013)**.** A maioria dos sistemas informatizados é protegida por senhas, sendo usual o sistema bloquear o acesso quando ocorrem três tentativas de acesso, com fornecimento de senha incorreta. Pedro esqueceu a senha do computador que usa na casa de sua avó, chamada JOAQUINA. Porém, lembra-se que a senha é um anagrama do nome de sua avó, começando com A.

Supondo que Pedro faça as suas tentativas, fornecendo anagramas distintos que começam com A, a probabilidade de Pedro ter acesso ao computador com 1, 2 ou 3 tentativas, sem que o sistema bloqueie seu acesso, é igual a

a) $\frac{1}{7!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{7!}$

b) $\frac{1}{7!} + \frac{1}{7!-1} + \frac{1}{7!-2}$

c) $\frac{1}{7!} \times \frac{1}{6!} \times \frac{1}{5!}$

d) $\frac{1}{7!} \times \frac{1}{7!} \times \frac{1}{7!}$

Observação: caso os eventos sejam independentes, teremos um produto de probabilidades da forma:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \underset{A_i\text{'s independentes}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n).$$

Exemplo 10 (ENEM 2015)**.** Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

a) 23,7% b) 30,0% c) 44,1%

d) 65,7% e) 90,0%

Exemplo 11 (ENEM 2017). Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075

b) 0,150

c) 0,325

d) 0,600

e) 0,800

Solução: Para a resolução desse item, utilizaremos o Teorema do Produto e construiremos um dispositivo chamado de árvore de possibilidades. Nessa árvore estarão todos os eventos de interesse e as suas respectivas probabilidades.

Analisemos agora cada uma das possibilidades:

- É de 30% a possibilidade de chover;
  - Como há 50% de possibilidade de chegar atrasado caso chova, calcularemos a probabilidade de se chegar atrasado caso chova como $0,3 \cdot 0,5 = 0,15 = 15\%$.
  - Da mesma forma, calcularemos a probabilidade de não chegar atrasado caso chova como os 50% restantes multiplicado pelos 30%. Portanto, $0,3 \cdot 0,5 = 0,15 = 15\%$.
- É de 70% a probabilidade de não chover;
  - Como há 25% de probabilidade de atraso caso não chova, calcularemos a probabilidade de atraso caso não chova como $0,7 \cdot 0,25 = 0,175 = 17,5\%$.
  - Caso não chova, os 75% restantes de probabilidade são para o não-atraso. Logo, o cálculo se dá pela multiplicação $0,7 \cdot 0,75 = 0,525 = 52,5\%$.

Portanto, a probabilidade de se chegar atrasado se dará pela soma entre as probabilidades de atraso caso chova e caso não chova: $0,15 + 0,175 = 0,325 = 32,5\%$.

Exemplo 12 (ENEM 2017 – Adaptado). Um morador de uma região metropolitana, conhecido como Ocidererf, tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Um colega de trabalho, conhecedor das probabilidades envolvidas, e sem saber se estava chovendo ou não, nota que Ocirederf chegou atrasado. Calcule a probabilidade de que esteja chovendo na região.

Solução: Nesse caso, sabemos que Ocidererf chegou atrasado. Logo, nosso universo total de possibilidades são aquelas em que há atraso, ou seja, a soma 0,15 + 0,175 = 0,325 apresentada na questão anterior.

Como buscamos a probabilidade p de que esteja chovendo, sabendo que Ocirederf chegou atrasado, devemos fazer

$$p = \frac{0,15}{0,15 + 0,175} = \frac{0,15}{0,325} \cong 46,15\% .$$

- 3.7 Probabilidade **Total** e Teorema de **Bayes**

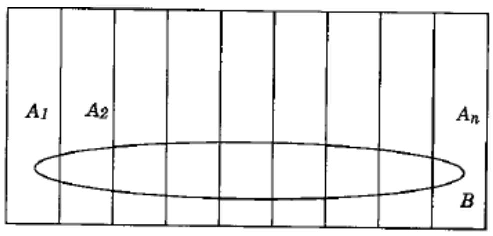
O Exemplo 11 utiliza a ideia da probabilidade total, enunciada abaixo.

> **(Probabilidade Total)** Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \cdots, P(A_n) > 0$, então
>
> $$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B / A_n) .$$

Por sua vez, o Exemplo 12 utiliza a ideia do teorema de Bayes, enunciado abaixo.

> **(Teorema de Bayes)** Ainda nas condições da proposição acima, se $P(B) > 0$, então, para i , $i = 1, 2, \ldots, n$,
>
> $$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)} .$$

A figura abaixo ajuda a ilustrar tanto a Probabilidade Total quanto o Teorema de Bayes.



Vejamos outros exemplos que utilizam as ideias citadas.

Exemplo 13 (Escola Naval 2017). Um exame de laboratório tem eficiência de 90% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso positivo" (o resultado indica doença, mas ela não existe) para 1% das pessoas sadias testadas. Se $1{,}5\%$ da população tem a doenças, qual a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que seu exame foi positivo?

a) $\dfrac{95}{294}$ b) $\dfrac{160}{433}$ c) $\dfrac{270}{467}$

d) $\dfrac{75}{204}$ e) $\dfrac{73}{255}$

Exemplo 14 (ENEM 2013). Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu 54/100 do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, 25/1000 eram defeituosos. Por sua vez, 38/1000 dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \le P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \le P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \le P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \le P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \le P \le 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

a) excelente.

b) bom.

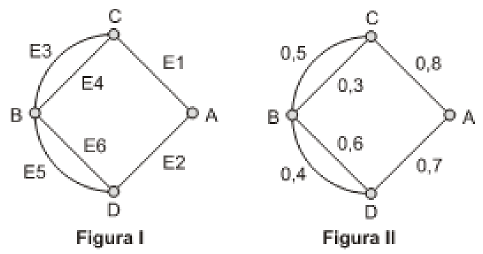
c) regular.

d) ruim.

e) péssimo.

Exemplo 15 (ENEM 2010). A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada,

Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.

O melhor trajeto para Paula é

a) E1E3.

b) E1E4.

c) E2E4.

d) E2E5.

e) E2E6.

========== **AULA 4. Estatística** ==========

- 4.1 Uma Breve **Introdução**

Situação Problema: *você é o diretor de um grande colégio e precisa tomar uma decisão: abrir ou não uma terceira turma de primeiro ano do ensino médio. Até o momento há 60 matriculados, que podem ser separados em duas turmas de 30. Cada turma pode ir a até 35 alunos e ainda há margem para algumas matrículas. Abrir uma nova turma é positivo para a equipe pois, além de gerar confiança no crescimento do colégio, também aumenta a carga horária e o salário dos professores. Por outro lado, do ponto de vista empresarial e financeiro, uma nova turma só começa a dar lucro se tiver mais de 20 alunos. Assim, ao abrir uma nova turma, caso não haja mais matrículas, você estaria abrindo mão do lucro por um período de um ano, correndo ainda o risco de ter prejuízo caso algum aluno cancele a matrícula. É final de dezembro e você precisa pedir as disponibilidades dos professores antes das férias e, se necessário, contratar novos professores para suprir a demanda por uma terceira turma.* ***O que você faria****? Abriria ou não uma terceira turma?*

Tomar decisões como a citada acima podem parecer complexas, mas imagine que eu adicione um novo dado à análise: nos últimos cinco anos do colégio, metade das matrículas para o primeiro ano ocorreram no mês de janeiro e, considerados os últimos cinco janeiros, nunca houve menos do que 20 matrículas no período. Agora parece bem mais simples tomar a decisão, certo?

É justamente esse o papel da **Estatística**: coletar, organizar, analisar, apresentar e interpretar informações de um determinado estudo, auxiliando na **tomada de decisão**. Para tal, a estatística se baseia na matemática e, em especial, em modelos probabilísticos, usando instrumentos como tabelas, gráficos, distribuição de frequências, medidas de posição (média, moda e mediana) e de variabilidade (desvio médio, variância e desvio padrão), intervalos de confiança, testes de hipóteses, dentre tantos outros.

De maneira ampla, a estatística se divide em dois grandes ramos: o da análise exploratória dos dados ou estatística descritiva e a estatística inferencial. A primeira é a responsável por organizar, resumir e representar as informações do estudo em questão, e é o foco da estatística atualmente ensinada no ensino médio e cobrada em vestibulares. Já a segunda é a que se utiliza de modelos probabilísticos para, a partir de dados de uma amostra, tirar conclusões do todo. É o que faz um chef de cozinha ao experimentar o seu preparo para verificar se há sal suficiente ou o que faz um funcionário do controle de qualidade de uma fábrica ao verificar alguns parafusos para decidir se uma máquina está produzindo parafusos defeituosos dentro de um limite aceitável. Apesar de ser um ramo fascinante da estatística, não será o nosso foco no curso.

Então qual será o nosso foco?!

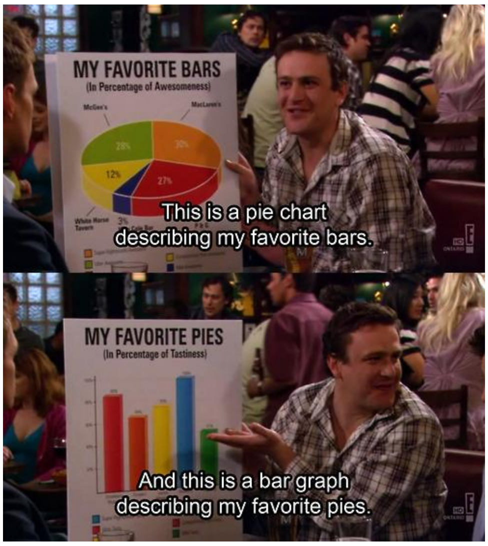
Na primeira aula vimos a importância da estatística nas Orientações Curriculares. Também no ENEM, o estudo da estatística é de fundamental importância, por estar presente em duas das sete competências. Vejamos o que dizem as Competências de Área 6 e 7 da matemática do ENEM.

Competência de Área 6: *Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.*

- **H24**: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- **H25**: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- **H26**: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de Área 7: *Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.*

- **H27**: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
- **H28**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
- **H29**: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
- **H30**: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.



Marshall Eriksen em How I Met Your Mother

Assim, a ideia da aula de estatística é trabalhar, em especial, a análise de gráficos e tabelas, bem como desenvolver os conceitos das medidas de posição (média, moda e mediana) e das medidas de variabilidade (desvio médio, variância e desvio padrão).

- 4.2 **Análise** de Dados: Tipos de **Variáveis** e **Gráficos** associados a elas

No estudo da estatística descritiva há quatro tipos de variáveis, como mostra o esquema abaixo:

$$\text{Variáveis}\begin{cases}\text{Quantitativas}\begin{cases}\text{Discretas}\\ \text{Contínuas}\end{cases}\\ \text{Qualitativas}\begin{cases}\text{Ordinais}\\ \text{Nominais}\end{cases}\end{cases}.$$

- *Variáveis Quantitativas Discretas*

São características que são medidas em uma escala quantitativa, apresentando valores numéricos finitos ou infinitos contáveis de valores (conjunto dos números inteiros). **Exemplos**: número de filhos, cigarros fumados por dia, alunos por turma.

- *Variáveis Quantitativas Contínuas*

São características que são medidas em uma escala quantitativa, apresentando valores numéricos em uma escala contínua (reta real), na qual valores fracionados fazem sentido. Em geral, são medidas por instrumentos. **Exemplos**: peso (balança), tempo (relógio), idade.

- *Variáveis Qualitativas Ordinais*

São características que não possuem valores numéricos, sendo definidas por categorias ordenadas. **Exemplos**: mês de observação (janeiro, fevereiro, ..., dezembro), escolaridade (ensino médio completo, graduação incompleta, ...).

- *Variáveis Qualitativas Nominais*

São características que não possuem valores numéricos, sendo definidas por categorias nas quais não existe ordenação. **Exemplos**: sexo (masculino e feminino), cor dos olhos, bairro de residência (Asa Norte, Sobradinho, Noroeste).

Apesar da rigidez das definições acima, há algumas variações possíveis. No boxe, por exemplo, o peso dos lutadores, que é uma variável quantitativa contínua, acaba por categorizar os lutadores, classificando-os em uma variável qualitativa ordinal: peso-mosca, peso-galo, peso-pena, peso-leve, etc.

Além disso, algumas variáveis numéricas podem não representar variáveis quantitativas, por não apresentarem uma ordenação lógica. É o caso do número de telefone de uma pessoa, ou do CPF, por exemplo.

Tendo isso em mente, partimos agora para os tipos de gráfico e quando eles devem (ou não devem) ser utilizados.

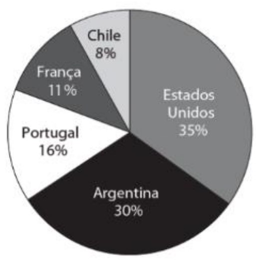
- 4.2.1 Gráficos para Variáveis **Qualitativas**

Existem diversos tipos de gráfico para representar variáveis qualitativas, muitos deles versões diferentes que utilizam o mesmo princípio. Nos limitaremos a dois deles: *gráficos de setores* e *gráficos em barras*.

  - *Gráficos de Setores*

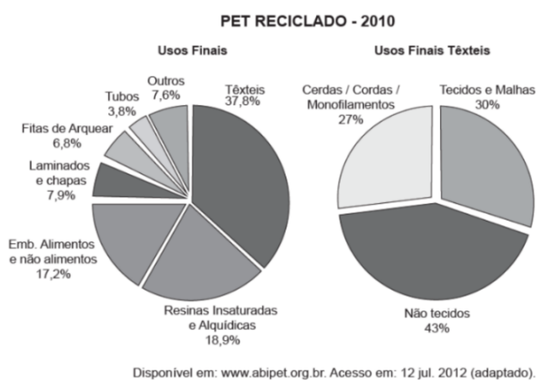
Os gráficos de setores, também conhecidos como gráficos de pizza ou torta, são construídos dividindo-se o círculo em setores – um para cada categoria – cujas dimensões são proporcionais às frequências das categorias.

O exemplo abaixo, cobrado no ENEM PPL 2014, trazia dados da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac) a respeito da distribuição relativa do número de passageiros transportados entre o Brasil e os cinco destinos mais procurados.



Ou seja, dentre todos os passageiros que foram transportados entre o Brasil e os cinco países do gráfico, 30% foram transportados para a Argentina. Note que, *apesar de envolver quantidades* (número de passageiros), *estamos trabalhando com uma variável qualitativa nominal* (categorias: EUA, Argentina, Portugal, França e Chile).

Outro exemplo, cobrado no ENEM 2015 trazia o destino do PET reciclado no Brasil, dado que o total de PET reciclado foi de 282 kton.



A pergunta se referia ao valor mais aproximado, em kton, da quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas.

Em um primeiro momento, ao procurar pela categoria *Tecidos e Malhas*, nos deparamos com 30% no gráfico da direita. Como 30% de 282 é 84,6, vários alunos marcaram essa alternativa.

Porém, contudo, entretanto, todavia, há dois gráficos de setores... O da esquerda, como diz o título em negrito, se refere aos **Usos Finais**, dentre os quais há a categoria *Têxteis*, com 37,8%. Já o da direita, cujo título em negrito é **Usos Finais Têxteis**, traz como uma de suas categorias *Tecidos e Malhas*, com 30%.

Ou seja: 37,8% do PET reciclado tem **Usos Finais Têxteis**, *dentre os quais* 30% se destinam a *Tecidos e Malhas*. Logo, o correto é calcular 30% dos 37,8% de 282 kton, o que daria um valor aproximado igual a 32,0. De certa forma, é como se aquele setor de 37,8% fosse segmentado em três partes, referentes a 30%, 27% e 43% do setor circular.

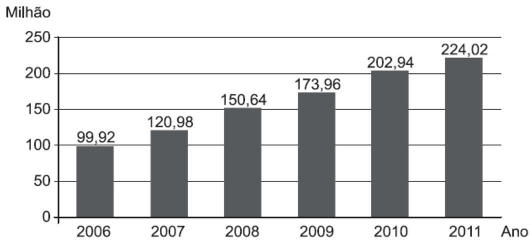
Nota-se, deste exemplo, a **importância de uma análise completa e atenta do gráfico**, incluindo títulos e legendas que estejam disponíveis.

- *Gráficos de Barras*

Os gráficos de barras consistem na construção de retângulos (ou barras), nos quais uma das dimensões é proporcional à magnitude a ser representada, sendo a outra dimensão arbitrária (mas igual para todas as barras). As barras estão sempre dispostas paralelamente umas às outras, horizontal ou verticalmente.

Em alguns casos, como no programa Excel, os ***gráficos de barras verticais*** *são também denominados* ***gráficos de colunas****.*

No exemplo abaixo, cobrado no ENEM PPL 2017, o gráfico mostra a expansão da base de assinantes de telefonia celular no Brasil, em milhões de unidades, de 2006 a 2011.



Disponível em: www.guiadocelular.com. Acesso em: 1 ago. 2012.

Note que, no gráfico acima, as barras são paralelas, as suas bases (horizontal) têm o mesmo comprimento e as alturas (vertical) são proporcionais à quantidade de assinantes em cada ano. Em 2010, por exemplo, a altura da barra é aproximadamente o dobro da altura da barra em 2006 (uma vez que 202,94 é aproximadamente o dobro de 99,92).

Vejamos agora um ótimo exemplo de como ***não*** *devemos utilizar um gráfico de barras*. Ou melhor, de como uma má utilização de um gráfico pode te induzir à uma análise equivocada. Tal preocupação é, inclusive, explicitada nas chamadas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, de onde foi retirado o seguinte trecho:

"É também com a aquisição de conhecimento em estatística que os alunos se capacitam para questionar a validade das interpretações de dados e das representações gráficas, veiculadas em diferentes mídias, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra."

O exemplo abaixo, veiculado na Globo News, foi alvo de muitas críticas na época. Você consegue dizer o porquê?

O primeiro erro é gritante: não faz qualquer sentido que a barra de 5,91% tenha altura superior à de 6,50%! Qual foi a grande crítica à época? O fato de um espectador mais desatento, ou menos crítico, ser induzido a pensar que a inflação no ano de 2013 teria sido a mais alta dos últimos cinco anos, quando, na realidade, havia aumentado com relação a 2012, mas era inferior não só a 2011, como também a 2010.

O segundo erro da imagem acima não é tão gritante (e é até utilizado com certa frequência), mas vai de encontro às definições básicas de um gráfico de barras: as alturas das barras não são proporcionais aos valores envolvidos! Note que a barra de 2010 (5,92%) tem uma altura próxima do triplo da altura da barra de 2009 (4,31%), o que não faz sentido, uma vez que 5,92% não chega sequer perto de ser o dobro de 4,31%.

O gráfico foi corrigido dias depois. Conseguem notar as diferenças?

- 4.2.2 Gráficos para Variáveis **Quantitativas**

Vejamos agora alguns dos principais tipos de gráficos para variáveis quantitativas.

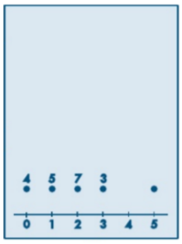
   - *Gráficos de Dispersão e Gráficos de Linhas*

Os gráficos de *dispersão unidimensional* utilizam pontos ao longo de uma reta (provida de uma escala) para representação dos valores da variável aleatória de interesse. Considere, por exemplo, a tabela abaixo, que mostra a quantidade de filhos de cada um dos 20 funcionários de uma empresa.

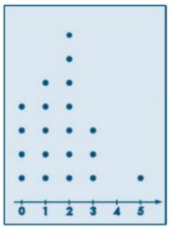
Nº de filhos	Freqüência
0	4
1	5
2	7
3	3
5	1
Total	20

A tabela mostra, por exemplo, que há 7 funcionários que tem 2 filhos cada. Note que a variável de interesse – números de filhos por funcionário – é quantitativa discreta (números inteiros).

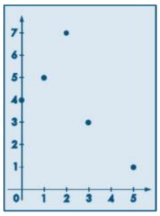
Uma forma de representar os dados da tabela por meio de um gráfico de dispersão é a de indicar os valores repetidos por meio de um número (indicativo da frequência) logo acima do ponto, como mostra a figura abaixo.



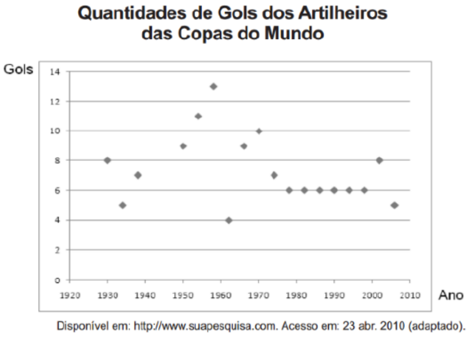
Outra forma seria a de "empilhamento" dos pontos, conforme mostra a figura abaixo.



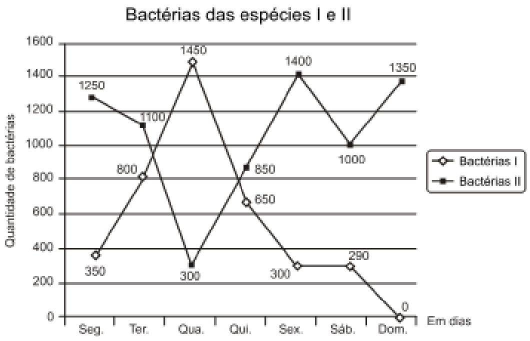
Por fim, uma última maneira seria o de apresentar os pontos de maior frequência mais altos do que os demais, como se estivessem em um plano cartesiano, como mostra a figura abaixo.



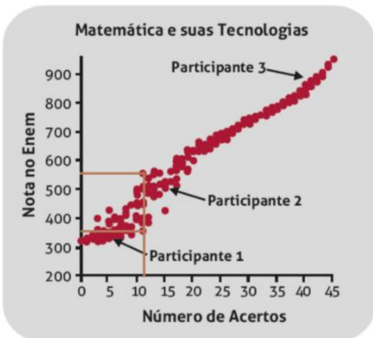
Vejamos um exemplo de utilização do gráfico de dispersão em uma questão do ENEM 2010, cujo gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.



Alguns gráficos de dispersão podem ter os seus pontos ligados por linhas (segmentos de reta) quando deseja-se demonstrar uma tendência ao longo do tempo. Nesse caso, eles são denominados *gráficos de linhas*. É o caso do gráfico a seguir, cobrado no ENEM 2014.



O gráfico de dispersão também pode ser utilizado para fazer associações/relações entre duas variáveis no plano cartesiano. Um bom exemplo é o gráfico que mostra a relação entre acertos e notas de alguns candidatos no ENEM 2012 (Dados fornecidos pelo INEP em seu *site*):



- *Histograma*

Considere a seguinte situação: em um concurso público realizado pela prefeitura de certo município, 200 candidatos foram submetidos a uma prova escrita. A distribuição de frequências segundo as notas obtidas pelos candidatos está representada na tabela.

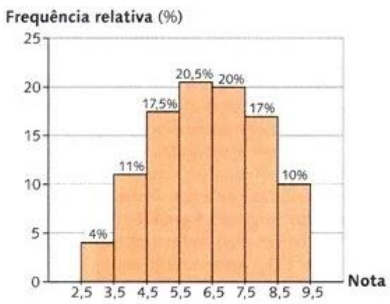
Notas	Frequência (f)	Frequência relativa (f_r)
2,5 ⊢ 3,5	8	4%
3,5 ⊢ 4,5	22	11%
4,5 ⊢ 5,5	35	17,5%
5,5 ⊢ 6,5	41	20,5%
6,5 ⊢ 7,5	40	20%
7,5 ⊢ 8,5	34	17%
8,5 ⊢ 9,5	20	10%
Total	200	100%

Uma alternativa seria a de transformar uma variável quantitativa contínua (notas) em uma variável quantitativa discreta. Poderíamos supor, por exemplo, que todas as notas de um determinado intervalo de classe são iguais ao ponto médio desse intervalo. Assim, as oito notas pertencentes ao primeiro intervalo seriam admitidas iguais a 3,0, as do segundo iguais a 4,0 e assim sucessivamente.

Usando este artifício, poderíamos construir um gráfico de barras, com as notas no eixo horizontal e as frequências no eixo vertical. Porém, este artifício implica em uma perda significativa das informações.

A alternativa que permite representar as frequências absolutas e as relativas de dados agrupados em intervalos de classes é a utilização de um tipo de gráfico denominado *histograma*. Os histogramas nada mais são do que gráficos de barras contíguas (ou seja, coladas), com as bases proporcionais aos intervalos das classes e a área de cada retângulo proporcional à respectiva frequência

As figuras abaixo ilustram histogramas que representam a frequência absoluta e relativa de cada uma das classes.

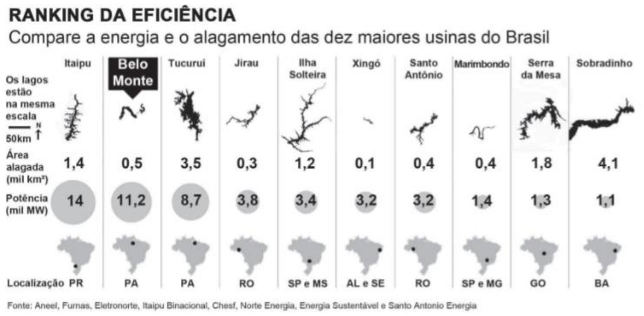


Vejamos, por fim, alguns tipos diferentes de gráficos, não necessariamente relacionados a um dos tipos de variáveis.

- *Infográfico*

O infográfico é uma ferramenta que transmite informações através de imagens, desenhos e outros elementos visuais gráficos, normalmente acompanhado de um texto. É um resumo didático e simples do conteúdo tratado.

Vejamos o exemplo abaixo, retirado da prova de Ciências Humanas do ENEM 2017:



Tudo sobre a batalha de Belo Monte. Disponível em: http://arte.folha.uol.com.br. Acesso em: 10 jan. 2014.

Comparando os dados das hidrelétricas, uma característica territorial positiva de Belo Monte é o(a)

a) reduzido espaço relativo inundado.

b) acentuado desnível do relevo local.

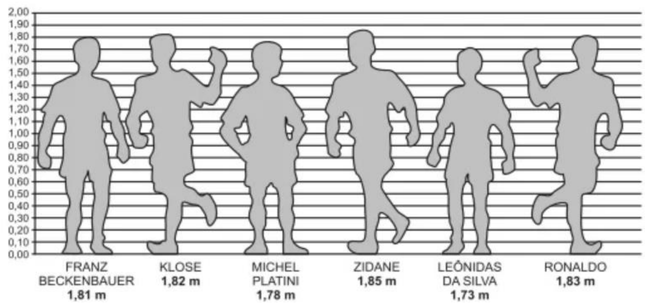
c) elevado índice de urbanização geral.

d) presença dos grandes parques industriais.

e) proximidade de fronteiras internacionais estratégias.

- *Pictograma*

O *pictograma* (ou gráfico de imagens) é uma espécie de gráfico de barras divertido, que utiliza imagens no lugar de retângulos. A figura abaixo ilustra um pictograma.

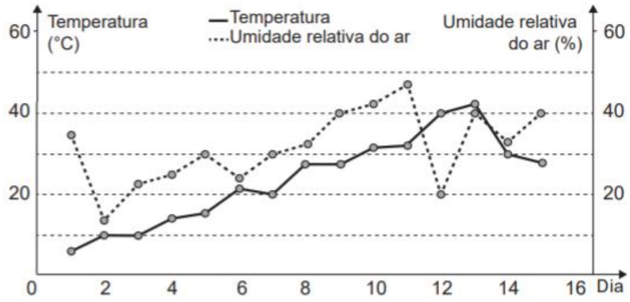


Exemplo 01. (ENEM 2019)

O serviço de meteorologia de uma cidade emite relatórios diários com a previsão do tempo. De posse dessas informações, a prefeitura emite três tipos de alertas para a população:

- Alerta cinza: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será inferior a 10 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 40%;
- Alerta laranja: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura deve variar entre 35 °C e 40 °C, e a umidade relativa do ar deve ficar abaixo de 30%;
- Alerta vermelho: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será superior a 40 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 25%.

Um resumo da previsão do tempo nessa cidade, para um período de 15 dias, foi apresentado no gráfico.



Decorridos os 15 dias de validade desse relatório, um funcionário percebeu que, no período a que se refere o gráfico, foram emitidos os seguintes alertas:

- Dia 1: alerta cinza;
- Dia 12: alerta laranja;
- Dia 13: alerta vermelho.

Em qual(is) desses dias o(s) aviso(s) foi(ram) emitido(s) corretamente?

a) 1

b) 12

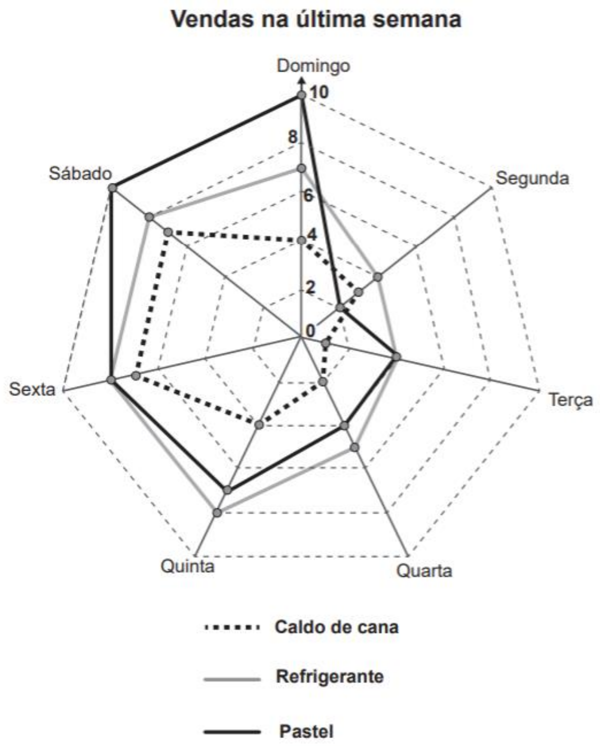
c) 1 e 12

d) 1 e 13

e) 1, 12 e 13

Exemplo 02. (ENEM 2019)

Um comerciante, que vende somente pastel, refrigerante em lata e caldo de cana em copos, fez um levantamento das vendas realizadas durante a semana. O resultado desse levantamento está apresentado no gráfico.



Ele estima que venderá, em cada dia da próxima semana, uma quantidade de refrigerante em lata igual à soma das quantidades de refrigerante em lata e caldo de cana em copos vendidas no respectivo dia da última semana. Quanto aos pastéis, estima vender, a cada dia da próxima semana, uma quantidade igual à quantidade de refrigerante em lata que prevê vender em tal dia. Já para o número de caldo de cana em copos, estima que as vendas diárias serão iguais às da última semana.

Segundo essas estimativas, a quantidade a mais de pastéis que esse comerciante deve vender na próxima semana é

a) 20. b) 27. c) 44.

d) 55. e) 71.

O vídeo ao lado (mais de 9 milhões de visualizações) produzido pela BBC em parceria com o médico, acadêmico e estatístico Hans Rosling mostra, em pouco mais de 4 minutos, uma maneira fantástica de utilização de gráficos estatísticos →

- 4.3 Medidas de **Posição**

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio-padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Tabela 1

A **Tabela 1** traz, além das pesagens de cada atleta, algumas medidas resumo: média, mediana (medidas de posição) e desvio-padrão (medida de dispersão ou variabilidade). Inicialmente, trataremos apenas das medidas de posição, denominadas média, moda e mediana, utilizando os dados da tabela acima como referência.

> ***Média***: também denominada média aritmética, corresponde ao somatório dos valores observados, dividido pela quantidade de observações.

No exemplo acima, temos que a média do peso (em kg) do atleta I é igual a 72, pois $\dfrac{78+72+66}{3}=72$.

Se desejássemos calcular a média da 1ª pesagem dos quatro atletas, teríamos como resultado 79 kg, pois

$$\frac{78+83+75+80}{4}=\frac{316}{4}=79 .$$

(Média) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os n valores (distintos ou não) da variável X, a média aritmética $\bar{x}$, ou simplesmente média, de X pode ser escrita

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i .$$

Ainda, se tivermos n observações da variável X, das quais n_1 são iguais a x_1, n_2 são iguais a x_2, e assim por diante, até n_k observações iguais a x_k, então a média de X pode ser escrita como

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_kx_k}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k}n_ix_i .$$

Exemplo 03. (ENEM 2016)

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

a) I. b) II. c) IV. d) V. e) VII.

> ***Mediana***: é a observação que ocupa a posição central de uma série de observações ordenadas (de maneira crescente ou decrescente), dividindo a distribuição dos elementos "ao meio".

No caso do 3º atleta da **Tabela 1**, a mediana é 70, pois é esse valor central da distribuição ordenada (1º termo = 65, 2º termo = 70, 3º termo = 75, ao ordenarmos de maneira crescente as três observações da distribuição citada). A existência desse valor central ocorreu, em especial, pelo fato de a distribuição ter um número ímpar de elementos.

E como lidar caso a distribuição tenha um número par de elementos? *Qual seria a mediana, por exemplo, da série numérica das quatro pesagens iniciais (1ª pesagem) dos quatro atletas*?

Nesse caso, o primeiro passo é identificar as observações da distribuição indicada: {78, 83, 75, 80}. O segundo passo é ordenar as observações: (75, 78, 80, 83). Note que há dois elementos centrais: o 78 e o 80. Assim, para calcularmos a mediana, devemos calcular a média entre esses dois elementos centrais, (78 + 80) / 2, que é igual a 79.

Podemos formalizar a ideia da mediana da seguinte maneira:

(Mediana) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os n valores (distintos ou não) da variável X. Consideremos, agora, as observações ordenadas em ordem crescente. Denotemos a menor observação por $x_{(1)}$, a segunda por $x_{(2)}$, e assim por diante, obtendo-se

$$x_{(1)}\le x_{(2)}\le\ldots\le x_{(n-1)}\le x_{(n)} .$$

Utilizando a notação acima, a mediana $md(X)$ da variável X pode ser definida como

$$md(X)\begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\[2ex] \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} .$$

Exemplo 04. (FUVEST 2014)

Cada uma das cinco listas dadas é a relação de notas obtidas por seis alunos de uma turma em uma certa prova. Assinale a única lista na qual a média das notas é maior do que a mediana.

a) 5, 5, 7, 8, 9, 10

b) 4, 5, 6, 7, 8, 8

c) 4, 5, 6, 7, 8, 9

d) 5, 5, 5, 7, 7, 9

e) 5, 5, 10, 10, 10, 10

> ***Moda*****:** é a observação mais frequente de um conjunto de dados, isto é, o valor com maior número de repetições.

Considerando-se os 12 valores da **Tabela 1** (3 pesagens para 4 atletas) a moda seria o valor 65, pois é o valor mais frequente, aparecendo três vezes.

Vejamos agora dois exemplos de questões que cobravam o entendimento de duas ou mais das medidas de posição estudadas.

Exemplo 05. (ENEM 2011)

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a:

a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.

b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.

c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.

d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.

e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

Exemplo 06. (ENEM 2018)

Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6 h 15 min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6 h 21 min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6h 22 min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6 h 21 min da manhã é no máximo

a) $\frac{4}{21}$

b) $\frac{5}{21}$

c) $\frac{6}{21}$

d) $\frac{7}{21}$

e) $\frac{8}{21}$

4.4 Medidas de **Dispersão**

Imagine a seguinte situação: 19 alunos de uma turma foram separados em quatro grupos e um teste idêntico foi aplicado para cada um dos alunos. Ao final, as notas obtidas foram as mostradas na **Tabela 2**.

Grupo A	6	6	6	6	6
Grupo B	4	5	6	7	8
Grupo C	1	2	7	10	10
Grupo D	2	2	10	10	

Tabela 2

Ao calcular a média das notas de cada um dos grupos você se depara com $\bar{x}_A = \bar{x}_B = \bar{x}_C = \bar{x}_D = 6$. Note que, apesar das médias serem todas idênticas, elas nada informam a respeito da variabilidade dos dados. O grupo A, por exemplo, é claramente mais homogêneo do que o grupo C. Assim, é conveniente e faz-se necessária a criação de medidas que sumarizem a variabilidade de um conjunto de informações, permitindo comparações de diferentes conjuntos de valores de determinada variável de interesse.

Em geral, são utilizados critérios que mensuram a dispersão dos dados em torno da média da distribuição, e duas medidas são as mais usadas: desvio médio e variância. Em suma, queremos analisar como se comportam os desvios de cada observação de uma distribuição em relação à média dessas observações. Dessa forma, podemos construir um algoritmo para o cálculo dessas medidas de dispersão, que será explicado passo a passo, usando como referência a distribuição $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, bem como os grupos de A a D citados na **Tabela 2**.

1º Passo: calcular os desvios $x_i - \bar{x}$.

Como estamos interessados em mensurar o quanto cada observação (x_i) difere da média ($\bar{x}$) das observações, é natural que comecemos pelo cálculo de $x_i - \bar{x}$. Para o Grupo A da **Tabela 2** tais desvios seriam iguais a 0, 0, 0, 0 e 0, uma vez que cada observação é igual à média! Já para o Grupo C da mesma tabela, tais desvios seriam iguais a -5, -4, 1, 4 e 4.

Note que, para *qualquer conjunto de dados*, a soma desses desvios $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\right)$ será igual a 0 (teste para os grupos B e D para verificar essa afirmação!). O motivo disso ocorrer está diretamente ligado ao próprio conceito de média: alguns valores serão maiores que a média (tendo desvios positivos), outros serão menores (tendo desvios negativos) e a soma desses desvios se anulará. Logo, a soma dos desvios não é uma boa medida de dispersão dos dados.

O grande problema aqui está no fato de termos desvios positivos e negativos que se anulam. Porém, em um conjunto de dados com média 6, uma observação igual a 5 e uma observação igual a 7, no rigor, se afastam igualmente da média: em uma unidade. Podemos contornar esse problema da soma dos desvios transformando valores negativos em positivos e, para isso, existem duas formas relativamente simples na matemática: (1) considerar os valores absolutos dos desvios, ou seja, $|x_i - \bar{x}|$; (2) calcular os valores quadráticos dos desvios, isto é, $(x_i - \bar{x})^2$. Usando a forma (1) construiremos o que será denominado *desvio médio*, enquanto com a forma (2) definiremos o que é conhecido como *variância*. Por ser mais frequente, continuaremos o algoritmo usando (2).

2º Passo: calcular os desvios quadráticos $(x_i - \bar{x})^2$.

Usando como referência o Grupo C, os desvios quadráticos seriam dados por $(1-6)^2 = (-5)^2 = 25$, $(2-6)^2 = (-4)^2 = 16$, $(7-6)^2 = 1^2 = 1$, $(10-6)^2 = 4^2 = 16$ e $(10-6)^2 = 4^2 = 16$. Mas o nosso interesse é em uma *medida para o conjunto de dados*, o que nos leva ao 3º Passo.

3º Passo: calcular a soma dos desvios quadráticos $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

No caso do Grupo A, a soma dos desvios quadráticos é igual a zero, uma vez que cada observação tem o mesmo valor que a média. Já no Grupo C, a soma dos desvios quadráticos é dada por $25+16+1+16+16=74$. Isso mostra que a variabilidade no Grupo C é superior à variabilidade no Grupo A, uma vez que a soma dos quadrados das "distâncias" de cada observação com relação à média é maior no Grupo C do que no Grupo A.

Calculando a soma dos desvios quadráticos também para o Grupo D, iniciaremos mostrando o cálculo da média:

$$\bar{x}_D = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{2+2+10+10}{4} = 6.$$

O próximo passo é o cálculo dos desvios quadráticos, ou seja, os valores $(x_i - \bar{x})^2$ para as quatro observações do Grupo D:

$$x_1 = 2 : (2-6)^2 = (-4)^2 = 16$$
$$x_2 = 2 : (2-6)^2 = (-4)^2 = 16$$
$$x_3 = 10 : (10-6)^2 = 4^2 = 16$$
$$x_4 = 10 : (10-6)^2 = 4^2 = 16$$

Depois, devemos calcular a soma dos desvios quadráticos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 16+16+16+16 = 64$$

Pergunta: qual grupo apresenta **maior variabilidade**? O Grupo C que possui valores $C=\{1,2,7,10,10\}$ ou o Grupo D com valores $D=\{2,2,10,10\}$?

Como vimos, o Grupo C apresentou uma soma dos desvios quadráticos igual a 74, enquanto o Grupo D apresentou uma soma dos desvios quadráticos igual a 64. Porém, a soma do Grupo C tinha cinco parcelas contra apenas quatro parcelas do Grupo D. O que podemos fazer então para que seja possível a comparação, em termos de variabilidade, de dois grupos que tenham quantidades distintas de observações?

A resposta é simples: ao invés de calcular a soma dos desvios quadráticos, devemos calcular a *média dos desvios quadráticos*! E é justamente a média dos desvios quadráticos que denominamos de variância ($\text{var}(X)$):

$$\text{var}(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}.$$

Assim, dois grupos com tamanhos distintos tornam-se comparáveis, como é o caso dos grupos C e D. Sejam $\text{var}(C)$ a variância do Grupo C e $\text{var}(D)$ a variância do Grupo D, temos:

$$\text{var}(C)=\frac{25+16+1+16+16}{5}=14{,}8$$
$$\text{var}(D)=\frac{16+16+16+16}{4}=16$$

Logo, podemos dizer que a *variabilidade do Grupo D é maior do que a do Grupo C*, uma vez que $\text{var}(D)>\text{var}(C)$.

Um último “problema” que deve ser contornado é o seguinte: sendo a variância uma medida de dimensão igual ao quadrado da dimensão dos dados da distribuição (por exemplo, se estivermos analisando massa, em kg, a variância será uma medida que estará em kg^2), isso pode acabar gerando dificuldades e problemas na interpretação dos dados. Por esse motivo, em geral, utiliza-se o *desvio padrão*, que nada mais é do que a *raiz quadrada da variância*. Logo, podemos definir o desvio padrão $dp(X)$ como

$$dp(X)=\sqrt{\text{var}(X)}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}.$$

Ou seja, o *desvio padrão* nada mais é do que a *raiz quadrada da média dos desvios quadráticos*! Apesar de apresentar uma fórmula relativamente complicada, a *ideia do desvio padrão* é simples: mensurar a variabilidade de um conjunto de dados, calculando o *erro obtido ao se substituir o valor de cada observação pela média do conjunto de dados*.

Quanto maior for o valor do desvio padrão, mais dispersos com relação à média estarão os dados e mais heterogênea será a distribuição. Quanto menor for o valor do desvio padrão, menos dispersos estarão os dados e mais homogênea será a distribuição. Vejamos o que ocorre com os desvios padrão dos quatro grupos da **Tabela 2**.

$$dp(A)=\sqrt{\frac{(6-6)^2+(6-6)^2+(6-6)^2+(6-6)^2+(6-6)^2}{5}}=0$$

$$dp(B)=\sqrt{\frac{(4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2}{5}}=1{,}4$$

$$dp(C)=\sqrt{\frac{(1-6)^2+(2-6)^2+(7-6)^2+(10-6)^2+(10-6)^2}{5}}=3{,}8$$

$$dp(D)=\sqrt{\frac{(2-6)^2+(2-6)^2+(10-6)^2+(10-6)^2}{4}}=4$$

O Grupo A apresentou desvio padrão igual a zero. O que isso significa? Que não há qualquer erro obtido ao se substituir o valor de cada observação pela média do conjunto de dados, o que faz sentido já que todas as observações são iguais a 6, assim como a média.

Se compararmos os Grupos B e C notamos, sem qualquer cálculo, que o grupo B é mais homogêneo do que o Grupo C, já que os valores estão todos próximos de 6 no Grupo B. E essa homogeneidade dos dados se revela verdadeira quando olhamos para os desvios padrão dos dois grupos: $dp(C)=3{,}8>dp(B)=1{,}4$.

Por fim, se compararmos agora os Grupos C e D, apesar de terem tamanhos distintos, percebemos que há uma maior variabilidade no Grupo D do que no Grupo C, pois $dp(D)=4>dp(C)=3{,}8$. Isso ocorreu pois, apesar de o Grupo C ter um valor que se afasta mais da média (que é o 1), ele também possui um valor muito próximo da média (que é o 7), reduzindo a variabilidade do conjunto de dados.

Resumindo, podemos definir as medidas de dispersão variância e desvio padrão das seguintes maneiras:

(Variância) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os n valores (distintos ou não) da variável X e $\bar{x}$ a média da distribuição, a variância $\text{var}(X)$ corresponde à média dos desvios quadráticos dos dados com relação a $\bar{x}$, ou seja

$$\text{var}(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}.$$

(Desvio Padrão) Seja $\text{var}(X)$ a variância da distribuição X, o desvio padrão $dp(X)$ é dado pela raiz quadrada da variância, ou seja

$$dp(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Além dessas duas medidas (variância e desvio padrão), há ainda uma outra medida de dispersão importante. Para a construção da variância, optamos por elevar os resultados dos desvios ao quadrado (desvios quadráticos) com o objetivo de transformar valores negativos em positivos. Porém, poderíamos ainda ter optado por calcular o valor absoluto (em módulo) dos desvios com relação à média e, a partir daí, seguir com o mesmo processo que deu origem ao que denominados variância, apenas substituindo os desvios quadráticos pelos desvios absolutos.

Assim, podemos definir o *desvio médio* ou *desvio absoluto médio*: uma medida de dispersão que é calculada como sendo a *média dos desvios absolutos*.

(Desvio Médio) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os n valores (distintos ou não) da variável X e $\bar{x}$ a média da distribuição, o desvio médio $dm(X)$ corresponde à média dos desvios absolutos dos dados com relação a $\bar{x}$, ou seja

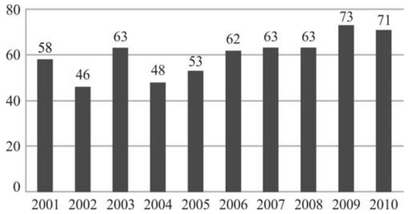
$$dm(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}.$$

Em alguns vestibulares é necessário saber efetuar os cálculos das medidas de dispersão enquanto, em outros, o simples entendimento do conceito das medidas de dispersão será suficiente. É o que veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 07. (UnB 2014 – Adaptada)

O gráfico abaixo apresenta o número de foguetes que contêm satélites lançados para fora da atmosfera terrestre, no período de 2001 a 2010.

Número de lançamentos de foguetes com satélites – de 2001 a 2010



Com base na sequência dos dez valores correspondentes aos números de lançamentos anuais apresentados nesse gráfico, julgue os itens de 01 a 03 e assinale a opção correta no item 04, que é do tipo C.

(01) O valor da moda da referida sequência numérica é inferior ao da média.

(02) O valor da mediana da referida sequência numérica é inferior a 63.

(03) A variância da série numérica relativa aos valores dos anos de 2006 a 2010 é superior à variância da série numérica relativa aos valores dos anos de 2001 a 2005.

(04) O valor do desvio padrão — σ — da mencionada sequência numérica é

(A) $\sigma < 8,3$.

(B) $8,3 \le \sigma < 8,6$.

(C) $8,6 \le \sigma < 8,9$.

(D) $\sigma \ge 8,9$.

Exemplo 08. (ENEM 2016)

O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

a) I e III.

b) I e IV.

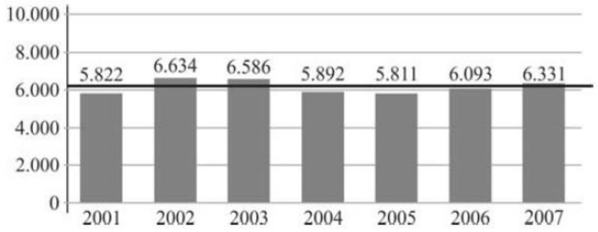
c) II e III.

d) II e IV.

e) III e IV.

Exemplo 09. (2º Vestibular UnB de 2013 – Adaptada)

O gráfico abaixo mostra a quantidade de internações de usuários de drogas com até 19 anos de idade, no Brasil, no período de 2001 a 2007. O número médio de internações no período, indicado pela linha em negrito, foi igual a 6.167.



A partir dessas informações, julgue os itens de 01 a 03 e faça o que se pede no item 04, que é do tipo C.

(01) O crescimento do número de internações em 2007, em comparação com 2005, foi superior a 11%.

(02) A mediana da série de valores apresentados no gráfico é inferior à média.

(03) Supondo que a quantidade de internações em 2008 tenha sido igual à média observada para o período de 2001 a 2007, o desvio padrão da nova série numérica, relativa aos anos de 2001 a 2008, será igual ao desvio padrão da série numérica original, relativa aos anos de 2001 a 2007.

(04) Assinale a opção que apresenta a expressão que permite determinar-se corretamente o desvio-padrão — R — da série de dados indicados no gráfico.

a) $7R^2 = 345^2 + 467^2 + 419^2 + 275^2 + 356^2 + 74^2 + 164^2$

b) $7R = \sqrt{345} + \sqrt{467} + \sqrt{419} + \sqrt{275} + \sqrt{356} + \sqrt{74} + \sqrt{164}$

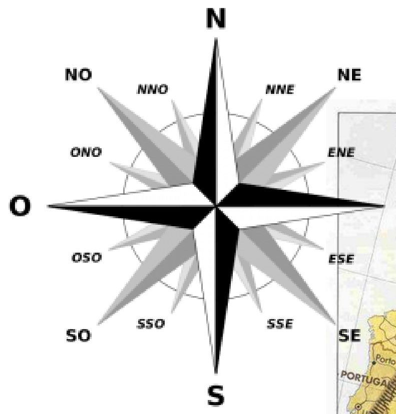
c) $6167R^2 = 5822^2 + 6634^2 + 6586^2 + 5892^2 + 5811^2 + 6093^2 + 6331^2$

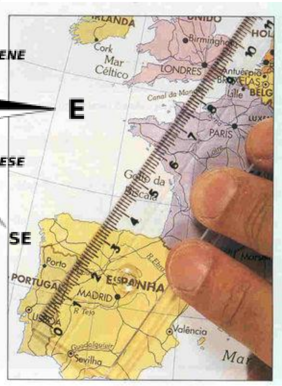
d) $6167R = \sqrt{5822} + \sqrt{6634} + \sqrt{6586} + \sqrt{5892} + \sqrt{5811} + \sqrt{6093} + \sqrt{6331}$

Bloco 2

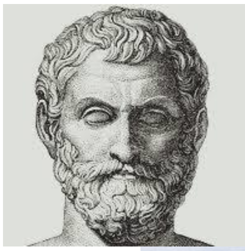
Geometria

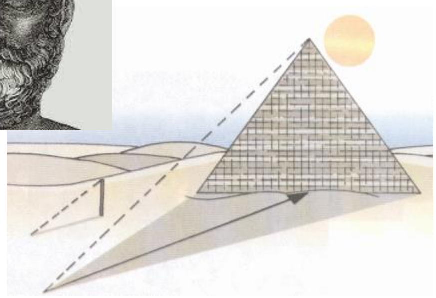
O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.





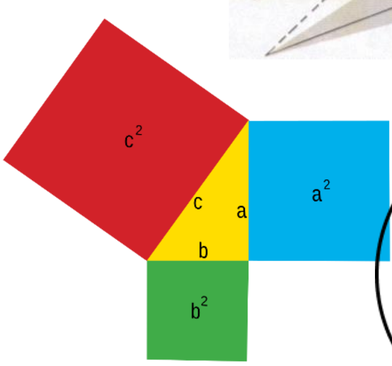
O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras.

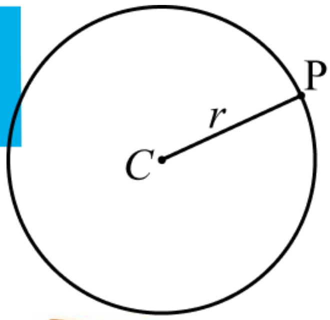




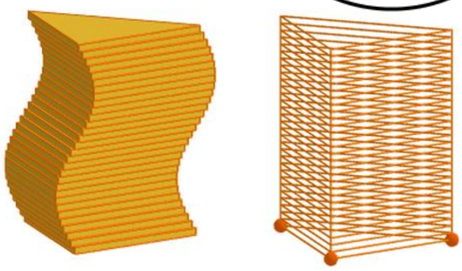
Durante o ensino médio, o trabalho do aluno em outras disciplinas, como a Física e a Química, por exemplo, pode servir como motivação para a consolidação da idéia de grandezas, particularmente aquelas formadas por relações entre outras grandezas (densidade, aceleração, etc.).

Em relação às grandezas geométricas, as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores, como área, perímetro e volumes. Nessa fase, o aluno já apresenta as condições necessárias para a compreensão de certas demonstrações que resultem em algumas fórmulas, por exemplo, a área do círculo.

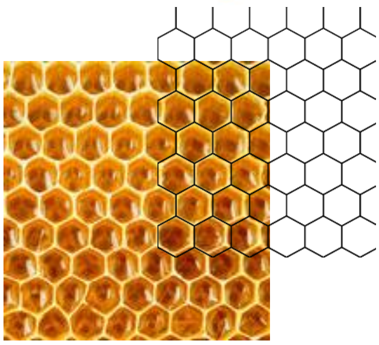


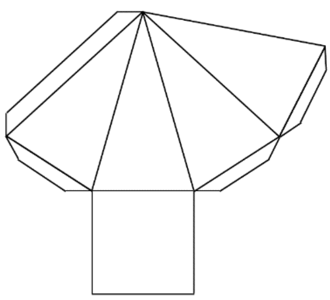


Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação. Um conteúdo a ser trabalhado com cuidado são as fórmulas de comprimento e de área do círculo: se π representa a razão constante entre comprimento e diâmetro do círculo, deve-se explicar como esse número π aparece na fórmula da área do círculo; ou se π é introduzido via a área do círculo, deve-se explicar como aparece na expressão de seu comprimento. O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas.



No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. As expressões que permitem determinar a medida da área das superfícies do cilindro e do cone podem ser estabelecidas facilmente a partir de suas planificações.





========== **AULA 5. Triângulos** ==========

- 5.1 Uma Breve Introdução

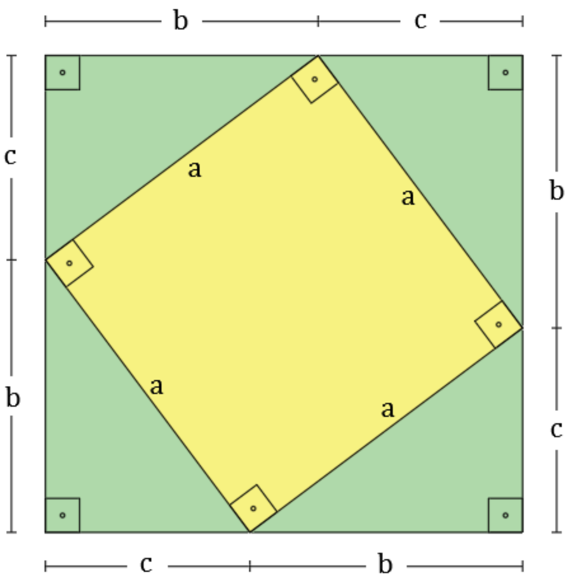
Os triângulos aparecem em variadas situações do dia-a-dia, em obras de arte, da arquitetura, e até em teorias da conspiração. Eles são utilizados desde a antiguidade devido ao equilíbrio de forças que ele possibilita.

São polígonos que têm 3 lados e 3 ângulos, que podem ser iguais ou diferentes.

A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é sempre constante e igual a 180º. Podem ser classificados de acordo com os lados como equiláteros, isósceles e escalenos, e de acordo com os ângulos como acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

- 5.2 O Triângulo **Retângulo**

Para falar sobre triângulos retângulos, podemos começar falando sobre o quadrado, que é um quadrilátero que tem 4 lados de mesma medida. Na figura abaixo, temos dois quadrados – um maior, de lados **(b+c)**, que envolve toda a figura, e um menor, amarelo, de lado medindo **a**:



Podemos calcular a área desse quadrado de duas maneiras distintas:

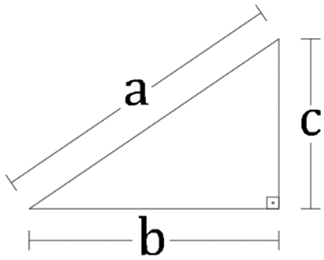
I) Calculando o quadrado da medida dos lados:

$$(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

II) Calculando a área de cada triângulo verde e somando à área do quadrado amarelo, formando a área total da figura:

$$4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) + a^2 = 2bc + a^2$$

Como a área do quadrado não muda e é igual independente da maneira como nós calcularmos, podemos igualar as duas equações. Com isso, chegaremos a um dos teoremas mais importantes da Geometria, o **Teorema de Pitágoras:**



$$2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

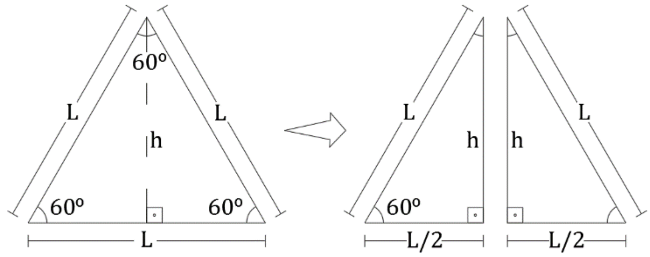
Exemplo 1. Determine a diagonal de um retângulo de perímetro 20cm e base 6cm.

Exemplo 2. Considere A e B dois pontos de um plano cartesiano e calcule a distância entre os pontos A(2, -1) e B(-2, -6).

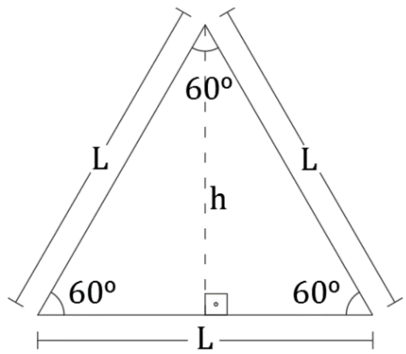
- 5.3 O **Triângulo Equilátero**

Diferente do triângulo retângulo, o triângulo equilátero é <u>acutângulo</u> e tem todos os ângulos de mesma medida. Consequentemente, tem todos os lados de mesma medida – e por isso damos o nome de "*equi*" (igual) + "*látero*" (lado).

Se dividirmos o triângulo equilátero ao meio traçando a altura relativa ao vértice superior, surgirão dois triângulos retângulos, como na figura abaixo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras visto anteriormente aos lados desses triângulos retângulos que surgiram, chegaremos às seguintes relações para a **altura h** e para a **área A** do triângulo equilátero:



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Exemplo 3. Determine o perímetro de um triângulo equilátero cuja altura mede $h = 4\sqrt{3}$ cm.

- 5.4 **Triângulos Quaisquer**

Caso o triângulo que estamos analisando não tenha um ângulo reto ou os três lados iguais, não se desespere: embora menos conhecidas e menos trabalhadas, há **várias** outras maneiras de se encontrar os lados, os ângulos e as áreas dos triângulos.

O interessante dessas saídas é que elas são aplicáveis a qualquer triângulo, ou seja, aqueles que são retângulos ou equiláteros também podem ser base para esses cálculos. Vejamos a seguir algumas relações métricas para triângulos quaisquer:

a) Lei dos Senos

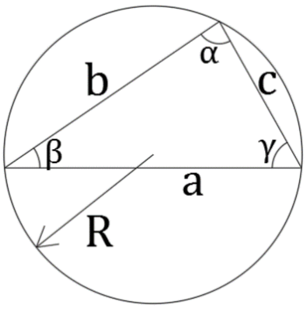
Quando temos um triângulo e sabemos

- a medida de um lado e dois ângulos; ou

- a medida de dois lados e um ângulo; ou

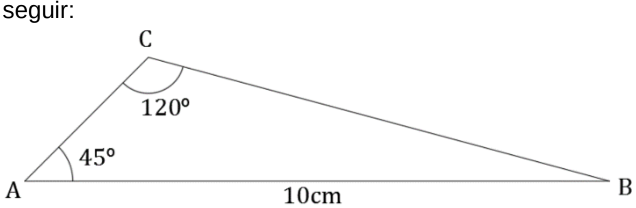
- a medida de um ângulo e o raio da circunferência circunscrita; poderemos calcular a medida dos outros lados, dos outros ângulos e até as propriedades da circunferência circunscrita ao triângulo com a **Lei dos Senos**.

Basicamente, a lei dos senos estabelece uma relação entre os lados, os senos dos ângulos e o raio da circunferência circunscrita a partir da seguinte equação:



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

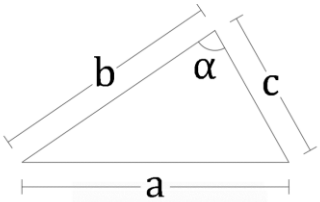
Exemplo 4. Determine a medida do lado BC no triângulo a seguir:



b) Lei dos Cossenos

Quando temos um triângulo e sabemos a medida de dois lados e um ângulo qualquer do triângulo, poderemos calcular a medida do terceiro lado a partir da **Lei dos Cossenos**.

A lei dos Cossenos é uma extensão do Teorema de Pitágoras para triângulos que não são retângulos e envolve o cosseno de um dos ângulos do triângulo. A relação é estabelecida a partir da equação a seguir:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$

Exemplo 5. Considere que dois lados de um triângulo medem 20 cm e 12 cm e formam entre si um ângulo de 120º. Calcule a medida do terceiro lado.

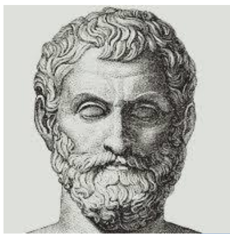
Obs.: não vale a pena nesse momento despendermos muito tempo com a demonstração das Leis dos Senos e dos Cossenos. Por isso, seguem duas demonstrações diferentes da Lei dos Senos e duas da Lei dos Cossenos. Elas envolvem Trigonometria e, se for o caso a quem tiver interesse, poderemos voltar nesse ponto e explicar melhor essas demonstrações após trabalharmos o tema.

Lei dos Senos

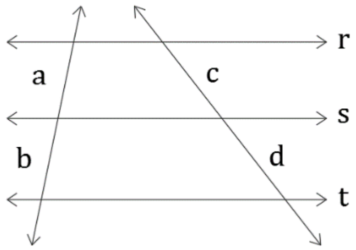
Lei dos Cossenos

- 5.5 **Teorema** de Tales e a Semelhança de Triângulos

Por volta do ano 600 a.C., Tales de Mileto foi convidado a medir a altura da pirâmide de Quéops – a maior das três pirâmides. Tales determinou a altura do monumento por meio da ideia de proporcionalidade entre segmentos de reta.



O teorema que leva seu nome diz que, em um feixe de retas paralelas intersectado por duas retas transversais, os segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais aos segmentos determinados na segunda transversal. Ou seja:



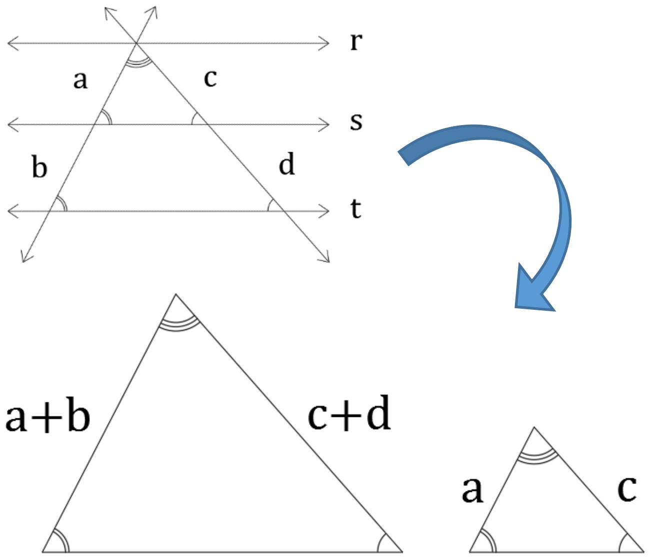
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \text{ ou } \frac{b}{a+b} = \frac{d}{c+d}$$

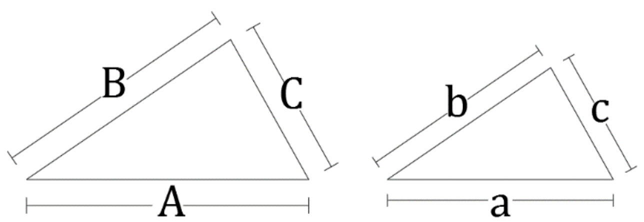
Caso as retas transversais se interceptem e, pelo ponto de interseção, passe uma reta paralela, teremos a formação da imagem seguinte.

Nesse caso, como no caso anterior, podem-se estabelecer relações de proporcionalidade entre os segmentos nas retas transversais.

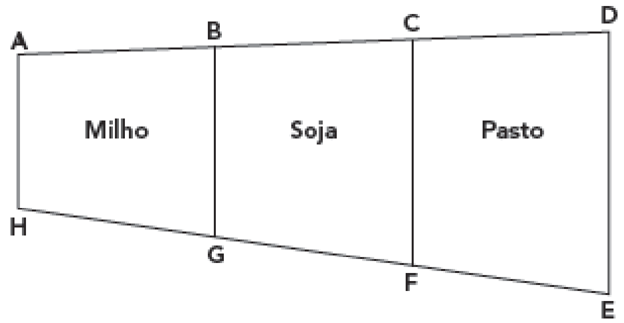
Você percebe que as duas retas transversais e as duas retas paralelas inferiores acabaram formando triângulos? Esses triângulos têm <u>ângulos congruentes</u>, e por serem formados por um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, formam <u>segmentos proporcionais</u>. Dessa forma, se estabelece a Semelhança de Triângulos.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \text{ ou } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$$



Exemplo 6 (SAS). Para melhorar a qualidade do solo e aumentar a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda, é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes, conforme a figura.



Considere que:
- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os ponto H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos AH, BG, CF e DE são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500m, BC = 600m, CD = 700m e HE = 1.980m.

Nessas condições, a medida do segmento GF é:

a) 665m
b) 660m
c) 655m
d) 650m
e) 645m

Exemplo 7 (UFJF). Uma folha de papel retangular (Figura 1) é dobrada conforme indicado na Figura 2 abaixo:

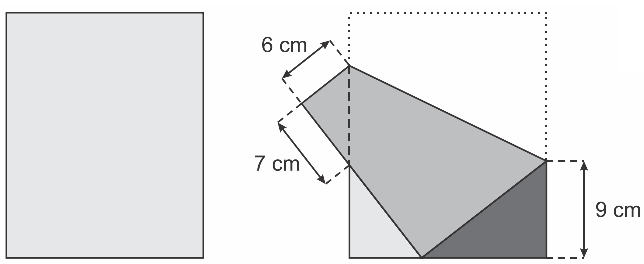


Figura 1 Figura 2

A área do triângulo cinza escuro na Figura 2, formado após a dobra da folha, mede, em centímetros quadrados,

a) 31,50
b) 34,65
c) 47,25
d) 63,00
e) 189,00

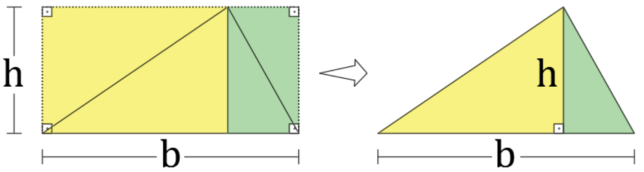
- 5.6 Áreas de Triângulos **Quaisquer**

Diferente do que achávamos quando começamos a estudar Geometria, há várias formas de se calcular a área de triângulos, dependendo de quais informações temos sobre ele.

A seguir, serão apresentadas as maneiras mais utilizadas na Geometria Plana com base nas informações sobre lados, ângulos e raios de circunferências que tivermos.

a) Utilizando um lado

Se eu te perguntar como se calcula a área de um triângulo, certamente você vai se lembrar da primeira fórmula que aprendeu. Mas de onde vem essa conclusão?



A área de um triângulo pode ser totalmente contida na área de um retângulo, e se dividirmos cada região desse retângulo na metade, chegaremos ao triângulo.

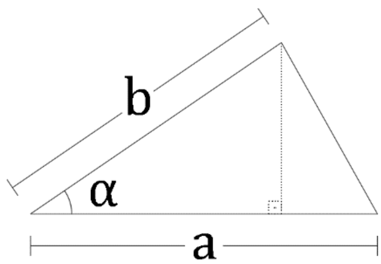
Dessa maneira, a área do triângulo pode ser calculada a partir da área do retângulo:

$$A_{ret} = b \cdot h \Rightarrow \boxed{A_{tri} = \frac{b \cdot h}{2}}$$

b) Utilizando dois lados

Caso não tenhamos a altura do triângulo, mas tenhamos informações sobre 2 lados do triângulo e o ângulo entre eles, poderemos trabalhar com a trigonometria:

Sabemos que a **altura h** pode ser calculada como $b \cdot \text{sen}\alpha$, portanto na equação da área encontrada acima, podemos substituir a altura h pelo produto, da seguinte forma:

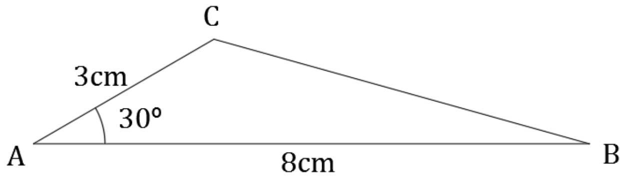


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$h = b \cdot \text{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\alpha}{2}}$$

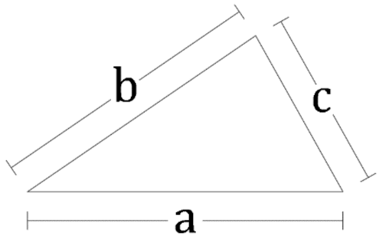
Exemplo 8. Calcule a área S do triângulo abaixo:



c) Utilizando três lados

Se eu souber três lados do triângulo, a maneira como poderemos calcular a área do triângulo vai depender do que mais nós conhecemos do triângulo.

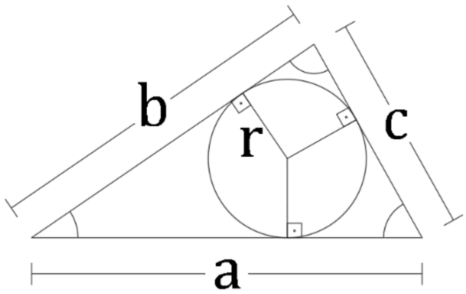
A primeira saída é se não tivermos nenhuma informação sobre nada além dos lados **a, b e c**. Nesse caso, utilizamos o **Teorema de Heron**, que utiliza apenas as medidas dos lados e do **semiperímetro (p)** para o cálculo. A maneira de fazer é:



$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

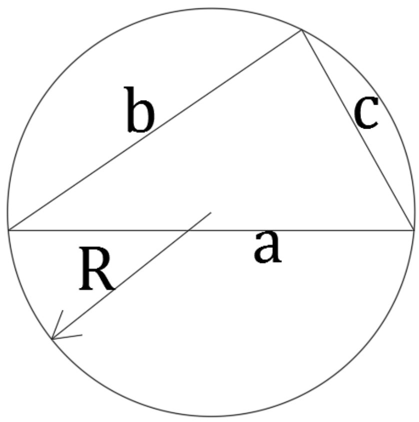
Perceba que essa fórmula requer muitos cálculos, fora isso nem sempre o produto da raiz é um quadrado perfeito, o que pode adicionar trabalho à resolução da questão.

Caso nós tenhamos informações sobre a ***circunferência inscrita*** no triângulo, o cálculo pode ser facilitado. Para calcular a área com a informação do **raio (r)** da circunferência inscrita e o **semiperímetro (p)**, a maneira de se calcular a **área A** é:



$$A = p \cdot r$$

Caso nós tenhamos apenas informações sobre a ***circunferência circunscrita*** ao triângulo, o cálculo pode seguir um processo semelhante. Para calcular a área utilizando os lados **a, b e c** do triângulo e o **raio (R)** da circunferência circunscrita, a maneira de se calcular a **área A** é:



$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Exemplo 9. Determine a área dos triângulos em cada caso:

a) Triângulo de lados 5cm, 6cm e 7cm.

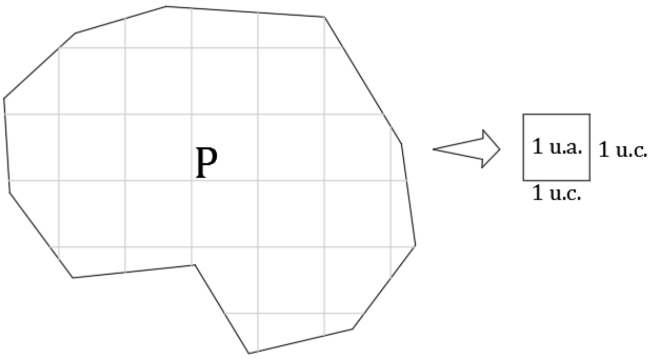
b) Triângulo de perímetro 24cm circunscrito a uma circunferência de diâmetro 8cm.

c) Triângulo de lados $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{6}$ cm e $2\sqrt{3}$ cm, inscrito em uma circunferência de raio igual a 12cm.

========== AULA 6. Áreas ==========

- ### 6.1. Uma breve introdução sobre o conceito de Área

Quando falamos sobre áreas, falamos sobre um conceito de espaço em uma superfície. Quantas vezes um quadrado de lado unitário e área unitária cabe dentro de uma determinada figura, como o polígono P abaixo?

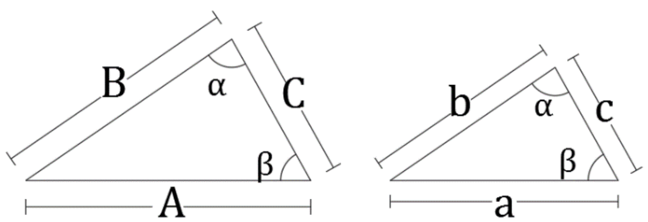


Toda região plana fechada composta por segmentos lineares ou curvas possui uma "capacidade" de ser ocupado por quadrados inteiros ou fracionados de lado unitário e área unitária, e a essa medida de "capacidade" de ocupação é o que chamamos de área.

Quanto mais extensa for a região, maior será o espaço a ser preenchido com quadradinhos unitários, e maior, portanto, será a área, e vice-versa.

- ### 6.2. Relações métricas entre comprimentos e áreas de figuras semelhantes

Antes de falarmos sobre as relações entre os comprimentos e as áreas, é importante comentar sobre o que são figuras semelhantes: são aquelas que possuem <u>ângulos correspondentes congruentes</u> (como os ângulos α e β nos triângulos abaixo) e também <u>lados correspondentes proporcionais</u>, ($\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$, como os lados A e a, ou B e b, ou C e c nos triângulos abaixo).

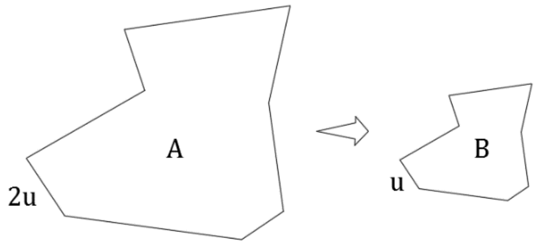


A proporção entre os lados das figuras, que chamaremos de "k", é o que chamamos de "<u>razão de semelhança</u>". Podemos dizer, nos triângulos semelhantes das figuras acima, que a razão de semelhança $k=\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$.

A relação métrica entre áreas de figuras semelhantes mostra que toda vez que dividimos <u>as medidas</u> de dois lados correspondentes de dois <u>polígonos semelhantes</u> o resultado é a razão de semelhança "k". Se dividirmos <u>as áreas</u> desses mesmos polígonos, o resultado será "k²".

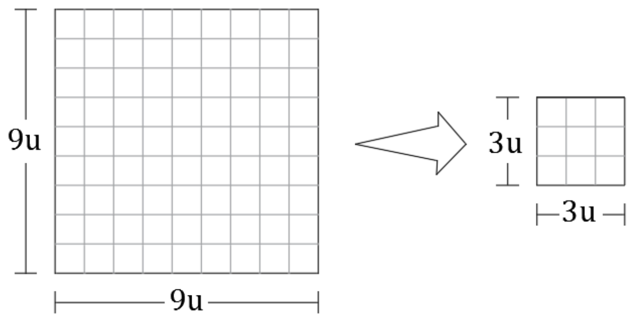
$$k=\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\ \Rightarrow\ \frac{S}{s}=\left(\frac{A}{a}\right)^2=\left(\frac{B}{b}\right)^2=\left(\frac{C}{c}\right)^2=k^2$$

Essas relações métricas não ocorrem apenas em figuras regulares, nem apenas em polígonos convexos. Elas podem ocorrer também em polígonos irregulares e não-convexos, como os polígonos abaixo. Os únicos requisitos são aqueles: ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.



$$\frac{S_A}{S_B}=\left(\frac{2u}{u}\right)^2$$

Veja os exemplos dos quadrados abaixo. O quadrado maior, da esquerda, tem lados que medem "9u", enquanto o quadrado da direita tem lados que medem "3u".



A área dos quadrados é calculada como ℓ^2, seja ℓ o lado do quadrado. Ou seja, a área do quadrado da esquerda mede "$81\,u^2$", enquanto a área do quadrado menor da direita mede "$9u^2$".

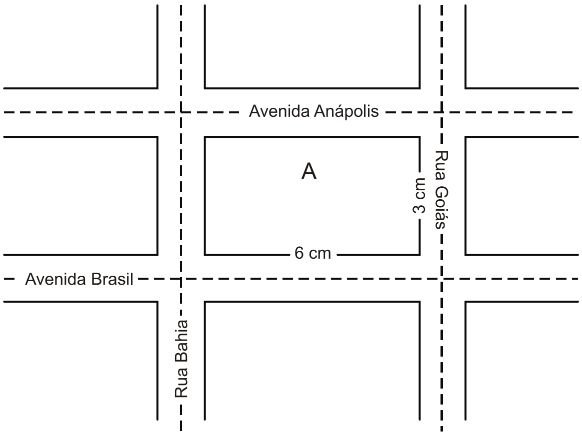
Portanto, podemos falar que a razão entre as áreas dos dois quadrados é igual a $r_a=\frac{81\,u^2}{9\,u^2}=9$.

Observando a medida dos lados dos quadrados, a razão entre os lados seria $\ell=\frac{9u}{3u}=3$.

Perceba, dessa forma, que a teoria se confirma e que a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os lados:

$$r_a=(r_\ell)^2\ \Rightarrow\ \frac{81\,u^2}{9\,u^2}=\left(\frac{9u}{3u}\right)^2\ \Rightarrow 9=3^2$$

Exemplo 1. Analise o desenho.



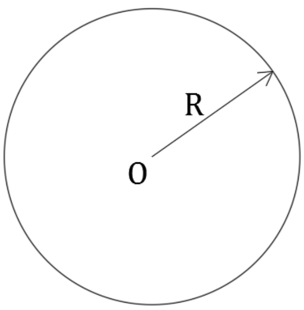
Tendo em vista que, na planta acima, a quadra A possui uma área de 1800 m², a escala numérica da planta é:
a) 1:10000
b) 1:1000
c) 1:100
d) 1:10

========== **Círculo e Circunferência** ==========

- 6.3 Comprimento da Circunferência

A circunferência é uma linha curva fechada que delimita uma região circular. A definição de circunferência é o "conjunto dos pontos que equidistam (têm uma mesma distância) de um ponto central (O).

A essa distância fixa, nós damos o nome de raio (R), como na figura abaixo. Para calcularmos o perímetro (ou comprimento) dessa linha curva, ou seja, o percurso que um ponto faz quando dá uma volta completa na circunferência, há uma relação com este raio, como na fórmula abaixo:



Perímetro: $2p = 2 \cdot \pi \cdot R$

Exemplo 2. (FGV 2017)

Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

a) 63 cm.
b) 12,6 m.
c) 6,3 km.
d) 12,6 km.
e) 63 km.

Exemplo 3. (ENEM PPL 2016)

Um ciclista A usou uma bicicleta com rodas com diâmetros medindo 60 cm e percorreu, com ela, 10 km. Um ciclista B usou outra bicicleta com rodas cujos diâmetros mediam 40 cm e percorreu, com ela, 5 km.

A relação entre o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista A e o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista B é dada por

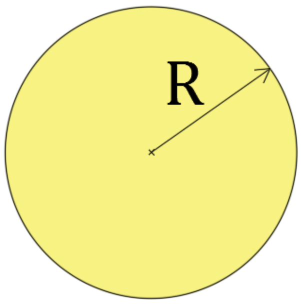
(Considere 3,14 como aproximação para π.)

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{3}{2}$

- 6.4 Área do Círculo

Chamamos de "círculo" a região interna da circunferência, o conjunto de todos os pontos que estão dentro da circunferência.

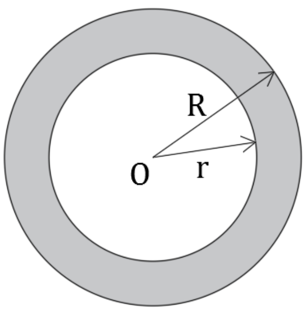
Como toda região superficial, o círculo tem uma área, e essa área também tem uma relação com o raio da circunferência. Diferente do perímetro da circunferência, a área do círculo está relacionada com o quadrado do raio, como na fórmula abaixo:



Área: $S = \pi \cdot R^2$

- 6.5 Área da Coroa

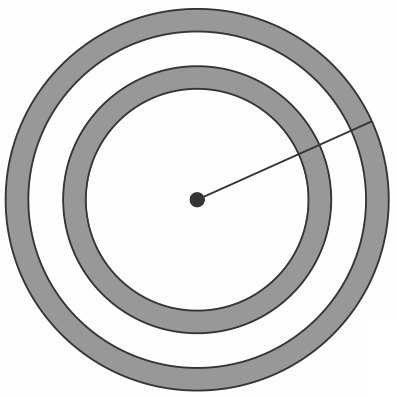
Calcular a área da coroa nada mais é do que calcular a área de dois círculos: um maior, externo (cinza na figura), e um menor, interno (branco na figura). A área da coroa, portanto, é a subtração entre essas duas regiões:



$S_{coroa} = S_{fora} - S_{dentro}$

$S_{coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

Exemplo 4. Na figura a seguir, há 4 circunferências concêntricas cujos raios medem 1,0 cm; 0,9 cm; 0,8 cm; 0,7 cm.



A área da região sombreada, em cm^2, é

(use 3 como aproximação para π)

a) 1,02.

b) 1,59.

c) 1,92.

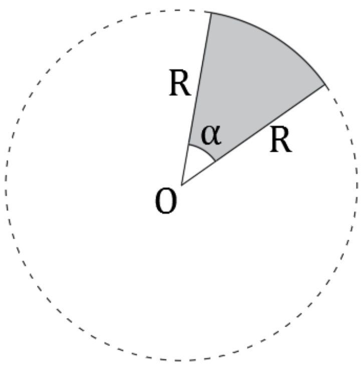
d) 2,25.

- 6.6 Área do Setor Circular

O setor circular é uma área delimitada pela circunferência e por dois raios que partem do centro da circunferência, como uma "fatia de pizza". Esse setor circular tem um ângulo central, como α na figura abaixo, e como toda região fechada, possui uma área.

Percebemos que o setor circular é uma parte da região circular, ou seja, ele é uma <u>fração da área do círculo</u>. Assim, podemos afirmar que a área do setor circular é <u>diretamente proporcional</u> ao valor de α, pois a área de todo o círculo é diretamente proporcional a 360º, que é o ângulo central de uma região circular completa.

Com isso, chegamos à equação abaixo:



$$S_{setor} = \frac{\hat{a}}{360^\circ} \cdot \pi \cdot R^2$$

Exemplo 5. (ENEM PPL 2016)

Tradicionalmente uma *pizza* média de formato circular tem diâmetro de 30 cm e é dividida em 8 fatias iguais (mesma área). Uma família, ao se reunir para o jantar, fará uma *pizza* de formato circular e pretende dividi-la em 10 fatias também iguais. Entretanto, eles desejam que cada fatia dessa *pizza* tenha o mesmo tamanho (mesma área) de cada fatia da *pizza* média quando dividida em 8 fatias iguais.

Qual o valor mais próximo do raio com que deve ser feita a *pizza*, em centímetro, para que eles consigam dividi-la da forma pretendida?
Use 2,2 como aproximação para $\sqrt{5}$.
a) 15,00
b) 16,50
c) 18,75
d) 33,00
e) 37,50

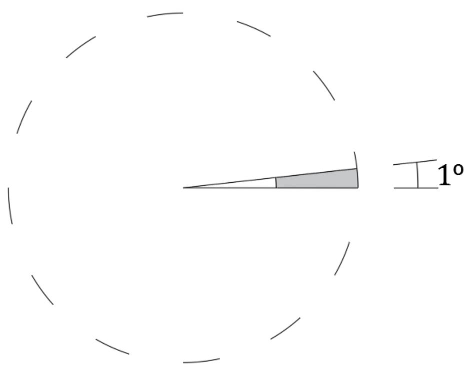
- 6.7 Sistema de Medida de Ângulos e Arcos

Assim como quando falamos de áreas, medir um ângulo é compará-lo com um padrão, isso é, que foi escolhido como unidade de medida. Há variadas formas de medir ângulos e arcos, e aqui trabalharemos duas maneiras distintas, que são as mais usuais.

a) O sistema sexagesimal: graus

Em cerca de 4000 a.C., os egípcios que se dedicavam ao estudo da Matemática e da Astronomia chegaram à teoria de que o tempo que o Sol levava para percorrer uma volta completa em volta da Terra era de 360 dias. Dessa forma, o deslocamento diário do Sol na translação à Terra era de um arco correspondente a $\frac{1}{360}$ da suposta circunferência de órbita.

Devido a essa crença, esse padrão foi escolhido como unidade de medida de arcos, e estabeleceu-se a medida "grau":



$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ do arco total da circunferência}$$

O submúltiplo do "grau" é o "minuto", e seu submúltiplo é o "segundo", como as relações abaixo:

$$1^\circ = 60' \qquad \text{e} \qquad 1' = 60''$$

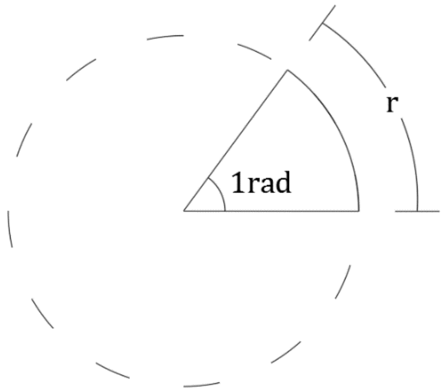
Exemplo 6. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando são 9h30?

Exemplo 7. Caminhando 100 metros pelo contorno de uma praça circular, uma pessoa descreve um arco de 144°. Desse modo, é correto afirmar que a medida, em metros, do raio da circunferência da praça é

a) 125π
b) $\frac{175}{\pi}$
c) $\frac{125}{\pi}$
d) $\frac{250}{\pi}$
e) 250π

b) O sistema natural: radianos

O radiano é a medida do Sistema Internacional (SI) de medida de ângulos e arcos. Ele é simbolizado por "rad" e é a medida de um ângulo central associado a um arco cujo comprimento coincide com a medida do raio da circunferência que o contém.



Ou seja, se a medida do raio da circunferência é 10 cm, o arco cujo comprimento é 10cm tem medida do ângulo central igual a 1 rad.

É por esse motivo também que a medida de uma circunferência completa – 360º, em graus – vale 2π radianos, já que o comprimento desse arco vale o raio "r" multiplicado por 2π. Meia circunferência – 180º, em graus – vale π radianos, e assim por diante.

Podemos, inclusive, estabelecer uma proporção entre o ângulo central e a medida do comprimento do arco, da seguinte forma:

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{2\pi r}{2\pi} \Rightarrow \frac{L}{\alpha} = r \Rightarrow L = \alpha \cdot r$$

Ou seja, a medida de comprimento L de um arco qualquer de circunferência será igual ao produto do ângulo central (em radianos) pela medida do raio da circunferência.

Exemplo 8. (Escola Naval 2014)

Rola-se, sem deslizar, uma roda de 1 metro de diâmetro, por um percurso reto de 30 centímetros, em uma superfície plana. O ângulo central de giro da roda, em radianos, é
a) 0,1
b) 0,2
c) 0,3
d) 0,6
e) 0,8

========== **Quadriláteros Notáveis** ==========

- 6.8 Quadriláteros

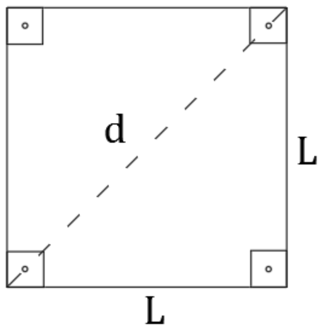
Os quadriláteros são polígonos de 4 lados, cada um com suas características particulares. São notáveis aqueles quadriláteros que tenham pelo menos dois lados paralelos. São eles o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o trapézio e o losango.

a) Quadrado

As características do quadrado são:

- lados paralelos dois a dois e congruentes;
- todos os ângulos retos;
- diagonais perpendiculares e congruentes.

A relação entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado, bem como a medida da área do quadrado em função da medida do lado são expressas a seguir:



$A = \ell^2$

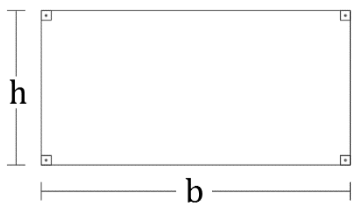
$d = \ell\sqrt{2}$

b) Retângulo

O retângulo tem algumas características semelhantes às do quadrado, mas nem todas:

- lados paralelos dois a dois;
- todos os ângulos retos;
- diagonais congruentes, mas não perpendiculares.

A medida da área do retângulo em função da sua base e da sua altura é expressa a seguir:



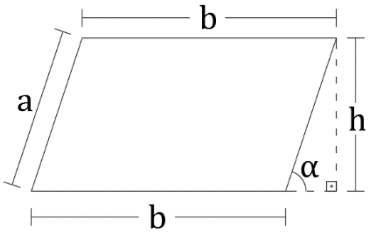
$A = b \cdot h$

c) Paralelogramo

Já no paralelogramo, temos as seguintes propriedades:

- lados paralelos dois a dois;
- ângulos consecutivos suplementares e ângulos opostos congruentes;
- diagonais não são congruentes e nem perpendiculares, mas se cruzam no ponto médio.

A área do paralelogramo é função da base e da altura do polígono, e essas relações estão expressas a seguir:

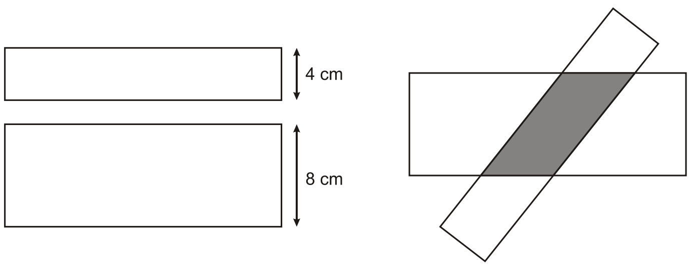


$$A = b \cdot h$$

$$h = a \cdot \text{sen}\alpha$$

Exemplo 9. (UPE 2013)

Dois retângulos foram superpostos, e a intersecção formou um paralelogramo, como mostra a figura abaixo:



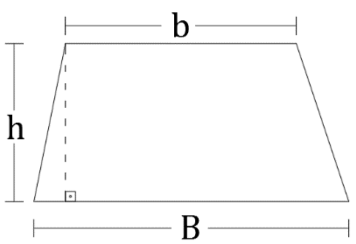
Sabendo-se que um dos lados do paralelogramo mede 4,5 cm, quanto mede a área desse paralelogramo?
a) 12 cm^2
b) 16 cm^2
c) 24 cm^2
d) 32 cm^2
e) 36 cm^2

d) Trapézio

Já o trapézio tem características peculiares:

- dois lados paralelos, chamados de bases menor e maior, e dois lados não paralelos;
- ângulos adjacentes aos lados não paralelos são suplementares;

A maneira de calcular a área do trapézio leva em conta sua altura, como na fórmula a seguir:



$$A = B_M \cdot h$$

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Exemplo 10. (PUCCAMP 2017)

Os lados de uma folha retangular ABCD de papel medem 10 cm e 6 cm, como indica a Figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C, como mostra a Figura 2.

Figura 1

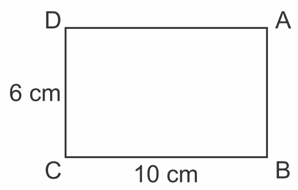
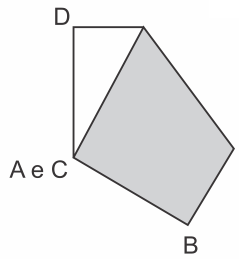


Figura 2



A área do trapézio cinza indicado na Figura 2, em cm², é igual a
a) 23. b) 30. c) 25. d) 40. e) 45.

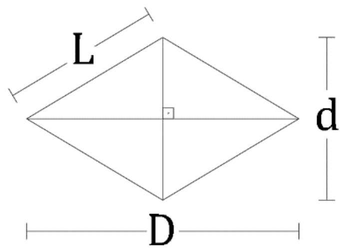
e) Losango

Por último, o losango também tem propriedades peculiares:

- todos os lados têm a mesma medida (L, na figura abaixo), e são paralelos dois a dois;
- ângulos consecutivos são suplementares;
- diagonais são perpendiculares e se cruzam no ponto médio.

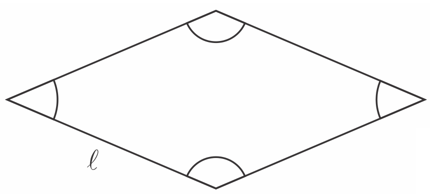
Uma característica interessante é que as diagonais do losango formam 4 triângulos retângulos, e isso é explorado nas questões desse polígono.

A fórmula para o cálculo da área do losango utiliza a medida das duas diagonais:



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Exemplo 11. (UCS 2015)
No losango abaixo dois ângulos medem 120º e o lado ℓ mede 4 cm.



Qual das expressões a seguir, corresponde à soma das medidas das diagonais do losango?

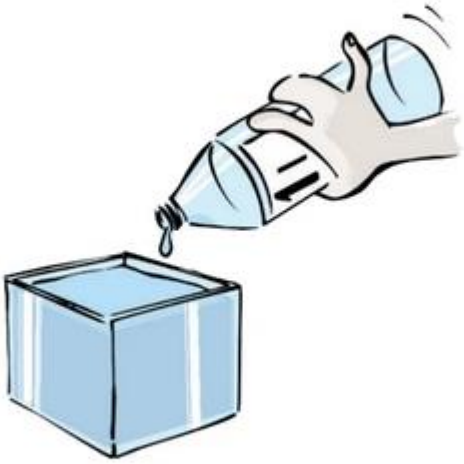
a) $4(1+\sqrt{3})$ b) $1+\sqrt{3}$ c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

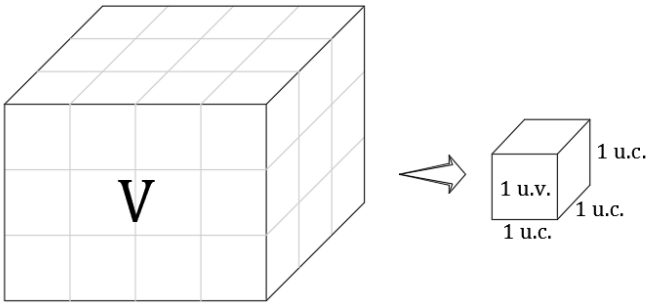
========== **AULA 7. Geometria Espacial I** ==========

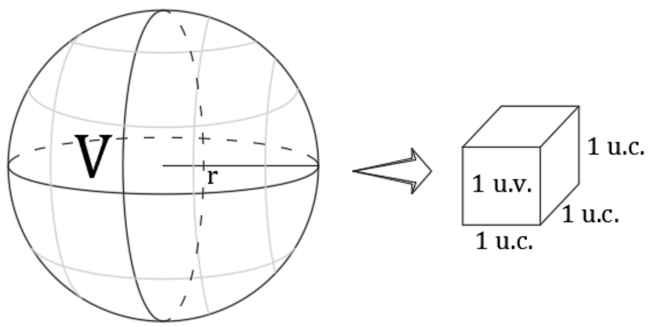
- 7.1 Uma breve introdução sobre Volumes

Falar sobre volume é o mesmo que falar sobre capacidade de ocupação em um espaço de três dimensões. Quantas vezes um cubinho de 1cm de lado composto de água cabe dentro de uma caixa como a da figura abaixo?



Toda região espacial, plana ou não, fechada e composta por segmentos lineares ou curvas possui uma "capacidade" de ser ocupado por cubos inteiros ou fracionados de lado unitário e área unitária, e a essa medida de "capacidade" de ocupação é o que chamamos de volume.



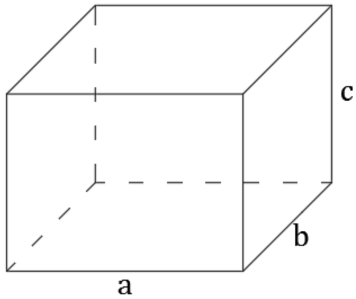


Da mesma forma que a área, quanto mais extensa for a região espacial, maior será o espaço a ser preenchido com cubinhos unitários, e maior, portanto, será o volume, e vice-versa.

Falaremos sobre volume nessa aula e na próxima, trazendo exemplos dos poliedros mais cobrados. Nessa aula, trabalharemos os paralelepípedos, os cubos, os prismas, os cilindros e as esferas.

- 7.2 Paralelepípedos

Paralelepípedos são sólidos formados por faces retangulares e paralelas. Essas faces podem ter medidas todas iguais – e recebe um nome especial, cubo – ou ter medidas diferentes.

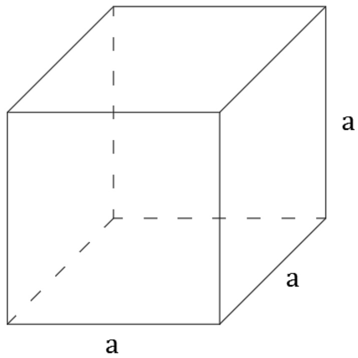


$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$A_{total} = 2ac + 2ab + 2bc$$

O cubo é um tipo de paralelepípedo, em que todas as arestas têm as mesmas medidas, ou seja, todas as faces são quadradas, como na figura abaixo.

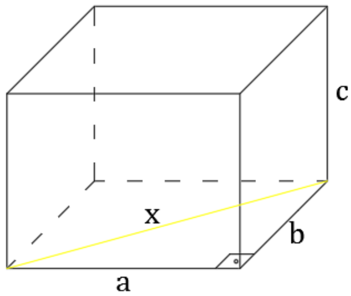
Como o cubo tem 6 faces ao todo, a área total será a área de um quadrado multiplicada por 6, como na fórmula abaixo. Já o volume pode ser calculado como a área da base multiplicada pela altura e, como todas as medidas são iguais, resulta na fórmula para o volume a seguir:



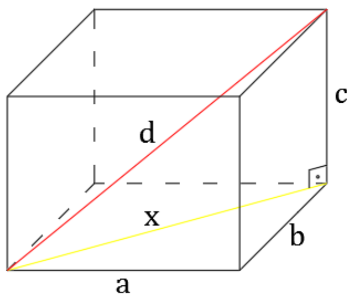
$$V = a^3$$

$$A_{total} = 6 \cdot a^2$$

Como em qualquer paralelepípedo as faces são todas retangulares, podemos descobrir a medida da diagonal do paralelepípedo aplicando-se duas vezes o Teorema de Pitágoras:



$$a^2 + b^2 = x^2$$



$$d^2 = x^2 + c^2$$
$$\Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Exemplo 01. (UEPG 2016)

Três cubos idênticos foram colados entre si formando um paralelepípedo, cuja área total vale 350 cm^2. Nesse contexto, assinale o que for correto e determine a soma dos valores das alternativas corretas:

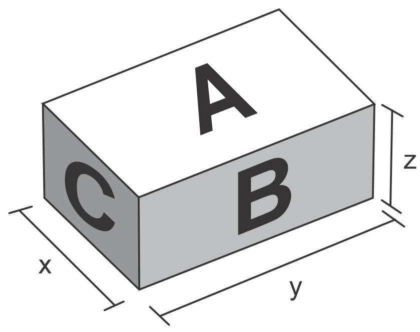
01) O volume do paralelepípedo é $475\,cm^3$.

02) A área total de cada cubo é $150\,cm^2$.

04) O volume de cada cubo é $125\,cm^3$.

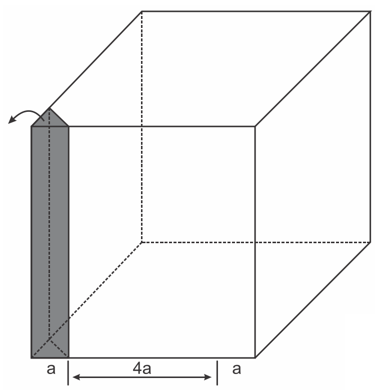
08) A soma de todas as arestas do paralelepípedo é 80 cm.

Exemplo 02. (Insper 2016)
A figura indica um bloco maciço com formato de paralelepípedo reto-retângulo. As áreas das faces indicadas por A, B e C são, respectivamente, 48 cm^2, 32 cm^2 e 24 cm^2.



O número de blocos como esse que devem ser mergulhados em um tanque completamente cheio de água para que haja um transbordamento de exatamente 4,8 litros de líquido é igual a
a) 28.
b) 25.
c) 24.
d) 20.
e) 18.

Exemplo 03. (FGV 2016)
Os quatro cantos de cubo de aresta 6a são cortados, obtendo-se um novo sólido geométrico sem os quatro prismas retos, como o prisma indicado como exemplo na figura abaixo.

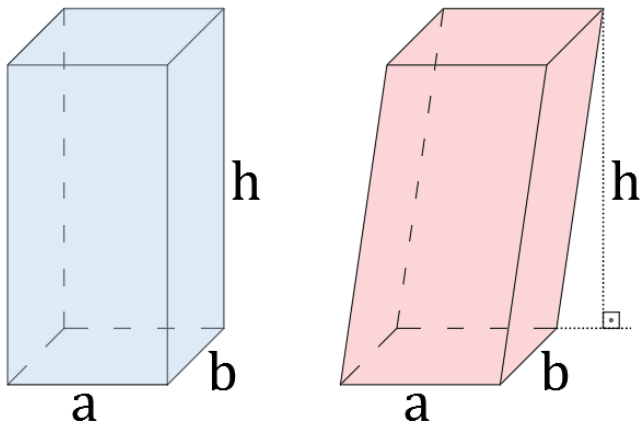


a) Qual é a área do sólido geométrico formado em termos de *a*?
b) Qual é o volume do novo sólido geométrico formado em termos de *a*?

- 7.3 Prismas

Prismas são poliedros com bases paralelas e congruentes e as demais arestas que ligam as bases paralelas entre si. As faces laterais do prisma são sempre paralelogramos.

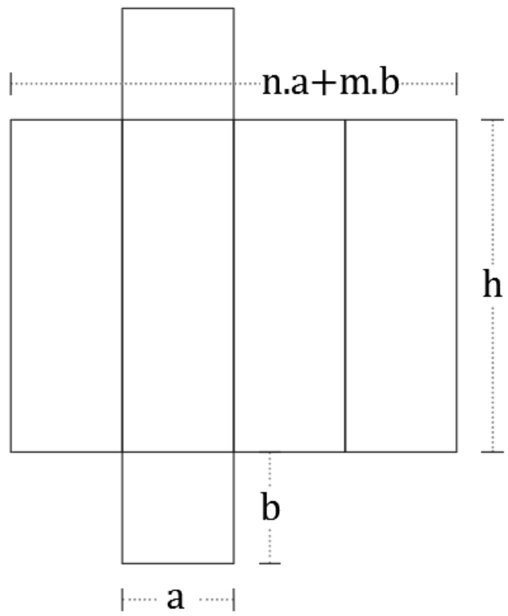
Os prismas são classificados como retos (azul, da esquerda), quando as arestas que ligam as duas bases são perpendiculares a elas e são classificados como oblíquos (róseo, da direita) quando as arestas são inclinadas em relação às bases.



As arestas das bases (a e b, nos desenhos) são os lados das bases, as arestas laterais unem as bases e a altura (h) representa a distância entre as bases.

a) Área total

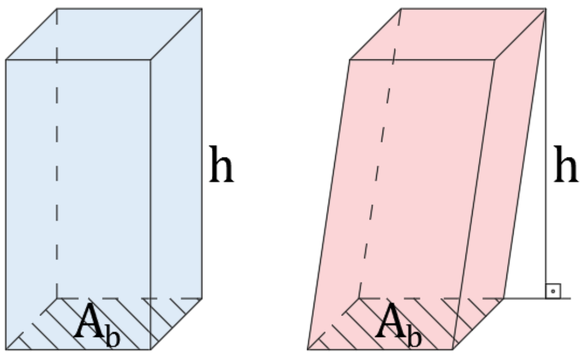
Para se conseguir visualizar uma forma de calcular a área lateral de um prisma, a melhor maneira é planificar o sólido. Planificar um prisma é a mesma coisa que representar todas as suas faces em um só plano, como na figura a seguir:



O cálculo da área total do prisma é muito facilitado quando usamos esse processo. A área total vale a soma das áreas das faces laterais e das áreas das bases, o que pode ser feito de maneiras variadas, caso a caso.

b) Volume

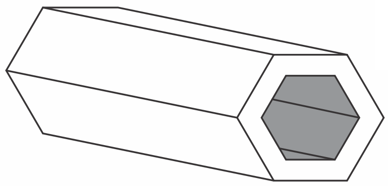
O cálculo do volume do prisma é semelhante ao cálculo do volume de paralelepípedos: multiplica-se a área da base pela altura. A diferença aqui é que a altura não necessariamente uma das arestas do sólido, como no prisma róseo à esquerda na figura a seguir. A fórmula para o cálculo do volume de prismas é dada abaixo:



$$V = A_b \cdot h$$

Exemplo 04. (UERN 2015)

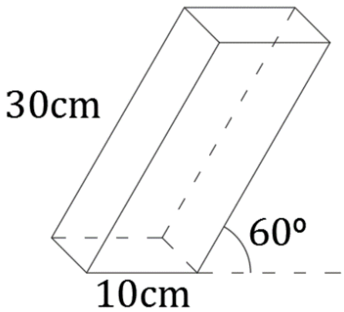
A peça geométrica, desenvolvida através de um *software* de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.



Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm; que o comprimento do prisma é igual a 35 cm; e, que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm^3:
(Considere $\sqrt{3} = 1{,}7.$)

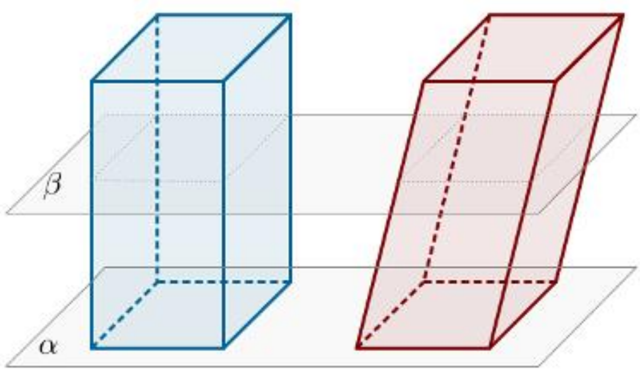
a) 1.064.
b) 1.785.
c) 2.127.
d) 2.499.

Exemplo 05. Determine a área total e o volume do prisma oblíquo de base quadrada ao lado, sabendo que as faces laterais são congruentes duas a duas.



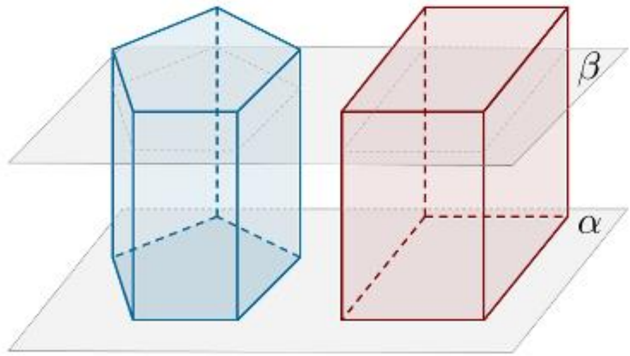
- 7.4 Princípio de Cavalieri

O matemático Cavalieri percebeu que, deformando-se um prisma como o prisma róseo abaixo, caso este prisma permaneça com a mesma área da base e a mesma altura, seu volume permanecerá inalterado. Prismas são classificados como <u>equivalentes</u> quando possuem o mesmo volume. Observa a figura a seguir:



Note que o corte do plano β nos dois prismas forma quadrados congruentes nos dois sólidos. Portanto, os quadrados têm a mesma área. Como os dois prismas possuem a mesma altura, continuam equivalentes após a deformação do prisma da direita.

Esse mesmo princípio pode ser aplicado a prismas que têm polígonos diferentes na base, como o pentágono e o quadrado dos sólidos a seguir. Caso as áreas das bases sejam congruentes e os prismas tenham a mesma altura, podemos garantir que eles são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume.

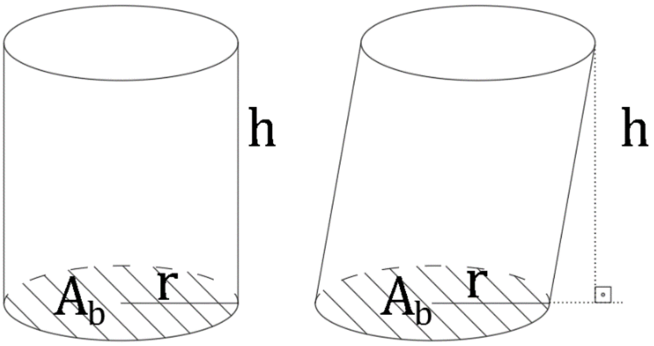


Por meio desse princípio, é possível chegar ao volume de qualquer prisma utilizando o volume de um outro prisma, desde que ambos tenham a mesma altura e saibamos, ao menos, a relação de semelhança entre as áreas das bases.

Esse princípio também pode ser aplicado a sólidos que tenham bases não-poligonais, como os cilindros, que veremos a seguir.

- 7.5 Cilindros

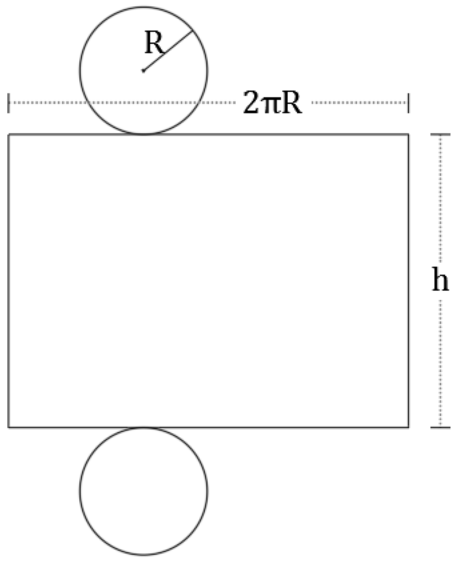
Cilindros são sólidos de propriedades muito semelhantes às propriedades dos prismas, com uma diferença: as bases no cilindro são circulares.



a) Área total

Ainda mais necessário que nos prismas é a planificação nos cilindros. Para entendermos como se calcula a área total de um cilindro, basta pensarmos no rótulo de uma lata de leite em pó sendo retirado da lata: é o mesmo processo, de transformar uma superfície curva em uma superfície plana.

Dessa forma, a área total do cilindro resulta na soma da área lateral – um retângulo – e as áreas das duas bases circulares do cilindro, como na figura e nas fórmulas abaixo:



$$S_{lat} = 2\pi r \cdot h$$

$$S_{total} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

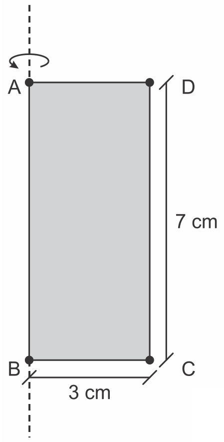
b) Volume

O cálculo de volumes nos cilindros também é muito parecido com o cálculo em paralelepípedos, com a característica única de que a área da base é circular é circular, como na figura do início da página. O cálculo de volume pode se resumir à seguinte fórmula da direita:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h$$

Exemplo 06. (FMP 2018)

A figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD em torno da reta definida pelo seu lado AB.

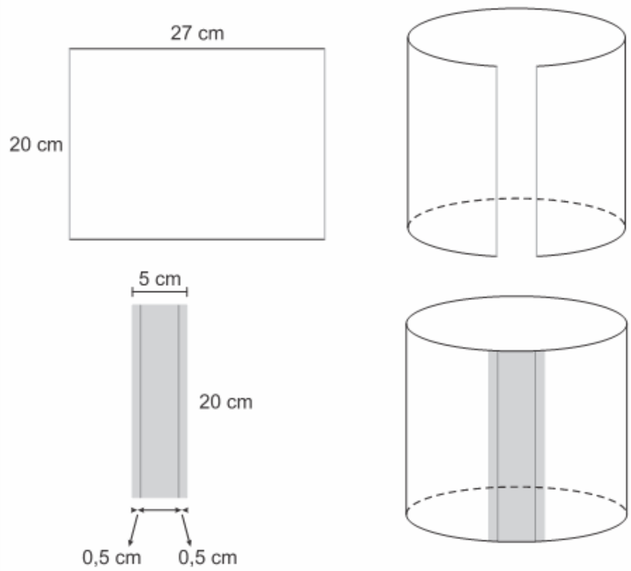


A medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é mais próxima de

a) 750
b) 441
c) 63
d) 126
e) 190

Exemplo 07. (UNESP 2018)

Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm, conforme indica a figura.

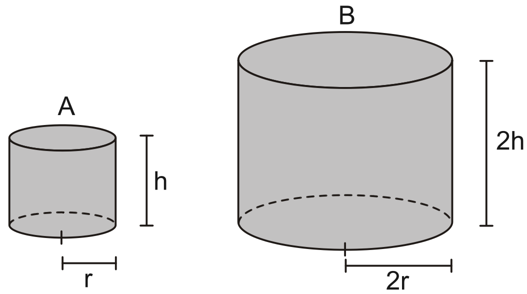


Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando $\pi = 3{,}1$, o volume desse cilindro é igual a

a) $1.550\ cm^3$.
b) $2.540\ cm^3$.
c) $1.652\ cm^3$.
d) $4.805\ cm^3$.
e) $1.922\ cm^3$.

Exemplo 08. (UEA 2014)

As figuras mostram um cilindro reto A, de raio da base r, altura h e volume V_A, e um cilindro reto B, de raio da base 2r, altura 2h e volume V_B, cujas superfícies laterais são retângulos, de áreas S_A e S_B.

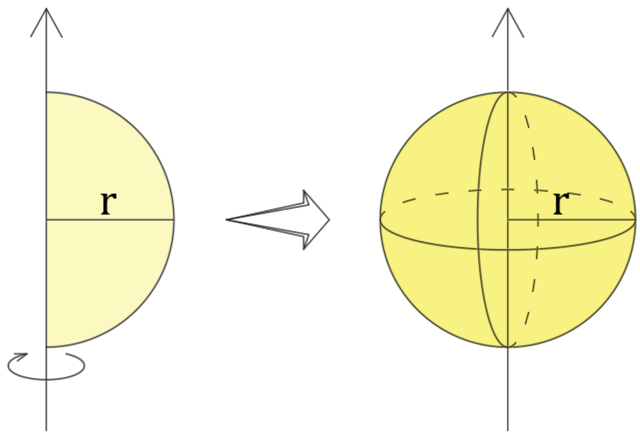


Nesse caso, é correto afirmar que $\frac{S_A}{S_B}$ e $\frac{V_A}{V_B}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$

- 7.6 Esfera

A esfera é um sólido geométrico obtido através da revolução de um semicírculo em torno de um eixo, como na figura abaixo. A esfera é uma superfície em que todos os pontos têm uma mesma distância ao centro, que é igual ao raio (r).



Com isso, forma-se um sólido em que qualquer seção plana gera um círculo, como o "Trópico de Capricórnio" ou o "Círculo Polar Ártico" na Terra (a menos que você, errr, ache que a Terra é plana...). Ou também podemos perceber isso em fatias de uma laranja, como na imagem a seguir:

a) Área da superfície

A área da superfície de uma esfera de raio "r" pode ser encontrada com a fórmula abaixo:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

b) Volume

Já o volume da esfera de raio "r" pode ser calculado com a fórmula a seguir:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

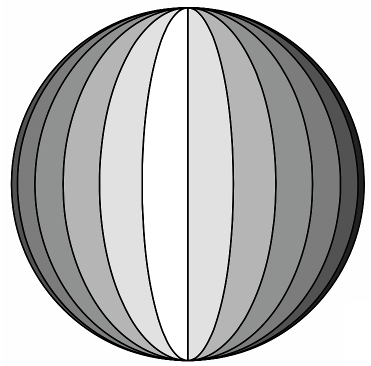
Obs.: a demonstração das fórmulas com os conceitos do Ensino Médio é extensa, mas interessante. Deixarei o link de dois vídeos que trabalham essas demonstrações para quem tiver interesse:

Área da esfera

Volume da esfera

Exemplo 09. (UDESC 2015)

Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



Sabendo-se que o volume da bola é $2304\pi\ \text{cm}^3$, então a área da superfície de cada faixa é de:

a) $20\pi\ \text{cm}^2$
b) $24\pi\ \text{cm}^2$
c) $28\pi\ \text{cm}^2$
d) $27\pi\ \text{cm}^2$
e) $25\pi\ \text{cm}^2$

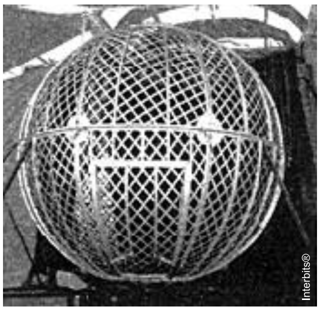
Exemplo 11. (UPE 2018)

Foram colocadas esferas de raio 5,0 cm dentro de um aquário que tem o formato de um paralelepípedo de 1,25 m de largura, 2,0 m de comprimento e 1,0 m de altura, cheio de água, ocupando sua capacidade máxima. Aproximadamente, quantas esferas terão que ser colocadas nesse aquário para que 10% do volume contido no seu interior seja derramado? Adote $\pi \cong 3{,}0$

a) 250
b) 300
c) 325
d) 450
e) 500

Exemplo 10. (ENEM 2012)

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.



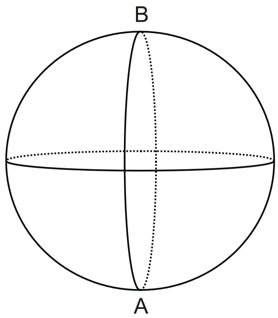
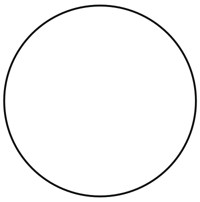


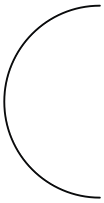
Figura 1 Figura 2

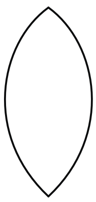
Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

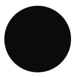
Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em: 29 fev. 2012.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por


a)


b)


c)


d)

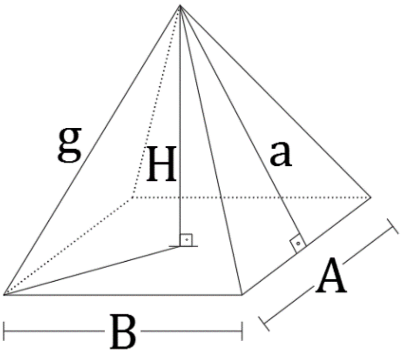

e)

========== **AULA 8. Geometria Espacial II** ==========

- 8.1 Pirâmides

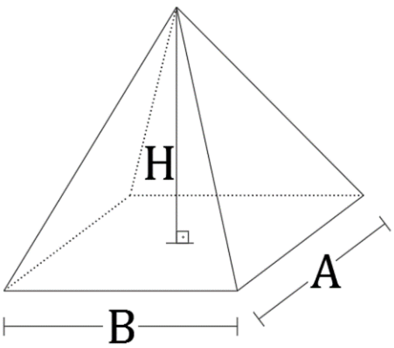
As pirâmides são formadas por uma base poligonal, – que pode ser quadrada, pentagonal, hexagonal entre outras – e mais um vértice não pertencente a essa base. Todos os pontos da base da pirâmide são ligados ao vértice por segmentos, gerando as faces triangulares da pirâmide.

As pirâmides têm uma altura (H), que é o segmento que une o vértice e a base e é perpendicular à base; têm arestas da base (A e B, na figura) e arestas laterais (g), que são os segmentos que formam os polígonos da base e das laterais; têm apótemas laterais (a), que são as alturas de cada face lateral; e apótemas da base, que aparecem nas pirâmides de base regular e representam a distância entre a projeção do vértice na base e qualquer lado da pirâmide.



As faces laterais da pirâmide são sempre triangulares, portanto a área lateral da pirâmide será a soma das áreas dos triângulos que compõem as faces laterais do sólido. A área total será a soma da área lateral com a área da base, que também é variável de acordo com o tipo de polígono que forma a base.

Já o volume da pirâmide, mais cobrado, pode ser calculado de acordo com a fórmula abaixo:



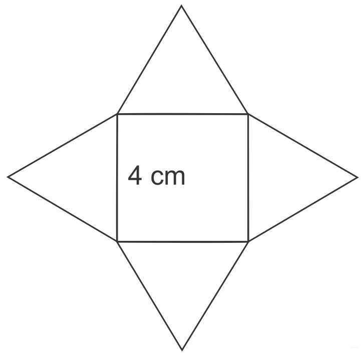
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$$

Você pode estar curioso para saber como as Pirâmides do Egito foram construídas, como eu fiquei. Então deixo aqui um QR code para um vídeo sobre o assunto!

Exemplo 01. (UFPR 2016)

Temos, abaixo, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^3.

b) $16\sqrt{3}$ cm^3.

c) 32 cm^3.

d) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ cm^3.

e) $\frac{64}{3}$ cm^3.

Exemplo 02. (UPF 2018)

A medida de cada aresta do cubo da figura 1 é 2 cm, e os pontos A, B e C são pontos médios de três arestas. Seccionando o cubo por um plano que passe por ABC, podemos retirar o sólido que se forma em seu vértice. Se repetirmos esse procedimento em todos os vértices do cubo, obtemos um cubo truncado, como mostra a figura 2.

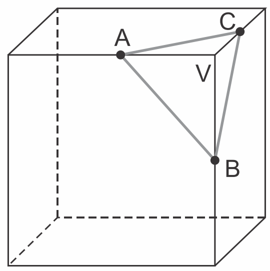


Figura 1

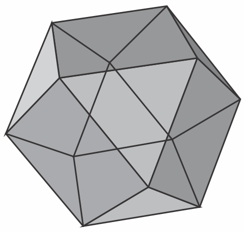


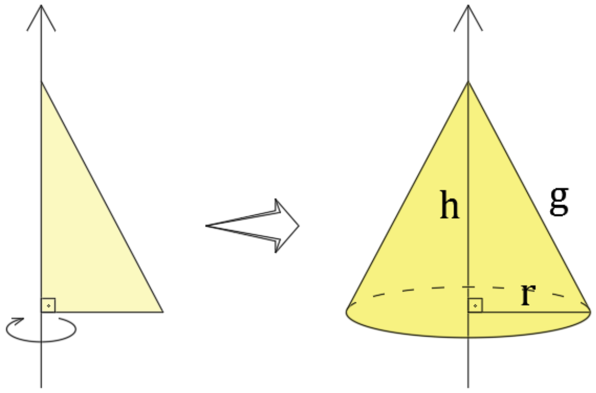
Figura 2

O volume do cubo truncado, em cm^3, é

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{16}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{47}{6}$ e) $\frac{20}{3}$

- 8.2 Cones

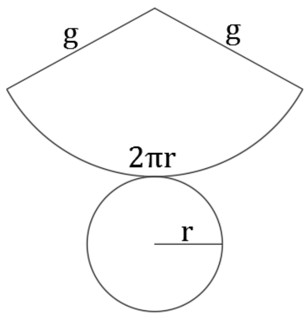
Cones são sólidos formados pela revolução de um triângulo retângulo, como na figura abaixo. Ele possui uma base circular, ou seja, que tem um raio (r). A lateral do cone é formada por infinitos segmentos que partem do vértice do cone até a sua base. Esses segmentos são o que chamamos de geratriz (g). Além da geratriz e do raio, o triângulo retângulo também possui um segmento que une o centro da base do cone ao vértice e chamado de altura (h), como na figura abaixo:



a) Área total

A área total de um cone é formada por duas áreas: a área da base circular, que equivale à área de um círculo, e a área lateral do cone, que equivale à área de um setor circular de raio igual à geratriz do cone, como na figura abaixo.

As áreas lateral e da base são calculadas com base nas fórmulas abaixo:



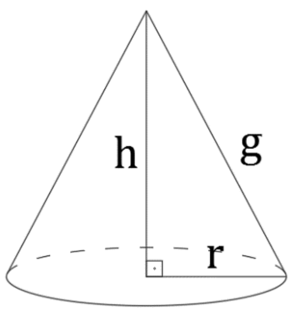
$$\begin{cases} A_{lat} = g \cdot r \cdot \pi \\ A_{base} = \pi \cdot r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{total} = g \cdot r \cdot \pi + \pi \cdot r^2$$

$$\therefore A_{total} = \pi r \cdot (g + r)$$

b) Volume

O cálculo do volume da pirâmide é muito parecido com o cálculo do volume de pirâmides, já que são sólidos parecidos. A diferença entre eles é a área da base (A_b), que aqui é circular. Portanto, o volume do cone se calcula de acordo com as seguintes fórmulas:

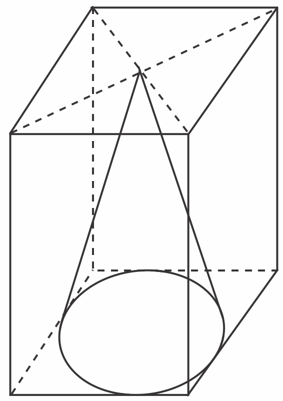


$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

Exemplo 03. (PUCRS 2016)

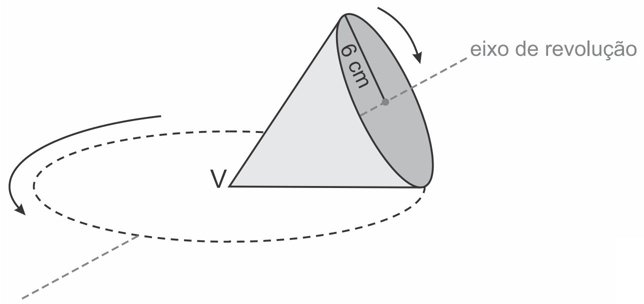
Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área 400 cm^2. Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é



a) 16000
b) $\frac{4000}{3\pi}$
c) $\frac{12}{\pi}$
d) $\frac{\pi}{12}$
e) $\frac{\pi}{36}$

Exemplo 04. (UNESP 2017)

Um cone circular reto, de vértice V e raio da base igual a 6 cm, encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone gira sob seu eixo de revolução que passa por V, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar, conforme mostra a figura.



O cone retorna à posição inicial após o círculo da sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Considerando que o volume de um cone é calculado pela fórmula $\frac{\pi r^2 h}{3}$, o volume do cone da figura, em cm^3, é igual a

a) $72\sqrt{3}\pi$
b) $48\sqrt{3}\pi$
c) $36\sqrt{3}\pi$
d) $18\sqrt{3}\pi$
e) $12\sqrt{3}\pi$

- 8.3 Troncos

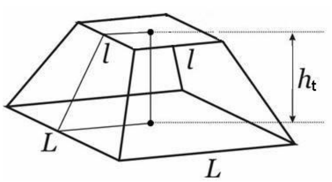
Troncos de pirâmide e cone são sólidos obtidos ao se realizar uma seção transversal paralela à base da pirâmide ou do cone anterior. A parte inferior dessa seção é o que se chama de tronco, como nas figuras abaixo.

a) Tronco de Pirâmide

No tronco de pirâmide, as bases são formadas por polígonos semelhantes. Caso as bases da pirâmide original sejam polígonos regulares, as arestas laterais (que ligam as duas bases) serão congruentes e as faces laterais serão trapézios isósceles.

Dessa forma, a área total do tronco de pirâmide será a soma das áreas das duas bases com a área de vários trapézios isósceles das faces laterais.

Já o volume, que é o item mais cobrado quando se trata de troncos de pirâmide, é calculado subtraindo-se o volume da pirâmide superior "descartada" e o volume "total" da pirâmide. O que resta é o volume do tronco de pirâmide, que pode ser obtido pela fórmula abaixo:

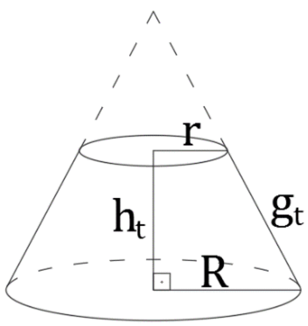


$$V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left[B + b + \sqrt{B \cdot b} \right]$$

b) Tronco de Cone

Para o tronco de cone, o raciocínio é exatamente o mesmo! A diferença é que as bases são círculos e que a área lateral é composta por um setor de coroa circular.

O volume do tronco de cone também é obtido subtraindo volumes, o que resulta na fórmula a seguir:



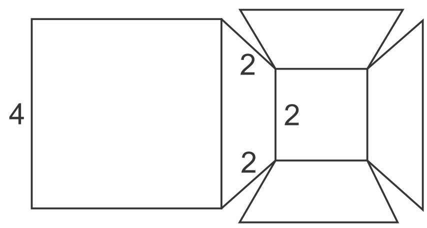
$$V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left[B + b + \sqrt{B \cdot b} \right]$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left[\pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot R \cdot r \right]$$

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left[R^2 + r^2 + R \cdot r \right]$$

Exemplo 05. (UFRGS 2015)

Considere a planificação do sólido formado por duas faces quadradas e por quatro trapézios congruentes, conforme medidas indicadas na figura representada abaixo.



O volume desse sólido é

a) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

b) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$.

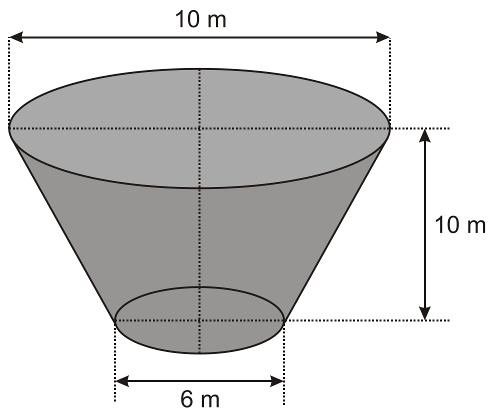
c) $8\sqrt{2}$.

d) $16\sqrt{2}$.

e) $20\sqrt{2}$.

Exemplo 06. (Esc. Naval 2013)

A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?



a) $\frac{40}{3}10^2\pi$

b) $\frac{19}{2}10^5\pi$

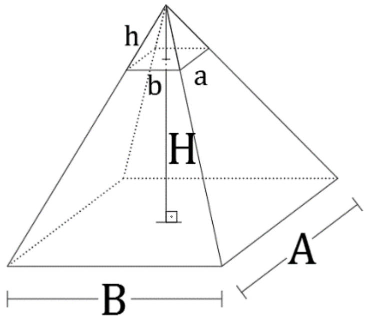
c) $\frac{49}{3}10\pi$

d) $\frac{49}{3}10^4\pi$

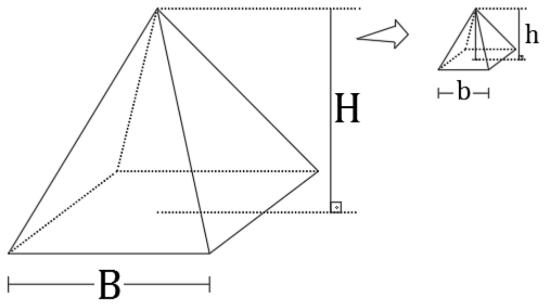
e) $\frac{19}{3}10^3\pi$

- 8.4 Relações Métricas entre Comprimento e Volume

Assim como falamos de relações métricas quando tratamos de áreas, podemos trabalhar essas relações métricas quando se trata do cálculo de um volume. Para exemplificar essa relação entre sólidos semelhantes, vamos pegar o exemplo da pirâmide abaixo:



A proporção entre os lados das figuras, que chamaremos de "k", é o que chamamos de "razão de semelhança", tal qual as áreas. Podemos dizer, nas pirâmides semelhantes das figuras acima, que a razão de semelhança $k=\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{H}{h}$.

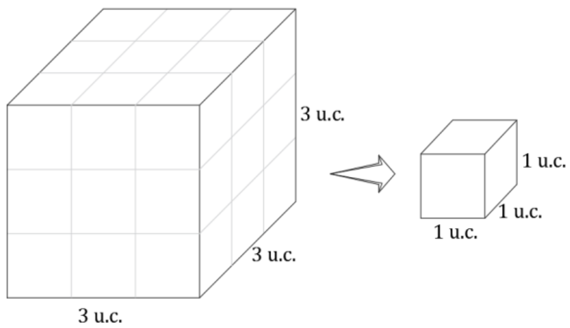


Com os sólidos separados, é mais fácil visualizar que a pirâmide pequena é como se fosse uma "miniatura" da pirâmide grande.

A relação métrica entre volumes de sólidos semelhantes mostra que toda vez que dividimos as medidas de dois lados correspondentes de dois sólidos semelhantes o resultado é a razão de semelhança "k", como vimos acima. Se dividirmos os volumes desses mesmos sólidos, o resultado será "k^3".

$$k=\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{H}{h}\Rightarrow\frac{v}{V}=\left(\frac{b}{B}\right)^3=\left(\frac{h}{H}\right)^3=k^3$$

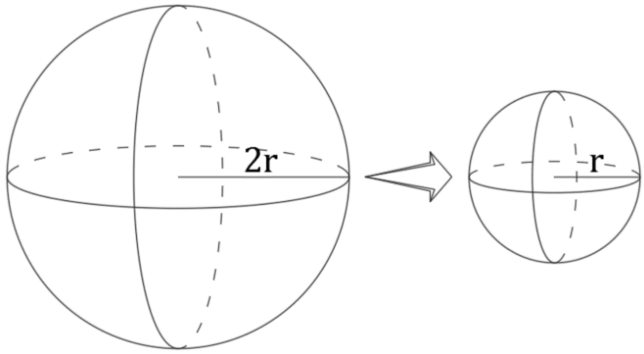
Assim como fizemos com as áreas, vamos ver essa relação aplicada a volumes:



Para esse caso dos cubos, temos:

$$\frac{v}{V}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\begin{cases}V=(3)^3=27\text{ u.v.}\\ v=(1)^3=1\text{ u.v.}\end{cases}$$

Já para as esferas abaixo, teremos:

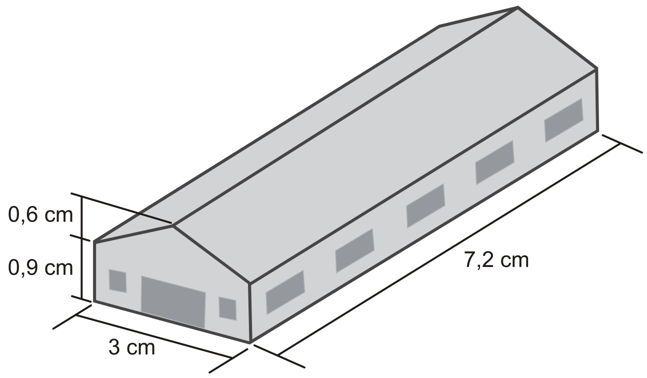


$$\frac{v}{V}=\left(\frac{r}{2r}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\begin{cases}V=\frac{4\pi(2r)^3}{3}=\frac{32\pi r^3}{3}\text{ u.v.}\\ v=\frac{4\pi(r)^3}{3}=\frac{4\pi r^3}{3}\text{ u.v.}\end{cases}$$

Exemplo 07. (FGV 2013)

A figura mostra a maquete do depósito a ser construído. A escala é 1:500, ou seja, 1cm, na representação, corresponde a 500 cm na realidade.

Qual será a capacidade, em metros cúbicos, do depósito?



Exemplo 08. (UEG 2013)

Uma coluna de sustentação de determinada ponte é um cilindro circular reto. Sabendo-se que na maquete que representa essa ponte, construída na escala 1:100, a base da coluna possui 2 cm de diâmetro e 9 cm de altura, o volume, em m^3 de concreto utilizado na coluna, é:
(Use $\pi = 3{,}14$)

a) 2,826
b) 28,26
c) 282,6
d) 2826

Bloco 3

Números e Operações

"No trabalho com Números e Operações deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa; interpretar gráficos, tabelas e dados numéricos veiculados nas diferentes mídias; ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone; interpretar informação dada em artefatos tecnológicos (termômetro, relógio, velocímetro). Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários.

Também é preciso proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir. Os números irracionais devem ser entendidos como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, sendo apropriado tomar o caso dos segmentos lado e diagonal de um quadrado como ponto de partida. Alguns números irracionais devem ser colocados em destaque: as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos e o número π, por exemplo. É pertinente, nesse nível de escolaridade, caracterizar os números racionais/irracionais por meio de suas expansões decimais e localizar alguns desses números na reta numérica.

As propriedades relativas às operações com números reais devem ser trabalhadas de modo que permitam ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas. Por exemplo, os alunos devem entender o que acontece com uma desigualdade quando ambos os lados são multiplicados por um mesmo número negativo, ou por que o quadrado de um número nem sempre é maior que o próprio número, ou como resolver inequações que envolvam quocientes. É recomendável que o professor retome, nesse momento, as "regras de sinais" para multiplicação de números inteiros acompanhadas de justificativas; as definições de multiplicação e divisão de frações; as explicações que fundamentam os algoritmos da multiplicação e da divisão de números inteiros e decimais. Mesmo que as operações e os algoritmos já tenham sido estudados no ensino fundamental, é importante retomar esses pontos, aproveitando a maior maturidade dos alunos para entender os pontos delicados dos argumentos que explicam essas operações e algoritmos.

Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$.*"*

================== **AULA 9.** ====================
== **Conjuntos Numéricos e Sistemas de Numeração** ==

- 9.1. Uma Breve Introdução

Quando falamos de conjuntos, falamos sobre uma ideia de coleção de objetos, que pode ser finita ou infinita. Pode ser uma coleção de pontos, de pessoas, de números, por exemplo.

Essa noção é muito utilizada, por exemplo, na Biologia. É comum classificar seres vivos por características comuns, das gerais para as específicas. Na Matemática, recorremos à ideia de conjuntos para classificar as figuras geométricas e os números.

Representamos conjuntos de números com letras maiúsculas e com os elementos entre chaves, como no exemplo do conjunto dos números ímpares a seguir:

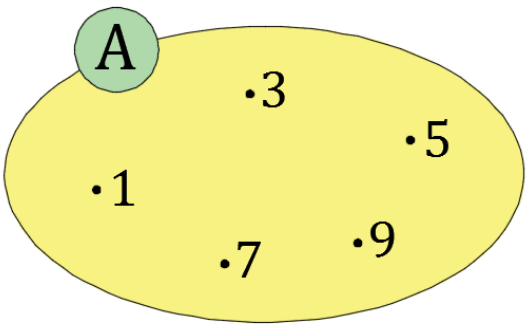
$$C_i = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$$

Essa representação pode ser feita mediante características – ou propriedades – exclusivas, como no exemplo a seguir:

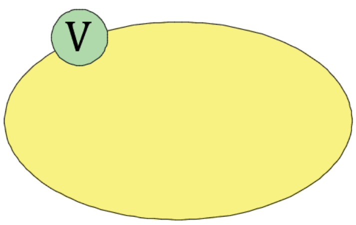
$$C_X = \{x \mid x \text{ é um número natural ímpar menor que } 10\}$$

Esse conjunto é equivalente a escrever um conjunto com os 5 números aparentes no conjunto C_i apresentado acima.

Uma terceira maneira de representar os conjuntos é através do diagrama de Venn, que é uma figura com pontos no interior de uma linha fechada, como o conjunto a seguir:

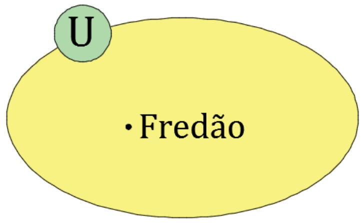


Podemos representar um conjunto vazio, como o conjunto V, das duas formas apresentadas. É um conjunto sem elementos:



$$V = \{\ \} \text{ ou } V = \varnothing$$

Podemos também representar um conjunto unitário – com apenas 1 elemento –, como o conjunto U, das duas formas apresentadas a seguir:



U = { x | x são pessoas maiores que 2,00m que gabaritaram a prova de matemática do ENEM}

ou $U = \{\text{Fredão}\}$

- 9.2 Conjuntos: os Naturais, os Inteiros e os Racionais

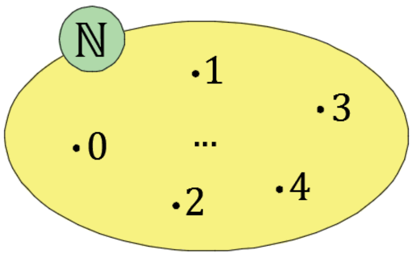
Nesse contexto de conjuntos, existem conjuntos numéricos usados para classificar os números de acordo com características específicas. Estudaremos alguns desses conjuntos a seguir.

a) Naturais

O conjunto dos Naturais surgiram a partir de uma necessidade de contagem de seres vivos. Hoje utilizamos esse conjunto para outras finalidades, como para compor códigos, como o número de telefone, e para indicar ordens (1º, 2º, 3º, ...).

Esse conjunto tem infinitos elementos e é indicado utilizando o símbolo $\mathbb{N}$, da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$



No conjunto dos números naturais são definidas duas operações: a adição e a multiplicação. Verificamos que quaisquer dois números naturais somados ou multiplicados sempre resultam em um número natural. Se efetuarmos a subtração, perceberemos que nem sempre a subtração de dois naturais resultará em um natural.

Dois “subconjuntos” – nome dado a um conjunto menor dentro de um outro conjunto – dos números naturais são o dos números pares positivos e o dos números primos.

b) Inteiros

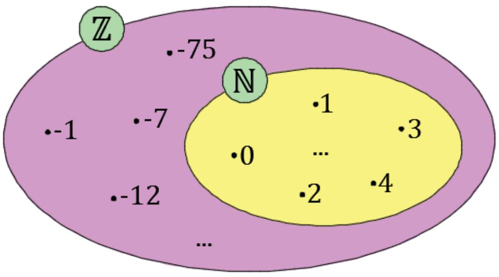
Quando começamos a fazer operações de subtração, percebemos que o conjunto dos números naturais não era suficiente para representar todos os números existentes.

Ganhos representaram números positivos, enquanto perdas precisavam ter seu espaço nos conjuntos.

Foi com essa demanda que surgiu o conjunto dos números inteiros, representados por $\mathbb{Z}$, que corresponde a uma extensão do conjunto dos números naturais, quando acrescentados os números negativos.

Esse conjunto também tem infinitos elementos e pode ser indicado dessas maneiras:

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$



Um subconjunto dos números inteiros é, por exemplo, o conjunto dos números inteiros negativos, que corresponde à área roxa da figura.

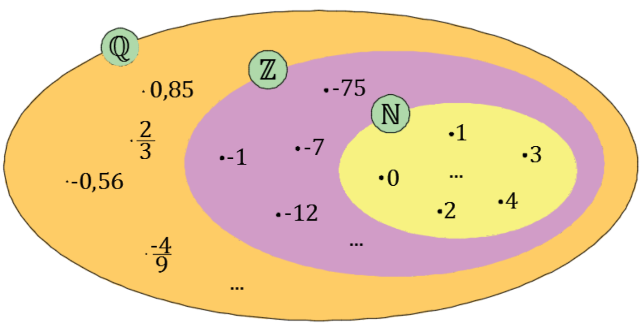
c) Racionais

Mais uma vez, a representação dos números com o conjunto dos que já conhecíamos não foi suficiente para todas as situações. Se temos que dividir uma unidade de pão entre vários famintos, passamos a trabalhar com um universo de números menores que uma unidade, que no contexto de seres vivos não fazia sentido.

A partir do momento em que se introduziu a <u>divisão</u>, surgiu a necessidade de expandir o horizonte, já que a divisão entre dois números inteiros pode resultar em um número que não seja inteiro. Como se representaria uma metade? Ou uma terça parte?

Com isso, surge o conjunto dos <u>racionais</u>, indicado pelo símbolo $\mathbb{Q}$ e representado como uma divisão entre dois inteiros *a* e *b*, com *a* sendo um número inteiro e *b* sendo um número inteiro diferente de zero, como na notação de conjuntos e na representação em diagrama a seguir:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \right\}$$



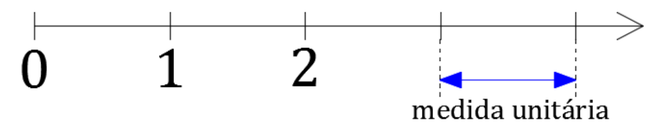
São racionais, portanto, todos os números decimais, exatos e não exatos, incluindo as dízimas periódicas. O conjunto dos racionais engloba todo o conjunto dos inteiros e, na região laranja, encontram-se apenas os números racionais que não são inteiros.

Falaremos mais adiante sobre a notação para representar *a* e *b* com as características que eles devem ter – pertencentes ao inteiro, sendo o denominador não-nulo.

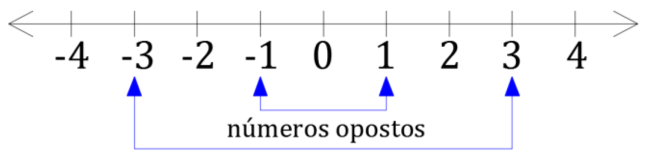
Somas e subtrações entre números racionais sempre geram um número racional como resultado. O mesmo acontece com a multiplicação e com a divisão.

d) Locação na Reta Numérica

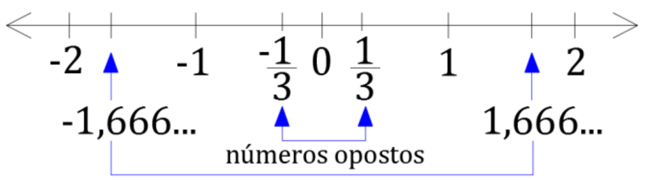
Para representar os números <u>naturais</u> em uma reta orientada, primeiro marcamos um ponto e associamos a ele o número zero. A partir desse ponto, escolhemos uma medida unitária e marcamos, à sua direita, pontos equidistantes, conforme a figura a seguir:



Todo número natural pode ser associado a um ponto na reta numérica. Isso também ocorre com os números <u>inteiros</u>, a diferença é que os inteiros não têm um ponto de partida, nem de chegada, em nenhum dos dois lados da reta, ou seja, não tem um menor e nem um maior elemento. Podemos representar os números inteiros na reta numérica como na figura a seguir:



Por fim, entre os conjuntos apresentados, falta apenas a reta numérica associada ao conjunto dos <u>racionais</u>. Essa reta é equivalente à reta dos números inteiros – não tem um ponto de início e nem de final –, mas diferente dos inteiros, nos racionais temos uma propriedade particular: entre cada dois números racionais sempre existe um número racional. Os racionais podem ser expressos na reta numérica como na figura a seguir:



- ### 9.3. Dízimas Periódicas

Como pode ser observado na reta numérica anterior, há números racionais que possuem representações decimais não exatas. Veja outros exemplos a seguir:

$\frac{2}{3} = 0,666...$ ou $0,\overline{6}$ $\qquad$ $\frac{14}{11} = 1,272727...$ ou $1,\overline{27}$

$$\frac{25}{18} = 1,3888... \text{ ou } 1,3\overline{8}$$

Na representação decimal das divisões acima, um algarismo ou um grupo de algarismos representa-se periodicamente. Números com essas características são denominados <u>dízimas periódicas</u>. As dízimas periódicas têm três partes:

- Parte inteira (I): algarismos que antecedem a vírgula;

- Período (P): algarismo ou grupo de algarismos que se repete indefinidamente na parte decimal;

- Parte não-periódica (N): quando existe, como no terceiro exemplo, é um algarismo ou grupo de algarismos que aparece logo após a vírgula e que não compõe o período.

a) Simples e Compostas

As dízimas periódicas <u>simples</u> são aquelas que não apresentam a parte não-periódica (N). São exemplos o 0,666... e o 1,272727... que apresentamos.

São chamadas de dízimas periódicas <u>compostas</u> aquelas que apresentam a parte não periódica, como o 1,38888... que apresentamos ou o 0,10242424... por exemplo.

b) Frações Geratrizes

Esses números são <u>racionais</u>, ou seja, existe uma forma de escrevê-los em forma de uma fração de números inteiros. A essa fração, damos o nome de <u>fração geratriz</u>, e cada tipo de dízima tem uma maneira algébrica e uma regra prática para encontrar a sua fração geratriz.

Vamos imaginar que temos a dízima periódica simples 4,555... e, por meio do princípio da igualdade, conseguiremos descobrir sua fração geratriz:

$$x = 4,555... \qquad \Rightarrow 10x = 45,555...$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x = 45,555... \\ x = 4,555... \end{cases} \; -$$

$$\Rightarrow 9x = 41$$

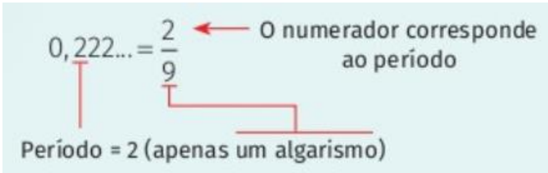
$$\therefore x = \frac{41}{9}$$

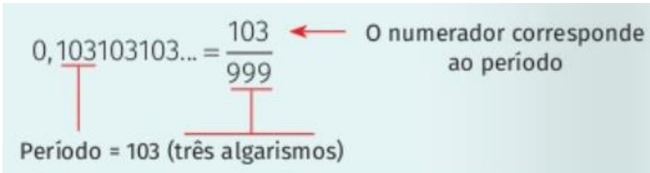
(Essa fração também pode ser escrita como $\frac{205}{45}$, que é a altura do Fredão em centímetros dividido por 45 e dá 4,555...coincidência? Eu acho que não...)

Como no caso dessa dízima periódica o período (P) tem apenas 1 casa decimal, multiplicamos pelo fator 10 para depois fazer a subtração. Caso fossem 2 casas decimais, multiplicaríamos por 100 antes de fazer a subtração, e assim por diante, aumentando as potências de 10.

A <u>regra prática</u>, no caso das <u>dízimas periódicas simples</u>, segue os seguintes passos:

1) No numerador da fração, coloca-se o período (P);
2) No denominador da fração, coloca-se um número formado por tantos algarismos 9 quantos forem os algarismos do período;
3) Caso a dízima periódica tenha um algarismo na parte inteira (I), soma-se esse número inteiro à fração encontrada.





Caso nós tivéssemos uma dízima periódica composta, o procedimento seria parecido, mas com algumas operações a mais. Vamos supor que tenhamos a dízima periódica composta 0,1434343... e, por meio do princípio da igualdade, conseguiremos descobrir sua fração geratriz.

A primeira etapa, nesse caso, será transformar essa dízima periódica em uma dízima periódica simples, multiplicando por uma potência de 10 que tenha tantos zeros quantos forem o número de algarismos da parte não-periódica (N) da dízima. Veja o processo de cálculo:

$$x = 0,1434343... \quad \Rightarrow 10x = 1,434343...$$

$$\Rightarrow 100 \cdot 10x = 143,434343...$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1000x = 143,434343... \\ 10x = 1,434343... \end{cases} \; -$$

$$\Rightarrow 990x = 142$$

$$\therefore x = \frac{142}{990}$$

A <u>regra prática</u> no caso das <u>dízimas periódicas compostas</u> é um pouco mais complexa que a das dízimas periódicas simples, mas funciona com <u>qualquer dízima periódica</u> (seja simples ou composta)! Seguiremos os seguintes passos:

1) Identificaremos quais algarismos pertencem à parte inteira (I) + a parte não periódica (N) + a parte periódica (P)
2) No numerador da fração, teremos esse conjunto de inteira-periódica-não periódica (INP) subtraído de inteira-não periódica (IN)

Se tivermos, por exemplo, a dízima periódica 3,4111..., o numerador será (341-34);

3) No denominador, colocaremos tantos algarismos 9 quantos forem os algarismos da parte periódica (P)

seguidos de tantos algarismos 0 quantos forem os algarismos da parte não periódica (N)

No mesmo exemplo 3,4111... acima, o denominador teria um algarismo 9 (referente à parte periódica 1) e um algarismo 0 (referente ao 4 da parte não periódica). Portanto, o denominador será 90.

Dessa forma, teremos $3,4111... = \frac{341-34}{90} = \frac{307}{90}$.

Exemplo 1. Determine as frações geratrizes das seguintes dízimas periódicas:

a) 4,132132132... b) 1,23666...

c) $\sqrt{1,777...}$

Exemplo 2. O valor de $11,\overline{8} - 11,\overline{08} - 0,\overline{008}$ é:

a) $0,\overline{808}$ b) $0,\overline{8000}$

c) $0,\overline{088}$ d) $0,0\overline{88}$

e) $0,8$

- 9.4. O conjunto dos Irracionais e dos Reais

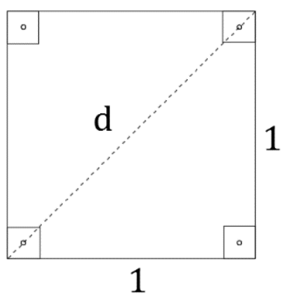
Ao medir um comprimento em que tomamos uma medida unitária, obtemos um número que indica quantas vezes aquele comprimento contém essa medida:

- Se a medida unitária couber um número exato de vezes, esse número expressa um número natural;

- Se uma fração da medida unitária couber no comprimento, o número é expresso por um racional.

Em ambos os casos, foi possível medir um comprimento com uma fração inteira ou não de vezes de uma medida unitária. Mas existem casos em que, ao medir o comprimento, não é possível determinar quantas medidas unitárias cabem no comprimento, por menor que seja a partição adotada.

A medida da diagonal de um quadrado de lado 1, por exemplo:

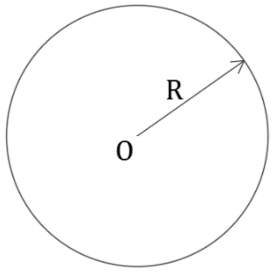


$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{2}$$

O valor encontrado, $\sqrt{2} = 1,4142135623...$, é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não-periódicas depois da vírgula. Dessa forma, não importa o quão pequena seja a unidade de medida, jamais encontraremos um número inteiro que represente quantas vezes a unidade de medida cabe em $\sqrt{2}$.

Podemos fazer também a relação do comprimento de uma circunferência de raio "r":

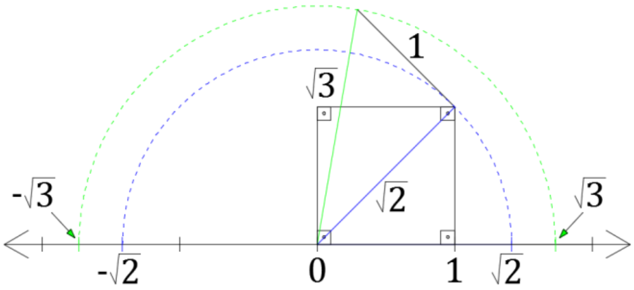


$$\frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

O valor encontrado, $\pi = 3,1415926535...$, é outro exemplo de número que tem infinitas casas decimais não-periódicas.

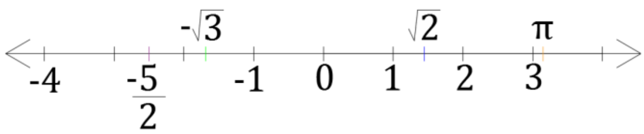
Os dois números ($\sqrt{2}$ e π) são exemplos de <u>números irracionais</u>, ou seja, números que não podem ser escritos como uma razão $\frac{a}{b}$ entre números inteiros *a* e *b*.

Observe como é possível representar alguns números irracionais na reta ordenada com o auxílio da geometria:



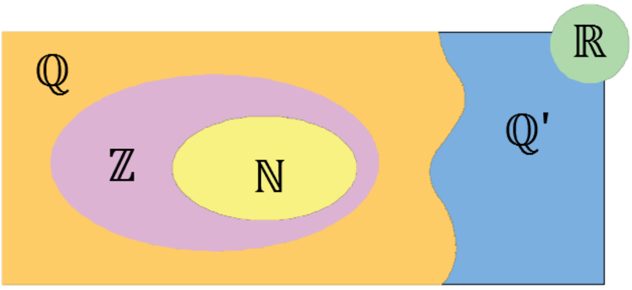
Raízes não exatas são números irracionais. Encontramos também números irracionais na altura de um triângulo equilátero, por exemplo, e em várias outras aplicações.

Essas raízes, no entanto, têm um valor numérico aproximado e conseguem ser alocadas numa reta numérica, como a reta a seguir:



Essa reta é chamada de <u>reta real</u>, já que contempla todos os elementos de um conjunto que chamamos de <u>conjunto dos números Reais</u>. Usamos os números naturais para contar e o conjunto dos reais para medir.

Esse conjunto dos números reais é composto por todos aqueles números que estudamos: naturais, inteiros, racionais, em conjuntos cada vez mais crescentes, e paralelo a eles o conjunto dos irracionais. Esse conjunto dos reais, expresso por $\mathbb{R}$, é apresentado no diagrama a seguir:



Na região em azul, temos o conjunto dos números irracionais, que <u>não tem elementos em comum com os racionais</u>. A soma, a multiplicação e a divisão de um racional não nulo com um irracional resulta sempre em um irracional. Por outro lado, é possível que essas operações (soma, multiplicação e divisão) feitas entre dois irracionais resultem em um número racional. Veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3. Simplifique as expressões a seguir e determine a qual conjunto pertence o resultado de suas operações:

a) $\frac{3}{4}+\sqrt{0,444...}$

b) $\sqrt{3,6}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

- 9.5. O conjunto dos Complexos

Usamos os números reais, de maneira geral, como soluções possíveis para equações que venham a surgir. Identificar raízes de equações, por exemplo, significa encontrar valores que, ao substituir nas incógnitas da equação, satisfaçam àquela condição. Vejamos um exemplo:

1) Se temos a equação 3x – 12 = 0, qual valor de x satisfaz a essa condição?

   R: O único valor de x que podemos substituir é o valor 4, já que 3.4 – 12 = 0.

   Portanto, a solução dessa equação, chamada de “raiz da equação”, é o valor 4.

2) Se temos a equação $x^2 – 64 = 0$, quais valores de x satisfazem a essa condição?

   R: Há dois valores possíveis para substituirmos, que são o 8 e o -8, uma vez que que $8^2 – 64 = 0$ e também $(-8)^2 - 64=0$.

3) Se temos a equação $2x^2 – 3x – 2 = 0$, qual valores de x satisfazem a essa condição?

   R: Há dois valores possíveis para substituirmos, que são o 2 e o $-\frac{1}{2}$, uma vez que $2.2^2 – 3.2 – 2= 0$ e $2.(-\frac{1}{2})^2 – 3.(-\frac{1}{2}) – 2 = 0$.

Portanto, o conjunto dos reais serve como raízes possíveis de equações.

No entanto, há equações que não têm soluções pertencentes aos reais. Ou seja, não há números reais que, ao substituirmos nas incógnitas, satisfaçam àquela condição. Vejamos um exemplo:

1) Se temos a equação $x^2 + 1 = 0$, qual valor de x satisfaz a essa condição?

   R: Há dois valores possíveis para x, $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

No entanto, sabemos que esses números não pertencem ao conjunto dos reais. Podemos perceber isso se tentarmos achar um número real que, multiplicado por ele mesmo, resulte em -1. É impossível.

Com isso, surgiu uma nova necessidade, de completar o conjunto dos reais com outros números. A esse conjunto complementar, deu-se o nome de <u>complexos</u> (ou imaginários), representados por $\mathbb{C}$.

Adotou-se o valor de $\sqrt{-1}$ como *i*, a unidade imaginária, e passou-se a fazer as operações normalmente, como as que já conhecíamos no conjunto dos reais.

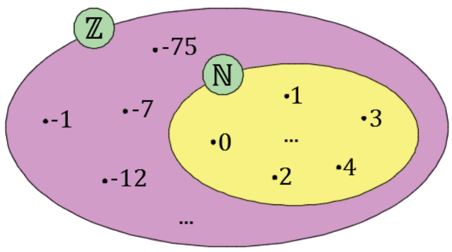
A partir do estudo desse conjunto, perceberemos que a equação $x^3 – 8 = 0$ pode não ter apenas 1 solução, e sim 3 soluções, sendo duas pertencentes ao conjunto dos números complexos.

(Observação: não aprofundaremos nessa etapa o estudo dos números complexos, nosso objetivo é caracterizar o conjunto e, para quem tiver interesse em se aprofundar no assunto, colocamos questões que envolvem esse tema na lista de exercícios.)

- 9.6. Notações

a) Pertencimento

Ao falar sobre <u>um elemento e um conjunto</u>, podemos estabelecer uma relação de pertencimento do elemento ao conjunto. Dizemos que um elemento -12 pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$, mas não pertence ao conjunto $\mathbb{N}$, como na figura a seguir.

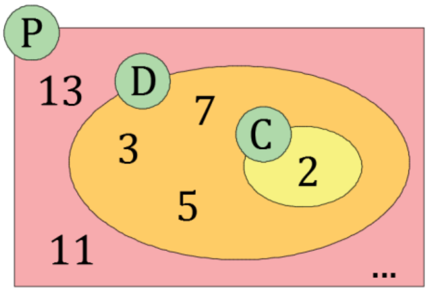


Para essa notação, se utiliza $-12 \in \mathbb{Z}$ (-12 pertence ao conjunto dos inteiros) e $-12 \notin \mathbb{N}$ (-12 não pertence ao conjunto dos naturais).

b) Inclusão

Ao falar sobre <u>dois conjuntos</u>, podemos estabelecer uma relação de inclusão entre eles. Dizemos que C é subconjunto de um conjunto D se, e somente se, todos os elementos de C pertencem a D, como no exemplo abaixo.

Vamos considerar os conjuntos P = {x | x é um número primo}; D = {x | x é um número primo menor que 10} e C = {x | x é um número primo par}, como na imagem a seguir:



Todos os elementos do conjunto C são elementos do conjunto P, então dizemos que C é um subconjunto de P. Por outro lado, há elementos em D que não são elementos de C, portanto D não é um subconjunto de C.

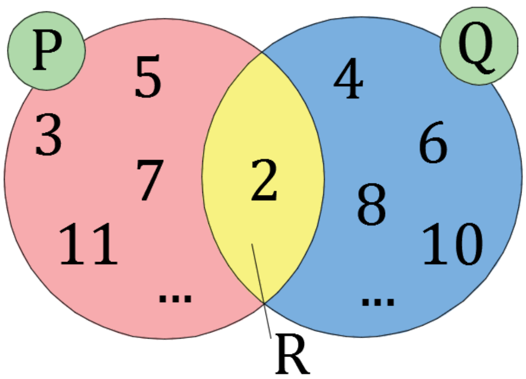
Para indicar a relação entre os conjuntos C e P, usamos a notação $C \subset P$ (C está contido em P). Já entre os conjuntos C e D, podemos dizer que $D \not\subset C$ (D não está contido em C), mas $D \supset C$ (D contém C).

Em relação aos conjuntos numéricos, podemos dizer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

(A dica aqui é que a boca sempre abre para comer o maior!)

c) Interseção e União

Considere os conjuntos P = {x | x é um número primo} e Q = {x | x é um número natural par}. Se tivermos que resumir em um conjunto R os elementos que pertencem ao mesmo tempo aos dois conjuntos, teremos R = {2}, como na figura a seguir:



Dizemos que R é o conjunto resultante da <u>interseção</u> de P e Q, e usamos a notação $\cap$ para denominar a interseção, como: $P \cap Q = R = \{2\}$.

Ou seja, dados dois conjuntos A e B, a interseção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A <u>e</u> a B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

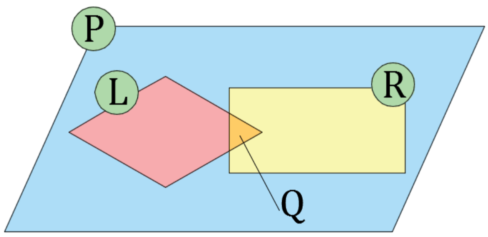
Se tivermos que resumir em um conjunto S os elementos que pertencem ou ao conjunto P, ou ao conjunto Q, teremos S = {x | x é ou par, ou primo, ou ambos} = {2, 3, 4, 5, 6, ...}.

Dizemos que S é o conjunto resultante da <u>união</u> de P e Q, e usamos a notação $\cup$ para denominar a união, como em $P \cup Q = S$.

Ou seja, dados dois conjuntos A e B, a união de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A <u>ou</u> a B: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Exemplo 4. Num grupo de 198 esportistas, 80 jogam vôlei, 40 jogam vôlei e basquete, 44 jogam basquete e futebol, 36 jogam vôlei e futebol e 22 jogam as três modalidades. Se o número de pessoas que praticam basquete é igual ao número de pessoas que praticam futebol, determine o número de esportistas que jogam basquete ou futebol e não jogam vôlei.

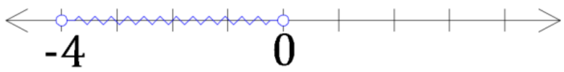
Exemplo 5. Sabendo que um losango é um paralelogramo com 4 lados de mesma medida, que um retângulo é um paralelogramo que tem 4 ângulos retos, determine a interseção do conjunto dos losangos com o conjunto dos retângulos.



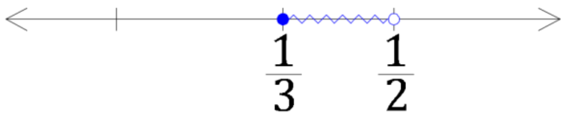
- 9.7. Intervalos

Podemos representar subconjuntos de um conjunto numérico por meio da notação de intervalos. Veja os exemplos a seguir:

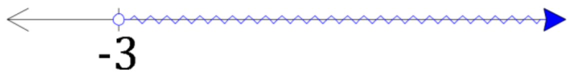
1) O intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0\}$ representado na reta real:



2) O intervalo $\left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq y < \frac{1}{2}\right\}$ representado na reta real:



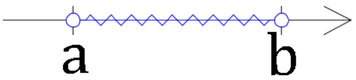
3) O intervalo $\{z \in \mathbb{R} \mid z > -3\}$ representado na reta real:



Sendo *a* e *b* números reais tais que *a* < *b*, vejamos algumas representações possíveis de intervalos numéricos envolvendo *a* e *b* nas seções abaixo.

a) Intervalo aberto

1) Representação geométrica:



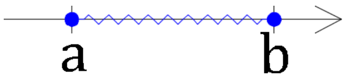
2) Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a,\ b[$

Nesse caso, nem o elemento *a*, nem o elemento *b* pertencem ao conjunto.

b) Intervalos fechados

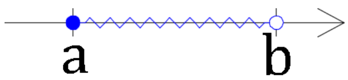
1) Representações do intervalo fechado:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ ou $[a,\ b]$

Nesse caso, tanto o elemento *a*, quanto o elemento *b* pertencem ao conjunto.

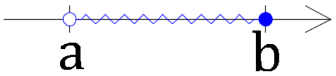
2) Representações do intervalo fechado à esquerda:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ ou $[a,\ b[$

Nesse caso, apenas o elemento *a* pertence ao conjunto.

3) Representações do intervalo fechado à direita:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ ou $]a,\ b]$

Já nesse caso, apenas o elemento *b* pertence ao conjunto.

Exemplo 6. Determine $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$, dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 5\}$.

Exemplo 7. Dados os conjuntos A = $[-3,2[$, B = $]-2,3[$ e C = $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, determine $(A \cap B) - C$.

- 9.8. Sistemas de Numeração

Durante toda a história, não apenas os idiomas foram se adaptando e se moldando a representar uma mesma ideia com diferentes palavras. Os números também passaram por diversas adaptações e vários sistemas de numeração foram desenvolvidos para representar a mesma unidade numérica de diferentes maneiras e a partir de diferentes regras. Veremos aqui três desses sistemas, muito utilizados hoje em dia.

a) Decimal

O sistema de numeração decimal é o mais conhecido e utilizado no mundo, conhecido como "base dez". Temos dez dedos nas mãos, e possivelmente daí tenha surgido o sistema decimal, a partir de contagens de unidades com as mãos.

Se contarmos o número 31, por exemplo, faremos 3 contagens dos dez dedos e depois mais 1 dedo. Ou seja, 3 dezenas e 1 unidade.

Suas principais características são:

1) Por ser um sistema decimal, utiliza 10 algarismos, que são 0, 1, 2, 3, ..., 9;
2) É um sistema posicional, ou seja, cada algarismo muda de valor de acordo com a posição que ele ocupa em determinado número
   a. O número 5055 é diferente do 5505, cada algarismo tem um valor relativo.
3) A utilização do zero altera significativamente o número de acordo com a sua posição, já que ele representa um "nada".
   a. O número 5055 é bastante diferente do 0555.
4) É dividido em classes (unidades, milhares, milhões...) e em ordens (centenas, dezenas e unidades) em cada classe.
   a. O número 106.347 tem 6 unidades de milhares.
   b. Essa mesma divisão de classes pode ser extendida para a parte decimal, nas ordens décimos, centésimos e milésimos.

Veja a decomposição do número 34.716 no sistema decimal:

$$34.716 = 3 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6$$

Quando temos medidas de comprimento, área e volume, ou de massa, normalmente usamos o sistema decimal e podemos estabelecer relações entre os múltiplos de unidades com base na divisão decimal:

$$\ldots \text{dam} \xleftarrow{\div 10} \text{m} \xrightarrow{\cdot 10} \text{dm} \cdots$$

$$\cdots \text{dam}^2 \xleftarrow{\div 10^2} \text{m}^2 \xrightarrow{\cdot 10^2} \text{dm}^2 \cdots$$

$$\cdots \text{dam}^3 \xleftarrow{\div 10^3} \text{m}^3 \xrightarrow{\cdot 10^3} \text{dm}^3 \cdots$$

Exemplo 8. 1 ha (hectare) é uma medida agrária utilizada para dimensionar áreas e corresponde a 10.000m^2. Se o estado de Sergipe tem 21.910 km^2 de área, quantos hectares cabem dentro dessa região?

Exemplo 9. Uma torneira está gotejando de maneira regular e uniforme. Observa-se que, a cada 12 minutos, o gotejamento enche um recipiente de volume 0,000020 m^3.

Considerando 1 litro equivalente ao volume de 1 dm^3, é correto afirmar que o volume, em litros, desperdiçado pelo gotejamento ao final de 30 minutos é

a) 0,15.
b) 0,36.
c) 0,24.
d) 0,05.
e) 0,01.

b) Binários

Diferente do sistema decimal, que contempla uma base com 10 algarismos, o sistema binário tem seus números representados com apenas dois algarismos: 0 e 1.

Utilizado na informática, no contexto de *bits*, que significam "binary digits", devido ao fato de o sistema binário ter apenas dois algarismos, é usado para códigos, como "sim e não" ou "ligado e desligado".

Enquanto o sistema decimal tem a base dez e os números podem ser decompostos com multiplicações a potências de 10, o sistema binário tem base dois e seus números serão decompostos utilizando-se multiplicações a potências de 2.

Quando decompusemos o número 34.716 na base decimal, utilizamos multiplicações por potências de base 10. No caso dos números binários, a decomposição de um número se dará pela multiplicação de 0 e 1 por potências de base 2. Veja o exemplo do número 61 a seguir:

$$61 = 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$$

Os números em vermelho serão escritos sequencialmente para representar o número 61 no sistema binário: 111101.

Portanto, se recebermos um número binário e quisermos transformá-lo em um número de base decimal, basta fazer a multiplicação passo a passo pelas potências de 2, na ordem contrária. Veja o exemplo do número 10001101

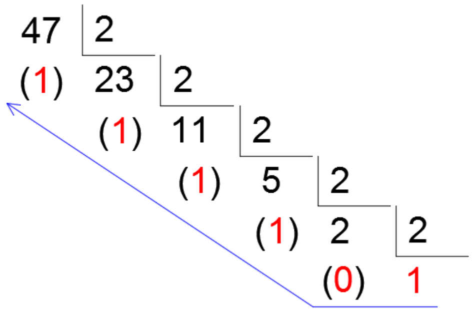
$$1001101 = 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$$

$$1001101 = 1.64 + 0.32 + 0.16 + 1.8 + 1.4 + 0.2 + 1.1$$

$$1001101 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77$$

Mas como chegar a essas potências de 2? A dica é fazer o algoritmo da divisão e perceber os restos, e escrever o número na ordem do primeiro quociente para os restos à esquerda.

Veja o exemplo de transformação do número 47 em binário:



Portanto, o número 47 pode ser escrito como 101111.

Esse sistema é utilizado por computadores e é a partir dele que se usam as unidades de memória e armazenamento dos computadores e celulares, que contém uma mistura entre bits e bytes:

- A unidade básica é o 1 bit;

- 1 byte = 8 bits

- 1 kilobyte (KB) = 1000 bytes ou 10^3 bytes;

- 1 megabyte (MB) = 1.000.000 bytes ou 10^6 bytes;

- 1 gigabyte (GB) = 1.000.000.000 bytes ou 10^9 bytes, e assim por diante.

c) Sexagesimal

Já o sistema sexagesimal deixou um legado importante para a representação numérica e o utilizamos sem perceber. Devido ao fato de o sistema de numeração usar como base o número 60, é esse sistema que é utilizado para medir, por exemplo horas, minutos e segundos. Além dessa aplicação, temos também a aplicação a ângulos e coordenadas geográficas angulares, que já falamos no bloco de Geometria.

Para relembrá-lo, o sistema sexagesimal utiliza uma unidade padrão, que pode ser subdividida em 60 unidades menores, e assim por diante.

No caso do tempo, temos 1 hora = 60 minutos e 1 minuto = 60 segundos. Já no caso de ângulos, temos 1º = 60' e 1' = 60".

Tanto para tempo, quanto para graus, utilizamos um limite inferior nos segundos para o cálculo no sistema sexagesimal, ou seja, não há decomposição de um segundo em um "terceiro", por exemplo. Aqui, mais uma vez, nos referimos ao sistema decimal para medidas menores que a menor unidade padrão, ou seja, se tivermos meio segundo, representaremos no sistema decimal como 0,5'.

Exemplo 10. Transforme as medidas escritas de maneira errada em sua correta escrita no sistema sexagesimal:

a) 1,37 horas

b) 37,56º

========== **AULA 10. Operações** ==========

- 10.1. Múltiplos e divisores

Nessa seção, falaremos sobre múltiplos, divisores, números primos e compostos, MMC e MDC. É uma revisão sobre a aritmética e serve a nós em alguns casos, inclusive como ferramentas para fazer uma simplificação de frações, uma soma de frações ou identificar quando não é possível encontrar um valor exato numa divisão.

a) Múltiplos

Os múltiplos de um número inteiro são um conjunto cujos elementos são obtidos após a multiplicação desse número fixo por todos os números inteiros. Veja o exemplo dos múltiplos do número 3, em verde:

$$3 \cdot 1 = \mathbf{3}$$
$$3 \cdot 2 = \mathbf{6}$$
$$3 \cdot 3 = \mathbf{9}$$
$$3 \cdot 4 = \mathbf{12}$$
$$3 \cdot 5 = \mathbf{15}$$
$$3 \cdot 6 = \mathbf{18}$$
$$3 \cdot 7 = \mathbf{21}$$
$$\ldots$$
$$M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Portanto, um número *a* será múltiplo de um número *b* se existir um inteiro *k* de forma que $a = b \cdot k$.

b) Menor múltiplo comum (M.M.C)

Quando temos dois números, podemos relacionar quais são os múltiplos de cada um deles para encontrar o que conhecemos como menor múltiplo comum (MMC). O MMC corresponde ao menor inteiro positivo que é múltiplo ao mesmo tempo de dois ou mais números. Vejamos o exemplo dos múltiplos dos números 3 e 5:

$3 \cdot 1 = \mathbf{3}$	$5 \cdot 1 = \mathbf{5}$
$3 \cdot 2 = \mathbf{6}$	$5 \cdot 2 = \mathbf{10}$
$3 \cdot 3 = \mathbf{9}$	$5 \cdot 3 = \mathbf{15}$
$3 \cdot 4 = \mathbf{12}$	$5 \cdot 4 = \mathbf{20}$
$3 \cdot 5 = \mathbf{15}$	$5 \cdot 5 = \mathbf{25}$
$3 \cdot 6 = \mathbf{18}$	$5 \cdot 6 = \mathbf{30}$
$3 \cdot 7 = \mathbf{21}$	$5 \cdot 7 = \mathbf{35}$

...

Perceba que o número destacado é o menor número que aparece em ambas as colunas. Portanto, esse número é o que conhecemos como MMC(3, 5), ou seja, o menor múltiplo comum entre os números 3 e 5.

A forma prática de calcular o MMC entre dois números é fazer uma fatoração conjunta entre os dois números, ou seja, decompor os números em fatores primos. Acompanhe, no exemplo abaixo, como encontrar o MMC entre 12 e 45 usando esse método:

$$\begin{array}{r|l} 12,\ 45 & 2 \\ 6,\ 45 & 2 \\ 3,\ 45 & 3 \\ 1,\ 15 & 3 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Portanto, o MMC (12, 45) é igual a $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$.

Observe que, no processo, vamos dividindo os elementos que forem divisíveis pelos menores números primos, ou seja, 2, 3, 5, 7, 11, 13 etc. Ao final, multiplicam-se os fatores que foram utilizados para dividir os números da coluna da esquerda, encontrando-se como produto o MMC.

Utilizamos o MMC para soma de frações, por exemplo, e falaremos mais sobre isso adiante.

c) Divisores

Os divisores de um número são aqueles valores que, ao dividir o número, encontram-se resultados inteiros. Sejam *a* e *b* dois números inteiros conhecidos; vamos dizer que *a* é divisor de *b* se o número *b* for múltiplo do número *a*, ou seja a divisão entre *b* e *a* é exata. Veja alguns exemplos:

- 22 é múltiplo de 2, então 2 é divisor de 22.

- 63 é múltiplo de 3 e de 7, logo 3 e 7 são divisores de 63.

- 121 não é múltiplo de 10, assim, 10 não é divisor de 121.

Para encontrar os divisores de um número, devemos fatorar aquele número. Veja o exemplo do número 360:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Para encontrarmos o número de divisores de um número, multiplicaremos os sucessores dos números dos expoentes dos fatores primos daquele número. (*"É o que, professor?"*)

Explico: a fatoração de 360 resultou em $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Os expoentes dos fatores primos são 3, 2 e 1. Portanto, adicionaremos 1 unidade a cada expoente: 3+1, 2+1 e 1+1.

Feito isso, multiplicaremos esses números: $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 =$ 24 divisores. Ou seja, o número 360 tem 24 divisores.

Exemplo 1. (UFC) A quantidade de números inteiros e positivos que são simultaneamente divisores de 48 e 64 é:

a) uma potência de 4.
b) um número primo.
c) igual a seis.

d) igual a oito.

d) Números primos e compostos

Falamos anteriormente sobre “fatores primos”, mas...o que são esses números primos?

Números primos são aqueles números naturais que têm exatamente dois divisores: o 1 e ele mesmo.

- O número 3 é divisível somente por 1 e por 3. Portanto, é um primo.
- O número 17 só é divisível por 1 e por 17. Portanto, é primo.
- O número 10 é divisível por 1, 2, 5 e 10. Portanto, não é um número primo.

Observação: é importante deixar claro aqui que o 1 não é um número primo, pois só tem 1 divisor, que é, ao mesmo tempo, ele mesmo e o 1.)

Na tabela abaixo, trazemos os números primos entre 1 e 100, o que é interessante saber para quando tivermos uma situação de dividí-los ou fatorá-los:

Números primos de 1 a 100				
2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Outra curiosidade interessante sobre os números primos é que há apenas 1 número par na lista: o próprio 2. Isso ocorre porque todos os outros pares são divisíveis por 2, então a definição já é quebrada aí.

Já os números compostos são aqueles que têm mais de 2 divisores. O número 10, que dissemos ser divisível por 1, 2, 5 e o próprio 10, se encaixa nessa definição.

Ou seja, todos os números naturais maiores que 2 são ou primos, ou compostos (por definição, não dá pra ser os dois ao mesmo tempo!).

Mas como identificar se um número é primo ou composto? Essa é a parte mais importante dessa seção. Um número natural é primo se as divisões sucessivas por números primos resultarem sempre em um resto diferente de zero até que o divisor seja maior ou igual ao quociente. Vamos ver o exemplo do número 253:

- É divisível por 2? Não, dá resto 1.
- É divisível por 3? Não, dá resto 1.
- É divisível por 5? Não, dá resto 3.
- É divisível por 7? Não, dá resto 1.
- É divisível por 11? Sim! Portanto, não é primo.

Vejamos agora o exemplo do número 223:

- É divisível por 2? Não, dá resto 1.
- É divisível por 3? Não, dá resto 1.
- É divisível por 5? Não, dá resto 3.
- É divisível por 7? Não, dá resto 6.
- É divisível por 11? Não, dá resto 3.
- É divisível por 13? Não, dá resto 2.
- É divisível por 17? Não, e o quociente deu 13, que é menor que 17. Portanto, pararemos aqui, e 223 é primo.

Aproveitaremos a deixa para falarmos do critério de divisibilidade por 2, 3, 4 e 5, que são os mais utilizados:

1) Divisibilidade por 2: todo número par é divisível por 2. Os números pares são aqueles terminados em 0, 2, 4, 6 e 8.
2) Divisibilidade por 3: um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos der um número divisível por 3.
3) Divisibilidade por 4: um número é divisível por 4 se ele for divisível duas vezes por 2 ou, então, se seus dois últimos algarismos forem divisíveis por 4.
4) Divisibilidade por 5: todo número terminado em 0 ou 5 é divisível por cinco.

- 10.2. Operações com frações

Operações com frações podem ser simples e diretas, mas aproveitaremos essa parte da aula para relembrar alguns critérios de operações com frações que utilizaremos como base para as demais seções da aula de hoje.

a) Soma e subtração de frações

Quando tivermos que somar frações, podemos ter duas situações: quando os denominadores forem iguais e quando forem diferentes.

1) Quando os denominadores forem iguais, mantemos o denominador e somamos os numeradores. Veja o exemplo:
$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}$$
2) Quando os denominadores forem diferentes, faremos o MMC – seguindo o processo que vimos anteriormente – entre os denominadores para encontrar frações equivalentes às primeiras e, depois, soma-las. Veja o exemplo:
$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}=\frac{29}{21}$$
Quando for possível, deveremos simplificar a fração do resultado!

Quando o processo for de subtração, os cálculos são exatamente os mesmos, apenas com a diferença dos sinais de subtração ao invés de soma.

b) Multiplicação de frações

A multiplicação de frações é realizada multiplicando o numerador da primeira fração com o numerador da segunda fração e em seguida multiplicando o denominador da primeira com o denominador da segunda. A operação continua sucessivamente em casos em que a multiplicação envolvem mais de duas frações. Veja os exemplos:

1) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2\cdot5}{3\cdot2}=\frac{10}{6}$

(nesse caso, simplificamos o resultado para $\frac{5}{3}$)

(poderíamos também ter cancelado o 2 nas duas primeiras frações do cálculo)

2) $\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7\cdot2\cdot1}{8\cdot5\cdot2}=\frac{7\cdot1}{8\cdot5}=\frac{7}{40}$

3) Toda vez que tivermos um número inteiro, podemos colocar nele o denominador 1:

$\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1\cdot3\cdot4}{2\cdot1\cdot5}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

No caso das frações, valem as mesmas regras de sinais para multiplicação de inteiros. O negativo do negativo se torna positivo, enquanto negativo do positivo se torna negativo.

c) Divisão de frações

Essa é a parte mais difícil de compreender e a que menos pessoas dominam, mas é simples como as anteriores. O processo da divisão é um processo inverso da multiplicação. Por exemplo: dividir alguma coisa por 2 é a mesma coisa que multiplicar por $\frac{1}{2}$, que é o inverso de 2.

Na divisão de frações, esse é o raciocínio utilizado: multiplica-se a fração pelo inverso da fração divisora. É a frase popular "conserva a primeira e multiplica pelo inverso da segunda". Veja os exemplos:

1) $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2\cdot5}{3\cdot3}=\frac{10}{9}$

(na segunda etapa, invertemos a fração $\frac{3}{5}$)

2) $2:\frac{3}{7}=\frac{2}{1}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2\cdot7}{1\cdot3}=\frac{14}{3}$

(nesse caso, também transformamos um número inteiro, 2, em uma fração com denominador 1)

3) Essa divisão também pode estar escrita como uma fração de frações. O processo é exatamente o mesmo:

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot5}{7\cdot4}=\frac{15}{28}$$

4) Podemos ter várias divisões, e o procedimento é também o mesmo, invertendo todas as frações que estão dividindo:

$\frac{2}{3}:\frac{3}{5}:\frac{1}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{1}=\frac{2\cdot5\cdot7}{3\cdot3\cdot1}=\frac{70}{9}$

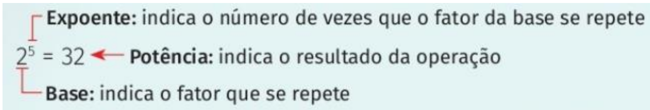
- 10.3. Propriedades da potenciação

Considere a seguinte situação: no treinamento para uma maratona que será disputada entre as universidades do centro-oeste, um atleta percorreu 2km no primeiro dia e, a partir daí, decidiu percorrer o dobro da distância alcançada no dia anterior durante 5 dias de treinamento. Se ele conseguir atingir sua meta, quantos quilômetros correrá no 5º dia de treinamento?

Nessa situação descrita, para calcular a distância a ser percorrida, é necessário multiplicar o número 2 por ele mesmo 5 vezes. Ou seja:

$$\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{5 fatores}}=32$$

Podemos representar multiplicações de fatores iguais de modo mais simples, usando a operação matemática denominada potenciação.



Para a aplicação da potenciação, utilizam-se 7 propriedades que surgem a partir do processo de multiplicar ou dividir. São elas:

a) Multiplicação de potências de mesma base

Para multiplicar potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes.

$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$, em que $a\in\mathbb{R}$

Por exemplo:

$$2^4\cdot2^3=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{4 vezes}}\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{3 vezes}}=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{7 vezes}}=2^7=2^{4+3}$$

b) Divisão de potências de mesma base

Para dividir potências de mesma base, sendo a base diferente de zero, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$\boxed{a^m:a^n=a^{m-n}}$, em que $a\in\mathbb{R}^*$

Por exemplo:

$$2^7:2^4=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot2}=\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{\text{7–4 vezes}}=2^3=2^{7-4}$$

c) Potência de potência

Para calcular uma potência de potência (potência cuja base é outra potência), conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes:

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}}\text{, em que } a \in \mathbb{R}$$

Por exemplo:

$$\left(2^4\right)^3 = \left(2^4\right)\cdot\left(2^4\right)\cdot\left(2^4\right) = 2^{4+4+4} = 2^{4\cdot 3} = 2^{12}$$

Observação: note que $\left(2^2\right)^3 \neq 2^{2^3}$. *Enquanto a primeira potência tem um resultado,* $\left(2^2\right)^3 = 2^6$, *a segunda tem outro diferente,* $2^{2^3} = 2^{2\cdot 2\cdot 2} = 2^8$.

d) Propriedade distributiva em relação à multiplicação

A potência de um produto de dois ou mais números pode ser obtida elevando-se cada fator ao expoente indicado.

$$\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}\text{, em que a e b} \in \mathbb{R}$$

Por exemplo:

$$(5\cdot 3\cdot 2)^2 = 5^2\cdot 3^2\cdot 2^2 = 25\cdot 9\cdot 4 = 900 \text{ ou}$$
$$(5\cdot 3\cdot 2)^2 = 30^2 = 900$$

e) Propriedade distributiva em relação à divisão

A potência de um quociente de dois números pode ser obtida elevando-se cada número ao expoente indicado.

$$\boxed{(a:b)^n = a^n : b^n}\text{, em que } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}^*$$

Por exemplo:

$$(9:3)^2 = 9^2 : 3^2 = 81 : 9 = 9 \text{ ou } (9:3)^2 = 3^2 = 9$$

f) Potências com expoente negativo

Observe a seguinte divisão de potências de mesma base:

$$2^4 : 2^9 = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^5}$$

Essa mesma divisão pode ser resolvida por meio da propriedade da divisão de potências de mesma base da seguinte forma:

$$2^4 : 2^9 = 2^{4-9} = 2^{-5}$$

Os dois resultados têm que ser o mesmo, certo? Portanto, com isso podemos afirmar que $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$.

Observe agora o cálculo de uma potência de expoente inteiro negativo e base fracionária:

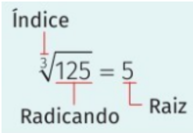
$$\left(\frac{5}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^1} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = 1\cdot\frac{6}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^1 = \frac{6}{5}$$

Generalizando esses dois exemplos, têm-se as seguintes relações:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}\text{, em que } a \neq 0 \quad \text{e} \quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}\text{, em que } a\cdot b \neq 0$$

g) Potências com expoente fracionário

Quando temos uma raiz, seja quadrada ou de outro índice, temos uma expressão, chamada de radical, da seguinte forma:



De um modo geral, sendo *a* um número real não negativo, *m* um número inteiro e *n* um número natural maior que 1, então temos que:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ou seja, podemos transformar as raízes em potências com expoentes fracionários (e vice-versa), e trabalhar com as raízes utilizando as propriedades da potenciação que vimos anteriormente.

Exemplo 2. Resolva as operações a seguir, aplicando as propriedades da potenciação, e determine os seus resultados simplificados.

a) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{5^8}}$

c) $\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{3}{2} + 8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 9^{\frac{1}{2}}$

- 10.4. Produtos Notáveis

Produtos Notáveis são multiplicações efetuadas entre polinômios que são dignos de atenção, ou seja, há algo de especial, de recorrente, nesses resultados. Esses resultados são muito utilizados para efetuar cálculos com mais rapidez.

a) Quadrado da soma de dois termos

Se fizermos o cálculo de (a + b)² da maneira algébrica, usando a propriedade distributiva, obteremos o seguinte resultado:

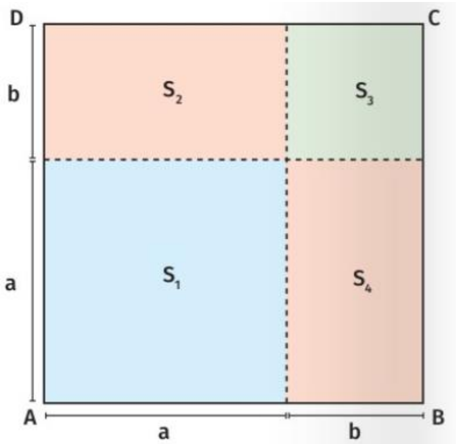
$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$\boxed{\Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Portanto, toda **soma** de dois termos elevada ao quadrado se dará pelo quadrado do primeiro termo **mais** duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Podemos também ter uma interpretação geométrica, ao calcular a área de um quadrado de lados (a + b), como na figura a seguir:



A área desse quadrado se dá pela soma das áreas $S_1 + S_2 + S_2 + S_3$, ou $S_1 + 2S_2 + S_3$. Como temos que $S_1 = a^2$, $S_2 = ab$ e $S_3 = b^2$, temos que a área total será igual a $S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(Observação: tanto faz se tivermos $(a+b)^2$ ou $(-a-b)^2$, já que, ao elevarmos ao quadrado o termo (-1), ele resulta em 1 e essas expressões resultarão na mesma expressão algébrica.)

b) Quadrado da diferença de dois termos

Seguindo a mesma linha de raciocínio anterior, a diferença de dois termos pode ser escrita como a soma de um termo positivo com um termo negativo: $(a-b) = (a+(-b))$.

Ou seja, se elevarmos essa "soma" ao quadrado, teremos um resultado equivalente ao que encontramos anteriormente:

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + b^2$$

$$\boxed{\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Portanto, toda **diferença** de dois termos elevada ao quadrado se dará pelo quadrado do primeiro termo **menos** duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

(Observação: tanto faz se tivermos $(a-b)^2$ ou $(-a+b)^2$, já que, ao elevarmos ao quadrado o termo (-1), ele resulta em 1 e essas expressões resultarão na mesma expressão algébrica.)

c) Produto da soma pela diferença

Quando aplicamos a propriedade distributiva na expressão $(a+b)\cdot(a-b)$, que é o produto de uma soma por uma diferença, chegamos ao seguinte resultado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

$$\boxed{\Rightarrow (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

O produto da soma pela diferença resulta no que conhecemos como "diferença de quadrados".

(Aqui também cabe uma observação: não se esqueça que $(-a+b)\cdot(a+b) = (-b+a)\cdot(b+a) = (a-b)\cdot(b+a) = a^2 - b^2$, já que correspondem exatamente à mesma expressão que desenvolvemos acima.)

Exemplo 3. Desenvolva os produtos notáveis a seguir:

a) $\left(\frac{3x}{5} - 2xy^3\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{4}a^3x^5 - \frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}a^3x^5\right)$

c) $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y}{2}\right)^2$

Exemplo 4. Complete as lacunas em cada item de modo a completar os produtos notáveis:

a) $4x^2 + \_\_\_\_\_ + 36y^4 = (\ \_\_\_\_\_ \ + 6y^2)^2$

b) $\frac{9x^2}{25} - \frac{12x^2y^3}{5} + \ \_\_\_\_\_ \ = \left(\frac{3x}{5} - \_\_\_\_\_\right)^2$

Exemplo 5. Dada a sentença $x-\frac{1}{x}=2$, quanto vale $x^2+\frac{1}{x^2}$?

a) 2

b) 4

c) 5

d) 6

- 10.5. Fatoração

A fatoração é um recurso muito útil no trabalho com expressões algébricas. Por meio dela, é possível fazer simplificações, operações e resolver equações.

Fatorar uma expressão algébrica é transformá-la em um produto, isto é, na multiplicação de dois ou mais fatores.

a) Fator comum em evidência

É o caso mais simples de fatoração. Basta identificar um fator que esteja presente em todos os termos de uma expressão algébrica e isolá-lo, formando um produto.

Por exemplo: $6a^3x+9a^2y=3a^2(2ax+3y)$

b) Agrupamento

Nesse caso, não há um único fator comum a todos os termos da expressão que será fatorada, mas é possível agrupar seus termos de modo que surja, em cada grupo, um fator comum. Esse fator comum será colocado em evidência e, em seguida, identifica-se um novo fator comum, em forma de expressão, que será novamente colocado em evidência.

Por exemplo, $\underbrace{13a+13b}+\underbrace{ax+ab}=13\cdot\underbrace{(a+b)}+x\cdot\underbrace{(a+b)}=$

$$=(13+x)\cdot(a+b)$$

Perceba que aqui dividiu-se a expressão em dois grupos e, em cada um deles, numa primeira etapa, se buscou um fator comum. Depois disso, colocou-se o fator (a + b) como fator comum de toda a expressão.

Esse processo do agrupamento não é tão simples de visualizar, mas basicamente é o mesmo que aplicar o fator comum em evidência duas vezes.

c) Diferença de quadrados

Se um binômio é a diferença dos quadrados de dois termos, ele pode ser fatorado como o produto da soma pela diferença desses termos, ou seja:

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

Por exemplo, $9x^2-25y^2=(3x+5y)\cdot(3x-5y)$.

d) Trinômio quadrado perfeito

Todo trinômio que apresenta dois monômios quadrados perfeitos $(a^2 \text{ e } b^2)$ e um termo igual ao dobro do produto das bases dos outros dois monômios (2ab) é um trinômio quadrado perfeito, que pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \text{ ou } a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Por exemplo, $25x^2+10x+1=(5x+1)^2$

$81a^2-90ab+25b^2=(9a-5b)^2$

Vamos aos exemplos desse bloco de fatoração:

Exemplo 6. Simplifique ao máximo a expressão $\frac{y^3-y^2+y-1}{y^3-y^2-y+1}\cdot\frac{ya-a+yb-b}{ya+a+yb+b}$.

Exemplo 7. Sabe-se que 2x + y = 12 e que 2x – y = 2. Calcule o valor de $(4x^2-y^2)\cdot(4x^2-4xy+y^2)$.

Exemplo 8. Calcule a área de uma coroa circular cujos raios das circunferências externa e interna medem 343m e 342m, respectivamente.

- 10.6. Sistemas de equação com duas incógnitas

Uma sentença aberta composta por duas equações com duas variáveis, $a_1x+b_1y=c_1$ e $a_2x+b_2y=c_2$, em que x e y $\in\mathbb{R}$, é denominada sistema de equações com duas incógnitas. Caso essa sentença tenha três equações e três variáveis, será um sistema de equações com três incógnitas, e assim por diante.

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

Podemos montar uma sentença a partir de informações dadas no enunciado. Por exemplo: a soma de dois números reais é igual a 6, e um deles é o dobro do outro. Quais são esses números?

Se chamarmos um número de *x* e o outro de *y*, podemos escrever o seguinte sistema:

$\begin{cases}x+y=6\\y=2x\end{cases}$, que é equivalente ao sistema $\begin{cases}x+y=6\\2x-y=0\end{cases}$

Mas como faremos para descobrir os valores de *x* e *y* sem utilizar o método da tentativa e erro? Há algumas maneiras para isso, e trabalharemos as duas mais comuns.

a) Método da Substituição

Esse método consiste em encontrar o valor de uma incógnita em função das outras e substituir o valor encontrado no lugar dessa incógnita nas demais equações.

Observe a resolução do sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=13 \end{cases}$ pelo método da substituição:

1) Escolhe-se uma incógnita para isolar. Isolaremos o *y* na primeira equação: $y=8-x$
2) Substitui-se o valor dessa incógnita na outra equação: $2x+y=13 \rightarrow 2x+(8-x)=13 \Rightarrow x=5$
3) Substitui-se o valor numérico encontrado (x) na equação em que se isolou a outra incógnita (y): $y=8-x \rightarrow y=8-5 \Rightarrow y=3$.

Logo, o par ordenado (5, 3) é a solução do nosso sistema, ou seja, S = {(5, 3)}.

Observação: Como nosso sistema tem apenas equações do 1º grau, haverá apenas 1 solução. Caso fosse do 2º grau, por exemplo, haveria 2 soluções, e assim por diante.

b) Método da Adição

Esse método de resolução consiste em adicionar as equações membro a membro, de modo que uma das incógnitas seja eliminada e reste apenas uma equação com uma incógnita. Acompanhe a resolução do sistema $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ -5x+3y=25 \end{cases}$ a seguir:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 & \cdot(-3) \\ -5x+3y=25 & \cdot(2) \end{cases} \xrightarrow{} \begin{cases} -9x-6y=-12 \\ -10x+6y=50 \end{cases}$$

Aplicando a propriedade distributiva em todos os termos da equação.

Somando membro a membro as duas equações, obtém-se:

$$\begin{cases} -9x\cancel{-6y}=-12 \\ -10x\cancel{+6y}=50 \end{cases}$$
$$-19x \quad =38 \rightarrow 19x=-38 \rightarrow x=-\frac{38}{19} \rightarrow x=-2$$

Para calcular o valor da incógnita restante, basta substituir o valor encontrado, no caso x = -2, em <u>qualquer</u> uma das equações do sistema.

$$3x+2y=4 \rightarrow 3\cdot(-2)+2y=4 \rightarrow -6+2y=4 \rightarrow 2y=4+6$$
$$\Rightarrow y=5$$

Logo, o par ordenado (x, y) = (-2, 5) é a solução do sistema, ou seja, S = {(-2, 5)}.

Observação: nosso objetivo aqui não é estudar a fundo os Sistemas Lineares, as soluções envolvendo matrizes e determinantes e outros assuntos com essa riqueza de detalhes. O intuito é caracterizar os sistemas mais cobrados e fornecer a vocês ferramentas para se saírem das situações a que vocês serão expostos.

Exemplo 9. Um pai tem 28 anos a mais que seu filho. Há 2 anos, a idade do pai excedia em 4 anos o triplo da idade do filho. Qual é a idade de cada um?

Exemplo 10. A soma das laranjas e dos limões encontrados em uma cesta é 98. O número de limões é $\frac{3}{4}$ do número de laranjas. Quantos são os limões e quantas são as laranjas?

Exemplo 11. Em uma partida de basquete, Paula e Cristina marcaram, juntas, 60 pontos; Paula e Flávia, 50 pontos; Cristina e Flávia, 46 pontos. Quantos pontos cada uma delas marcou?

- 10.7. Manipulações Algébricas

Multiplicação de uma desigualdade por negativo

Inequações algébricas que envolvam coeficiente

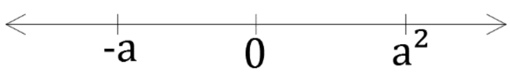
a) Quadrado de um número entre 0 e 1

Se elevarmos um número ao quadrado, ele será sempre maior do que o número original? Temos que analisar alguns casos distintos, sempre observando a reta numérica: quanto mais à direita, maior é o número; quanto mais à esquerda, menor é o número. Veja os exemplos:

1) Suponha um número *a* tal que seu negativo seja *-a*. Caso o número <u>*–a* seja elevado ao quadrado</u>, eis o que ocorre:

$$(-a)\cdot(-a)=+a^2$$

Utilizando as regras de sinal, fica claro que o quadrado de um número negativo sempre será positivo. Se posicionarmos esses números na reta numérica, o número *–a* estará do lado esquerdo do zero (lado negativo) e o $+a^2$ estará ao lado direito (positivo):



Imagine que o *–a* seja, por exemplo -3. Se fazemos (-3).(-3) = +9, ou seja, um valor positivo.

Fica evidente, nesse caso, que o quadrado de um número negativo é maior que o próprio número, já que está à direita da reta numérica.

2) Suponha agora um número *b* inteiro e positivo que seja maior que o número 1. Caso o número <u>b seja elevado ao quadrado</u>, teremos:

$$(b)\cdot(b)=b^2$$

Ou seja, teremos um número maior que o *b* que usamos como base. Portanto, se representarmos na reta numérica, teremos o seguinte comportamento:

Imagine que o *b* seja, por exemplo, 7. Se fazemos 7.7 = +49, o resultado do produto é um número muito maior que o próprio 7, já que é o valor dele sete vezes.

Nesse caso, fica evidente que o quadrado de um número positivo maior que 1 é sempre maior que o próprio número.

3) Suponha agora um número *c* que seja positivo e esteja entre 0 e 1. Caso um <u>*c* tal que 0<c<1 seja elevado ao quadrado</u>, teremos um comportamento curioso:

$$(c)\cdot(c)=c^2$$

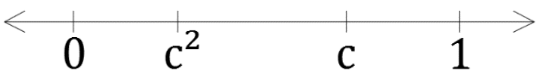
Até aqui, muito parecido com a situação anterior. Porém, se você multiplica qualquer número por um número menor entre 0 e 1, esse número inicial sempre vai diminuir, certo?

Imagine que vamos multiplicar 2 por 0,5. O resultado será menor que 2, será igual a 1.

Agora imagine que vamos multiplicar 1 por 0,3. O resultado será menor que 1, será igual a 0,3.

Toda vez que <u>multiplicamos um número por um número menor que 1, diminuímos o número inicial</u>.

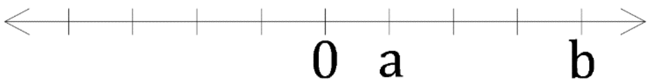
Se representarmos o quadrado do número *c* na reta numérica, eis o que teremos:



Vamos pegar como exemplo o c = 0,5. Se elevarmos 0,5 ao quadrado, faremos $0,5\cdot 0,5=0,25$, ou seja, um resultado menor que o 0,5 inicial.

b) Multiplicação de uma desigualdade por negativo

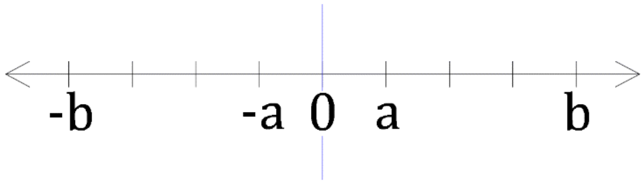
Ainda analisando retas numéricas, vamos observar a seguinte situação:



Qual número é o maior? <u>Quanto mais à direita, maior é o número</u>, portanto o número b é maior que o a, e podemos escrever $a<b$.

E se multiplicarmos essa inequação por (-1)? O que ocorre com a reta numérica?

Quando multiplicamos por -1, transformamos os valores em seus opostos, ou seja, espelhamos esses valores em relação ao 0:

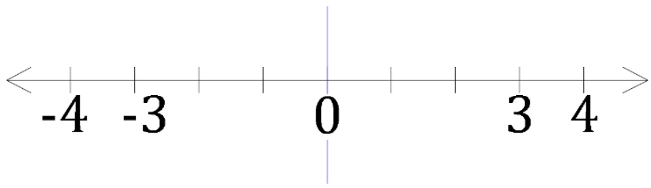


Nesse caso, observando o lado negativo da reta, quem é maior? *–a* ou *–b*? Sempre: quanto mais à direita, maior é o número. Portanto, *-a* é maior e podemos escrever $-a>-b$.

Perceba que invertemos o sinal da desigualdade! É por esse motivo que, quando multiplicamos por -1 uma desigualdade, o sinal vira para o lado oposto:

$$(a<b)\cdot(-1)\rightarrow -a>-b$$

Fazendo essa análise com exemplos numéricos: $3<4$, como na reta.



Porém, $-3>-4$, como podemos observar na reta.

c) Inequações algébricas: produto e quociente

Essa análise feita anteriormente fica especialmente complexa quando temos inequações algébricas, quando temos produtos ou divisões entre expressões e precisamos estudar o sinal de cada uma delas separadamente.

Primeiramente, veremos as condições para a resolução da questão e estudaremos cada condição separadamente. Por exemplo, veja esta expressão a seguir, que é uma <u>inequação produto</u>:

$$(2x+6)\cdot(-3x+12)>0$$

Se esta multiplicação deve ser maior que 0, temos as seguintes possibilidades:

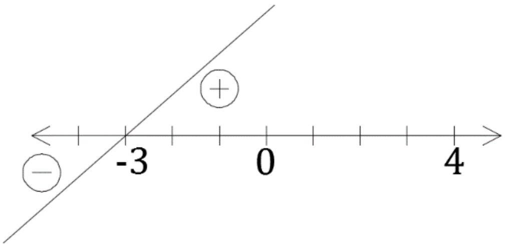
1) Ou os dois termos são positivos, então o produto será positivo;
2) Ou os dois termos são negativos, então o produto será negativo.

Nesse caso, precisaremos encontrar os valores que satisfazem a essas condições. Para isso, faremos um procedimento que conhecemos como "estudo do sinal", e envolve o estudo de intervalos, que vimos na aula passada.

I) Faremos I = 2x + 6 e encontraremos os valores:

$$2x+6=0\Rightarrow 2x=-6\Rightarrow x=-3$$

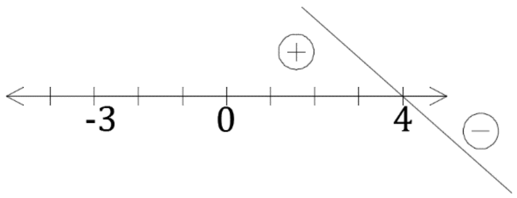
Como a reta tem coeficiente angular positivo (2) e é crescente, construiremos uma reta crescente, passando pelo -3:



II) Faremos II = -3x + 12 e encontraremos os valores:

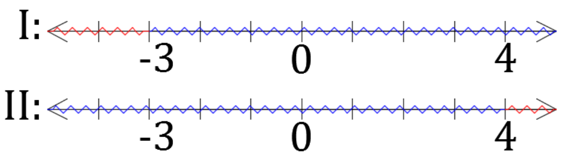
$$-3x+12=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} 3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$

Como a reta tem coeficiente angular negativo, (-3) e é decrescente, construiremos uma reta decrescente, passando pelo 4:



III) Existem intervalos que, em ambos, tenham seus valores positivos, para que o produto seja positivo? Da mesma forma, existem intervalos que, em ambos, tenham seus valores negativos, para que o produto seja positivo?

Para isso, faremos o estudo dos sinais. Nos intervalos a seguir, usaremos azul para valores positivos e vermelho para valores negativos:



Buscamos soluções que sejam, ao mesmo tempo, azuis ou vermelhas. Nesse caso, temos apenas um intervalo que atende a esse requisito: -3 < x < 4.

Portanto, o nosso conjunto solução será:

$$S=\{x \in \mathbb{R} \mid -3<x<4\}$$

Fizemos essa análise para o caso de termos uma inequação produto. Mas...e se tivermos uma <u>inequação quociente</u>? Na inequação quociente, ao invés de os termos algébricos estarem se multiplicando, um está dividindo o outro, como no exemplo a seguir:

$$\frac{x+1}{2x-1} \le 0$$

Dessa vez, se a divisão deve ser menor que 0, temos duas possibilidades:

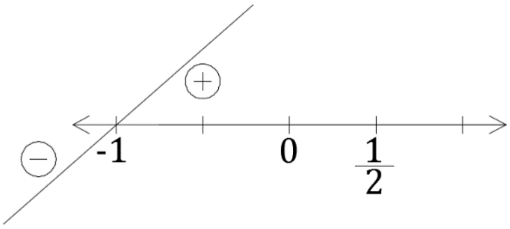
1) Ou o numerador é positivo e o denominador, negativo, de modo ao resultado ser um número negativo;
2) Ou o contrário: numerador negativo e denominador positivo.

Da mesma forma, precisaremos encontrar os valores que satisfazem a essas condições. Para isso, faremos o mesmo procedimento.

I) Faremos I = x + 1 e encontraremos os valores:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

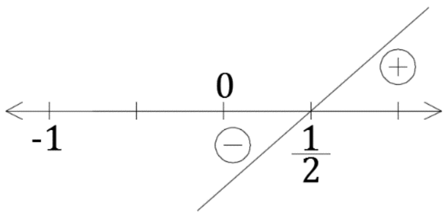
Como a reta tem coeficiente angular positivo (1) e é crescente, construiremos uma reta crescente, passando pelo -1:



II) Faremos II = 2x - 1 e encontraremos os valores:

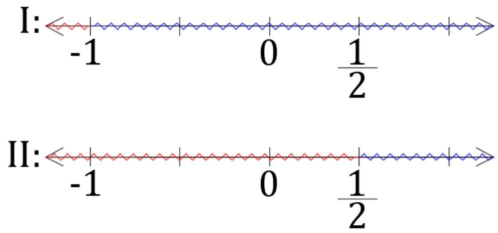
$$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Como a reta tem coeficiente angular positivo, (2) e é crescente, construiremos uma reta decrescente, passando pelo $\frac{1}{2}$:



III) Existem intervalos em que nas duas equações nós tenhamos valores trocados, de modo ao resultado ser negativo?

Para isso, faremos o estudo dos sinais. Nos intervalos a seguir, usaremos azul para valores positivos e vermelho para valores negativos:

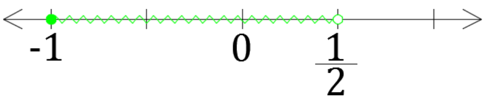


Buscamos soluções que sejam uma diferente da outra, ou seja, uma azul e outra vermelha. Nesse caso, temos apenas um intervalo que atende a esse requisito: $-1 \le x < \frac{1}{2}$.

Portanto, o nosso conjunto solução será:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < \frac{1}{2} \right\}$$

I*II:



Aqui é <u>importantíssimo</u> se fazer uma distinção: o denominador de uma fração nunca pode ser igual a zero. Portanto, para a equação referente ao denominador, teremos sempre um intervalo aberto naquela extremidade (nesse caso, representada pelo $\frac{1}{2}$).

- 10.8. Razão

Chama-se <u>razão</u> entre dois números racionais *a* e *b*, sendo b diferente de 0, o quociente do primeiro número pelo segundo. Escreve-se "a razão entre a e b" como $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Imagine uma viagem de ônibus entre duas cidades. Pela estrada A, o tempo médio de viagem é de 6 horas, enquanto pela estrada B, o tempo médio é de 3h. Para comparar o tempo médio de viagem entre essas duas estradas, pode-se usar a razão $\frac{6h}{3h}$.

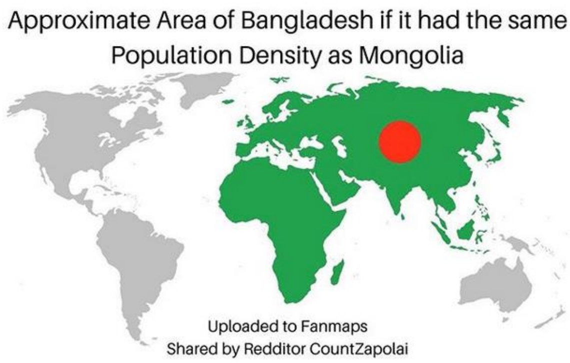
Nesse caso, conclui-se que o tempo médio de viagem pela estrada A é o dobro do tempo médio que se gasta pela estrada B., já que <u>a razão é igual a 2</u>.

Podemos fazer essa relação de maneira inversa. O tempo gasto de viagem pela estrada B é a metade do tempo gasto na estrada A, já que $\frac{3h}{6h} = \frac{1}{2}$.

Podemos aplicar a escada em diversos contextos:

1) <u>Densidade demográfica de uma região</u>: razão entre a população da região e a área da região

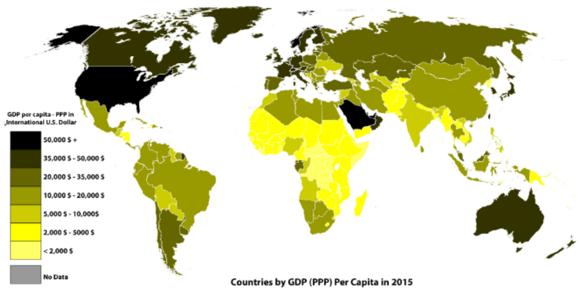
Veja o mapa abaixo. Ele traz uma análise sobre a razão que representa a densidade demográfica da Mongólia e de Bangladesh. Tente interpretar o mapa e tirar as suas conclusões: o que podemos concluir?



Instagram: @fanmaps

2) <u>Velocidade média:</u> razão entre a distância percorrida e o tempo de percurso.

3) <u>Renda *per capita*:</u> razão entre o total da renda nacional e o número de habitantes de um determinado país.



Fonte: FMI, 2015

Instagram: @ugurgallen

Exemplo 12. (ENEM 2014) Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

Jogador I	Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
Jogador II	Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
Jogador III	Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
Jogador IV	Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
Jogador V	Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Exemplo 13. (ENEM 2016) Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.
Disponível em: www.redebrasilatual.com.br. Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é o
a) F1.
b) F2.
c) F3.
d) F4.
e) F5.

a) Escalas

Escala é a razão entre as dimensões de um desenho, ou de uma imagem virtual, e as correspondentes dimensões reais, expressos na mesma unidade de medida. Ela pode se referir a uma figura, uma maquete, um mapa etc.

Considere a seguinte situação: em um mapa, a distância entre cidades está representada por um segmento de reta que mede 5cm. Sabendo-se que a distância real é de 30km, qual foi a escala utilizada no mapa?

$$\text{Escala} = \frac{\text{Comp. desenho}}{\text{Comp. real}} = \frac{5\text{cm}}{30\text{km}} = \frac{5\text{cm}}{3000000\text{cm}} = \frac{1}{600000}$$

Logo, a escala utilizada no mapa foi de 1: 600.000.

Note que esse número é adimensional, ou seja, não tem unidades. Isso se deve ao fato de que a escala é tomada em uma razão entre duas grandezas na mesma unidade e a unidade acaba sendo "cortada", se anulando, se tornando irrelevante.

A interpretação para a escala encontrada, 1: 600.000, é de que 1cm no desenho representa 600.000cm na vida real. 1km no desenho representaria 600.000km na vida real, e assim por diante.

Exemplo 14. Em uma maquete, a altura de um edifício é 90cm. Sabendo que a maquete foi construída na escala 1:30, determine a altura real desse edifício.

Exemplo 15. Em um mapa cartográfico, 4cm representam 12km. Determine, em km, qual é a distância entre duas cidades se, nesse mapa, a estrada que liga essas duas cidades mede 10cm.

Exemplo 16. (ENEM 2018): Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X.

Os valores possíveis para X são, apenas,
a) $X > 1.500$.
b) $X < 3.000$.
c) $1.500 < X < 2.250$.
d) $1.500 < X < 3.000$.
e) $2.250 < X < 3.000$.

========== **AULA 11. Porcentagem** ==========

- 11.1. Uma breve introdução sobre Porcentagem

Cálculos envolvendo porcentagens estão presentes nas mais diversas situações do dia-a-dia, especialmente em liquidações, como as da Black Friday e a apresentada acima, em que o uso de descontos é uma das principais estratégias para atrair os clientes.

A ideia de porcentagem está associada à divisão de uma unidade em um cento de partes e é representada pelo símbolo %. Quando temos 60% de alguma grandeza, isso equivale a dividir a grandeza em 100 partes e tomar 60 dessas partes. Assim, temos 60 partes em 100, ou 60 por cento, ou 60%.

Em casos como o apresentado, podemos fazer os cálculos envolvendo porcentagens de forma prática e rápida. Nesta aula, veremos essas estratégias para cálculo das porcentagens de desconto e aumento, e faremos um estudo sobre juros.

- 11.2. Transformação em decimal

Os cálculos envolvendo porcentagem podem ser realizados, também, usando os números decimais. Essa é, na realidade, a maneira mais comum de resolver questões sobre porcentagem, e usaremos essa representação para os cálculos a partir daqui.

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1. Em uma turma de 50 alunos, 40 foram aprovados. Qual foi o percentual de aprovação dos alunos?

I. Neste caso, para se fazer uma comparação entre duas grandezas da mesma natureza, utiliza-se a razão entre elas, como vimos na aula anterior.

$$\frac{40}{50} = 40:50 = 0{,}80 \text{ ou } 0{,}8$$

II. Uma outra opção é igualar essa razão a uma razão de denominador igual a 100, usando uma regra de três:

$$\frac{40}{50} = \frac{x}{100} \rightarrow 50x = 40 \cdot 100 \Rightarrow x = 80$$

$$\Rightarrow p = \frac{80}{100} = 0{,}80 \text{ ou } 0{,}8$$

Conclui-se, portanto, que o percentual de aprovação nessa turma foi de 80%. Diz-se, nesse caso, que a taxa percentual é de 80% ou 0,8.

Nesse segundo caso, descobrimos o valor percentual em formato de número decimal. Esse mesmo processo pode ser usado quando temos outros valores:

$$75\% = \frac{75}{100} = 75:100 = 0{,}75$$

$$35\% = \frac{35}{100} = 35:100 = 0{,}35$$

$$3{,}5\% = \frac{3{,}5}{100} = \frac{35}{1000} = 35:1000 = 0{,}035$$

$$3{,}42\% = \frac{3{,}42}{100} = \frac{342}{10000} = 0{,}0342$$

Repare que entre o segundo e o terceiro casos há uma diferença. Devemos ficar muito atentos quando ocorrer de termos percentuais que sejam menores que 10%, como o 3,5% que apareceu, para representarmos da maneira correta. É muito comum o erro de representar números como o 3,5% como 0,35.

Outro ponto de atenção é quando o percentual tiver números que não sejam inteiros, como o 3,5% e o 3,42%. As casas decimais podem e devem prosseguir após as duas primeiras, e isso não é um problema. É um erro comum que se represente com apenas duas casas decimais, e a representação estaria equivocada.

Em geral, no cálculo de percentuais relativos a números ou medidas, utiliza-se a taxa percentual na forma decimal.

Exemplo 2. 85% de uma escola participará das Olimpíadas. Se essa escola tem 680 alunos, quantos alunos não participarão das Olimpíadas?

Exemplo 3. Manuela gastou 80% do seu salário e sobraram R$ 264,00. Qual é o valor do salário de Manuela?

- 11.3. Cálculo Mental de Porcentagens

No início dessa aula, vimos uma situação de liquidação da Black Friday, em que havia descontos sobre o preço dos produtos calça jeans e tênis. Se tivéssemos que fazer esse cálculo mentalmente, quais seriam as etapas para encontrar o valor final?

A dica para calcular mentalmente os percentuais é começar com o cálculo de 10% daquele valor. Como 10% é o mesmo que 100% dividido por 10, basta dividir o valor do produto por 10 e encontramos 10%. A partir disso, você pode encontrar os percentuais com multiplicações, divisões e somas, como a seguir:

- Calça jeans:

10% de R$ 120,00 são R$ 12. Portanto, 40% será 10% x 4, ou seja, R$ 12 x 4 = R$ 48. Logo, o valor final da calça será R$ 120 – R$ 48, que é igual a R$ 72.

- Tênis caramelo:

10% de R$ 150,00 são R$ 15. Portanto, 20% será 10% x 2, ou seja, R$ 15 x 2 = R$ 30. Logo, o valor final do tênis será R$ 150 – R$ 30, que é igual a R$ 120,00.

Exemplo 4. Marcos gastou 75% de seu salário e sobraram R$ 350. Qual é o valor do salário de Marcos?

Exemplo 5. Quanto corresponde a 3,3% de R$ 160,00?

Esses cálculos são uma palhinha do que teremos na aula de Cálculo Mental do curso do 2º semestre, em que teremos essas e outras estratégias.

- 11.4. Fatores de aumento e de redução

Em várias situações envolvendo percentuais, há a necessidade de calcular valores acrescidos de algum percentual ou que tenham sofrido algum desconto. Nessas situações, pode-se trabalhar com as taxas percentuais na forma decimal e utilizar os fatores de aumento ou de redução.

Considere que o preço inicial de uma mercadoria, como a gasolina, corresponde a 100%. Analise as matérias a seguir:

≡ O GLOBO ECONOMIA

Petrobras anuncia aumento de 12% nos preços da gasolina

Em média, o litro do combustível nas refinarias vai aumentar R$ 0,11 a partir desta quinta-feira. No ano, queda acumulada é de 46,6%

Ramona Ordoñez
06/05/2020 - 15:56 / Atualizado em 06/05/2020 - 19:22

Se o preço da gasolina anteriormente correspondia a 100%, qual será o novo percentual a pagar?

Nesse caso, teremos um aumento, ou seja, teremos os 100% iniciais acrescidos de 12%. O resultado final será 112% do valor inicial.

≡ O GLOBO ECONOMIA

Petrobras reduz preço da gasolina em 15% a partir desta quarta

Decisão ocorre diante da forte desvalorização no preço do petróleo no mercado internacional

Gabriel Martins e Ramona Ordoñez
24/03/2020 - 13:12 / Atualizado em 24/03/2020 - 16:22

Da mesma forma que anteriormente, se o preço da gasolina correspondia a 100%, qual será o novo percentual a pagar?

Teremos uma redução neste outro caso. Como houve um desconto de 15%, teremos os 100% iniciais descontados de 15%, ou seja, sobrará 85% do valor inicial.

a) Fator de Aumento

Suponha que um produto custe R$ 400,00. Qual será o preço desse produto se ele sofrer um aumento de 20%?

Como 100% + 20% = 120%, o preço final desse produto será 120% do preço inicial.

Assim como vimos anteriormente, 120% pode ser reescrito como o número decimal 1,2. Ou seja, o preço com aumento será igual a 1,2 x R$ 400,00.

O produto passará a custar, portanto, R$ 480,00.

Se um valor inicial sofrer um **aumento** percentual correspondente a uma taxa **p**, seu valor final será igual ao valor inicial multiplicado pelo fator **1+p**, conhecido como **fator de aumento**.

Exemplo 6. O preço de um produto é R$ 60,00. Use o fator de aumento para calcular quanto esse produto custará se sofrer um aumento de:

a) 30%

b) 100%

c) 150%

Exemplo 7. Laura viu um tênis que custava R$ 200,00 em uma loja, mas não o comprou. Quanto voltou no dia seguinte, ela teve uma surpresa desagradável.: o tênis passou a custar R$ 200,00.

Qual foi o percentual de aumento no preço do tênis?

b) Fator de Redução

Da mesma forma como anteriormente, vamos supor um produto que custe R$ 400,00. Qual será o preço do produto se ele sofrer um desconto de 20%?

Como 100% – 20% = 80%, o preço final desse produto corresponderá a 80% do preço inicial.

Já que 80% pode ser reescrito como o número decimal 0,8, o preço com desconto de 20% será igual a 0,8 x R$ 400,00 = R$ 320,00, que será o preço final do produto.

Da mesma forma, no caso da calça da Black Friday, como tivemos um desconto de 40%, o percentual final do valor que teremos que pagar será 100% – 40% = 60% do valor inicial. No caso do tênis, 100% – 20% = 80% do valor inicial.

Se um valor inicial sofrer um **desconto** percentual correspondente a uma taxa **p**, seu valor final será igual ao valor inicial multiplicado pelo fator **1–p**, conhecido como **fator de redução**.

Exemplo 8. O preço de um produto é R$ 60,00. Use o fator de redução para calcular quanto esse produto custará se sofrer um desconto de:

a) 30%

b) 40%

c) 60%

Exemplo 9. Lucas tinha R$ 300,00 para trocar os pneus do seu carro. Após negociar com o vendedor, Lucas conseguiu pagar R$ 240,00.

Qual foi o desconto que ele conseguiu na compra?

==

A partir desse momento, usaremos um aumento percentual como a multiplicação do valor inicial por um fator de aumento (1+p), e um desconto percentual como a multiplicação do valor inicial por um fator de redução (1–p).

Mas...e se nós tivermos uma situação em que tenhamos aumento seguido de uma redução, ou vice-versa? Os fatores de aumento e redução ajudarão muito a entender a próxima seção, que fala de aumentos e descontos sucessivos.

- 11.5. Aumentos e descontos sucessivos

Em diversos casos, é possível haver aumentos e descontos sucessivos. Imagine, por exemplo, que uma loja entrou em liquidação e colocou todo o seu estoque com 40% de desconto. Caso o cliente pagasse à vista, o gerente anunciou que daria mais 10% de desconto sobre o preço final. Nesse caso, qual foi o desconto total dado?

a) Descontos sucessivos

A nossa primeira reação é somar os dois descontos, ou seja, 40% + 10% = 50%. Mas será que esse é o valor correto?

Para resolver esse problema, identificaremos quais são os fatores de redução aplicados:

I) "Desconto de 40%" = 100% – 40% = 60% = 0,6 (fator de redução)
II) "Desconto de 10%" = 100% – 10% = 90% = 0,9 (fator de redução)

Repare que, no segundo caso, consideramos o valor já descontado como 100%, já que aplicaremos 10% de desconto sobre esse valor já descontado.

Dessa forma, o fator final de multiplicação será a multiplicação entre os dois fatores de redução: 0,6 x 0,9 = 0,54. Portanto, o fator de redução total foi de 0,54, ou seja, o cliente teve um desconto total de 46%.

b) Aumentos sucessivos

Esse mesmo contexto pode ser aplicado caso nós tenhamos aumentos sucessivos. Se tivermos um aumento de 20% seguido de um aumento de 30% sobre o valor já aumentado, buscaremos os dois fatores de aumento (1,2 e 1,3) e multiplicaremos.

Nossa reação inicial é somar os dois aumentos (20% + 30%), mas nesse caso, 1,2 x 1,3 = 1,56, ou seja, teremos um aumento total de 56%.

a) Descontos seguidos de aumento e vice-versa

Por fim, esse mesmo contexto pode ser usado para quando temos os dois efeitos misturados. Veja o exemplo que trouxemos da gasolina, em que tivemos uma redução de 15% em março de 2020 seguida de um aumento de 12% em maio de 2020. Ao final dos dois eventos, tivemos uma redução ou um aumento do valor inicial?

I) Primeiro, houve um desconto de 15% (ou 0,15) no valor da gasolina. Ou seja, o fator de redução foi de (1 – 0,15) = 0,85.
II) Em seguida, tivemos um aumento de 12% (ou 0,12) no valor da gasolina. Ou seja, o fator de aumento foi de (1 + 0,12) = 1,12.
III) Dessa forma, o fator total foi a multiplicação dos dois valores: 0,85 x 1,12 = 0,952.

Ou seja, como o valor final do fator de multiplicação é menor que 1,00, podemos afirmar que houve redução em relação ao valor inicial da gasolina. 0,952 representa 95,2% do valor inicial, o que mostra que tivemos uma desvalorização de 4,8% entre o valor inicial e o valor final.

E a dúvida que surge é: mudaria alguma coisa caso o aumento tivesse ocorrido antes e o desconto, depois? Deixarei vocês pensando um pouco nisso...

Exemplo 10. Sobre o preço de um produto, foi dado um desconto de 40%. Agora, a loja deseja voltar o produto ao valor inicial. Qual deve ser o aumento percentual aplicado para que o produto retorne ao seu valor inicial?

Exemplo 11. Sobre o preço de uma mercadoria foram aplicados dois aumentos de 20% seguidos de um desconto de 40%. Após essas variações, o preço aumentou, diminuiu ou voltou ao valor inicial?

Exemplo 12. Se aumentarmos um lado de um quadrado em 10% e reduzirmos o outro lado em 10%, o valor da área do quadrado aumenta, diminui ou se mantém?

===

Para finalizar esse tópico, vamos relacionar com essa multiplicação as situações em que tivermos "percentuais de percentuais". Por exemplo, 10% de 50%, ou 30% de 25%. Como se lida com essa situação?

Assim como nos aumentos e descontos sucessivos, vamos transformar os percentuais em números decimais e, por fim, fazer a multiplicação dos valores encontrados:

I) 10% de 50% = 0,1 x 0,5 = 0,05, ou 5%
II) 30% de 25% = 0,3 x 0,25 = 0,075, ou 7,5%.

Esse é o procedimento a ser sempre adotado quando tivermos a preposição "de". Na Matemática, ela indica uma multiplicação. Então sempre que tivermos um "percentual de percentual", faremos "percentual x percentual" para achar os valores finais.

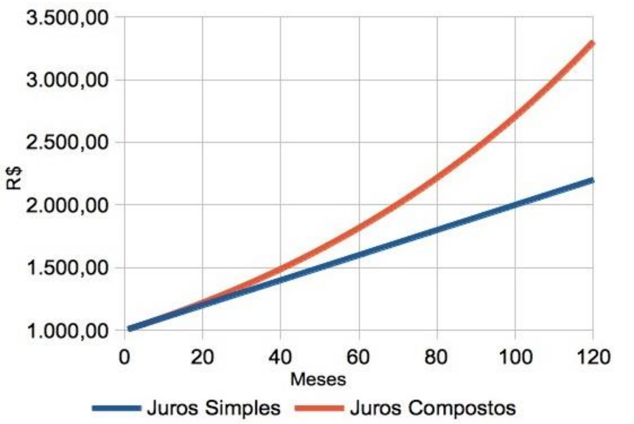
- 11.6. Juros e investimentos

Nas transações financeiras, o valor pago pelo empréstimo de uma determinada quantia recebe o nome de juro, enquanto o valor recebido por emprestar determinada quantia recebe o nome de rendimento, que representa o juro para quem paga. Por exemplo:

I) Taxa do rotativo do cartão de crédito: 12% a.m. (ao mês)
II) Taxa SELIC em 16/05/20: 3,00% a.a. (ao ano)

Quando se trata de juros, a quantia que foi emprestada recebe o nome de capital (C), o valor pago pelo empréstimo recebe o nome de juros (j), o percentual que incide sobre o valor emprestado recebe o nome de taxa (i) e o valor final após o cálculo recebe o nome de montante (M).

Existem duas modalidades de juros que são aplicadas: os simples e os compostos.



Disponível em: < https://www.maisinvestimento.com.br/2017/02/juros-simples-x-juros-compostos.html>, acesso em 02/05/2020.

a) Simples

Quando falamos sobre juros simples, nos referimos a uma taxa estática e que cresce sempre em relação ao valor inicial que foi emprestado, ou seja, o capital (C) inicial.

Nessa modalidade, o crescimento do valor devido é linear, como uma função afim, como no gráfico em azul.

As fórmulas para representar essa modalidade são:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

$$\Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Exemplo 13. O capital inicial de uma aplicação que rende a juros simples é de R$ 10.000,00. Resgatou-se um total de R$ 10.900,00 após 1 semestre. Qual é o valor da taxa de rendimento mensal desse investimento?

Exemplo 14. Diante de uma situação de crise, uma instituição financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juros simples. Se uma pessoa retirar R$ 8.000,00 nessa financeira, a uma taxa de juros de 16% ao ano, quanto tempo levará para dever um montante de R$ 8.320,00?

b) Compostos

Já os juros compostos são dinâmicos e incidem sempre sobre o valor já corrigido com juros do período anterior. É o que conhecemos como "juros sobre juros".

A cada período de tempo, os juros são acumulados ao capital, produzindo um novo montante. Sobre esse montante são calculados os juros correspondentes ao novo período e, assim, sucessivamente.

Nessa modalidade, o crescimento do valor devido é exponencial, como uma função exponencial, como no gráfico em vermelho.

A fórmula para representar essa modalidade é:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Essa é a modalidade mais aplicada para financiamentos, mas também para os investimentos, que é quando você pode se beneficiar. Assim como disse Einstein, “os juros compostos são a maior força do universo” e riquezas são criadas a quem investe e vê seu patrimônio crescendo a um ritmo composto.

Exemplo 15. (Unicamp – Adaptada)

Supondo que todos os preços de uma loja venham subindo 3% ao ano nos últimos anos e que continuarão assim nos próximos anos. Calcule:

a) Quanto custará, daqui a dois anos, um produto que, atualmente, custa R$ 1.650,00?

b) Quanto custava esse mesmo produto há exatamente um ano?

Exemplo 16. Joana aplicou um capital de R$ 15.000,00 no regime de juros compostos e viu que, após 2 anos de aplicação, seu patrimônio era de R$ 21.600,00. Qual foi a taxa anual de rendimento desse investimento?

=========== **AULA 12. Proporcionalidade** ===========

- 12.1. Propriedade Fundamental das Proporções

Uma proporção é uma equivalência entre duas razões entre grandezas, e o seu resultado demonstra uma relação entre essas grandezas. De maneira geral, uma proporção dá a ideia de que, entre dois elementos A e B:

I) Se A crescer, B também crescerá. Esse comportamento ocorre quando A e B forem diretamente proporcionais.
II) Se A crescer, B será reduzido. Esse comportamento ocorre quando A e B forem inversamente proporcionais.

É nas proporções que se define a Regra de Três. Numa igualdade entre frações como as abaixo, quando comecemos A, B e C, podemos facilmente descobrir o valor de D ao "multiplicar cruzado" e isolar a incógnita D:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow A\cdot D=B\cdot C\Rightarrow D=\frac{B\cdot C}{A}$$

O conceito de proporcionalidade foi utilizado, por exemplo, no Bloco 2, quando estudamos o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos. Mas as aplicações não se restringem à Geometria. Nas demais ciências exatas também há aplicações da proporcionalidade, por exemplo, na Termometria, e assim por diante.

Quando falamos sobre Razão, na aula 10, definimos a razão de proporcionalidade (k). Usaremos essa razão nas definições de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

- 12.2. Proporção Direta

A proporção direta pode ser percebida, entre outras situações, no movimento de um veículo. Quando nos movemos numa via cuja velocidade máxima média é de 60km/h, é possível estabelecer uma relação entre duas grandezas diretamente proporcionais: a distância percorrida e o tempo de percurso.

Vamos observar a tabela que apresenta esses dados:

Distância	Tempo
60 km	1 h
120 km	2 h
180 km	3 h
600 km	10 h

É fácil perceber que à medida em que o lado esquerdo da tabela aumenta, o lado direito também aumenta. Se nós multiplicamos por um valor um dos lados da proporção, o outro lado é multiplicado pelo mesmo valor.

Da mesma forma, caso um dos lados da proporção seja dividido por um valor, o outro lado também será dividido pelo mesmo valor. Percebe-se isso de baixo para cima na tabela.

A proporção direta, nesse caso, pode ser representada da seguinte forma, em que d_x representam as distâncias e t_x representam os tempos em cada trajeto x:

$$\frac{d_1}{t_1}=\frac{d_2}{t_2}=\frac{d_3}{t_3}=60km/h$$

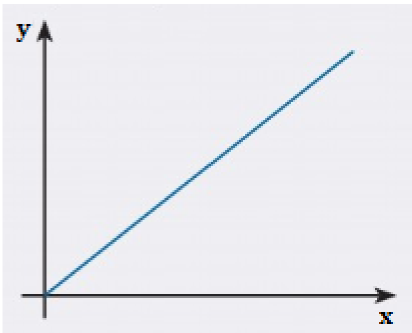
$$\Rightarrow\frac{60km}{h}=\frac{120km}{2h}=\frac{180km}{3h}=\frac{600km}{10h}$$

Nesse caso, a nossa velocidade média (60km/h) não é alterada. Ela ocupa a função da nossa razão de proporcionalidade (k) da proporção direta. Qualquer divisão entre distâncias e tempos de percurso serão sempre iguais a "k" para que se mantenha a proporção direta.

Dessa forma, se tivermos uma distância y e um tempo x, poderemos expressar a relação a partir das seguintes equações:

$$\frac{y}{x}=k\Rightarrow y=k\cdot x$$

Com isso, obtemos a representação algébrica da proporção direta. Essa representação nos leva a perceber que, aumentando-se o valor do tempo (x), a distância percorrida (y) aumenta na mesma proporção. Para a diminuição, ocorre o mesmo. Portanto, podemos representar graficamente a proporção direta como uma função linear, da seguinte forma:



Vamos perceber como aplicar essa relação nos exemplos a seguir.

Exemplo 1. Amanda pagou R$ 22,00 por 6 pacotes de bala. Quanto ela pagará se comprar

a) 3 pacotes?

b) 9 pacotes?

c) 24 pacotes?

Exemplo 2. (ENEM 2013)

Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.
A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2.

b) 4.

c) 5.

d) 8.

e) 9.

Exemplo 3. (ENEM 2016)

Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

a) 360

b) 485

c) 560

d) 740

e) 860

- 12.3. Proporção Inversa

Entendido o processo de cálculo da proporção direta, fica mais simples compreender a proporção inversa. Usaremos aqui o mesmo exemplo do movimento do veículo para exemplificar a proporção inversa.

Suponhamos que nós faremos uma viagem de Brasília à cidade de Goiânia, que fica a aproximadamente 200km de Brasília. É possível estabelecer uma relação entre duas grandezas inversamente proporcionais: a velocidade média e o tempo de viagem.

Vamos observar a tabela a seguir, que apresenta esses dados:

Velocidade	Tempo
50 km/h	4 h
100 km/h	2 h
200 km/h	1 h
800 km/h	0,25 h

Aqui, já é possível perceber que, à medida que aumentamos a velocidade de viagem, o tempo de viagem é diminuído. Se nós multiplicarmos um lado da proporção por um valor, o outro lado da proporção é dividido pelo mesmo valor.

E, por outro lado, se dividirmos um lado por um valor, o outro lado da proporção é multiplicado pelo mesmo valor. Percebe-se isso observando o comportamento de baixo para cima da tabela, quando a velocidade vai sendo dividida.

A proporção inversa, nesse caso, pode ser representada da seguinte forma, em que v_x representam as velocidades e t_x representam os tempos em cada trajeto x:

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 = v_3 \cdot t_3 = 200km$$

$$50\frac{km}{h} \cdot 4h = 100\frac{km}{h} \cdot 2h = 200\frac{km}{h} \cdot 1h = 800\frac{km}{h} \cdot 0,25h = 200km$$

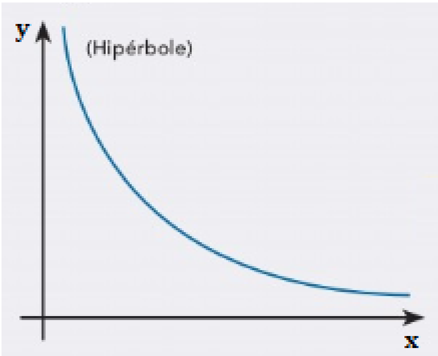
Nesse caso, diferentemente da situação anterior, a nossa distância não é alterada. Ela ocupa a função da nossa razão de proporcionalidade (k), nesse caso da proporção inversa. Qualquer divisão entre velocidades deve gerar uma multiplicação entre tempos de percurso em mesmo valor, para que se mantenha a razão "k" da proporção inversa.

Dessa forma, se tivermos uma velocidade y e um tempo x, poderemos expressar a relação a partir das seguintes equações:

$$y \cdot x = k$$

Com isso, obtemos a representação algébrica da proporção inversa. Essa representação nos leva a perceber que, aumentando-se o valor do tempo (x), a velocidade (y) diminui na mesma proporção. Para a diminuição do tempo, ocorre o aumento da velocidade, de modo a compensá-la.

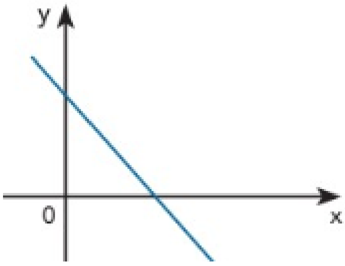
Portanto, podemos representar graficamente a proporção inversa como uma hipérbole, da seguinte forma:



É interessante perceber, nesse caso, que o gráfico não toca nos extremos. De maneira prática, isso significa que não faz sentido uma viagem com velocidade infinita durar um tempo zero, ou uma viagem com velocidade zero durar infinitamente.

Uma observação importante a ser feita: o fato de uma grandeza diminuir enquanto outra aumenta não é garantia de que ali exista uma relação de proporcionalidade inversa. Para haver uma proporção inversa, é necessário que sem mantenha constante a relação de multiplicação que mostramos $(y \cdot x = k)$.

O gráfico ao lado mostra uma relação decrescente (uma grandeza aumenta enquanto a outra diminui) que **não** é uma relação de proporcionalidade inversa, já que não é uma hipérbole.



Vamos perceber como aplicar a relação de proporcionalidade inversa nos exemplos a seguir.

Exemplo 4. Uma torneira enche uma caixa d'água em 4 horas, despejando 10 litros de água por minuto.

a) Em quanto tempo 2 torneiras iguais a essa encherão a mesma caixa d'água?

b) Se 4 torneiras forem ligadas juntas, cada uma despejando 10 litros de água por minuto, em quanto tempo essa caixa d'água estará cheia?

Exemplo 5. (ENEM 2013)

Cento e oitenta operários constroem uma estrada em 40 meses, então cem operários constroem essa mesma estrada em

a) 52 meses.

b) 60 meses.

c) 64 meses.

d) 72 meses.

e) 80 meses.

Exemplo 6. (IFPE 2017)

O governo municipal de Palmares, Mata Sul do estado de Pernambuco, decidiu construir um conjunto residencial. Para isso, contratou uma empresa que executasse a obra projetada para ser concluída em 12 meses. A empresa responsável verificou que 40 operários seriam suficientes para concluir todo o trabalho em 12 meses (prazo estabelecido em projeto).

Depois de seis meses sem atrasos na construção, o governo exigiu que a obra fosse concluída nos 4 meses seguintes, obrigando a empresa a contratar novos operários.

Se considerarmos que todos os operários têm a mesma eficiência, quantos funcionários a mais a empresa precisa contratar para terminar a obra no novo prazo exigido?

a) 60 b) 50 c) 40 d) 30 e) 20

- ### 12.4. Relações múltiplas de dependência

Na natureza, no entanto, normalmente as relações não são simples com apenas duas grandezas envolvidas. O que ocorre, na maioria das vezes, é que há várias grandezas com interferência sobre uma determinada situação.

Quando tivermos uma situação-problema em que temos mais de duas grandezas se relacionando, precisaremos identificar quais são as grandezas diretamente proporcionais e aquelas que são inversamente proporcionais. Depois disso, montaremos uma expressão algébrica que relacione todas as grandezas.

Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 7. (Unicamp – Adaptada)

Sabe-se que 5 máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir 1000 peças em 5 dias, se operarem 5 horas por dia. Se 10 máquinas iguais a essas operassem 10 horas por dia durante 10 dias, o número de peças produzidas seria

a) 1000. b) 2000. c) 4000.

d) 5000. e) 8000.

Exemplo 8. (IFSUL 2017)

Em uma indústria metalúrgica, 4 equipamentos operando 8 horas por dia durante 5 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. O número de dias necessários para produzir 3 toneladas do mesmo produto por 5 equipamentos do mesmo tipo, operando 6 horas por dia é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Bloco 4

Funções

====== **AULA 13. Conceitos Iniciais de Função** ======

- 13.1 Uma Breve **Introdução**

Dados dois conjuntos não vazios A e B,

$$f \text{ é função de A em B} \Rightarrow \left(\forall x \in A,\ \exists | \, y \in B \,|\, (x,y) \in f\right).$$

É simples compreender, de imediato, a definição de função dada acima, correto? Não sei para vocês, mas eu teria vontade de chorar em posição fetal deitado na minha cama (é a única forma que cabe na cama, tendo 2,05m...) se eu fosse apresentado à ideia de funções dessa maneira. É praticamente uma piada pronta dizer que parece grego...

Aproximando um pouco mais a linguagem matemática para a língua portuguesa, isto é, "traduzindo" o que foi dito acima, podemos dizer que

> Uma relação f de um conjunto não-vazio A em um conjunto não-vazio B é dita uma função de A em B se, e somente se, para todo elemento x do conjunto A, existe um único elemento y do conjunto B tal que o par ordenado (x,y) pertence a f.

Ainda complicado, né? Verdade seja dita: o estudo de funções é extremamente ~~chato~~ extenso, exaustivo e por vezes tratado de maneira muito abstrata, com uma linguagem que afasta o interesse dos estudantes. Assim, é importante entender quais são os pontos principais e o que é realmente esperado do entendimento do estudante do Ensino Médio no que diz respeito ao estudo de funções, tal como as suas aplicações em contextos reais (que são infinitas!!!).

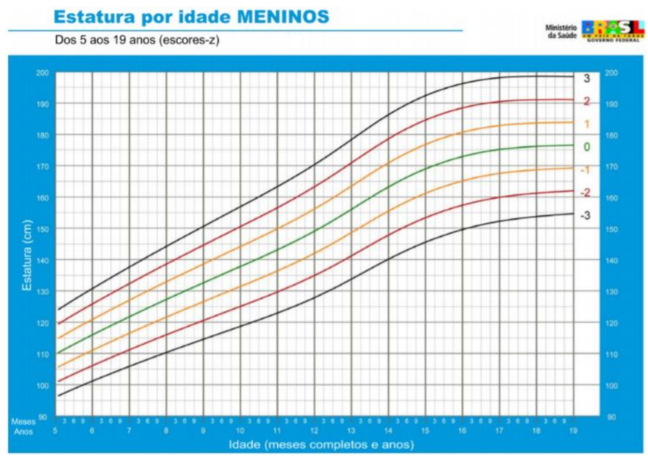
E para nos nortear nesse sentido, nada melhor do que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (doravante designada por OCEM – agora *gaxtei* meu vocabulário!). Mais uma vez, observaremos claramente como os conteúdos e a forma como estes vem sendo cobrados nos vestibulares, em especial no ENEM, se aproximam do que é apresentado neste documento. O trecho inicial, citado abaixo, será o nosso pontapé inicial para o tópico 13.2:

> *O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido).*

- 13.2 **Relações** entre Duas **Grandezas**

Imagine que você é pediatra e uma família o procura preocupada com o desenvolvimento e crescimento de uma criança que, com 10 anos de idade completos, mede 1,34m. Já que todos os amigos da criança são mais altas que ele, os pais perguntam ao pediatra: "isso é normal?".

Analisemos por um instante o gráfico abaixo da Organização Mundial de Saúde. As curvas do gráfico servem como referência para o crescimento esperado de meninos de 5 a 19 anos, relacionando as grandezas *Idade* (em meses completos e anos) e *Estatura* (em cm).

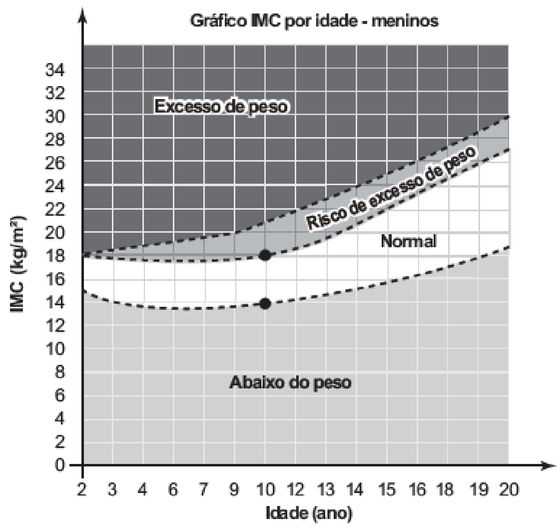


Fonte: WHO Growht reference data for 5-19 years, 2007 (http://www.who.int/growthref/en/)

Outro gráfico para acompanhamento de crianças e jovens adultos é o do Índice de Massa Corporal, ou IMC. Seu valor pode ser obtido pela fórmula

$$\text{IMC} = \frac{\text{Massa}}{(\text{Altura})^2},$$

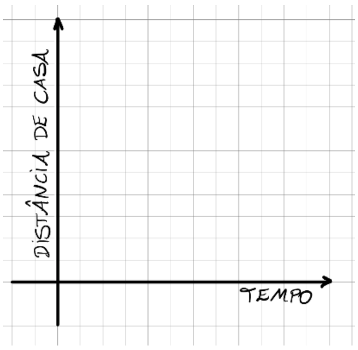
na qual a massa é dada em quilograma e a altura, em metro. O gráfico mostra o IMC por idade para meninos.



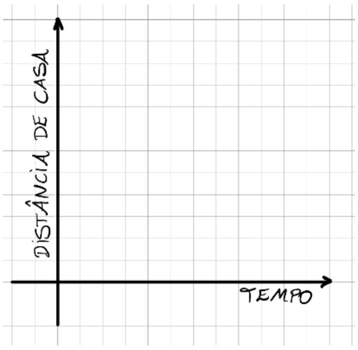
Disponível em: http://saude.hsw.uol.com. Acesso em: 31 jul. 2012.

Exemplo 01. Para cada uma das três situações relatadas abaixo, esboce os gráficos nos planos cartesianos da maneira que achar mais conveniente. Em todos os casos, considere que o "tempo zero" é o momento em que o indivíduo sai de casa.

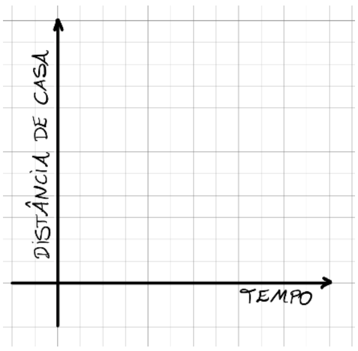
a) Ocirederf tinha acabado de sair de casa, caminhando a uma velocidade constante, quando percebeu que havia esquecido seus livros em casa. Após ter voltado para buscá-los, caminhando na mesma velocidade, demorou alguns instantes até encontrá-los. Levemente atrasado para a sua aula, resolveu correr para a escola, mantendo uma velocidade constante, porém mais rápido do que nas caminhadas anteriores.



b) Leirbag andava calmamente pela rua observando a arquitetura da cidade até o momento em que percebeu que se atrasaria para o compromisso e resolveu acelerar o passo cada vez mais e mais.

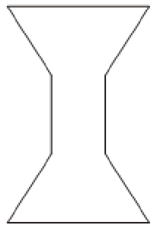


c) Kaká saiu rapidamente de casa, mas foi desacelerando aos poucos quando sentiu um incômodo no músculo gastrocnêmio medial.



Exemplo 02 (ENEM 2014)

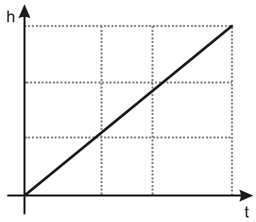
Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura ao lado é a vista frontal dessa escultura.



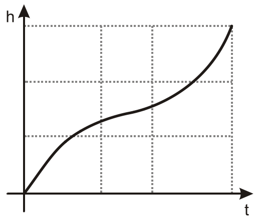
No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

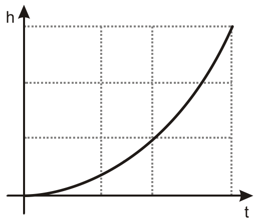
a)



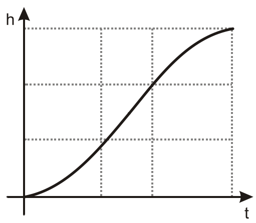
b)



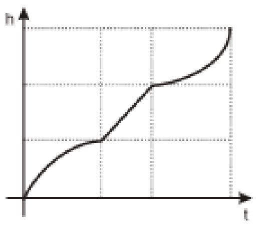
c)



d)



e)



- 13.3 O **Conceito** de Função

Em materiais mais completos, como livros didáticos, há um caminho natural a ser seguido antes de chegarmos propriamente em funções.

Iniciamos estudando algumas propriedades básicas de conjuntos e as suas representações, além de alguns conjuntos notáveis (unitário, vazio, solução, finito, etc). Depois, definem-se, nesta ordem, pares ordenados, produto cartesiano e relação binária, antes de estudarmos propriamente a ideia de funções.

Particularmente, só recomendo esse estudo mais completo para aqueles alunos que já tem facilidade com o conteúdo, dado o grau de profundidade que tal estudo pode exigir. Além disso, o enfoque do nosso curso é justamente em compreender aquilo que é efetivamente cobrado e mais relevante, em especial no estudo de funções. Assim, partiremos para aquilo que é efetivamente tratado na continuação das OCEM, que também não faz qualquer menção a produtos cartesianos e/ou relações binárias:

> *É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, f(x) = 2 x + 3, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física.*

Porém, antes que adentremos nas funções definidas por expressões algébricas, como citado acima, precisamos sim nos debruçar sobre alguns aspectos essenciais no conceito de função e deixar claro que nem toda função transforma números em outros números!

- 13.3.1 O Exemplo do **CPF**

Sejam **P** o conjunto de toda a população brasileira portadora de um Cadastro de Pessoa Física (CPF) e seja **C** o conjunto de códigos da forma $a_1a_2a_3\,.\,a_4a_5a_6\,.\,a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$, no qual $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ são algarismos de 0 a 9.

Note que cada uma das pessoas do conjunto **P** é **transformada** em um código único com 11 algarismos do conjunto **C**. Este é um exemplo de uma **função** dos elementos de P nos elementos que pertencem ao conjunto C ou, de maneira mais simples, uma **função de P em C**. Importante frisar que este é um caso em que uma pessoa é transformada em um código ao associar, por exemplo, o indivíduo Fibo Nacci em um código da forma $011\,.\,235\,.\,813 - 21$, o que mostra que nem toda função transforma, necessariamente, números em números.

(*Plot Twist*) Você sabia que é impossível existir o CPF $011\,.\,235\,.\,813 - 21$? Isso ocorre pois há uma maneira específica para calcular os dois últimos dígitos, denominados **dígitos verificadores**. Caso quiséssemos começar o CPF com $011\,.\,235\,.\,813$, obrigatoriamente os dois últimos dígitos seriam respectivamente 6 e 3, gerando o único CPF possível com os 9 algarismos iniciais: $011\,.\,235\,.\,813 - 63$. Assim, é perfeitamente possível (e não há qualquer problema nisso) que haja códigos como o próprio $011\,.\,235\,.\,813 - 21$ não associados a um indivíduo.

Quer saber um pouco melhor como isso funciona? Então dê uma conferida no QR Code ao lado. Isso não te interessa? Tudo bem, mas não diga que não te avisei: isso já foi cobrado no ENEM ;D

Façamos agora uma inversão nessa lógica: é possível criar uma **função de C em P**? Como entenderemos adiante ao definirmos função, isso é **impossível** pois, apesar de não haver ambiguidade (duas pessoas associadas a um mesmo código de CPF), ocorrem exceções (códigos $a_1a_2a_3\,.\,a_4a_5a_6\,.\,a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$ que não serão associados a nenhuma pessoa da população).

- 13.3.2 **Condições** da Função

Usualmente, atribui-se a denominação **relação binária** a uma associação qualquer entre elementos de dois conjuntos, sem quaisquer restrições quanto a ambiguidades e exceções. Nesse sentido, o exemplo do CPF citado seria uma **relação binária de P em C**, assim como uma **relação binária de C em P**, uma vez que foram estabelecidas associações quaisquer entre os elementos desses dois conjuntos.

Por outro lado, uma **relação binária** entre elementos de um conjunto A e elementos de um conjunto B **só pode ser considerada uma função de A em B** se satisfizer a duas condições: **não ambiguidade** e **não exceção**.

Exemplo 03. Nas duas situações abaixo, identifique se a relação binária estabelecida entre os conjuntos pode ser considerada uma função. Caso não possa, justifique qual (ou quais) condição não foi satisfeita, se a de não ambiguidade ou a de não exceção.

a) Sejam definidos os conjuntos *A = {1, 2, 3, 18}* e *P = {conjunto dos números primos}*. Seja estabelecida uma relação binária que associa a cada elemento *a* de *A* todos os fatores *p* de sua decomposição, sendo *p* elemento de *P*. Há uma *função de A em P*?

b) Sejam definidos os conjuntos *F = {cinco pessoas de uma família}* e *N = {conjunto dos números inteiros não negativos}*. Seja estabelecida uma relação binária que associa a cada pessoa da família *F* a sua idade em anos completos. Há uma *função de F em N*?

13.3.3 A **Máquina de Transformação**

Além de definirmos as duas condições (não ambiguidade e não exceção) que devem ser satisfeitas para que uma relação binária seja considerada uma função, devemos também **definir três características** de toda função: **domínio**, **contradomínio** e a **lei da função** (ou lei de formação).

Uma metáfora sensacional, que sempre utilizo em sala, é a de enxergar uma função como uma **máquina de transformação**. Essa metáfora pode ser encontrada no excelente livro **Coleção Elementos da Matemática – Volume 1**, dos autores Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro, muito utilizado por professores e alunos que já possuem embasamento e querem se aprofundar em determinados conteúdos. Quase que integralmente, os textos e paralelos abaixo foram de lá retirados.

No livro, o autor se utiliza dos exemplos de uma máquina de moer carne, que transforma pedaços inteiros de carne em carne moída, e máquinas de bater açaí, que transformam caroços de açaí em vinho de açaí. Como toda máquina de transformação, **três coisas** devem estar bem definidas:

1. O que a máquina aceita na **entrada**: carne, açaí, números reais, população brasileira etc. O importante é que uma máquina só funciona bem, produzindo os resultados esperados, quando a entrada (ou o insumo) for a correta. Não se pode esperar o produto vinho de açaí quando se introduz carne na máquina de bater açaí. No conceito de função, a **boa definição da entrada** diz respeito ao ***domínio*** da função;
2. O que a máquina produz na sua **saída**: nesse caso, no conceito de função, estamos nos referindo ao ***contradomínio*** da função. Tal definição é necessária para que haja uma espécie de previsão na natureza das imagens (dos resultados), de forma a não se permitir saídas que não sejam esperadas/possíveis;
3. Qual é a **transformação efetivamente produzida** pela máquina, ou seja, o que a máquina faz. Liquefação, moedura, extração de raízes quadradas, conversão de pessoas em códigos etc. Matematicamente, corresponde à ***lei da função***, a qual pode ser dada por uma expressão matemática/algébrica explícita (em geral, equações) ou não.

Ou seja, é necessário definir ***domínio***, ***contradomínio*** e a ***lei da função***. E onde entra a ideia de ***imagem***? É mais simples do que parece: enquanto o contradomínio é o conjunto de possíveis resultados da transformação, devemos entender a imagem como os resultados que são efetivamente obtidos após a transformação! Vejamos tudo isso na **Figura 1**.

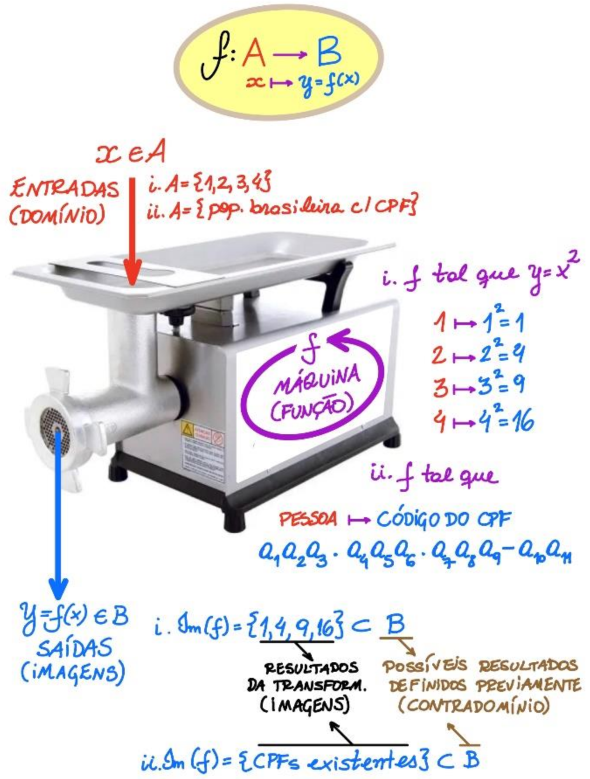


Figura 1

Façamos uma análise dos dois exemplos da **Figura 1**.

Exemplo i.

$$f : A = \{1, 2, 3, 4\} \to B = \mathbb{N}$$
$$x \mapsto f(x) = y = x^2$$

Nesse primeiro exemplo, foram definidos como entradas os números 1, 2, 3 e 4. Assim, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ corresponde ao domínio da função e não podemos "inserir" na nossa máquina quaisquer valores que não sejam estes.

Além disso, foi previamente definido o conjunto de possíveis resultados (ou saídas) que poderiam ser obtidos na nossa transformação. Tais resultados, no exemplo, correspondem ao conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), aqui representados pela letra maiúscula B. Isso é o que denominamos, com contexto de função, como o contradomínio da função.

Definiu-se, também, a transformação a ser realizada pela máquina: ela recebe um número (natural, nesse exemplo) e o eleva ao quadrado (o que poderia ser representado apenas por $x \mapsto x^2$). Essa é a lei de formação ou lei da função.

Note ainda que os resultados efetivamente obtidos nessa transformação foram os números naturais 1, 4, 9 e 16. Esse conjunto $\{1, 4, 9, 16\} \subset \mathbb{N}$ corresponde ao conjunto imagem da função, em geral denotado por $\mathrm{Im}(f)$. Assim, o número natural 5, por exemplo, faz parte do contradomínio (possíveis resultados naturais), mas não da imagem da função (resultados efetivamente obtidos na transformação).

Já o **Exemplo ii.** se refere justamente à situação discutida no exemplo do CPF. Vejamos:

Exemplo ii.

$$f: A = \{\text{brasileiros com CPF}\} \to B = \{\text{códigos de CPF}\}$$
$$\text{indivíduos} \mapsto a_1a_2a_3\ .\ a_4a_5a_6\ .\ a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$$

Nesse exemplo as <u>entradas (domínio)</u> corresponde à toda população que possui um CPF.

"Mas Fredão, por que você não definiu o conjunto A *como sendo toda a população brasileira?"*

Ora, *jovem mamífero*, se tivéssemos toda a população como sendo o domínio da nossa função, teríamos um problema no que diz respeito à uma condição de não exceção – fundamental para a existência de uma função –, uma vez que vários indivíduos não possuem CPF.

Já o conjunto de <u>possíveis resultados (contradomínio)</u> que poderiam ser obtidos na nossa transformação corresponde aos códigos da forma $a_1a_2a_3\ .\ a_4a_5a_6\ .\ a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$, nos quais a_i, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ representam algarismos do sistema decimal.

"Mas Fredão, você não tinha dito antes que existe uma regra específica para os CPFs e que alguns dos possíveis códigos não podem representar CPFs?"

Exato, *jovem padawan*! Mas lembre-se: não pode haver exceção no domínio, mas não há qualquer problema em termos códigos no contradomínio que não sejam efetivamente imagens! O fato de o CPF $011.235.813-21$ ser impossível faz com que esse código seja um dos elementos do contradomínio, mas nunca da imagem da **função CPF**.

Definiu-se, também, a <u>transformação</u> a ser realizada pela máquina (nesse caso, a máquina é a Receita Federal): ela <u>recebe um indivíduo</u> e <u>o associa a um código</u> ($\text{indivíduos} \mapsto a_1a_2a_3\ .\ a_4a_5a_6\ .\ a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$). Essa é a <u>lei da função</u>.

Ressalva nº 1: é importante não confundir *f* com *f(x)*. Enquanto *f* representa a função em si, isto é, a transformação realizada pela máquina, *f(x)* representa a imagem *y* obtida mediante a transformação do elemento *x* por *f*, ou seja, o resultado ou a *imagem de x por f*.

Ressalva nº 2: como pudemos observar no exemplo do CPF, nem toda função é necessariamente uma expressão algébrica simples, como uma equação. Porém, como visto no trecho das OCEM citado no início do tópico 13.3, a forma algébrica de funções desempenha um papel fundamental no estudo de funções, até mesmo em outras áreas, como a Física. É o que estudaremos adiante, no subtópico 13.3.4.

- 13.3.4 A Forma **Algébrica**

No início do tópico 13.3 destacou-se a importância de expressar em palavras uma função dada de forma algébrica. No exemplo citado, a função f cuja lei de formação era dada por *f(x) = 2 x + 3* representa uma função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades.

Ou seja, existe uma máquina de transformação *f* que recebe um número real *x* qualquer e o transforma em *2 x + 3*. Nesse caso, se definíssemos como domínio o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, a imagem da função seria dada pelo conjunto $\{5, 7, 9, 11\}$, uma vez que $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$, $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$, $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ e $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Vejamos agora uma **aplicação na Física**! (Chega a dar até calafrios, né? Mas calma: se você acompanhou o raciocínio até aqui, vai se surpreender como é algo simples!)

Quando estamos estudando um **Movimento Retilíneo Uniforme** (MRU), uma das fórmulas trabalhadas é a **função horária do espaço** ou função da posição:

$$S = S_0 + V \cdot t\ .$$

Mas o que de fato cada um dessas letras e símbolos representam? E mais: o que nós queremos descobrir com essa expressão?

Para responder a essa pergunta, analisemos cada um dos símbolos que apareceram na expressão:

S_0: é uma *constante*, isto é, um valor fixo que ocorre quando substituímos t por zero na expressão. Por esse motivo, dizemos que S_0 é o *espaço inicial do objeto*, pois ele ocorre no instante inicial do movimento ($t = 0$);

V: é uma *constante*, já que representa a *velocidade constante* com a qual o objeto se movimenta;

Como tanto S_0 quanto V são valores fixos, não faz sentido que estes sejam elementos do domínio ou do contradomínio de uma função. De certo modo, eles são "atores coadjuvantes" no filme chamado "função horária do espaço". Os chamados <u>coeficientes da função</u>, que quando alterados, <u>modificam o comportamento gráfico da função</u>, conforme estudaremos no tópico 13.4.

Os atores principais são S e t. O fato de S estar isolado do lado esquerdo da equação nos dá a entender que o nosso **objetivo** é **descobrir qual é o espaço** S ocupado pelo objeto em movimento **em um determinado instante** t. Assim, temos uma **função** na qual **inserimos um valor** t (domínio) e **obtemos um valor** S **ou** $S(t)$ (imagem). Daí o nome função horária do espaço!

Vale ressaltar que a mesma expressão

$$S(t) = S_0 + V \cdot t$$

poderia ter sido reescrita como

$$t(S) = \frac{S - S_0}{V}$$

se tivéssemos optado por isolar a variável t. Certo modo, teríamos nesse caso uma função espacial do tempo (?), que corresponde à função inversa da função horária do espaço! Assim, são alteradas, tão somente, as relações de dependência entre as variáveis S e t.

Por fim, veja que poderíamos ainda ter reescrito a expressão da seguinte maneira

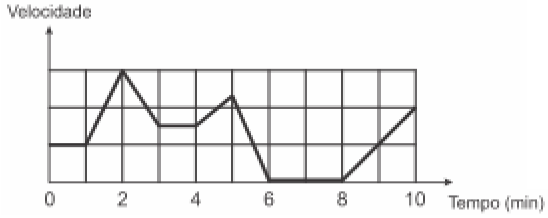
$$t = \frac{S - S_0}{V} \Rightarrow v = \frac{S - S_0}{t} \Rightarrow v = \frac{S - S_0}{t - t_0} \Rightarrow v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

E obteríamos a fórmula da velocidade média. Mágico, não?

Exemplo 04. Expresse em palavras, utilizando conceitos matemáticos e físicos, o significado da expressão algébrica $S(t) = 200 - 60 \cdot t$. O que representa o 200? E o $-60 \cdot t$? Como você analisaria o resultado de $S(4)$? Para todas as perguntas, considere que as unidades de medidas estão em quilômetros (espaço) e horas (tempo).

Exemplo 05. (ENEM 2017)

Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Qual seria o resultado se o gráfico fosse o mesmo, mas o eixo das ordenadas representasse o Espaço, e não a Velocidade?

- 13.4 **Gráficos** de Funções e seus **Movimentos** no Plano Cartesiano

Gráficos de funções nada mais são do que uma maneira mais visual de representar relações entre grandezas. Utilizando como referência a forma algébrica do Exemplo 04, tentemos estabelecer essa representação gráfica.

Inicialmente, notemos que a transformação causada pela função é a seguinte

$$t \mapsto 200 - 60t\,.$$

Ao substituirmos t por 0, 1, 2, 3 e 4, observem o padrão que é gerado para os valores de S (ou $S(t)$):

$$(t=0) \quad 0 \mapsto 200 - (60 \times 0) = 200 - 0 = 200 \quad (S = 200)$$

$$(t=1) \quad 1 \mapsto 200 - (60 \times 1) = 200 - 60 = 140 \quad (S = 140)$$

$$(t=2) \quad 2 \mapsto 200 - (60 \times 2) = 200 - 120 = 80 \quad (S = 80)$$

$$(t=3) \quad 3 \mapsto 200 - (60 \times 3) = 200 - 180 = 20 \quad (S = 20)$$

$$(t=4) \quad 4 \mapsto 200 - (60 \times 4) = 200 - 240 = -40 \quad (S = -40)$$

A primeira reação: os valores estão diminuindo (ou seja, aparentemente, temos um comportamento de decrescimento da função). Uma olhada mais atenta e percebemos um padrão nesse decréscimo: para cada <u>uma unidade que aumentamos</u> na grandeza tempo (t), há um <u>decréscimo de 60 unidades</u> na grandeza espaço (S).

No início da aula, fizemos alguns exercícios nos quais o nosso interesse estava na <u>representação qualitativa</u> dos gráficos de relações entre duas grandezas. Mas como podemos representar essa relação gráfica de <u>maneira quantitativa</u>?

Em 1637, René Descartes publicou La géométrie, estudo no qual formas e as figuras geométricas podem ser analisadas através da álgebra. A brilhante ideia de relacionar álgebra e geometria é considerada um marco na evolução da geometria analítica.

Assim como Descartes, o que faremos é geometrizar a forma algébrica da função horária do espaço.

Dada uma função $f : A \to B$, tal que $x \mapsto y = f(x)$, devemos entender o <u>gráfico de uma função f</u> como uma <u>coleção de pontos</u>. Cada ponto é denominado um *par ordenado* e tem a forma $(x, f(x))$ ou (x, y), sendo x um elemento do conjunto A e y um elemento de B.

No exemplo que acabamos de fazer, temos cinco pares ordenados: $(0,200)$, $(1,140)$, $(2,80)$, $(3,20)$ e $(4,-40)$.

A partir daí o nosso *próximo passo* é *plotar os pares ordenados* no que denominamos plano cartesiano, que nada mais é do que a representação de duas retas reais perpendiculares que usualmente se "cruzam" em seus zeros.

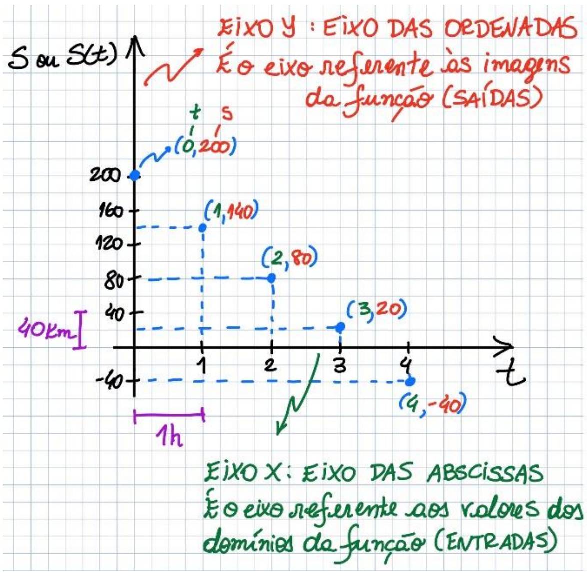


Figura 2

Como veremos mais adiante no curso, a função horária do espaço, cuja lei de formação é $S(t)=S_0+V\cdot t$ é um exemplo de função afim, por ser uma função da forma $f(x)=ax+b$, na qual $a=V$ e $b=S_0$. Assim, a representação geométrica de tal expressão algébrica, isto é, o **gráfico da função,** nada mais é do que **uma reta** (ou uma semirreta, caso tivéssemos limitado o tempo a números reais não negativos. Porém, ainda não é o momento de aprofundarmos a discussão a respeito do que representam tempo e espaço negativos).

Caso não soubéssemos disso, ainda assim poderíamos perceber, mesmo que intuitivamente, que tais decréscimos constantes de 60 unidades implicariam em pares ordenados que, caso unidos por meio de segmentos de reta, estariam sempre alinhados, dando origem a uma reta.

Porém, essa noção não servirá para a vasta maioria dos gráficos de funções em contextos reais, sendo necessárias ferramentas de Cálculo Diferencial para que seja possível esboçarmos os gráficos de tais funções. Um exemplo: tente esboçar o gráfico da seguinte função quando $a=1,25$, $b=2,18$, $c=0,26$ e $D=1,7$:

$$P(\theta)=c+\frac{1-c}{1+e^{-D\cdot a\cdot(\theta-b)}}.$$

Alguma ideia? Tente plotar alguns pontos antes de verificar o gráfico da função na **Figura 3**.

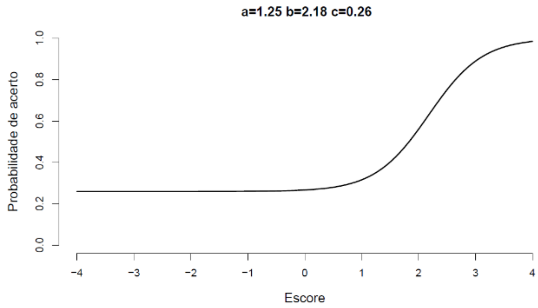


Figura 3

"Ah Fredão, mas tu tá zoando com a nossa cara! Tu foi lá e criou uma função nada a ver só pra dificultar a nossa vida!"

Jovens... jovens... Na realidade, essa função não apenas existe como é fundamental para que as notas de vocês sejam calculadas pela TRI no ENEM.

Essa função é conhecida como **Curva Característica do Item** (ou apenas CCI) e é utilizada no Modelo Logístico Unidimensional de 3 Parâmetros (MLU3P) para que seja possível **calcular a probabilidade P** de um indivíduo responder corretamente um certo item da prova!

Os coeficientes a, b, c e D representam, nesta ordem:

- o *parâmetro de discriminação do item*;
- o *parâmetro de dificuldade do item* (medido na mesma escala da habilidade, ou traço-latente θ);
- o parâmetro da assíntota inferior do item, ou seja, a chance de um respondente com baixa habilidade responder corretamente o item (*parâmetro de chute*);
- um *fator de escala* igual a 1,7 na métrica normal.

Mas nós não estamos preparados para ter essa conversa...

¯_(ツ)_/¯

Porém, tão importante quanto entender como representar quantitativamente os gráficos das principais funções é compreender como se movimentam os gráficos quando os seus parâmetros/coeficientes são alterados, como destaca o documento das OCEM:

> *É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes.*

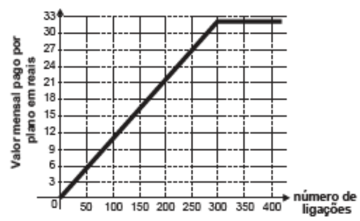
Na CCI da **Figura 3**, o que ocorreria se aumentássemos o valor do parâmetro c de 0,26 para 0,36, por exemplo? É o que trabalharemos, exaustivamente, no estudo dos principais tipos de funções (*especialmente trigonométricas*!).

Exemplo 06. (ENEM 2015)

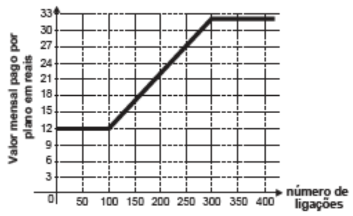
Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

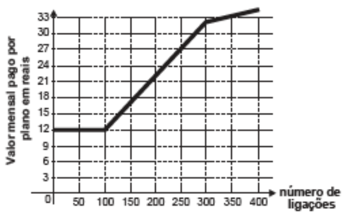
a)



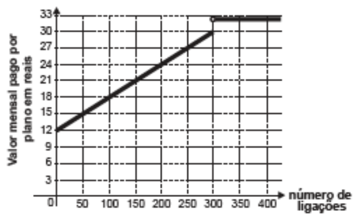
b)



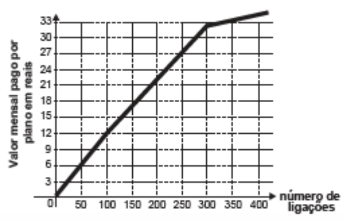
c)



d)



e)

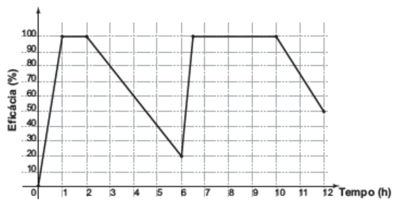


Exemplo 07. (ENEM 2016 – 2ª Aplicação)

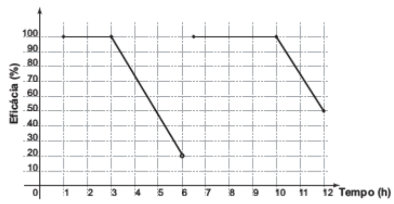
Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2 h. Após essas 2h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise.

Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia. Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abcissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual gráfico representa tal estudo?

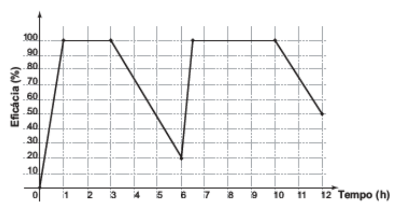
a)



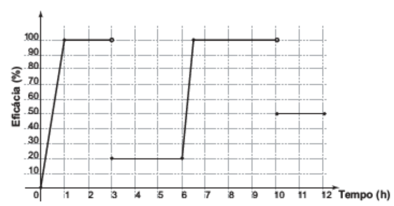
b)



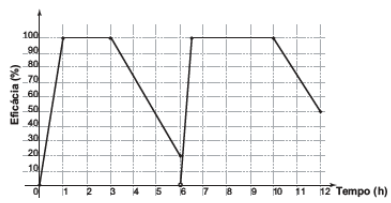
c)



d)



e)



- 13.5 Diferentes **Modelos** de Funções

Para que finalizemos a nossa aula introdutória a respeito de funções, vejamos a sequência das OCEM, que trata dos diferentes modelos de funções que devem ser trabalhados:

> *O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. O modelo periódico será discutido no tópico referente às funções trigonométricas, mais adiante. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.). Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.*

Algo que fica claro aqui, destacado no final do trecho acima, é que o entendimento das relações de crescimento e decrescimento entre as variáveis é fundamental para o entendimento dos gráficos das funções e muito mais relevante do que apenas a transcrição de dados de uma tabela, como muitas vezes é ensinado.

Cada um dos modelos será tratado separadamente em uma das próximas aulas do **Bloco 4 – Funções**, como veremos nos subtópicos abaixo.

- 13.5.1 Modelos **Linear** e **Quadrático**

Na Aula 14 serão trabalhadas as funções lineares e as suas relações com a proporcionalidade direta. Uma função linear é modelada por uma expressão da forma

$$y = ax,\ a \neq 0\,,$$

na qual a é uma constante, x é a variável independente (valor de entrada ou domínio) e y é a variável dependente (valor de saída ou imagem).

Um exemplo de modelo linear são os juros simples. Ao aplicarmos um capital C, a uma taxa de juros simples (em %) i por um período de tempo t (*taxa de juros e tempo devem estar em uma mesma unidade de tempo*), os juros J são calculados pela expressão

$$\underset{\text{"y"}}{J} = \underbrace{C \times \frac{i}{100}}_{\text{"a"}} \times \underset{\text{"x"}}{t}\,.$$

Também serão trabalhadas situações nas quais se faz necessária a utilização de funções afins, modeladas pela expressão

$$y = ax + b,\ a \neq 0\,,$$

que difere do modelo linear pela presença da constante b.

Ressalva: apesar de função linear e função afim serem por vezes utilizadas como "sinônimos", a maioria dos materiais (assim como este) considera que funções lineares são casos particulares de funções afins. Dada uma função afim $y = ax + b,\ a \neq 0$, quando $b = 0$, temos o caso particular de uma função linear; já quando $b \neq 0$, x e y não apresentam uma relação de proporcionalidade direta, uma vez que a duplicação de uma delas não provocará a duplicação da outra, por exemplo.

Por fim, os gráficos das funções lineares possuem uma característica importantíssima: além de serem retas (como todo gráfico de funções afins), tais retas necessariamente passarão pela origem do plano cartesiano.

Um exemplo de função afim (não linear) é a função horária do espaço do movimento uniforme, tratado anteriormente nesse material:

$$\underset{\text{"y"}}{S(t)} = \underset{\text{"b"}}{S_0} + \underset{\text{"a"}}{V} \cdot \underset{\text{"x"}}{t}\,.$$

Até mesmo progressões aritméticas podem (e devem) ser encaradas como funções afins com domínio no conjunto dos números naturais

$$\underset{\text{"y"}}{a_n} = a_1 + (n-1)r = \underset{\text{"b"}}{a_1 - r} + \underset{\text{"a"}}{r} \cdot \underset{\text{"x"}}{n}\,.$$

Ainda na Aula 14, trataremos das funções quadráticas e a sua estreita relação com problemas de maximização e minimização. Tais funções são modeladas por expressões da forma

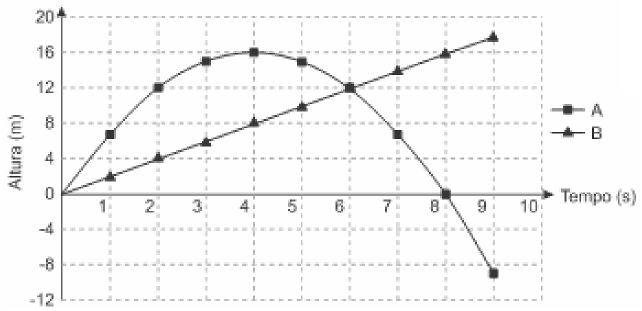
$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0\,.$$

Um exemplo de modelo quadrático é o da função horária do espaço do movimento uniformemente variado

$$\underset{\text{"y"}}{S(t)} = \underset{\text{"c"}}{S_0} + \underset{\text{"bx"}}{V_0 \cdot t} + \underset{\text{"ax}^2\text{"}}{\frac{a}{2} \cdot t^2}\,.$$

Exemplo 08. (ENEM 2016 – 1ª Aplicação)

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

13.5.2 Modelos **Periódico** e **Polinomial**

Uma função $f: A \to B$ é denominada periódica quando as suas imagens se repetem em intervalos de tempo constantes. Isto é, se existe um determinado número real positivo K tal que $f(x) = f(x+K), \forall x \in A$, sendo x e $x+K$ valores pertencentes ao conjunto A, domínio da função f.

Na Aula 15 será estudado o modelo periódico mais clássico e importante para o ensino médio: o das funções trigonométricas. Será dada uma atenção especial às funções seno e cosseno com formato

$$f(t) = A + B\text{sen}(Ct + D),$$

na qual A, B, C e D são constantes reais que definem os valores máximos e mínimos, tal como o período de tais funções trigonométricas. Dois exemplos reais que são modelados por funções trigonométricas são os movimentos das marés e o batimento cardíaco.

Marés baixas e marés altas equivalem aos valores máximos e mínimos que as marés atingem, com determinada periodicidade, graças à força gravitacional exercida entre Terra, Lua e Sol – em conjunto com a rotação da Terra em torno do seu eixo –, e podem ser modeladas por meio de uma composição de funções trigonométricas.

← Fazendo uma rápida busca, achei esse material em inglês, de um curso de cálculo para biologia da Universidade de San Diego, caso tenham curiosidade em dar uma olhadinha em como as marés podem ser modeladas por funções.

Outro exemplo de relação modelada por funções trigonométricas é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do instante de coleta da medida. Em geral, tal pressão obedece a um ciclo, sendo que cada ciclo completo corresponde a um batimento cardíaco. Tal relação já foi, inclusive, cobrada no ENEM, conforme veremos na Aula 15.

Também serão estudadas as alterações no comportamento gráfico das funções seno e cosseno quando alteramos cada um dos seus parâmetros reais.

Nota do Professor Fredão: eu hoje sou apaixonado pelo estudo e por ensinar funções trigonométricas, mas nem sempre foi assim. No ensino médio, quando me deparava com expressões do tipo $f(t) = 3 - 2\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{3\pi}{5}\right)$, eu quase que instintivamente pulava as questões (até porque lembro que já tinha passado em matemática nesse ponto do ano e não estava afim de aprender algo que parecia muito complicado naquele ponto do ano hahaha #fredãosincerão).

Mas tudo mudou quando, no cursinho pré-vestibular, um professor deu uma aula em que explicou, justamente, a importância de cada um dos coeficientes e de que forma eles alteravam o comportamento da função, algebricamente e graficamente. Foi quase como um estalo na minha cabeça, tudo fez sentido e, desde então, é uma das minhas matérias preferidas dentro da matemática do ensino médio.

Por fim, ainda na Aula 15, serão estudadas funções polinomiais da forma $f(x) = x^n$, assim como funções polinomiais mais gerais (de grau superior a 2), com ênfase para a forma fatorada e consequente decomposição de tais funções polinomiais em um produto de funções polinomiais de grau 1, uma vez identificados os "zeros" da função.

13.5.3 O Modelo **Exponencial**

Para finalizar o bloco de funções, discutiremos na Aula 16 o modelo de crescimento/decrescimento exponencial, cuja expressão mais básica é dada por $f(x)=a^{x}$, com $a>0$ e $a\neq 1$.

Nenhum exemplo é mais atual no que tange a modelos exponenciais do que a curva de crescimento de casos de covid-19 no Brasil. Tomando como referência uma reportagem do Correio Braziliense, publicada no dia 12 de junho de 2020, que afirma que os casos da covid-19 tem duplicado a cada 9,7 dias (em média) no DF e que há, no momento, 19 474 infectados no DF, pode-se estabelecer um modelo exponencial dado por

$$f(d)=19474\cdot 2^{d/9{,}7},$$

No qual d é a quantidade de dias transcorridos após o dia 12 de junho e $f(d)$ a quantidade de infectados no DF após d dias. Se considerarmos correto tal modelo e mantida a taxa de transmissibilidade da doença, é possível estimar que no início do mês de agosto haverá **mais de 690 mil casos**, apenas no DF.

Exemplo 09. (ENEM 2013 PPL)

Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

a) afim.

b) seno.

c) cosseno.

d) logarítmica crescente.

e) exponencial.

Ainda na Aula 16, será trabalhado o tópico de matemática financeira e de que forma juros e correções monetárias estão associados a modelos exponenciais. Por fim, serão também trabalhadas as progressões geométricas e aritméticas do ponto de vista de funções com domínio no conjunto dos números naturais, já que assim como há uma estreita relação entre progressões aritméticas e funções afins, também uma estreita relação entre progressões geométricas e funções exponenciais.

====== AULA 14. Funções Afins e Quadráticas ======

- 14.1 **Resumo** da **Aula 13**

Antes de prosseguirmos com o conteúdo de funções, façamos uma breve retrospectiva, passando por todos os trechos destacados na Aula 13 relativos às Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Iniciamos a aula esboçando qualitativamente gráficos que representavam relações entre duas grandezas, analisando os seus crescimentos e decrescimentos, mais ou menos acelerados.

> *O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido).*

Em seguida, foram tratadas as duas condições necessárias para que uma relação entre conjuntos fosse considerada uma função: **não exceção** e **não ambiguidade**.

No tópico seguinte, comparamos o conceito de função a uma máquina de transformação, na qual três características devem estar bem definidas: o insumo que a máquina aceita na entrada (**domínio**), a transformação feita pela máquina (**lei da função**) e os possíveis resultados da transformação (**contradomínio**).

> *É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física.*

Seguindo com as OCEM, analisamos as funções dadas de forma algébrica, com especial interesse em contextos físicos, traduzindo a linguagem matemática e expressando tais relações por meio de palavras.

No tópico seguinte, iniciamos uma análise quantitativa dos gráficos de função, entendendo tais gráficos como uma coleção de pares ordenados obtidos pela lei da função em questão.

> *É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes.*

A análise dos movimentos realizados pelos gráficos de funções quando alterados os seus parâmetros foi deixada para discussões posteriores e serão analisadas em cada um dos modelos estudados nas aulas seguintes.

Por fim, foram explicitados os principais modelos que devem ser objeto de estudo no ensino médio:

> *O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. O modelo periódico será discutido no tópico referente às funções trigonométricas, mais adiante. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.). Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.*

Para cada um dos modelos citados no trecho acima foi dado um exemplo próximo da realidade no qual tais modelos podem ser encontrados: juros simples (função **linear**), função horária do espaço no movimento uniforme (função **afim**) e uniformemente variado (função **quadrática**), movimento das marés (função periódica/**trigonométrica**) e o crescimento dos casos de covid-19 (função **exponencial**), foram alguns dos exemplos citados.

Assim, podemos iniciar a Aula 14, que tratará especificamente dos modelos afins e quadráticos.

- 14.2 **Proporcionalidades** e **Funções**

Na Aula 12, do bloco Números e Operações, foram estudadas as proporcionalidades direta e inversa. Naquela aula, foi feita uma breve introdução a respeito das relações entre proporcionalidades e funções, que discutiremos com mais profundidade nesta aula. Vejamos o que dizem as OCEM:

> *As ideias de crescimento, modelo linear $\left(f(x)=a\cdot x\right)$ e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa $\left(f(x)=\frac{a}{x}\right)$. O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do quotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento e decrescimento de grandezas em relação.*

Nota-se que há três aspectos que devem ser discutidos nesse primeiro momento: a relação entre modelo linear e proporcionalidade direta, o modelo de decrescimento associado à proporcionalidade inversa e os erros que ocorrem ao associarmos toda e qualquer função cujo gráfico é uma reta crescente à proporcionalidade direta, tal como associar decrescimentos à proporcionalidade inversa.

- 14.2.1 Proporcionalidade **Direta**

Dizemos que x e y são grandezas diretamente proporcionais se existe correspondência $x \to y$ tal que:

1) Quanto maior for x, maior será y.

Se $x \to y$ e $x' \to y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Quando se dobra, quintuplica etc. o valor de x, então o valor de y também será dobrado, quintuplicado etc.

Se $x \to y$, então $kx \to ky$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De maneira mais simples, dizemos que se x e y são grandezas diretamente proporcionais, então:

$$\frac{y}{x}=k \Rightarrow y=kx.$$

Ou seja, dada uma função linear $f(x)=ax$, quando $a>0$ essa função transforma um número real positivo x em um número real positivo ax, definindo assim uma proporcionalidade direta.

Portanto, funções lineares representam o modelo matemático para problemas de proporcionalidade (direta), sendo o coeficiente a denominado de constante de proporcionalidade.

Ressalta-se ainda que:

i) quanto maior for o valor de a, mais inclinado verticalmente estará o gráfico da função;

ii) os gráficos de funções lineares sempre passam pela origem do plano cartesiano, uma vez que $f(0)=a\cdot 0=0$. Isto é, independentemente do valor de a, o par ordenado $(0,0)$ fará parte do gráfico de f.

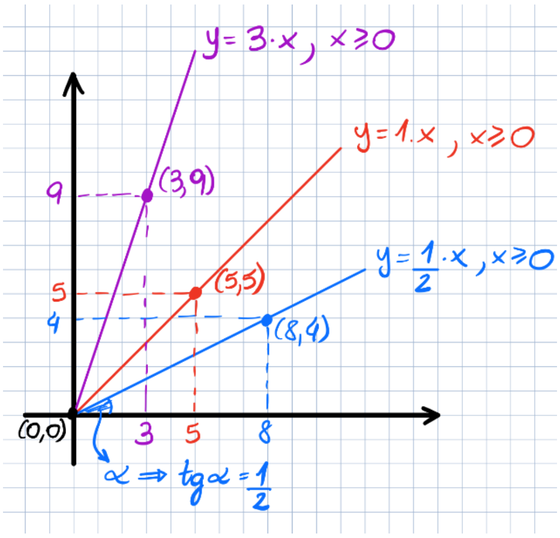


Figura 1

Exemplo 01. Uma das fórmulas utilizadas no estudo da termodinâmica é a da dilatação linear

$$\Delta L = L_0\cdot\alpha\cdot\Delta\theta,$$

onde ΔL é a variação de comprimento do corpo, L_0 o comprimento inicial do corpo, α o coeficiente de dilatação linear do corpo e $\Delta\theta$ a variação de temperatura do corpo.

a) Dados L_0 e α fixos, esboce um gráfico qualitativo da relação entre ΔL e $\Delta\theta$.

b) Dados ΔL e L_0 fixos, esboce um gráfico qualitativo da relação entre α e $\Delta\theta$.

14.2.2 Proporcionalidade **Inversa**

Dizemos que x e y são grandezas inversamente proporcionais se existe correspondência $x \to y$ tal que:

1) Quanto maior for x, menor será y.

Se $x \to y$ e $x' \to y'$, então $x < x'$ implica $y > y'$.

2) Quando se dobra, quintuplica etc. o valor de x, então o valor de y será dividido por dois, por cinco etc.

Se $x \to y$, então $kx \to \frac{y}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De maneira mais simples, dizemos que se x e y são grandezas <u>inversamente proporcionais</u>, então:

$$\frac{y}{1/x} = k \Rightarrow yx = k \text{ ou } y = \frac{k}{x}.$$

Ao se pensar no gráfico de grandezas inversamente proporcionais é natural que o estudante, intuitivamente, <u>imagine uma reta decrescente</u> como gráfico. Acredito que seja uma reação automática à constatação de que o gráfico de grandezas <u>diretamente proporcionais é uma reta crescente</u>.

Esse equívoco foi inclusive destacado no trecho das OCEM no início do tópico 14.2: "*O professor deve estar atento ao fato de que os <u>alunos identificam sistematicamente</u>, de <u>forma equivocada</u>, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa*".

Para <u>facilitar a visualização</u> do gráfico da função com lei de formação $f(x) = \frac{a}{x}$, <u>associado a grandezas inversamente proporcionais</u>, pensemos na seguinte situação:

Um professor pede para que todos os seus estudantes levem, na próxima aula, uma <u>cartolina retangular</u> com uma única restrição: que essa cartolina tenha uma superfície para a escrita com <u>área fixa</u> e igual a $1\,m^2$. ***Esboce****, no plano cartesiano, um* ***gráfico que relacione as medidas do comprimento*** x ***e largura*** y *possíveis para as cartolinas que serão levadas, identificando ao menos três pontos (pares ordenados) desse gráfico.*

Antes de prosseguir, <u>tente por alguns instantes esboçar</u> o gráfico solicitado!!!

Comecemos desenhando alguns tipos de cartolina que poderiam ser levados pelos alunos:

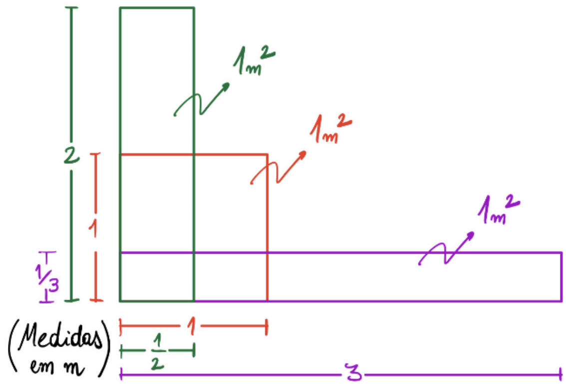


Figura 2

Note que <u>apesar das diferentes dimensões</u>, todas as cartolinas possuem a <u>mesma área</u>: um metro quadrado. Ao denotarmos por x o comprimento (medida horizontal) e por y a largura (medida vertical) do retângulo, temos $xy = 1$, o que pode ser reescrito como $y = \frac{1}{x}$. Ou seja: temos uma função $f(x) = \frac{a}{x}$, na qual $a = 1$.

Além disso, podemos definir x e y como <u>grandezas inversamente proporcionais</u> pois: ao aumentarmos uma das medidas a outra reduz e, o <u>principal</u>, ao *duplicarmos/triplicarmos/etc* uma das medidas, a outra é *reduzida à metade/um terço/etc*, como observamos na **Figura 2**.

Para que possamos visualizar o gráfico dessa função, posicionaremos o <u>vértice inferior esquerdo de cada retângulo na origem</u> $(0,0)$ do plano cartesiano, o que faz com que o <u>vértice superior direito</u> seja, justamente, o par ordenado (x, y), <u>ponto do gráfico da função</u>.

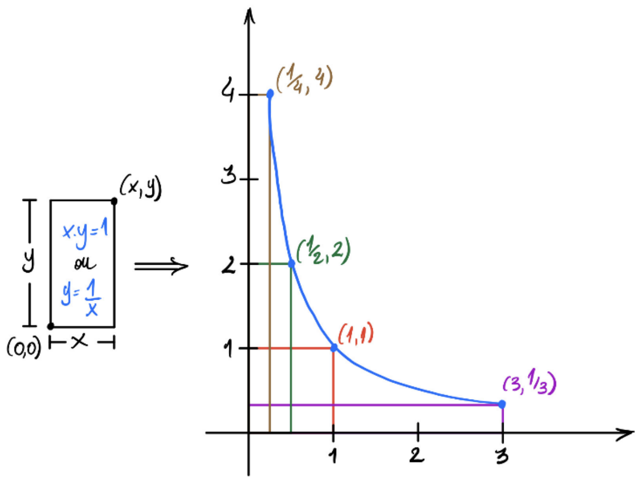


Figura 3

O que é fundamental notar aqui é: ao aumentarmos x, fazendo com que este tenda a um valor extremamente alto, estamos diminuindo y de tal forma que ele tende a ser igual a 0, apesar de nunca atingir, de fato, a este valor (na **Figura 3**, o caso mais próximo seria o do retângulo roxo).

Por outro lado, ao diminuirmos x, fazendo com que ele tenda a um valor muito próximo a 0, faremos com que y aumente significativamente, e cada vez mais rápido, quanto mais próximo de 0 estiver o valor de x (na **Figura 3**, o caso mais próximo seria o do retângulo marrom).

Em Cálculo Diferencial é utilizado o conceito de limite para expressar tais relações. Nesse caso, escreveríamos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \text{ e } \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty .$$

Assim, o gráfico de uma função $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\frac{a}{x},\ a>0$ corresponde ao gráfico de uma hipérbole (uma das cônicas estudadas por meio de seções em cones na geometria espacial e algebrizada em geometria analítica) com ramos no primeiro e terceiro quadrantes. Modificações na constante a fazem com que o gráfico apresente crescimentos/decrescimentos mais ou menos acelerados.

Exemplo 02 (ENEM 2017)

O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade v de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação $(p+a)(v+b)=K$, com a, b e K constantes.

Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

Tipo de curva
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal
Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas $(p; v)$. Admita que $K>0$.

Disponível em: http://rspb.royalsocietypublishing.org. Acesso em: 14 jul. 2015 (adaptado).

O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

a) semirreta oblíqua.

b) semirreta horizontal.

c) ramo de parábola.

d) arco de circunferência.

e) ramo de hipérbole.

Ainda com relação ao Exemplo 02: podemos ou não considerar p e v como sendo grandezas inversamente proporcionais?

- 14.3 Função **Afim**

Após a discussão relativa à relação entre proporcionalidade e funções, as OCEM trazem o seguinte trecho:

> *Situações em que se faz necessária a função afim* $f(x)=a\cdot x+b$ *também devem ser trabalhadas.*

Em primeiro lugar, preciso fazer uma consideração sobre algo que, por vezes, me incomoda em vestibulares: muitos deles usam o termo *funções lineares* para qualquer função que tenha como gráfico uma reta (ou seja, funções afins), quando, na realidade, funções lineares são exclusivamente as da forma $f(x)=ax$, que passam pela origem do plano cartesiano. E isso pode acabar causando confusão.

Assim, comecemos definindo o que é uma função afim, as situações nas quais ela se faz necessária e todas as nomenclaturas envolvidas. Isso é fundamental pois, em geral, problemas de função afim são relativamente simples, e o que pode acabar complicando são justamente as nomenclaturas utilizadas.

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita afim quando existem constantes reais a e b, com $a\neq 0$, tais que $f(x)=ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Um exemplo de função afim tratado na Aula 13 foi o da função horária do espaço no movimento retilíneo uniforme, em física. Mas há também diversos outros exemplos que são frequentemente abordados em vestibulares: corridas de táxi, salário de vendedor, planos de telefonia, dentre outros.

Em todos eles a ideia é a mesma: há um valor fixo, correspondente ao b da função afim (bandeirada, salário fixo ou valor inicial fixo do plano), e um valor variável, correspondente ao a da função afim (preço por km percorrido, comissão pela quantidade vendida ou quantidade de minutos em ligações).

14.3.1 Tipos de Função Afim

As funções afins também podem ser denominadas funções polinomiais do 1º grau, uma vez que a sua lei de formação é dada por um polinômio de grau 1. Porém, é importante destacar algumas nomenclaturas e tipos de função que podem "derivar" do modelo afim $f(x) = ax + b$:

1) $a \neq 0$ e $b = 0$, $f(x) = ax$: função linear.

   A função linear é modelo relacionado à ideia de proporcionalidade direta, cujo gráfico é uma reta que passa pela origem do plano cartesiano;

2) $a = 1$ e $b = 0$, $f(x) = x$: função identidade.

   A função identidade é um caso específico e importante de função linear, também conhecida como a bissetriz dos quadrantes ímpares. Gráficos de funções inversas são gerados por meio de reflexões com relação à função identidade.

3) $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$: função constante.

   Como vimos, a própria definição de função afim exige que $a \neq 0$, uma vez que ela é caracterizada por um polinômio de grau 1. Porém, alguns materiais e autores consideram a função constante $f(x) = b$ como função afim. Não é o caso deste material. Aqui, consideraremos que a função constante tem características próprias e não fazem parte da família das funções afins. Funções constantes são retas paralelas ao eixo das abscissas, cuja imagem é definida não por um intervalo, mas sim por um ponto (b).

A **Figura 4** exemplifica possíveis gráficos dos três tipos de função destacados acima: função linear, função identidade e função constante:

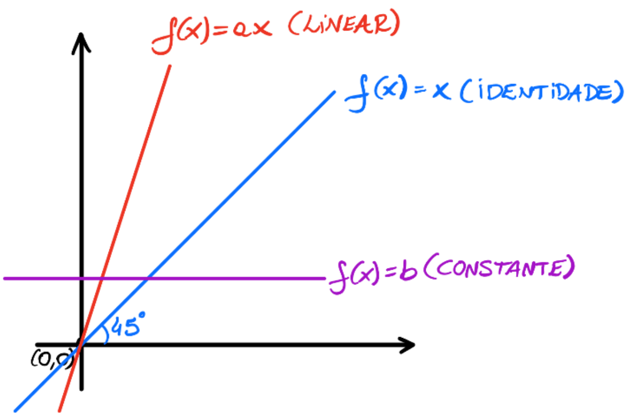


Figura 4

14.3.2 Gráficos de Funções Afins

É possível provar (mas não o faremos nesse material), que o gráfico de uma função afim é, sempre, uma reta não-horizontal (pois seria uma função constante), nem vertical (pois não seria função).

A primeira implicação disso é que a imagem de toda e qualquer função afim corresponde ao conjunto dos números reais: $Im(f) = \mathbb{R}$. Mas, além disso, alguns outros aspectos merecem destaque. Seja uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$:

1) Se $a > 0$, temos uma função crescente. Se $a < 0$, temos uma função decrescente. O valor a, denominado coeficiente angular da reta ou taxa de variação da função define a medida da inclinação (ou declividade) da reta, ou seja, o quão rápido a função aumenta ou diminui de valor;

2) O ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas (eixo y) corresponde ao par ordenado $(0, b)$, pois $f(0) = b$. Dessa forma, o valor b costuma ser denominado de valor inicial da função ou coeficiente linear da reta. Ao alterarmos o valor de b, o gráfico de f sofre translações verticais. Assim, funções afins com mesmo valor a e diferentes valores de b serão retas paralelas;

3) O ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas corresponde ao par ordenado $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, pois $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Assim, o valor $x = -b/a$ é denominado de zero (ou raiz) de f;

4) Iguais variações no domínio de f (Δx) implicam em iguais variações na imagem de f (Δy).

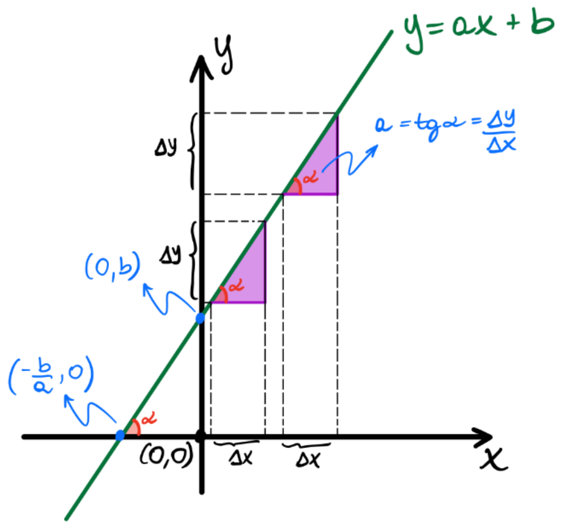
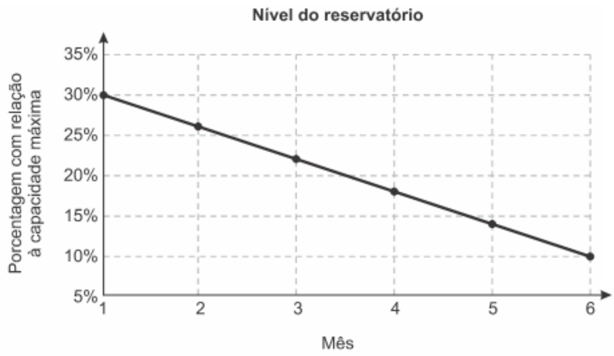


Figura 5

Exemplo 03 (ENEM 2016 – 1ª Aplicação)

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio.

b) 3 meses e meio.

c) 1 mês e meio.

d) 4 meses.

e) 1 mês.

- 14.4 Função **Quadrática**

Para finalizar a Aula 14, estudaremos as funções quadráticas, também conhecidas como funções polinomiais do 2º grau. Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita quadrática quando existem constantes reais a, b e c, com $a\neq 0$, tais que $f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

> *O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima).*

Aqui, vemos a base do que vai nos nortear em problemas de funções quadráticas: minimização e maximização. Ou seja: é quase certo que, ao se deparar com alguma questão que te peça para calcular o valor máximo/mínimo de uma função ou o valor que faz com que a função atinja o seu máximo/mínimo, você terá que utilizar o modelo quadrático.

Exemplo 04. Um professor fornece um barbante com 4 m de comprimento para cada um dos seus alunos e pede que esses alunos construam retângulos com esse barbante, sem cortá-lo. Ao observar um dos retângulos, construído pelo estudante Oãderf, o professor exclama: "é impossível construir um retângulo cuja área supere a do retângulo que você acabou de construir!". Qual é essa área máxima?

Na sequência das OCEM, temos o dois trechos: a seguir

> *O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras.*

Com o objetivo de entender por completo o gráfico de uma função quadrática, correspondente à cônica denominada parábola, precisamos entender a correspondência entre seus coeficientes (a, b e c) e alguns pontos do gráfico, com destaque para os zeros da função, o ponto de interseção com o eixo das ordenadas e o ponto de máximo/mínimo (vértice da parábola).

Para tal, ao invés de memorizá-las, nós iremos entender de onde surgem as regras e fórmulas que dão "cara" à nossa função. Você já se questionou, por exemplo, o porquê de o gráfico da função quadrática ter a concavidade voltada para cima quando $a>0$? Ou como podemos garantir que toda parábola terá um eixo de simetria que necessariamente passa pelo vértice da parábola?

> *O trabalho com a forma fatorada $\left(f(x)=a(x-m)^2+n\right)$ pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Baskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz).*

Tudo o que foi dito nos dois últimos trechos é o que iremos desenvolver em 14.4. Uma ressalva antes de começarmos: é estranho denominar $f(x)=a(x-m)^2+n$ como *forma fatorada*, uma vez que a nomenclatura usual para tal formato é *forma canônica*. A nomenclatura *forma fatorada* é comumente utilizada para a forma $f(x)=a(x-x')(x-x'')$, com x' e x'' raízes (ou zeros) da função quadrática.

14.4.1 **Raízes** da Função Quadrática

As raízes (ou zeros) de uma função correspondem aos valores de x tais que $f(x)=0$. No caso da função quadrática, desejamos resolver equações da forma $ax^2+bx+c=0$. Algumas dessas serão tranquilas, enquanto outras, nem tanto. Vejamos algumas situações:

É simples resolver $4x^2-81=0$ (forma $ax^2+c=0$), pois

$$4x^2-81=0 \Rightarrow 4x^2=81 \Rightarrow x^2=\frac{81}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{9}{2}.$$

Também é fácil resolver equações como $4x^2+3x=0$ (da forma $ax^2+bx=0$), pois

$$4x^2+3x=0 \Rightarrow x(4x+3)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } \underbrace{x=-\frac{3}{4}}_{4x+3=0}.$$

Esses dois exemplos, porém, são de equações quadráticas incompletas, nos quais $b=0$ ou $c=0$. Porém, mesmo em casos de equações completas podemos utilizar a ideia de completamento do quadrado perfeito para resolver tal equação. Por exemplo, para resolvermos a equação $x^2-8x+16=0$, poderíamos perceber que

$$x^2-8x+16=\overset{a^2}{x^2}-\underbrace{2\cdot\overset{a}{x}\cdot\overset{b}{4}}_{8x}+\underbrace{\overset{b^2}{4^2}}_{16}=\overbrace{(x-4)^2}^{(a-b)^2}.$$

Logo, teríamos $(x-4)^2=0 \Rightarrow x=4$. Mas nem sempre é possível completar quadrados de maneira tão direta. Ainda assim, podemos utilizar o que mais adiante denominaremos de forma canônica, como no caso a seguir:

$$\begin{aligned} x^2-8x+9=0 &\Rightarrow x^2-8x+16-7=0\\ &\Rightarrow (x-4)^2=7\\ &\Rightarrow x-4=\pm\sqrt{7}\\ &\Rightarrow x=4\pm\sqrt{7}\end{aligned}$$

"Fredão... Para cara... Para que tá feio já! É só tu usar a fórmula de Bhaskara ou soma e produto que resolve isso daí! Para de querer aparecer com essas soluções malucas..."

Jovem mamífero: e tu acha que alguém no milênio passado estava passeando pela rua, de máscara, numa pandemia, e acidentalmente tropeçou em uma pedra que continha a fórmula de Bhaskara? Como veremos adiante, a demonstração da fórmula usa, justamente, a ideia de completamento de quadrados!

Seja uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, com $a\neq 0$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c\\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+a\left(-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\end{aligned}$$

Note que, para efeito de simplificação, podemos reescrever a última expressão como

$$f(x)=a(x-m)^2+n,$$

onde $m=-\frac{b}{2a}$ e $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Isso será fundamental quando formos tratar da forma canônica e dos pontos de máximo e mínimo. Por ora, voltemos à expressão

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Se desejamos calcular as raízes da função f em um mundo no qual ainda não foi descoberta a fórmula de Bhaskara, basta fazemos

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Que rufem os tambores... É isso mesmo, senhores! Sei que talvez seus olhos ainda não acreditem e que a incredulidade paire sobre o ar, mas é isso mesmo! Mais um movimento e teremos

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta=b^2-4ac.$$

E assim, crianças, nós demonstramos a tão famosa e temida Fórmula de Bhaskara! Agora sim: sintam-se à vontade para utilizá-la sempre que precisarem resolver equações quadráticas!

Uma vez demonstrada a fórmula de Bhaskara, e denominando as duas raízes da equação de x_1 e x_2, podemos definir

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Assim, se fizermos $x_1 + x_2$ teremos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \text{ ou } -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Por esse motivo dizemos que a soma das raízes de uma equação do segundo grau é igual a "*menos b sobre a*"! Acho que já deu até para imaginar o que acontecerá quando fizermos $x_1 \cdot x_2$, certo?

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Assim, dizemos que o produto das raízes de uma equação do segundo grau é igual a "*c sobre a*"!

Exemplo 05 (ENEM 2014)

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas *x* da prova para notas *y* = *f(x)*, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

14.4.2 Forma **Fatorada**

É natural que saibamos a expressão geral de uma função quadrática, isto é $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mas existem outras duas formas que podem ser úteis em situações diversas envolvendo problemas de função quadrática: as formas fatorada e canônica (que veremos no próximo subtópico).

Nas primeiras etapas da demonstração da fórmula de Bhaskara (14.4.1), reescrevemos a função quadrática da seguinte forma $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Porém, também vimos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ e que $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, onde x_1 e x_2 são as raízes da função quadrática. Assim, podemos reescrever $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2)\right) \\ &= a\left(\underbrace{x^2 - x_1x}_{x(x-x_1)} - \underbrace{x_2x + x_1x_2}_{-x_2(x-x_1)}\right) \\ &= a\left(x(x-x_1) - x_2(x-x_1)\right) \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

A tal formato, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, denomina-se forma fatorada. Uma das suas aplicações é, a partir do gráfico de uma função quadrática, descobrir a sua expressão de maneira mais simples e direta, como veremos a seguir.

Exemplo 06 (ENEM 2017)

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela.

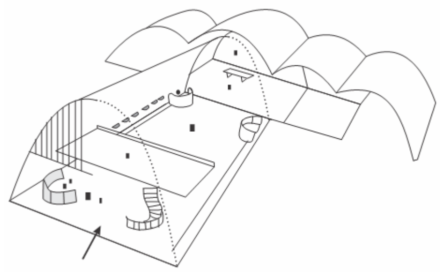


Figura 1

A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

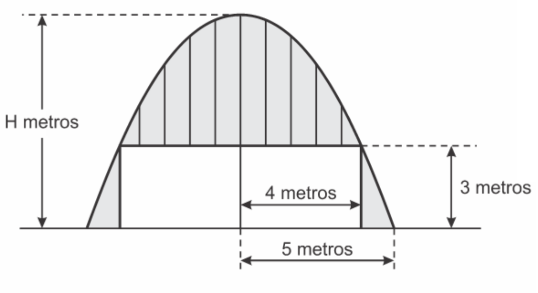


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) $\frac{16}{3}$

b) $\frac{31}{5}$

c) $\frac{25}{4}$

d) $\frac{25}{3}$

e) $\frac{75}{2}$

14.4.3 Forma **Canônica**

Além das duas formas já estudadas de apresentação de funções quadráticas, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a forma fatorada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, há ainda um terceiro formato, pouco explorado no ensino médio, mas fundamental para o entendimento de máximos/mínimos e do eixo de simetria da parábola (gráfico da função quadrática).

Essa terceira forma é denominada forma canônica. No subtópico 14.4.1, provamos que a função quadrática poderia ser reescrita como

$$f(x) = a(x - m)^2 + n,$$

onde $m = -\frac{b}{2a}$ e $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ou $-\frac{\Delta}{4a}$.

Olhares mais atentos talvez percebam que estamos diante das expressões do "*x do vértice*" e "*y do vértice*", mas ainda chegaremos lá. Antes disso, vejamos uma interessante aplicação da forma canônica.

Dada uma função da forma $f(x) = 45(x - 4{,}5)^2 + 0{,}45$, calcule o valor mínimo que essa função atinge.

Recomendo que você gaste um tempo resolvendo essa questão, de preferência sem calculadora, como seria no ENEM e na maioria dos vestibulares. Em seguida, prossiga com a leitura...

Normalmente, 99,45% dos estudantes resolveriam esse problema da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x) &= 45(x - 4{,}5)^2 + 0{,}45 \\ &= 45\left(x^2 - 9x + 20{,}25\right) + 0{,}45 \\ &= 45x^2 - 405x + 911{,}25 + 0{,}45 \\ &= 45x^2 - 405x + 911{,}7 \end{aligned}$$

Daí, fariam

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(405^2 - 4 \cdot 45 \cdot 911{,}7\right)}{4 \cdot 45} = \frac{81}{180} = 0{,}45$$

ou então calculariam $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{405}{2 \cdot 45} = 4{,}5$ para depois fazer $y_V = f(x_V) = f(4{,}5)$, encontrando $f(4{,}5) = 0{,}45$.

Não sei se você percebeu, mas tanto o $x_V = 4{,}5$ quanto o $y_V = 0{,}45$ são valores que aparecem claramente na expressão $45(x - 4{,}5)^2 + 0{,}45$.

A razão é *relativamente* simples: para qualquer valor real x que seja inserido na função, teremos $(x - 4{,}5)^2 \geq 0$, o que implica em $45(x - 4{,}5)^2 \geq 0$ o que, por fim, implica em $45(x - 4{,}5)^2 + 0{,}45 \geq 0{,}45$, uma vez que

$$\underbrace{\underbrace{45\underbrace{(x - 4{,}5)^2}_{\geq 0}}_{\geq 45 \cdot 0 \Rightarrow \geq 0} + 0{,}45}_{\geq 0 + 0{,}45 \Rightarrow \geq 0{,}45}.$$

Assim, $f(x) = 45(x - 4{,}5)^2 + 0{,}45$ possui um valor mínimo igual a $0{,}45$, já que $f(x) \geq 0{,}45$. Além disso, esse valor mínimo ocorrerá precisamente quando $45(x - 4{,}5)^2 = 0$, o que ocorre para $(x - 4{,}5)^2 = 0$, ou seja, quando $x = 4{,}5$. Dessa forma, teremos um ponto de mínimo da função no par ordenado $(4{,}5\ ,\ 0{,}45)$.

De modo geral, ao analisarmos a função quadrática escrita no formato $f(x)=a(x-m)^2+n$ observaremos que:

- se $a>0$, a função f terá um valor mínimo igual a n, pois $f(x)\geq n$. Tal valor mínimo de f ocorre para $x=m$, denominado valor minimizante da função. Logo, há um ponto de mínimo da função, correspondente ao vértice da parábola, no par ordenado (m,n) e concavidade voltada para cima;
- se $a<0$, a função f terá um valor máximo igual a n, pois $f(x)\leq n$. Tal valor máximo de f ocorre para $x=m$, denominado valor maximizante da função. Logo, há um ponto de máximo da função, correspondente ao vértice da parábola, no par ordenado (m,n) e concavidade voltada para baixo;

Note que, de uma forma ou de outra, o vértice da parábola ocorrerá no par ordenado (m,n). Mas, como visto anteriormente, $m=-\frac{b}{2a}$ e $n=-\frac{\Delta}{4a}$, que podem ser denominados "x do vértice" e "y do vértice", sendo comumente representados como $x_V=-\frac{b}{2a}$ e $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$.

Exemplo 07 (ENEM 2015)

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h)=-h^2+22h-85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T<0$	Muito baixa
$0\leq T\leq 17$	Baixa
$17<T<30$	Média
$30\leq T\leq 43$	Alta
$T>43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

Ainda utilizando a forma canônica, reescrita como $f(x)=a(x-x_V)^2+y_V$, é possível demonstrar o porquê de existir um eixo de simetria da parábola, que coincide com a reta vertical de equação $x=x_V$, a qual intercepta o gráfico da função justamente no vértice da parábola.

Seja (x_V,y_V) o vértice da parábola, queremos provar que $f(x_V-k)=f(x_V+k)=y_0$, $\forall k\in\mathbb{R}$. Isso mostraria que há dois pontos do domínio da função (x_V-k e x_V+k) com mesma imagem (y_0) e igual afastamento da abscissa do vértice da parábola (x_V), como mostra a **Figura 6**.

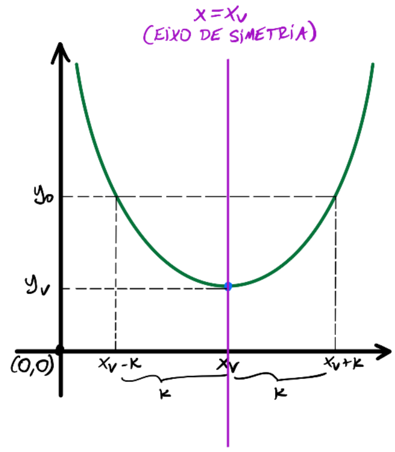


Figura 6

Para tal, utilizaremos a forma canônica, o que fará com que a demonstração seja quase que imediata! Veja:

$$f(x_V-k)=a(x_V-k-x_V)^2+y_V=a(-k)^2+y_V=ak^2+y_V$$

e $f(x_V+k)=a(x_V+k-x_V)^2+y_V=ak^2+y_V=f(x_V-k)$.

Logo, $f(x_V-k)=f(x_V+k)=y_0$, conforme queríamos provar. Usemos este fato para resolver um problema clássico de maneira totalmente diferente do convencional.

Exemplo 08 (ENEM PPL 2009)

Uma empresa vendia, por mês, 200 unidades de certo produto ao preço de R$ 40,00 a unidade. A empresa passou a conceder desconto na venda desse produto e verificou-se que a cada real de desconto concedido por unidade do produto implicava a venda de 10 unidades a mais por mês.

Para obter o faturamento máximo em um mês, o valor do desconto, por unidade do produto, deve ser igual, em R$, a

a) 5.
b) 10.
c) 12.
d) 15.
e) 20.

14.4.4 **Parábola**: o **Lugar Geométrico**

Assim como a circunferência corresponde ao lugar geométrico de todos os pontos do plano que equidistam de um ponto dado, a parábola também pode ser definida como um lugar geométrico de todos os pontos do plano que equidistam de um ponto dado (foco da parábola) e de uma reta dada (diretriz da parábola).

Observe a **Figura 7**, na qual são dados um ponto P no par ordenado (a,b) e uma reta horizontal r, de equação $y=-c$.

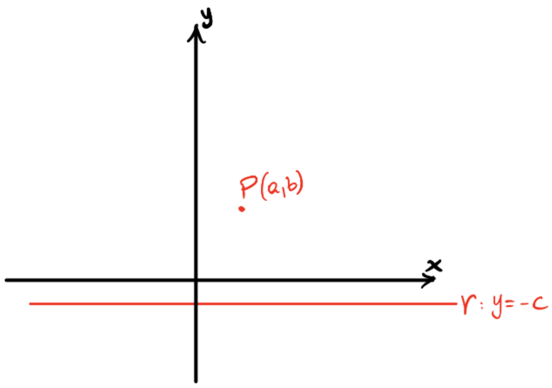


Figura 7

Qual seria a expressão algébrica de todos os pontos do plano cartesiano que equidistam do ponto P e da reta r, isto é: qual é a equação que representa a parábola com foco em P e diretriz em r?

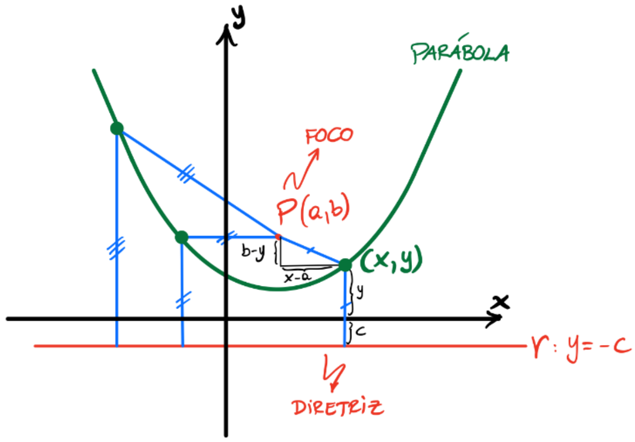


Figura 8

Sejam d_1 e d_2 as distâncias de um ponto qualquer (x,y) da parábola à diretriz r e ao foco P, respectivamente, conforme a **Figura 8** temos:

$$d_1 = y + c$$

E, por Pitágoras,

$$d_2{}^2 = (b-y)^2 + (x-a)^2.$$

Uma vez que $d_1 = d_2$ é imediato que $d_1{}^2 = d_2{}^2$. Logo, temos

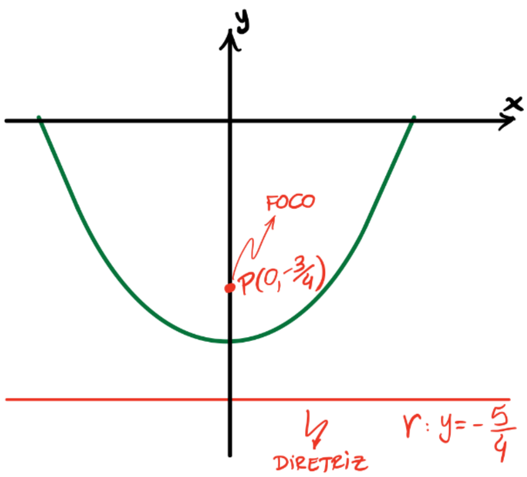
$$\begin{aligned} d_1{}^2 = d_2{}^2 \quad & \Rightarrow (y+c)^2 = (b-y)^2 + (x-a)^2 \\ & \Rightarrow y^2 + 2cy + c^2 = b^2 - 2by + y^2 + x^2 - 2ax + a^2 \\ & \Rightarrow 2by + 2cy = b^2 + x^2 - 2ax + a^2 - c^2 \\ & \Rightarrow y(2b+2c) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - c^2 \\ & \Rightarrow y = \frac{1}{2b+2c}x^2 - \frac{2a}{2b+2c}x + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b+2c} \end{aligned}$$

Assim, apesar de ser uma expressão estranha e extensa, a ideia é notar que a equação que representa a parábola com foco em P e diretriz em r corresponde a uma equação quadrática da forma $y = \bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}$, na qual $\bar{a} = \dfrac{1}{2b+2c}$, $\bar{b} = -\dfrac{2a}{2b+2c}$ e $\bar{c} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b+2c}$.

E é por esse motivo senhoras e senhores, que a função quadrática possui como gráfico a parábola!

Exemplo 09 (Mente Matemática 2020)

Encontre a equação da parábola com foco no ponto $\left(0,-\dfrac{3}{4}\right)$ e diretriz na reta de equação $y=-\dfrac{5}{4}$, conforme mostra a figura abaixo.



== **AULA 15. Funções Trigonométricas e Polinomiais** ==

- 15.1 **Resumo** da **Aula 14**

Na Aula 14, iniciamos estabelecendo uma relação entre o modelo linear e proporcionalidade direta, assim como a relação entre proporcionalidade inversa e o gráfico de uma hipérbole. Vale lembrar que provamos que a proporcionalidade inversa não está relacionada a uma reta decrescente, como por vezes os estudantes pensam.

> *As ideias de crescimento, modelo linear $\left(f(x)=a\cdot x\right)$ e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa $\left(f(x)=\frac{a}{x}\right)$. O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do quotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento e decrescimento de grandezas em relação.*

Na sequência, após discutirmos os modelos de proporcionalidade direta e inversa, foi a vez de discutirmos as funções afins, com os seus vários tipos e características gráficas.

> *Situações em que se faz necessária a função afim $f(x)=a\cdot x+b$ também devem ser trabalhadas.*

Finalizado o estudo das funções afins, foi a vez de estudarmos as funções quadráticas, um clássico em problemas que envolvem minimização e maximização.

> *O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima).*

> *O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras.*

> *O trabalho com a forma fatorada $\left(f(x)=a(x-m)^2+n\right)$ pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Baskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz).*

Iniciamos deduzindo a fórmula de Bhaskara, que nos permite calcular as raízes de funções quadráticas. Em seguida, utilizando as ideias de soma e produto das raízes, deduzimos a forma fatorada de uma função quadrática.

Em seguida, deduzimos também a forma canônica, importante para que possamos identificar rapidamente o par ordenado do vértice da parábola, assim como demonstrar características do gráfico da parábola, como a existência de um eixo de simetria que intercepta o gráfico da parábola no seu ponto de máximo/mínimo, conhecido como vértice da parábola.

Por fim, em um exercício de geometria analítica, demonstramos que a expressão da função quadrática corresponde à expressão do lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto dado (foco) e de uma reta (diretriz). Tal lugar geométrico é denominado parábola.

Se ao ler esse breve resumo você consegue se lembrar do que foi trabalhado, assim como das expressões citadas, você está preparado para a Aula 15. Caso contrário, tome de 5 a 10 minutinho para revisitar a Aula 14, relembrando os aspectos aqui discutidos.

- 15.2 Estudo da **Trigonometria**

Antes de começarmos efetivamente o estudo das funções trigonométricas, será necessário relembrarmos alguns detalhes já trabalhados nas aulas do bloco de Geometria, em especial na Aula 5. Comecemos lendo o primeiro trecho das OCEM que fazem menção às funções trigonométricas:

> *No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio.*

As leis do seno e do cosseno já foram discutidas no bloco de Geometria e não há a necessidade de uma nova discussão aqui. No que tange às relações métricas no triângulo retângulo, a principal delas é, também, um dos principais teoremas (senão o principal) da geometria plana: o **Teorema de Pitágoras**, que estabelece que "*para qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa* c *é igual à soma dos quadrados dos quadrados dos comprimentos dos catetos* a *e* b", ou seja, que "$c^2 = a^2 + b^2$", conforme mostra a **Figura 1**.

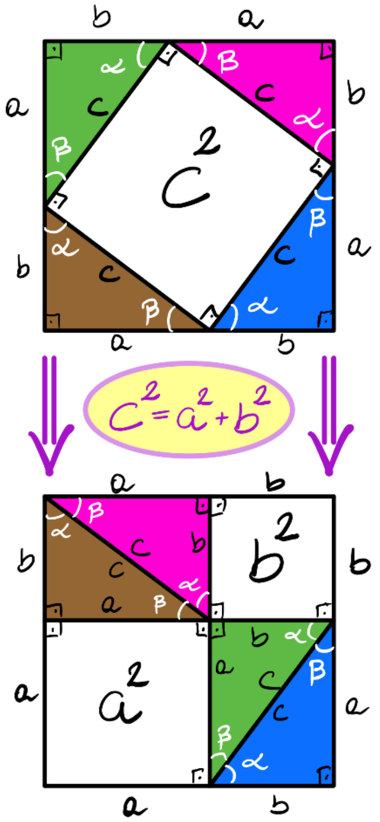
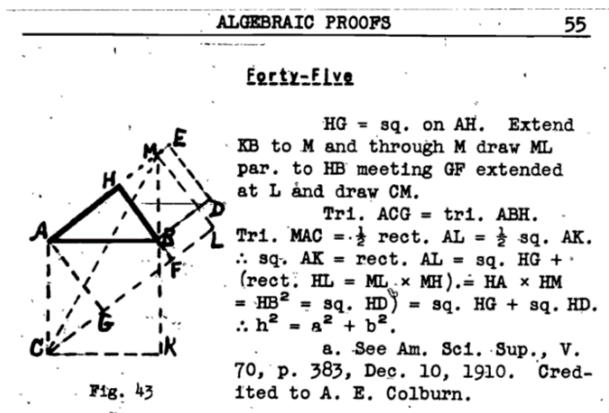


Figura 1: Prova Visual do Teorema de Pitágoras

Fato Curioso: de tão famoso e antigo (data de 550 a.C.), o Teorema de Pitágoras contém mais demonstrações publicadas do que qualquer outro teorema. Um livro intitulado *The Pythagorean Proposition* da autora Elisha Scott Loomis reúne mais de **300 demonstrações do teorema**!!!



ALGEBRAIC PROOFS 55

Forty-Five

HG = sq. on AH. Extend KB to M and through M draw ML par. to HB meeting GF extended at L and draw CM.
Tri. ACG = tri. ABH.
Tri. MAC = ½ rect. AL = ½ sq. AK.
∴ sq. AK = rect. AL = sq. HG + (rect. HL = ML × MH). = HA × HM = HB^2 = sq. HD) = sq. HG + sq. HD.
∴ $h^2 = a^2 + b^2$.
a. See Am. Sci. Sup., V. 70, p. 383, Dec. 10, 1910. Credited to A. E. Colburn.

Fig. 43

Figura 2: Uma das demonstrações (a de número **45**)

Porém, nem só de Pitágoras vivem as relações métricas no triângulo retângulo. Por meio de semelhanças de triângulo, algumas outras relações métricas podem ser obtidas. Por não serem tão imprescindíveis para o estudo das funções trigonométricas, elas serão apenas mostradas, sem prova, na **Figura 3**.

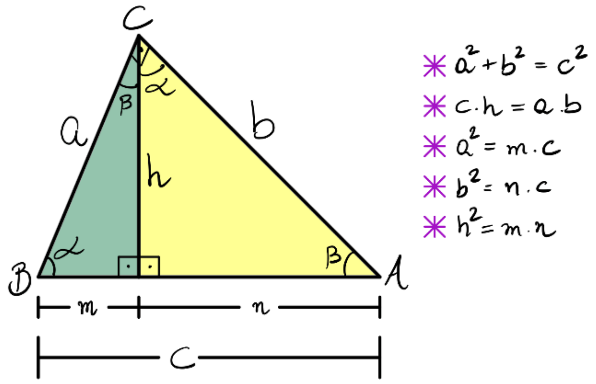
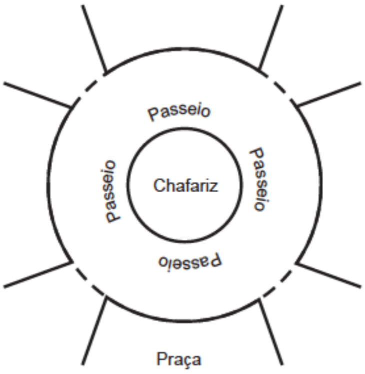


Figura 3: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

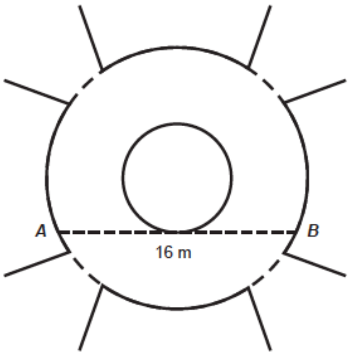
Relação Métrica Extra: uma relação métrica que precisei usar em um exercício de nível aprofundamento certa vez foi que $c \geq 2h$! Isso ocorre porque todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência, sendo a hipotenusa o diâmetro. Dessa forma, como a altura h será sempre menor do que ou igual ao raio, isto é, $h \leq \frac{c}{2}$, então $c \geq 2h$.

Exemplo 01 (ENEM 2018)

A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, em engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi

a) 4π

b) 8π

c) 48π

d) 64π

e) 192π

Anotações / Rascunho

Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre $0°$ e $90°$, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre $90°$ e $180°$. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida $30°$, $45°$ e $60°$.

Considerando o triângulo retângulo ABC da **Figura 4**, definimos as seguintes razões como razões trigonométricas:

- seno: razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo, representado por sen. No caso, temos $\text{sen}(\alpha)=\dfrac{a_1}{c_1}$ e $\text{sen}(\beta)=\dfrac{b_1}{c_1}$;
- cosseno: razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa de um triângulo retângulo, representado por $\cos$. No caso, $\cos(\beta)=\dfrac{a_1}{c_1}$ e $\cos(\alpha)=\dfrac{b_1}{c_1}$.

  Note que $\text{sen}(\alpha)=\cos(\beta)$ e $\text{sen}(\beta)=\cos(\alpha)$;
- tangente: razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo, representado por tg ou $\tan$. No caso, $\text{tg}(\alpha)=\dfrac{a_1}{b_1}$ e $\text{tg}(\beta)=\dfrac{b_1}{a_1}$.

  Logo, para um ângulo $\measuredangle$, temos $\text{tg}(\measuredangle)=\dfrac{\text{sen}(\measuredangle)}{\cos(\measuredangle)}$.

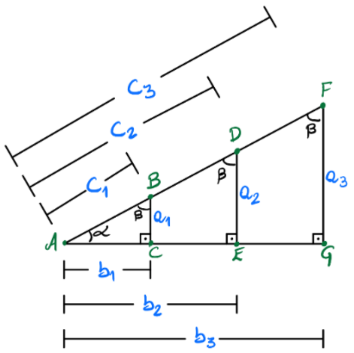


Figura 4

Importante frisar que as razões trigonométricas são válidas para um ângulo $\measuredangle$ independentemente das medidas dos lados do triângulo considerado. Nos triângulos ABC e AFG da **Figura 4**, $\text{sen}(\alpha)=\dfrac{a_1}{c_1}$ e $\text{sen}(\alpha)=\dfrac{a_3}{c_3}$, respectivamente. Porém, por serem triângulos semelhantes, temos que $\dfrac{a_1}{c_1}=\dfrac{a_3}{c_3}$, o que nos mostra que o valor do seno independe das medidas do triângulo.

Como forma de justificar os valores de seno, cosseno e tangente para alguns ângulos notáveis ($30°$, $45°$ e $60°$), podemos utilizar duas figuras geométricas simples: o triângulo equilátero e o quadrado.

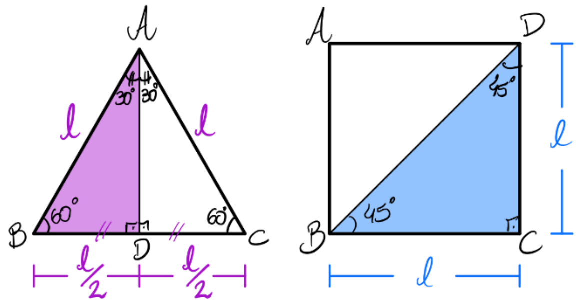


Figura 5

Dado o triângulo equilátero ABC de lado L, ao traçarmos a altura $\overline{AD}$, temos um segmento que além de altura é também bissetriz e mediana, conforme mostra a **Figura 5**. Assim, geramos uma triângulo retângulo ABD, com ângulos internos iguais e a $30°$, $60°$ e $90°$. Considerando ainda que a altura $\overline{AD}$ tem medida $\dfrac{L\sqrt{3}}{2}$, podemos calcular os valores das razões trigonométricas para os ângulos de $30°$ e $60°$:

- $\text{sen}(30°)=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{L/2}{L}=\dfrac{1}{2}$;
- $\cos(30°)=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{L\sqrt{3}/2}{L}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\text{tg}(30°)=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{L/2}{L\sqrt{3}/2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
- $\text{sen}(60°)=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{L\sqrt{3}/2}{L}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad(=\cos(30°))$;
- $\cos(60°)=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{L/2}{L}=\dfrac{1}{2}\quad(=\text{sen}(30°))$;
- $\text{tg}(60°)=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{L\sqrt{3}/2}{L/2}=\sqrt{3}\quad\left(=\dfrac{1}{\text{tg}(30°)}\right)$;

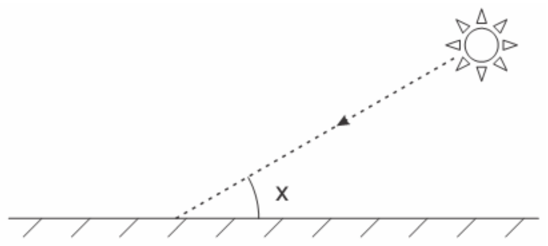
Já no quadrado $ABCD$ de lado L, ao traçarmos a diagonal $\overline{BD}$, de medida $L\sqrt{2}$ (por Pitágoras), teremos:

- $\text{sen}(45°)=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ ou $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\dfrac{L}{L\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos(45°)=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ ou $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{L}{L\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\text{tg}(45°)=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$ ou $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{L}{L}=1$;

Exemplo 02 (ENEM 2017)

Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre $0°$ e $90°$.



Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%

b) 50%

c) 57%

d) 70%

e) 86%

Anotações / Rascunho

Devemos notar, porém, que as <u>definições dadas anteriormente para as razões trigonométricas</u> servem tão somente para ângulos entre $0°$ e $90°$. Para ângulos obtusos, isto é, ângulos entre $90°$ e $180°$, define-se que $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$ e $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

Como $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, temos $\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}(\alpha)$.

Tais definições podem ser <u>demonstradas</u> com o auxílio das <u>leis dos senos e dos cossenos</u>, com a construção feita na **Figura 6**.

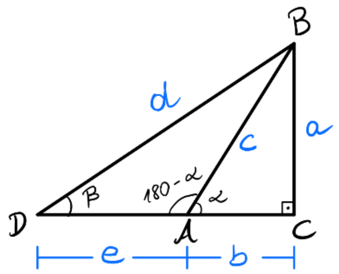


Figura 6

- **Demonstração** de $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$:

Pela lei dos senos no triângulo ABD temos:

$$\frac{d}{\text{sen}(180° - \alpha)} = \frac{c}{\text{sen}(\beta)} \Rightarrow \text{sen}(180° - \alpha) = \frac{d \cdot \text{sen}(\beta)}{c}$$

Mas, pelo triângulo BCD, $\text{sen}(\beta) = \dfrac{a}{d} \Rightarrow d \cdot \text{sen}(\beta) = a$.

Além disso, como em ABC temos $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{a}{c}$:

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \frac{d \cdot \text{sen}(\beta)}{c} = \frac{a}{c} = \text{sen}(\alpha).$$

- **Demonstração** de $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$:

Pela lei dos cossenos no triângulo ABD temos:

$$d^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos(180° - \alpha)$$
$$\Rightarrow \cos(180° - \alpha) = \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2ce}$$

Por Pitágoras nos triângulos BCD e ABC:

$$\Delta BCD:\ d^2 = a^2 + (b+e)^2 = a^2 + b^2 + e^2 + 2be$$
$$\underset{\Delta ABC}{\Rightarrow}\ d^2 = c^2 + e^2 + 2be \Rightarrow c^2 + e^2 - d^2 = -2be$$

Logo, $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{-2be}{2ce} = -\dfrac{b}{c} = -\cos(\alpha)$.

Note que foram introduzidas as razões trigonométricas seno e cosseno (e tangente) para ângulos com medida entre $0°$ e $90°$, estendeu-se a definição para ângulos obtusos, de medida entre $90°$ e $180°$, além de terem sido justificados os valores das razões trigonométricas relativas aos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$. Dando sequência às OCEM:

> *A apresentação das leis dos senos e dos cossenos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Por **exemplo**: conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por **exemplo**: como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora? Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para* $\text{sen}(a+b)$ *e* $\cos(a+b)$*, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.*

Com relação a esse trecho, as leis dos senos e dos cossenos já foram trabalhadas no módulo de geometria, tal como alguns problemas de cálculos de distâncias inacessíveis. Uma vez que podemos dispensar as razões trigonométricas secante, cossecante e cotangente, assim como todo um arsenal de fórmulas de trigonometria (várias delas derivadas da relação fundamental), podemos passar para o estudo do ciclo trigonométrico e das funções trigonométricas (ou circulares).

Relação Fundamental da Trigonometria: algo que será mais claro no estudo do ciclo trigonométrico, mas que pode ser antecipado é a Relação Fundamental da Trigonometria. Dado um triângulo retângulo ABC com hipotenusa de medida igual a 1 e um ângulo α, teremos dois catetos com medidas $\text{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$. Por Pitágoras, chegamos na Relação Fundamental:

$$\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

- 15.3 **Funções** Trigonométricas (**Circulares**)

Quando modelamos um problema real – como o movimento das marés citado na Aula 13 – por meio de funções trigonométricas, por vezes é necessário lidarmos com senos e cossenos de ângulos que superam $180°$. **Mas o que de fato representa** $\text{sen}(225°)$, se até o momento as nossas definições de seno e cosseno serviram, apenas, para ângulos em um triângulo, isto é, ângulos que variam entre $0°$ e $180°$?

Nesse caso, é necessário que façamos uma transição da noção de seno e cosseno como razões no triângulo retângulo para a noção de coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário, conforme indica o documento das OCEM:

> *É preciso atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre* $0°$ *e* $180°$.

Comecemos tomando um plano cartesiano que contenha uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do sistema de eixos cartesianos xOy. Define-se que, para um ângulo $\theta=0$, temos o ponto A, interseção do eixo x com a circunferência (**Figura 7**).

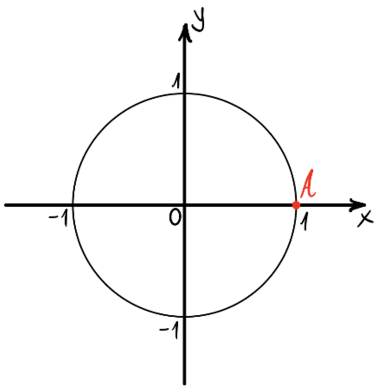


Figura 7

A partir deste ponto A define-se uma função $f(\theta)$ que associa, para cada valor real de θ um ponto P na circunferência, tal que

- Se $\theta>0$, conta-se um arco de comprimento θ, no sentido anti-horário a partir do ponto A, sendo P o extremo do arco correspondente a um ponto da circunferência.

- Se $\theta < 0$, conta-se um arco de comprimento θ, no sentido horário a partir do ponto A, sendo P o extremo do arco correspondente a um ponto da circunferência.

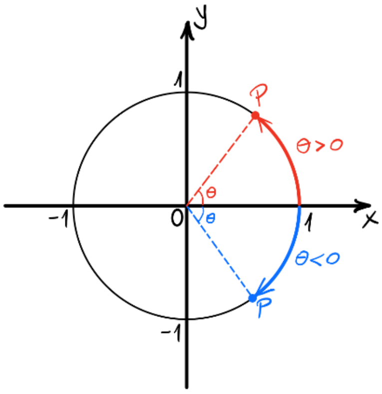


Figura 8

Dessa forma, o ponto P corresponde à imagem de θ pela função f. É importante que você perceba, neste momento, que a imagem dessa função não corresponde unicamente ao valor no eixo y (como ocorre em funções nas quais $y = f(x)$), mas sim ao ponto P de par ordenado (a,b). Podemos formalizar a função f da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [-1,1] \times [-1,1] \\ \theta &\mapsto P = (a,b) \end{aligned}$$

Mas o que são esses valores a e b? Eles correspondem, respectivamente, ao $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$, conforme mostra a **Figura 9**.

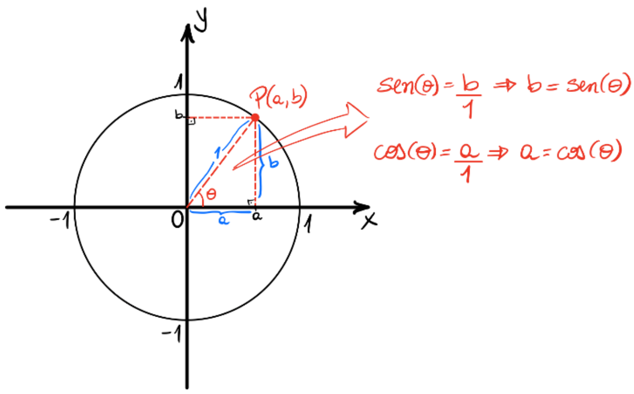


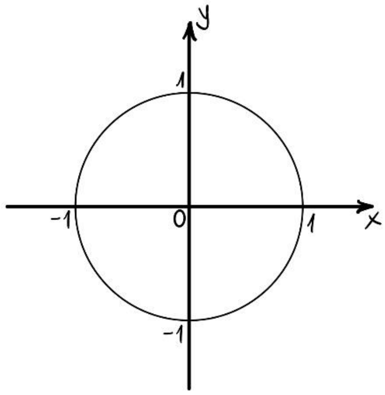
Figura 9

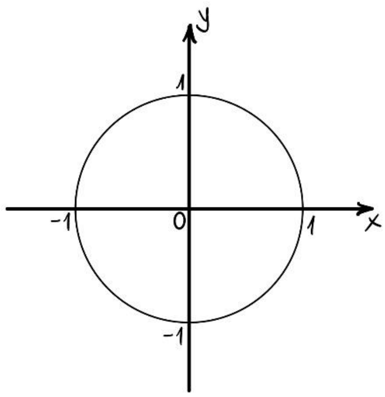
Partindo dessa nova definição de seno e cosseno como a abscissa e a ordenada, nesta ordem, do ponto P que percorre um arco do círculo de raio unitário, estamos finalmente livres para calcular os valores de seno e cosseno para quaisquer ângulos, mesmo que negativos, na circunferência que denominamos ciclo trigonométrico!

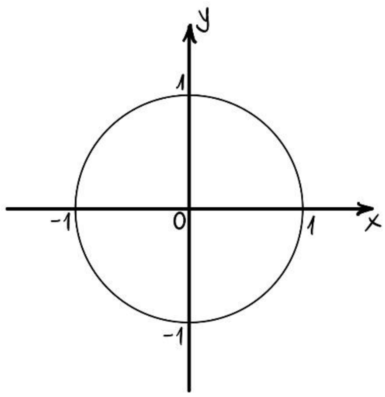
Exemplo 03

Calcule os valores de seno e cosseno dos ângulos $330°$, $-120°$ e $750°$.

Anotações / Rascunho







Apesar de termos trabalhado com ângulos sendo medidos em graus até o momento, em geral o ângulo θ é um valor real, sendo mais comum utilizarmos radianos do que graus.

Apesar da resistência inicial em se trabalhar com radianos sem se fazer conversões para graus, e vice-versa, recomendo fortemente que você comece a pensar em radianos durante todo o processo. Se você já fez algum cursinho e/ou aprendeu a língua inglesa, sabe bem ao que me refiro: é natural ficarmos traduzindo em um primeiro momento, mas para que você realmente aprenda a língua inglesa e seja fluente nela, você deve pensar em inglês!

Para que você seja capaz de *pensar em radianos*, uma sugestão é que você pense em frações. Ou melhor: em fatias de pizza, porque pizza é ♥ amor ♥.

Imagine uma pizza dividida em 8 fatias, com as suas bordas representando a circunferência de raio unitário. Uma vez que o comprimento da circunferência é 2π, podemos associar uma pizza inteira a 2π radianos ou uma meia pizza a π radianos. Assim, podemos dizer que os ângulos θ que tem como imagens os pontos A e B, em radianos, correspondem, respectivamente, a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$, como mostra a **Figura 10**.

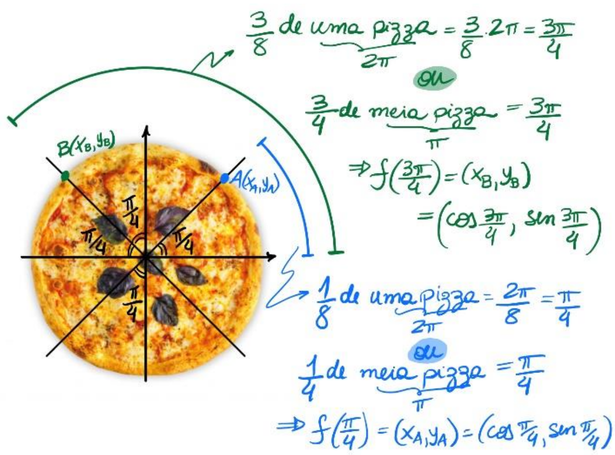


Figura 10

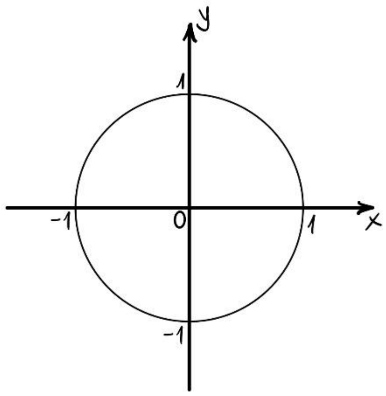
Note ainda que, utilizando como referência os valores conhecidos de seno e cosseno para o ângulo de $45°$ (com equivalente em radianos a $\pi/4$, pela própria simetria da figura, sem necessariamente utilizar que $\pi\ \text{rad} = 180°$) as imagens dos pontos A e B correspondem, nesta ordem, a

$$A = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e}$$

$$B = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exemplo 04

Identifique no ciclo trigonométrico abaixo as imagens dos ângulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{2\pi}{5}$ e $-\frac{3\pi}{10}$, sem converter em graus (ou seja, apenas pensando em radianos).



Anotações / Rascunho

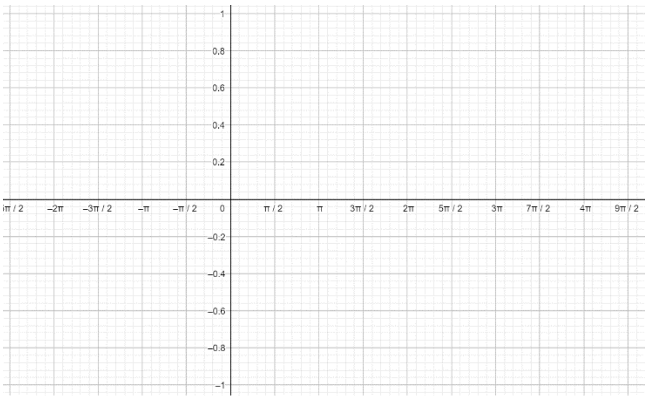
No penúltimo trecho das OCEM referente à parte de trigonometria e funções trigonométricas, temos o seguinte:

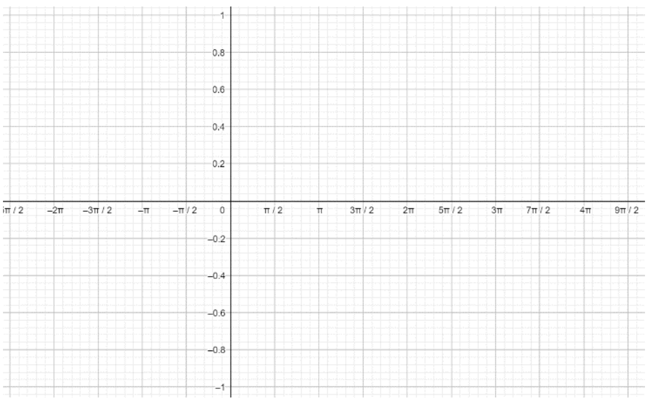
> *Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = \text{sen}(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos.*

Desde a Aula 13 temos visto a importância de analisarmos graficamente as funções sempre pensando em crescimentos e decrescimentos mais/menos acelerados. Com as funções trigonométricas não é diferente, como veremos a seguir.

Exemplo 05

Usando os plano cartesianos abaixo, esboce os gráficos de $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = \cos(x)$. Dica: analise, em cada um dos quatro quadrantes do ciclo trigonométrico, como se dá o crescimento ou decrescimento do início até a metade e da metade até o final do quadrante.





← Apenas assistam a esse vídeo do Numberphile sobre as funções trigonométricas (ou circulares)! Por mais que você não entenda inglês, vale a pena!

Para finalizar o tópico 15.3, vejamos o último trecho referente às funções trigonométricas:

> *As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano.*

Em primeiro lugar, você deve ter reparado que não tratamos sequer da função tangente, justamente pelo motivo citado no trecho acima. Com relação aos fenômenos que apresentam comportamento periódico, dois exemplos foram citados na Aula 13 e outros tantos serão retomados em exercícios.

Então, para finalizarmos o estudo das funções trigonométricas, estudaremos, em detalhes como cada um dos coeficientes reais A, B, C e D da função

$$f(x) = A + B\text{sen}(Cx + D)$$

impactam no comportamento gráfico e nos valores mínimos e máximos da função, tal como no seu período. Se você souber lidar com as alterações provocadas por cada um desses coeficientes, você certamente passará a enxergar problemas de funções trigonométricas com outros olhos.

- **A**: Translação Vertical *Intuitiva*

Ao alterarmos o coeficiente A, provocamos uma translação vertical, ou seja, o gráfico da função é deslocado verticalmente. Se $A > 0$, o deslocamento ocorre para cima; se $A < 0$, o deslocamento ocorre para baixo. Por esse motivo, costumo dizer que o movimento é intuitivo, pois segue o sentido natural do eixo das ordenadas, como mostra a **Figura 11**. Nela, temos a comparação entre os gráficos das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = 2 + \text{sen}(x)$.

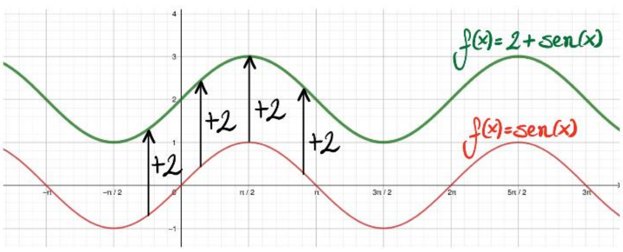


Figura 11: Impacto de A em $f(x) = A + B\text{sen}(Cx + D)$

Além disso, o coeficiente A determina um eixo $y = A$ em torno do qual a função trigonométrica (seno ou cosseno) varia, se tornando uma espécie de eixo médio ou valor médio da função. Por fim, o valor de A é fundamental para a determinação da imagem da função, que varia no intervalo $[A - |B|, A + |B|]$.

➢ **B**: Contração/Expansão Vertical *Intuitiva*

Ao alterarmos o coeficiente B, provocamos uma contração ou expansão vertical. Se $|B|>1$, ocorre uma expansão do gráfico; se $|B|<1$, com $B\neq 0$, ocorre uma contração do gráfico. Por esse motivo, também digo que o movimento é intuitivo, pois segue a ordem natural de aumento $(|B|>1)$ e diminuição $(|B|<1)$ da amplitude da função, como mostra a **Figura 12**. Nela, temos a comparação entre os gráficos das funções $f(x)=\text{sen}(x)$ e $f(x)=3\text{sen}(x)$.

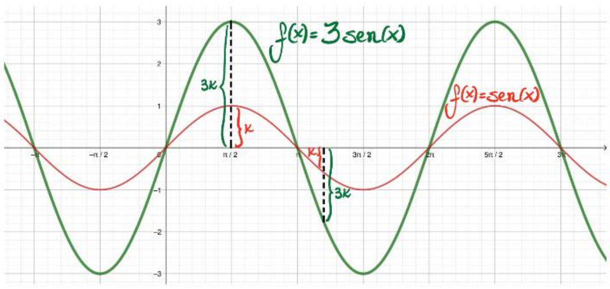


Figura 12: Impacto de B em $f(x)=A+B\text{sen}(Cx+D)$

Além de $|B|$ corresponder à amplitude da função, ele tem direta correlação, em conjunto com A, na definição dos valores mínimo $(A-|B|)$ e máximo $(A+|B|)$ da função f.

➢ **C**: Contração/Expansão Horizontal *Contraintuitiva*

Ao alterarmos o coeficiente C, provocamos uma contração ou expansão horizontal. Se $|C|>1$, ocorre uma contração do gráfico; se $|C|<1$, com $C\neq 0$, ocorre uma expansão do gráfico, ambas horizontalmente. Por esse motivo, digo que o movimento é contraintuitivo, pois segue a ordem contrária (não natural) de aumento $(|C|<1)$ e diminuição $(|C|>1)$ do período da função, como mostra a **Figura 13**. Nela, temos a comparação entre os gráficos das funções $f(x)=\text{sen}(x)$ e $f(x)=\text{sen}(2x)$.

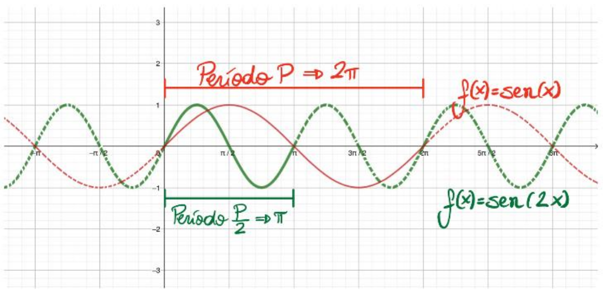


Figura 13: Impacto de C em $f(x)=A+B\text{sen}(Cx+D)$

O coeficiente C é fundamental na determinação do período P da função f, que é dado por $P=\dfrac{2\pi}{|C|}$.

Uma vez que o período corresponde a um ciclo completo ("tempo" entre dois picos ou dois vales da função), este também corresponde a uma volta completa no ciclo trigonométrico. Uma relação que acho particularmente útil na resolução de diversos exercícios é justamente fazer esse link entre ciclo trigonométrico e período da função, relacionando, por exemplo, o tempo necessário para *completar* um quadrante, ou um quarto de volta no ciclo, a um quarto do período, isto é $\dfrac{P}{4}$.

➢ **D**: Contração/Expansão Horizontal *Contraintuitiva*

Ao alterarmos o coeficiente D, provocamos uma translação horizontal, ou seja, o gráfico da função é deslocado horizontalmente. Se $D>0$, o deslocamento ocorre para a esquerda; se $D<0$, o deslocamento ocorre para a direita. Por esse motivo, digo que o movimento é contraintuitivo, pois segue a ordem contrária (não natural) de deslocamento no sentido do eixo das abscissas, como mostra a **Figura 14**. Nela, temos a comparação entre os gráficos das funções $f(x)=\text{sen}(x)$ e $f(x)=\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

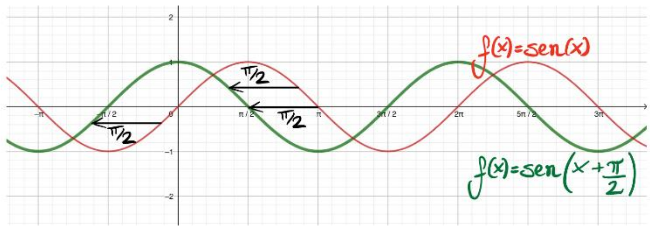


Figura 14: Impacto de D em $f(x)=A+B\text{sen}(Cx+D)$

Uma ressalva importantíssima a se fazer a respeito do coeficiente D é que ele é o único dos quatro coeficientes que nunca poderá ser analisado individualmente, pois guarda estreita relação com o coeficiente C.

Em realidade, ao modificarmos o valor do coeficiente D, ocorre um deslocamento de $\dfrac{|D|}{|C|}$ unidades horizontais no plano cartesiano, uma vez que o impacto do deslocamento devido a D dependerá, também, do fato de ter ocorrido ou não uma modificação no período da função trigonométrica, o que depende do valor do coeficiente C.

Exemplo 06 (ENEM 2015)

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12, associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro. b) abril. c) junho.

d) julho. e) outubro.

Exemplo 07 (ENEM 2017)

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

Anotações / Rascunho

- 15.4 Funções **Polinomiais**

Até o momento, foram estudados dois tipos de funções polinomiais: função afim (ou função polinomial do primeiro grau) e função quadrática (ou função polinomial do segundo grau), ambas na Aula 14. Porém, o estudo de funções polinomiais mais gerais é contemplado nas OCEM, ainda que de forma simples, como veremos nos trechos a seguir.

> *As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta,* ***podem*** *estar presentes no estudo de funções. Funções do tipo $f(x)=x^n$ podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição do ponto (x,x^n) em relação à reta $y=x$, para isso comparando-se x e x^n nos casos $0<x<1$ ou $x>1$ e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico.*

Para iniciar a análise qualitativa sugerida e, consequentemente, esboçar os gráficos de funções do tipo $f(x)=x^n$, com $n\in\mathbb{N}$, precisamos quebrar a análise em três casos:

- **1º Caso**: O que ocorre com o valor de x^n à medida em que aumentamos o valor de n, para $0<x<1$?

Nesse caso, precisamos lembrar que, a cada nova multiplicação de um número entre 0 e 1 por ele mesmo, ou seja, por um número que também está entre 0 e 1, o resultado fica menor. Por exemplo:

$$\underbrace{0{,}5^4}_{0{,}0625} < \underbrace{0{,}5^3}_{0{,}1250} < \underbrace{0{,}5^2}_{0{,}2500} < 0{,}5\,.$$

Traduzindo: em uma função da forma $f(x)=x^n$, para cada valor x do domínio, tal que $0<x<1$, mais próximo de zero será o valor da imagem x^n quanto maior for o valor de n. Assim, fixado um valor x, o ponto (x,x^n) estará mais abaixo da reta $y=x$ e mais próximo do eixo das abscissas $(y=0)$ estará o ponto.

- **2º Caso**: O que ocorre com o valor de x^n à medida em que aumentamos o valor de n, para $x=1$?

Nesse caso, é bem simples: o ponto $(1,1^n)$ será o mesmo, independentemente do valor de n, pois $1^n=1$ para todo n.

- **3º Caso**: O que ocorre com o valor de x^n à medida em que aumentamos o valor de n, para $x>1$?

Nesse caso, ocorre algo mais natural, contrário ao que ocorreu no caso em que $0<x<1$: para cada valor x do domínio tal que $x>1$, quanto maior for o valor de n maior será o valor da imagem x^n. Logo, fixado um valor x, mais acima da reta $y=x$ estará o ponto (x,x^n) quanto maior for o valor de n, uma vez que o aumento do valor de n provoca um crescimento mais acelerado da potência x^n. Por exemplo:

$$\underbrace{1{,}5^4}_{5{,}0625} > \underbrace{1{,}5^3}_{3{,}375} > \underbrace{1{,}5^2}_{2{,}25} > 1{,}5$$

Assim, se esboçarmos os gráficos de $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$ e $y=x^6$ como exemplos, comparando-os ao gráfico de $y=x$, teremos o que mostra a **Figura 15**.

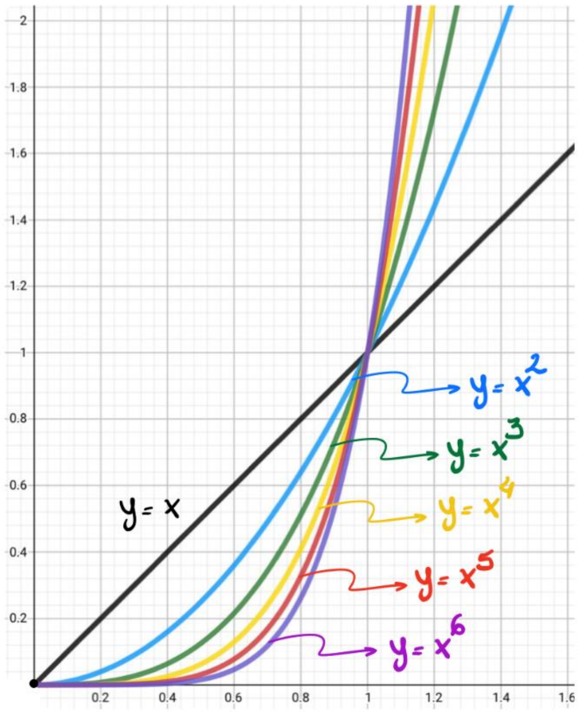


Figura 15: gráficos de $f(x)=x^n$ quando $x>0$

Note que apenas analisamos o que ocorre para valores positivos do domínio, isto é, para $x>0$. Para que possamos analisar a porção negativa do domínio, isto é, as imagens de $f(x)=x^n$ quando $x<0$, basta analisarmos o que ocorre com a função quando fazemos $f(-x)$, com $x>0$, pois isso percorrerá todo o domínio negativo. Dois casos precisam ser analisados agora: aquele em que n é um número natural par e aquele em que n é um número natural ímpar.

- **1º Caso**: Imagens de $f(x)=x^n$ quando n par.

Nesse caso, teremos $f(-k)=(-k)^n=k^n=f(k)$, o que implica em um função que tem imagens idênticas, por exemplo, para -3 e 3, uma vez que $f(-3)=f(3)$. Assim, há uma simetria do gráfico da função com relação ao eixo das ordenadas (eixo y), que servirá como uma espécie de espelho do gráfico de f. Funções que tem essa característica em todo o seu domínio $(f(-k)=f(k))$, são denominadas funções pares.

- **2º Caso**: Imagens de $f(x)=x^n$ quando n ímpar.

Nesse caso, teremos $f(-k)=(-k)^n=-k^n=-f(k)$, o que implica em um função que tem imagens opostas, por exemplo, para -3 e 3, uma vez que $f(-3)=-f(3)$. Assim, há uma simetria do gráfico da função com relação à origem do plano cartesiano. Nesse caso, eu gosto de imaginar que ocorrem duas reflexões sucessivas, com relação aos eixos x e y (em qualquer ordem) da porção positiva do gráfico. Funções que tem essa característica em todo o seu domínio $(f(-k)=-f(k))$, são denominadas funções ímpares. O resultado dos dois casos trabalhados podem ser verificados na **Figura 16**.

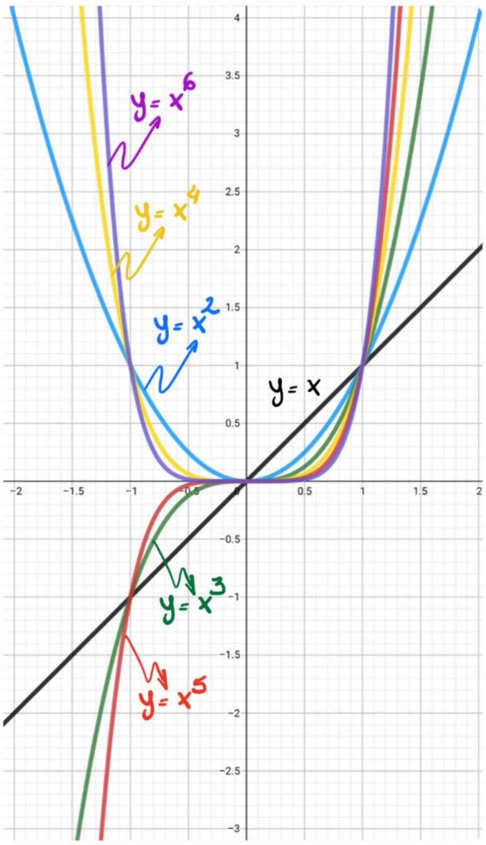


Figura 16: gráficos das funções da forma $f(x)=x^n$

Enfim, finalizando a Aula 15, temos o seguinte trecho das OCEM:

> *Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os "zeros" da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial $y=P(x)$, esta pode ser expressa como o produto do fator $(x-c)$ por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por $(x-c)$.*

Com relação à primeira parte do texto, tente esboçar o gráfico da função f tal que $f(x)=x^3+2x^2+x+2$. Mesmo conhecendo separadamente os gráficos das funções polinomiais $y=x^3$ (forma $f(x)=x^n$) e $y=2x^2+x+2$ (função quadrática), isso pouco ajuda. A única informação direta que temos é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo y: $(0,2)$. Poderíamos tentar agora buscar os zeros ou raízes da função, que nos indicam os pontos de interseção do gráfico da função com o eixo x, usando a ideia de fatoração:

$$x^3+2x^2+x+2=0 \Rightarrow x^2(x+2)+1(x+2)=0$$
$$\Rightarrow (x+2)\left(x^2+1\right)=0$$

Assim, descobrimos que -2 é uma das raízes, o que implica em $(-2,0)$ como ponto de interseção do gráfico de f com o eixo x. Além disso, percebe-se que não há mais raízes reais, uma vez que $\left(x^2+1\right)=0 \Rightarrow x^2=-1$.

Poderíamos até buscar outros pontos, mas ainda assim não seria simples chegar no gráfico correto (**Figura 17**).

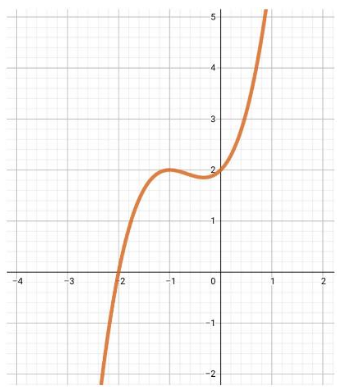


Figura 17: gráfico da função $f(x)=x^3+2x^2+x+2$

Cálculo Diferencial, Derivadas e Gráficos de Funções

Quando estudamos Cálculo Diferencial, aprendemos técnicas para uma melhor construção de gráficos de funções por meio do auxílio de derivadas. Apenas como curiosidade (já que eu curtia demais essa parte do Cálculo hahaha), para esboçarmos o gráfico da função f tal que $f(x)=x^3+2x^2+x+2$, seria necessário:

i) Calcular a primeira derivada, $f'(x)=3x^2+4x+1$, igualar a zero, encontrando os pontos de máximo e mínimo locais em -1 e $-\frac{1}{3}$, além de analisar o crescimento e decrescimento da função nos intervalos do domínio de f.

ii) Calcular a segunda derivada, $f''(x)=6x+4$, igualar a zero, encontrando o ponto de inflexão (mudança de concavidade) em $-\frac{2}{3}$, além de analisar a concavidade e convexidade da função em cada intervalo do domínio de f.

A **Figura 18** traz o processo criativo para o esboço do gráfico de $f(x)=x^3+2x^2+x+2$.

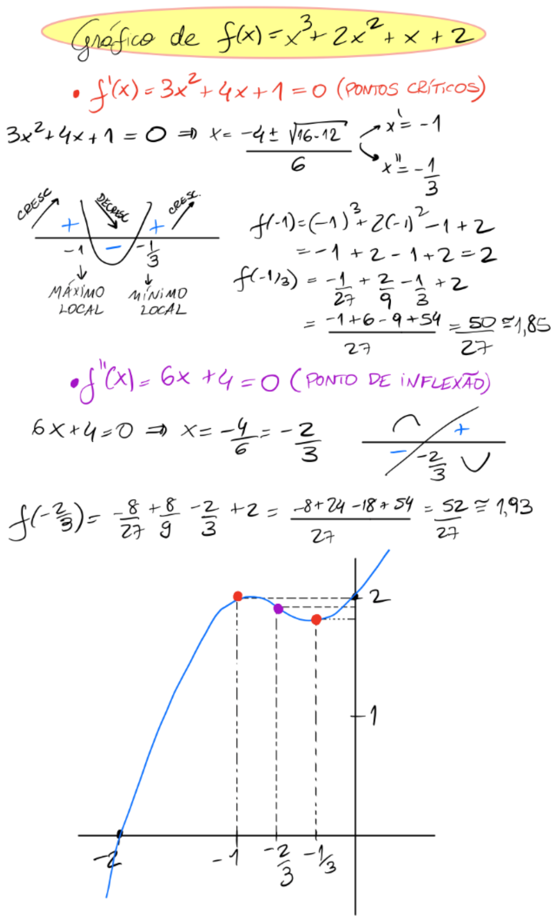


Figura 18: esboço do gráfico de $f(x)=x^3+2x^2+x+2$ usando técnicas do Cálculo Diferencial.

Ainda com relação à fatoração do polinômio de grau 3 em um produto de polinômios de grau 1 e grau 2, ou seja, x^3+2x^2+x+2 sendo reescrito como $(x+2)(x^2+1)$, é disso que trata a parte final do último trecho citado das OCEM. Ao conhecermos uma das raízes (digamos c) da função polinomial $y=P(x)$, podemos reescrever $P(x)$ como o produto de $(x-c)$ por um polinômio $Q(x)$ com um grau a menos do que o grau de P. No nosso exemplo:

$$\underbrace{x^3+2x^2+x+2}_{P(x)}=\underbrace{(x-2)}_{(x-c)}\underbrace{(x^2+1)}_{Q(x)}.$$

De fato, sejam x_1, x_2, ..., x_n as raízes de uma função polinomial $y=P(x)$ da forma

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

podemos decompor a função em um produto de funções polinomiais de grau 1, denominada forma fatorada:

$$P(x)=a_n\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

Para finalizar, vários aspectos das funções polinomiais não foram citados nas OCEM (nem são relevantes no ENEM, por exemplo), mas são comumente cobrados em vestibulares: *Teorema do Resto*, *Algoritmo de Briot-Ruffini*, *Multiplicidade de Raízes*, *Teorema das Raízes Conjugadas* e outros (alguns desses estarão presentes nos exercícios). Porém, um que recomendo fortemente que seja estudado de maneira complementar são as *Relações de Girard*, que estabelecem relações (uau!) entre as raízes de uma função polinomial e os seus coeficientes, como vimos, por exemplo, nas relações de soma e produto das funções quadráticas.

Exemplo 08 (ENEM 2019)

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda per capita, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3. Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo.

Qual desses países obteve o maior IDH?

a) O primeiro. b) O segundo. C) O terceiro.

d) O quarto. e) O quinto.

========= **AULA 16. Funções Exponenciais** =========
======= **Matemática Financeira e Sequências** =======

- 16.1 **Resumo** da **Aula 15**

Na Aula 15, iniciamos com o estudo das bases da trigonometria, com destaque para as relações métricas no triângulo retângulo (em especial, o Teorema de Pitágoras).

> *No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio.*

Na sequência, foram definidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente como razões entre lados de um triângulo retângulo, o que limitava as definições dessas razões a ângulos agudos. Após definirmos as razões trigonométricas para ângulos agudos, calculamos os seus valores para alguns ângulos notáveis, estendendo a definição para ângulos obtusos em seguida.

> *Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre $0°$ e $90°$, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre $90°$ e $180°$. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida $30°$, $45°$ e $60°$.*

As leis dos senos e dos cossenos já haviam sido trabalhadas no bloco de Geometria, não sendo aqui retomadas. Vale frisar no trecho a seguir a dispensa dada à extensa gama de fórmulas relacionadas a seno e cosseno.

> *A apresentação das leis dos senos e dos cossenos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Por **exemplo**: conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por **exemplo**: como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora? Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.*

Após breve introdução dos conceitos básicos de trigonometria foi feita a transição das noções de seno e cosseno para coordenadas de um ponto em um círculo de raio unitário, o ciclo trigonométrico.

> *É preciso atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre $0°$ e $180°$.*

Após definirmos senos e cossenos como coordenadas de um ponto, pudemos esboçar os gráficos de funções trigonométricas, expandindo os ângulos para quaisquer números reais. Observamos que há uma periodicidade das funções trigonométricas, que atingem valores máximos e mínimos em intervalos constantes, além de estudarmos as relações dos coeficientes de uma função trigonométrica da forma $f(x) = A + B\operatorname{sen}(Cx + D)$ no comportamento gráfico de tais funções.

> *Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano.*

Após o estudo das funções trigonométricas, fizemos uma breve análise das funções polinomiais, começando pelas funções da forma $f(x)=x^n$, comparando as suas características para diferentes intervalos do domínio, comparando-os em relação ao gráfico da reta $y=x$.

> *As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta,* ***podem*** *estar presentes no estudo de funções. Funções do tipo $f(x)=x^n$ podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição do ponto (x,x^n) em relação à reta $y=x$, para isso comparando-se x e x^n nos casos $0<x<1$ ou $x>1$ e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico.*

Por fim, estudamos a decomposição de um polinômio de grau superior a 2 em um produto de polinômios de menor grau. A forma na qual decompõe-se um polinômio de grau superior a 1 em um produto de polinômios de grau 1 é denominada forma fatorada do polinômio.

> *Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os "zeros" da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial $y=P(x)$, esta pode ser expressa como o produto do fator $(x-c)$ por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por $(x-c)$.*

Importante frisar que, dentre todos os modelos de função até então estudados, o das funções polinomiais foi aquele em que mais tópicos foram deixados de lado nas OCEM. Assim, *dependendo do vestibular* a ser prestado é importante que o aluno se aprofunde um pouco mais nos tópicos de funções polinomiais. No caso do ENEM, o que estudamos é mais do que suficiente ☺

- 16.2 Funções **Exponenciais**

Na Aula 13, vimos que juros simples seguem o modelo linear. Neste caso, ao tomarmos emprestado $R\$\ 1000{,}00$ a uma taxa de juros simples de 1% ao mês, a <u>cada mês seriam cobrados os mesmos valores de juros</u>, referentes ao valor inicial: 1% de $R\$\ 1000{,}00$ por mês, ou seja $R\$\ 10{,}00$. Assim, a <u>dívida acumulada</u>, em reais, seguiria a seguinte sequência: $1000{,}00$, $1010{,}00$, $1020{,}00$, $1030{,}00$ ..., $1000{,}00+10{,}00\cdot n$, onde n é a quantidade de meses após o empréstimo.

Juros Simples / P.A. / Função Afim: note que o problema acima, envolvendo <u>juros simples</u> também pode ser enxergado como um <u>modelo de uma função afim com domínio nos naturais</u>, já que temos uma expressão da forma $f(x)=ax+b$, onde x é a <u>quantidade de meses</u> após o empréstimo, a é o <u>juro mensal</u> de $R\$\ 10{,}00$ e b é o <u>valor inicial do empréstimo</u>, de $R\$\ 1000{,}00$. Porém, também poderíamos enxergá-lo como um <u>problema de progressão aritmética</u>, com <u>primeiro termo</u> igual a $R\$\ 1000{,}00$ e <u>razão</u> igual a $R\$\ 10{,}00$!!! Fera essa relação, né? Veremos que algo parecido ocorrerá para juros compostos =D

Ao <u>plotarmos um gráfico</u> do valor acumulado de juros em função da quantidade de meses (desconsiderando o montante inicial tomado emprestado e estendendo o domínio dos naturais para os reais para efeito de construção do gráfico), teríamos a função da **Figura 1**, que segue o modelo linear.

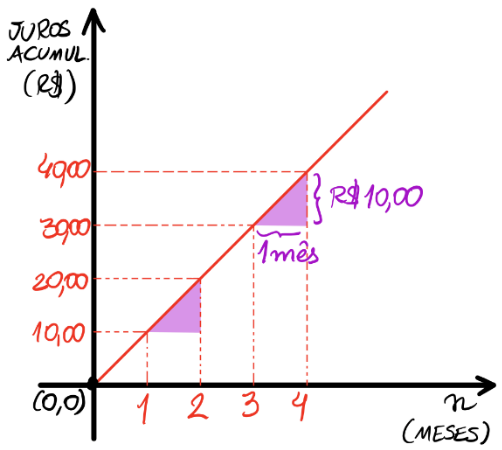


Figura 1: Juros Simples e o Modelo Linear

Porém, não é assim que juros funcionam na realidade! Na *vida real* não se praticam juros simples, mas sim juros compostos, também conhecidos como <u>juros sobre juros</u>. Neste caso, ao tomarmos emprestado $R\$\ 1000{,}00$ a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês, a <u>cada mês seriam cobrados os juros sobre o montante imediatamente anterior</u>.

Assim, a <u>dívida acumulada</u>, em reais, seguiria a seguinte sequência:

$$1000{,}00 \xrightarrow[+1\%\text{ de }1000]{} 1010{,}00 \xrightarrow[+1\%\text{ de }1010]{} 1020{,}10$$

$$1020{,}10 \xrightarrow[+1\%\text{ de }1020{,}10]{} 1030{,}30 \to \cdots \to 1000{,}00(1{,}01)^n$$

onde n é a quantidade de meses após o empréstimo. Assim, teríamos uma função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ com lei de formação $f(n)=1000(1{,}01)^n$.

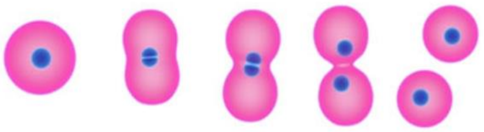
Juros Compostos / P.G. / Função Exponencial: note que o problema acima, envolvendo <u>juros composto</u> também pode ser enxergado como um <u>modelo de uma função exponencial com domínio nos naturais</u>, como veremos adiante, já que temos uma expressão da forma $f(x)=A\cdot b^x$, onde x é a <u>quantidade de meses</u> após o empréstimo, A é o <u>valor inicial do empréstimo</u> $(R\$\ 1000{,}00)$ e b é o <u>taxa de variação mensal</u> $(1\%\text{ ao mês})$. Porém, também poderíamos enxergá-lo como um <u>problema de progressão geométrica</u>, com <u>primeiro termo</u> igual a $R\$\ 1000{,}00$ e <u>razão</u> igual a $1{,}01$!!!

Nesse caso, <u>não se aplica o modelo linear</u>, uma vez que as variações dependem do valor da função em cada instante. E é aí que entra o modelo de crescimento/decrescimento exponencial, como veremos nas OCEM:

> *É pertinente discutir o <u>alcance</u> do modelo linear na <u>descrição de fenômenos de crescimento</u>, para então <u>introduzir</u> o modelo de crescimento e decrescimento exponencial* $\left(f(x)=a^x\right)$. *É interessante discutirem as <u>características desses dois modelos</u>, pois enquanto o <u>primeiro garante um crescimento à taxa constante</u>, o <u>segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante</u>. Situações reais de crescimento populacional podem bem <u>ilustrar o modelo exponencial</u>.*

Problemas que envolvem <u>juros simples</u>, <u>progressões aritméticas</u> e <u>funções lineares</u> envolvem crescimentos a taxas constantes e, por isso, estão <u>interrelacionados</u>. Porém, <u>modelos lineares possuem limitações</u> ao descreverem fenômenos de crescimento, o que <u>pode ser suprido</u>, em determinados casos, por <u>modelos de crescimento exponencial</u>. Nestes, os aumentos ocorrem a uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante, como ocorre com os <u>juros compostos</u> e com <u>progressões geométricas</u>, assim como em situações que envolvem crescimento populacional, como veremos adiante.

Tomemos com <u>exemplo as bactérias</u>, cuja reprodução é assexuada, por meio de um processo conhecido como **cissiparidade** ou **bipartição**. Inicialmente, uma bactéria <u>duplica o seu material</u> e, logo em seguida, <u>se divide originando duas bactérias idênticas</u> a ela (a chamada divisão binária), como mostra a **Figura 2**.



Função 2: Divisão Binária

Uma bactéria, quando em condições ideais de temperatura e nutrientes, leva aproximadamente <u>vinte minutos para completar todo o processo de divisão</u>. Agora, imagine, se <u>a cada vinte minutos surgem duas novas bactérias</u>, <u>quantas bactérias</u> oriundas da bactéria original <u>teremos 12 horas após o início da primeira divisão binária</u>?

<u>Resposta</u>: 68.719.476.736! Isso mesmo, **quase 70 bilhões**!!

Para esse cálculo, estamos assumindo que a <u>população de bactérias</u> segue o modelo de crescimento exponencial, cuja expressão é dada por

$$P(t)=1\cdot 2^{t/20},$$

onde t é a quantidade de <u>minutos transcorridos desde o início da primeira divisão binária</u> e $P(t)$ a <u>população total</u> de bactérias após t minutos. Em geral, modelos de crescimento populacional são dados por

$$P(t)=P_0\cdot a^t,$$

onde $P(t)$ corresponde à <u>população total</u> após o tempo t, P_0 é a <u>população inicial</u> e a uma <u>constante real positiva</u>, <u>diferente de um</u>, que define a <u>velocidade do crescimento exponencial</u>.

Na prática, porém, há <u>concorrência por recursos</u>, <u>recursos escassos</u> ou <u>qualquer outra limitação natural</u>, o que faz com que modelos logísticos sejam mais adequados no longo prazo (lembra da curva característica do item da TRI, que vimos na Aula 13? ☺), como mostra a **Figura 3**.

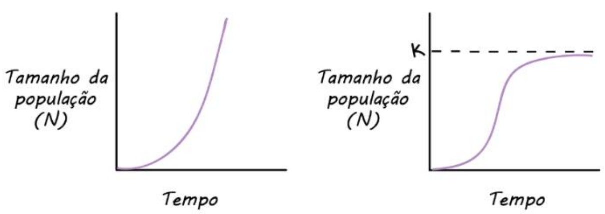
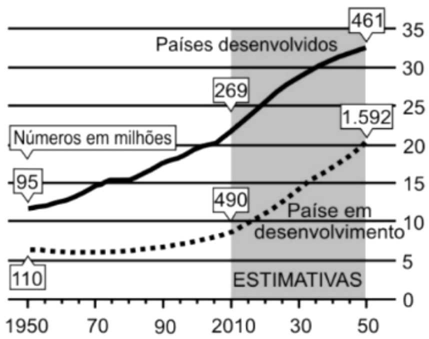


Figura 3 (Khan Academy): crescimento exponencial (curva em J) versus crescimento logístico (curva em S)

É o <u>caso da curva de crescimento de casos da Covid-19</u>, que dobra, digamos, a cada 10 dias. Logicamente, <u>esse comportamento é insustentável no longo prazo</u>, pois há uma <u>limitação quanto ao tamanho da população</u>. Porém, o crescimento exponencial é uma <u>ótima aproximação</u> para <u>situações reais</u> de crescimento populacionais <u>em um determinado intervalo de tempo</u>. Vejamos um exemplo em uma questão do ENEM.

Exemplo 01 (ENEM 2009)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009. Disponível em: www.economist.com. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que o modelo exponencial $y=363e^{0,03x}$, em que $x=0$ corresponde ao ano 2000, $x=1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3}=1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

a) 490 e 510 milhões.

b) 550 e 620 milhões.

c) 780 e 800 milhões.

d) 810 e 860 milhões.

e) 870 e 910 milhões.

Podemos definir as funções exponenciais, em sua forma mais básica, da seguinte maneira: dado um número real a, tal que $a>0$ e $a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $y=f(x)=a^x$. Dois casos precisam ser analisados separadamente, pois implicam em funções com características distintas: funções exponenciais com base $0<a<1$ e $a>1$.

- **1º Caso**: $a>1$

Nesse caso, teremos funções crescentes, como mostra a **Figura 4**. Note que, quanto maior for o valor de a, mais acelerado é o crescimento da função.

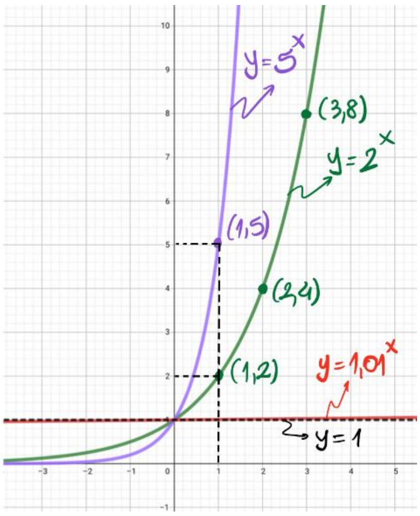


Figura 4: Gráficos de Funções Exponenciais com $a>1$

O gráfico da função $f(x)=1{,}01^x$ (em vermelho) pode parecer estranho na **Figura 4**, uma vez que se aproxima muito da reta $y=1$, mas basta *tirar o zoom* da figura, para ver que, em algum instante, ela apresentará o comportamento gráfico característico de exponenciais crescentes (**Figura 5**).

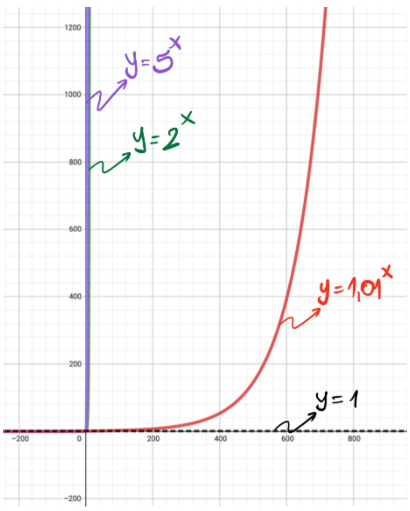


Figura 5: Gráficos de Funções Exponenciais com $a>1$

Assim, ao nos depararmos com inequações exponenciais cujas bases são superiores a um, temos a seguinte relação:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \underset{a>1}{\Rightarrow} f(x) > g(x).$$

Exemplo: $2^{2x} > 2^1 \underset{2>1}{\Rightarrow} 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$.

- **2º Caso**: $0<a<1$

Nesse caso, teremos funções decrescentes, como mostra a **Figura 6**. Note que, quanto mais próximo de zero for o valor de a, mais acelerado é o decrescimento da função.

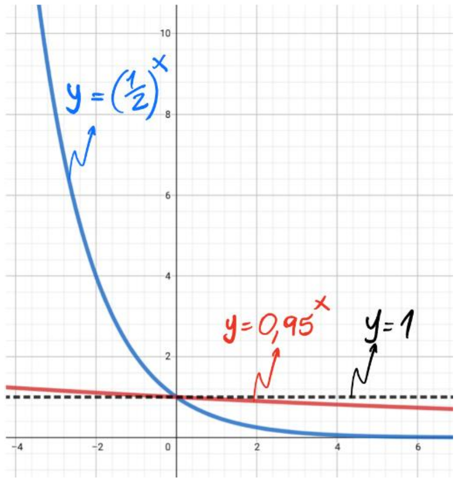


Figura 6: Gráficos de Funções Exponenciais com $0<a<1$

Assim, ao nos depararmos com inequações exponenciais cujas bases estão entre zero e um, temos a seguinte relação:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \underset{0<a<1}{\Rightarrow} f(x) < g(x).$$

Exemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \underset{0<1/2<1}{\Rightarrow} 2x < 2 \Rightarrow x < 1$.

Anotações / Rascunho

Assim como crescimentos populacionais estão relacionados a crescimentos exponenciais, existem problemas clássicos, frequentemente abordados em vestibulares, associados a decaimentos exponenciais. O principal, sem dúvidas, é o decaimento radioativo, que envolve o tempo de meia-vida.

Em processos radioativos, a meia-vida corresponde ao tempo necessário para que a metade da massa de um radioisótopo seja desintegrada, o que pode ocorrer em segundos ou em milhões de anos, dependendo da instabilidade do radioisótopo.

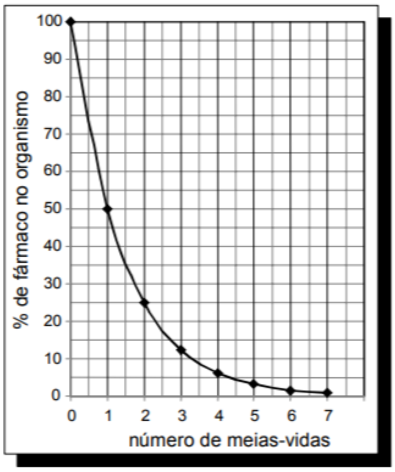
Tomando como exemplo o caso do carbono-14, cuja medida da meia-vida é utilizada na datação de fósseis, o tempo necessário para que uma determinada massa deste isótopo instável decaia pela metade, transformando-se em nitrogênio-14, é de 5.730 anos. Assim, dada uma massa M_0 de carbono-14, o modelo matemático utilizado para determinar a quantidade de massa $M(t)$ desse isótopo daqui a t anos será dada por

$$M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

Note que temos um exemplo de uma função exponencial de base entre zero e um, o que implica em uma função exponencial decrescente.

Exemplo 02 (ENEM 2007)

A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher l. Wannma. Farmacologia Clínica. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de

a) 10%.

b) 15%.

c) 25%.

d) 35%.

e) 50%.

Anotações / Rascunho

- 16.3 **Matemática Financeira** e **Logaritmos**

Talvez um dos tópicos mais negligenciados durante todo o ensino médio no ensino da matemática, as noções de Matemática Financeira deveriam ser tratadas ao estudarmos funções exponenciais, conforme trecho das OCEM:

> *Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo.*

Como vimos, juros compostos estão diretamente relacionados a modelos de crescimento exponencial. Em geral, ao tomarmos emprestado um capital C, a uma taxa de juros i por período (dia/mês/semestre/ano), o montante M devido após t períodos é dado por:

$$M = C \cdot (1+i)^t.$$

Uma forma alternativa (e mais útil, em geral) de enxergarmos tal expressão é pensar no capital como sendo o valor presente que temos (seja de um investimento ou de uma dívida contraída), enquanto o montante representa o valor futuro. Dessa forma, representando por V_F o valor futuro e V_P o valor presente, teremos

$$V_F = V_P \cdot (1+i)^t,$$

que pode ser reescrito alternativamente como $V_P = \dfrac{V_F}{(1+i)^t}$.

Exemplo 03 (ENEM 2019)

Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

a) 398,02. b) 400,00. c) 401,94.

d) 404,00. e) 406,02.

Anotações / Rascunho

Mas por que eu disse que o tópico de Matemática Financeira é um dos mais negligenciados no ensino da matemática? Pois, invariavelmente, você precisará tomar decisões durante a vida que envolvem planejamento financeiro: investimentos, empréstimos bancários para pagamento de dívidas ou aquisição da casa própria, compra de produtos à vista ou parcelando, dentre outros.

No que diz respeito ao Sistema Financeiro de Habitação (SFH), existem duas formas reconhecidas de amortização de um contrato de financiamento: a **Tabela Price** (ou Sistema de Prestações Constantes), que envolve o pagamento de prestações constantes ao longo do prazo do financiamento, e o **Sistema de Amortização Constante** (SAC), que envolve o pagamento de prestações nas quais os valores amortizados são constantes, o que gera juros e prestações decrescentes ao longo do financiamento (começando, porém, com prestações mais altas).

Nos dois casos, cada prestação é o resultado da adição dos juros sobre o saldo devedor e dos valores amortizados em cada período do financiamento. A **Figura 7** mostra uma simulação de um financiamento de R$ 50.000,00 a uma taxa de juros efetiva de 10% ao ano, por um período de 12 meses, com pagamentos/prestações mensais.

	SAC - Sistema de Amortização Constante				Tabela PRICE			
Nº da Prestação	Prestação mensal			Saldo devedor	Prestação mensal			Saldo devedor
	Amort	Juros	Total		Amort	Juros	Total	
0	-	-	-	50.000	-	-	-	50.000
1º mês	4.167	399	4.565	45.833	3.987	399	4.386	46.015
1º mês	4.167	399	4.565	45.833	3.987	399	4.386	46.015
2º mês	4.167	365	4.532	41.667	4.019	367	4.386	41.996
3º mês	4.167	332	4.499	37.500	4.051	335	4.386	37.945
4º mês	4.167	299	4.466	33.333	4.083	303	4.386	33.862
5º mês	4.167	266	4.433	29.167	4.116	270	4.386	29.746
6º mês	4.167	233	4.400	25.000	4.148	238	4.386	25.597
7º mês	4.167	199	4.366	20.833	4.182	204	4.386	21.415
8º mês	4.167	166	4.333	16.667	4.215	171	4.386	17.200
9º mês	4.167	133	4.300	12.500	4.249	137	4.386	12.951
10º mês	4.167	100	4.267	8.333	4.282	104	4.386	8.668
11º mês	4.167	66	4.233	4.167	4.317	69	4.386	4.351
12º mês	4.167	34	4.201	-	4.351	35	4.386	-
Total dos Pagamentos:	R$ 52.591,74				R$ 52.629,36			

Fonte: http://www.financiamento.com.br/faq/diferenca-sistema-sac-price.php

Figura 7: Comparação entre Tabela Price e SAC

Porém, esse exemplo não ilustra tão bem uma situação real. Atualmente (julho de 2020), como forma de estimular a economia do Brasil diante da pandemia da Covid-19, a taxa Selic está no seu **menor patamar histórico**: **2,25%**. Isso significa que empréstimos podem ser contraídos com taxas de juros muito abaixo das de quatro anos atrás, quando a Selic estava em 14,25%.

Ainda assim (sem entrar em minúcias), se você precisasse hoje **financiar R$ 500.000,00** para comprar um imóvel e conseguisse uma taxa de juros efetiva de **7,0% ao ano** (a mais baixa em muitos anos) por um prazo de 360 meses (**30 anos**), pelo **SAC**, ao final do financiamento você teria pago ao banco pouco **mais de 1 milhão de reais**!!! C'est la vie...

"Começou... Lá vem o Fredão mostrando uns paranauês nada a ver da matemática só para impressionar..."

Jovem mamífero, e se eu te dissesse que os dois sistemas de amortização citados foram cobrados em anos recentes na prova do ENEM sem sequer que muitos dos candidatos soubessem? Se liguem nos dois próximos exemplos

Exemplo 04 (ENEM 2015)

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) 2.075,00.

b) 2.093,00.

c) 2.138,00.

d) 2.255,00.

e) 2.300,00.

Anotações / Rascunho

Exemplo 05 (ENEM 2017)

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00.

Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1.013^n \times 0,013}{(1,013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12.

b) 14.

c) 15.

d) 16.

e) 17.

Anotações / Rascunho

Prosseguindo com as OCEM, temos o seguinte trecho, no qual aparecem os logaritmos e funções logarítmicas:

> *Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos.*

Para começar: o que são logaritmos e para que servem?

Apesar de quase sempre causar um estranhamento inicial, o $\log$ nada mais é do que um operador matemático com características e propriedades próprias, tal como somatórios, fatoriais ou potências. Uma de suas propriedades, a de transformar produtos em somas, era extremamente útil antes do advento de calculadoras eletrônicas, pois permitia que engenheiros e astrônomos, por exemplo, fizessem multiplicações complexas de maneira mais rápida do que se fizessem à mão, utilizando réguas de cálculo.

Régua de Cálculo: é um dispositivo de cálculo inventado pelo matemático inglês William Oughtred, em 1622, que se baseia na sobreposição de escalas logarítmicas e da tábua de logaritmos criada por John Napier, em 1614.

Atualmente, várias quantidades e escalas em ciências são expressas em escalas logarítmicas: o pH em química, o decibel em acústica e a escala Richter, utilizada para medir a magnitude de tremores de terra, são exemplos que envolvem a escala logarítmica de base 10.

E o que é um logaritmo, afinal?

Pare por um momento e responda: o que significa, para você, 2^3? Quase que de imediato a resposta é 8. *Mas essa não é a questão*. O que eu quero saber é: **o que significa** 2^3 para você? Talvez aí você se dê conta: o 2^3 representa um produto do dois por ele mesmo três vezes, ou seja

$$2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ vezes}} = 8\,.$$

Mas por quê? (Eu sei que pareço estar sendo chato, mas só assim você entenderá que $\log$ não é nada demais!)

Bom, a resposta mais natural seria: "*porque eu aprendi assim!*". E, de fato, não há qualquer problema nisso, pois essa é a resposta correta!

Em algum momento da sua vida acadêmica, você foi introduzido à ideia de potências da forma a^n, que tem um componente a denominado base da potência e um componente n denominado expoente da potência (inicialmente um número natural, mas que pode ser estendido para os inteiros, racionais (radiciação) e, por fim, ao conjunto dos números reais). Ao ser introduzido a esse conceito de potências, você aprendeu que a^n correspondia ao produto do a por ele mesmo n vezes, isto é $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ vezes}}$. Daí, segue-se uma série de consequências e propriedades características de potências, como aquela que diz que *em um produto de potências de mesma base, mantém-se a base e adicionam-se os expoentes*:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Assim como nas potências, em logaritmos da forma $\log_b a$ lhe são dados dois componentes: a base b do logaritmo e o logaritmando a. Dessa forma, **devemos ler o logaritmo como**: a qual expoente devo elevar a base b para que obtenha como resultado o logaritmando a? Ou, em outras palavras: quantas vezes eu preciso multiplicar a base b por ela mesmo para que obtenha, como resultado, o logaritmando a?

Assim, na expressão $\log_2 8$ a pergunta que você deve se fazer é: a qual expoente devo elevar a base 2 para que obtenha como resultado o logaritmando 8? **Resposta**: 3.

Simples, não? De certa forma, em uma **potência** são dados uma base e um expoente e desejamos **saber o resultado**. Em **logaritmos**, são dados uma base e um resultado e desejamos **saber o expoente**. Assim, estabelece-se uma comunicação entre exponenciais (que usam propriedades de potenciação e radiciação) com logaritmos:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a.$$

Por esse motivo, dizemos que a função logaritmo ou logarítmica é a função inversa da exponencial, uma vez que ela "desfaz" a transformação causada pela exponencial, como mostra a **Figura 8**.

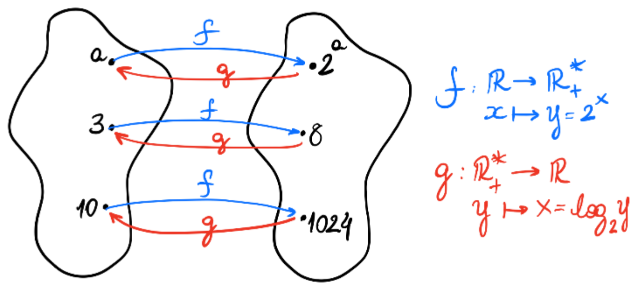


Figura 8: Função Logarítmica como inversa da Exponencial

Algumas consequências diretas da definição de log são:

1. $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$ e $\log_b b^n = n$;
2. $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$;
3. $a^{\log_a b} = b$.

Exemplo 06 (UEL 2017)

Precisamos de um nome para o novo replicador, um substantivo que comunique a ideia de unidade de transmissão cultural. "Mimeme" vem do grego "aquilo que é replicado", mas eu quero um monossílabo que se pareça com gene. Eu espero que meus amigos clássicos me perdoem por abreviar mimeme para meme. Se uma ideia se alastra, é dita que se propaga sozinha.

Adaptado de: DAWKINS, R. O gene egoísta. Trad. Geraldo H. M. Florsheim. Belo Horizonte: Itatiaia, 2001. p. 214.

Diversos segmentos têm utilizado serviços de marketing para criação e difusão de memes de seu interesse. Um partido político com $P_0 = 20$ filiados encomendou um anúncio que se tornou um meme em uma rede social, sendo que 5% dos $K = 2 \cdot 10^9$ usuários ativos visualizaram o anúncio no instante $t = 1$. Sejam $e > 1$, $r > 0$ constantes e suponha que a função $P(t)$ dada por

$$P(t) = \frac{K \cdot P_0 \cdot e^{r \cdot t}}{K + P_0(e^{r \cdot t} - 1)}$$

representa a quantidade de usuários da rede social que visualizaram o meme no instante t.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da constante r para essa rede social.

a) $\log_e \left(\frac{10^8 - 1}{19} \right)$

b) $\log_e \left(\frac{10^9 - 1}{19} \right)$

c) $\log_e \left(\frac{10^9 - 1}{20} \right)$

d) $\sqrt{\frac{10^8 - 1}{19}}$

e) $\sqrt{\frac{10^9 - 1}{20}}$

Apesar de não ser recomendado um estudo exaustivo de logaritmos, deixarei aqui todas as propriedades decorrentes da definição de logaritmos. Das quatro propriedades citadas abaixo, destacam-se as duas primeiras, que transformam produtos/divisões em adições/subtrações:

1. $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$;
2. $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$;
3. $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$;
4. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a$.

Além das quatro propriedades acima, um mecanismo extremamente útil em problemas envolvendo logaritmos é o que denominamos mudança de base, enunciada abaixo:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

A partir da mudança de base, seguem duas consequências que também podem ser úteis na resolução de alguns problemas envolvendo logaritmos:

1. $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$;
2. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

Exemplo 07 (Vestibular UnB 2015)

Estimar a quantidade de indivíduos da população mundial futura é um desafio complexo. O modelo logístico baseia-se na hipótese de que, com o passar dos anos, a população mundial deve estabilizar-se em certo valor $A \neq 0$, denominado população limite. Segundo esse modelo, a população, *P*(*t*), de seres humanos no planeta, em bilhões de habitantes, a partir de 1987, obedece à equação $P(t) = \frac{5A}{(A-5)e^{-rt} + 5}$, em que *t* é a quantidade de anos a partir de 1987, que é o instante inicial e corresponde a *t* = 0. Além disso, 5 bilhões é a população no ano de 1987, *A* é a população limite e *r* é uma constante positiva.

Com base nessas informações, julgue os próximos itens.

(1) Se $A > 5$, então o termo exponencial na expressão de $P(t)$ indica que a população varia segundo uma progressão geométrica.

(2) Se a população mundial era de 6 bilhões em 1999 e de 7 bilhões em 2011, então, pelo modelo logístico, a população deverá estabilizar-se em 12 bilhões de habitantes.

(3) Considerando-se que 0,7 é o valor aproximado para $\ln 2$, que $A = 10$ bilhões e que $P(2022) = 8$ bilhões, então $r > 0,05$.

(4) Se $0 < A < 5$, então a população $P(t)$ é crescente.

Anotações / Rascunho

- 16.4 Progressões **Aritméticas** e **Geométricas**

Neste último tópico do bloco de Funções, veremos um conteúdo que muitas vezes é estudado de maneira dissociada de funções: as progressões aritméticas e geométricas.

> *As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo...").*

Progressões aritméticas são definidas como sequências numéricas nas quais cada termo corresponde ao seu antecessor adicionado de uma constante, denominada razão. A sequência numérica 1, 12, 23, 34, 45 é um exemplo de progressão aritmética de razão igual a 11, uma vez que cada novo termo da sequência corresponde ao termo imediatamente anterior mais 11 unidades.

Alternativamente, podemos definir uma progressão aritmética (PA) como sendo uma sequência (a_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, tal que a diferença entre dois termos consecutivos é constante e igual à razão r da PA, ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r\ ,$$

onde a_1 corresponde ao 1^o termo da sequência, a_2 ao 2^o termo e assim por diante. Assim, podemos estabelecer uma expressão para o termo geral da PA.

Termo Geral da PA: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Porém, não é necessário que se "prenda" o n-ésimo termo da PA ao primeiro termo e podemos também escrever a fórmula do termo geral de maneira mais ampla como $a_n = a_k + (n-k)r$. Por fim, alguns autores preferem partir do termo a_0. Nesse caso, a_0 representa o 1^o termo, a_1 o 2^o termo, e assim sucessivamente. Nesse caso, teríamos como fórmula para o termo geral a expressão $a_n = a_0 + nr$.

Você consegue notar a semelhança da última expressão com funções afins? Uma vez que a_0 e r são constantes, o n-ésimo termo é uma função afim de n, com domínio no conjunto dos números naturais: $\underbrace{a_n}_{f(n)} = \underbrace{a_0}_{b} + \overbrace{nr}^{an}$. Quando $r > 0$, temos uma PA crescente e, quando $r < 0$, uma PA decrescente, tal como nas funções afins.

Ainda no que tange às PAs, uma propriedade interessante é a de que qualquer termo de uma PA corresponde à média aritmética entre dois termos equidistantes a ele, isto é:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}\ .$$

No exemplo inicial – da sequência 1, 12, 23, 34, 45 –, temos $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = 23$, $a_4 = 34$ e $a_5 = 45$. Note que

$$a_4 = \frac{a_{4-1} + a_{4+1}}{2} = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{23 + 45}{2} = 34\ ,$$

assim como

$$a_3 = \frac{a_{3-2} + a_{3+2}}{2} = \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{1 + 45}{2} = 23\ .$$

Por fim, outra fórmula importante no estudo das progressões aritméticas é a da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r e 1^o termo a_1:

Soma dos n primeiros termos da PA: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

Exemplo 08 (ENEM 2018)

A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

a) R$ 512 000,00

b) R$ 520 000,00

c) R$ 528 000,00

d) R$ 552 000,00

e) R$ 584 000,00

Já as progressões geométricas são definidas como sequências numéricas nas quais cada termo corresponde ao seu antecessor multiplicada por uma constante, também denominada razão. A sequência numérica 2, 6, 18, 54, 162 é um exemplo de progressão geométrica de razão igual a 3, uma vez que cada novo termo da sequência corresponde ao termo imediatamente anterior multiplicado por 3 unidades.

Alternativamente, podemos definir uma progressão geométrica (PG) como sendo uma sequência (a_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, tal que a razão entre dois termos consecutivos é constante e igual à razão q da PG, com $a_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. ou seja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q\,,$$

onde a_1 corresponde ao 1^o termo da sequência, a_2 ao 2^o termo e assim por diante. Assim, podemos estabelecer uma expressão para o termo geral da PG.

Termo Geral da PG: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

Porém, não é necessário que se "prenda" o n-ésimo termo da PG ao primeiro termo e podemos também escrever a fórmula do termo geral de maneira mais ampla como $a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$. Por fim, alguns autores preferem partir do termo a_0. Nesse caso, a_0 representa o 1^o termo, a_1 o 2^o termo, e assim sucessivamente. Nesse caso, teríamos como fórmula para o termo geral a expressão $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Você consegue notar a semelhança da última expressão com funções exponenciais? Uma vez que a_0 e q são constantes, o n-ésimo termo é uma função exponencial de n, com domínio no conjunto dos números naturais: $\underbrace{a_n}_{f(n)} = \underbrace{a_0}_{b} \cdot \underbrace{q^n}_{a^n}$.

Temos uma PG crescente quando $q > 1$, desde que $a_1 > 0$ ou quando $0 < q < 1$, desde que $a_1 < 0$. Temos uma PG decrescente quando $0 < q < 1$, desde que $a_1 > 0$ ou quando $q > 1$, desde que $a_1 < 0$. Há ainda as PGs oscilantes, que ocorrem quando $q < 0$, o que faz com que haja uma alternância nos sinais dos termos da sequência (positivo e negativo).

Ainda no que tange às PGs, uma propriedade interessante é a de que qualquer termo de uma PG corresponde à média geométrica entre dois termos equidistantes a ele, isto é:

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}\,.$$

No exemplo inicial – da sequência 2, 6, 18, 54, 162 –, temos $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$, $a_4 = 54$ e $a_5 = 162$. Note que

$$a_4 = \sqrt{a_{4-1} \cdot a_{4+1}} = \sqrt{a_3 \cdot a_5} = \sqrt{18 \cdot 162} = 54\,,$$

assim como

$$a_3 = \sqrt{a_{3-2} \cdot a_{3+2}} = \sqrt{a_1 \cdot a_5} = \sqrt{2 \cdot 162} = 18\,.$$

Por fim, outras duas fórmulas importantes no estudo das progressões geométricas: a da soma dos n primeiros termos de uma PG de razão q e 1^o termo a_1 e a da soma dos infinitos termos dessa PG, quando $|q| < 1$:

Soma dos n primeiros termos da PG: $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Soma da PG infinita: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$.

Curiosidade: seja dada uma PA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de razão r, ao gerarmos uma nova sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $b_n = k^{a_n}$, a nova sequência b_n será uma PG de razão k^r.

Analogamente, seja dada uma PG $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de razão q, ao gerarmos uma nova sequência $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $d_n = \log_k c_n$, a nova sequência d_n será uma PG de razão $\log_k q$.

Anotações / Rascunho

Exemplo 09 (Vestibular UnB 2016)

Um parque temático expõe dois aquários, com 50 espécies de peixes diferentes, conforme descrito a seguir.

- No primeiro (de água doce), há a_i exemplares da i-ésima espécie, com i = 1, 2, ..., 10; a sequência (a_1, ..., a_{10}) está em progressão geométrica; $a_1 = 2$ e $a_3 = 18$.

- No segundo aquário (de água salgada), há b_j exemplares da j-ésima espécie, com j = 1, 2, ..., 40; a sequência (b_1, ..., b_{40}) está em progressão aritmética; $b_4 = 70$ e $b_{30} = 668$.

Tendo como referência essas informações, julgue os itens de 1 a 4 e assinale a opção correta nos itens 5 e 6, que são do tipo C.

(1) A trigésima oitava espécie de peixes do aquário de água salgada possui mais de 850 exemplares.

(2) Para qualquer espécie de peixes, o número de exemplares é sempre par.

(3) Existe exatamente um par de espécies de peixes que possuem o mesmo número de exemplares.

(4) A sétima espécie de peixes do aquário de água doce possui mais de 1.500 exemplares.

(5) Considere que as expressões dos termos gerais das progressões a_i e b_j sejam definidas para todo i e j no conjunto dos números reais. Nessa situação, as funções que associam i e j aos termos gerais são, respectivamente,

a) exponencial e polinomial.

b) logarítmica e exponencial.

c) exponencial e logarítmica.

d) polinomial e logarítmica.

(6) A quantidade total de exemplares das 50 espécies de peixes é

a) inferior a 40 mil.

b) superior a 40 mil e inferior a 70 mil.

c) superior a 70 mil e inferior a 100 mil.

d) superior a 100 mil.

Anotações / Rascunho

CONTATO

contato@mmatematica.com.br

@mente_matematica

Mente Matemática

Mente Matemática