


**HELOU
GUALTER
NEWTON**

**MANUAL DO
PROFESSOR**

FÍSICA 1

MECÂNICA

COMPONENTE CURRICULAR
FÍSICA
1º ANO
ENSINO MÉDIO

 **Editora
Saraiva**

Ricardo Helou Doca

- Engenheiro Eletricista formado pela Faculdade de Engenharia Industrial (FEI-SP)
- Professor de Física na rede particular de ensino

Gualter José Biscuola

- Engenheiro Eletricista formado pela Universidade de São Paulo
- Professor de Física na rede particular de ensino

Newton Villas Bôas

- Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo
- Professor de Física na rede particular de ensino

FÍSICA

MECÂNICA



**MANUAL DO
PROFESSOR**

COMPONENTE CURRICULAR
FÍSICA
1º ANO
ENSINO MÉDIO

3ª edição | 2016 | São Paulo

 **Editora
Saraiva**

Física 1
 © Ricardo Helou Doca, 2016
 © Gualter José Biscuola, 2016
 © Newton Villas Bôas, 2016

Direitos desta edição:
 Saraiva Educação Ltda., São Paulo, 2016
Todos os direitos reservados

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
 (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Doca, Ricardo Helou
 Física, volume 1 : mecânica : ensino médio /
 Ricardo Helou Doca, Gualter José Biscuola,
 Newton Villas Bôas. -- 3. ed. -- São Paulo :
 Saraiva, 2016.

Obra em 3 v.
 Suplementado pelo manual do professor.
 Bibliografia
 ISBN 978-85-472-0559-1 (aluno)
 ISBN 978-85-472-0560-7 (professor)

I. Física (Ensino médio) 2. Física (Ensino médio) - Problemas, exercícios etc. I. Biscuola, Gualter José. II. Villas Bôas, Newton. III. Título.

16-03565

CDD-530.07

Índices para catálogo sistemático:

1. Física : Ensino médio 530.07

Diretora editorial	Lidiane Vivaldini Olo
Gerente editorial	Luiz Tonolli
Editor responsável	Viviane Carpegiani
Editor	Luís Felipe Porto Mendes
Assistentes editoriais	Aline dos Reis Neves, Erich Gonçalves da Silva, Rani de Oliveira e Souza
Gerente de produção editorial	Ricardo de Gan Braga
Gerente de revisão	Hélia de Jesus Gonsaga
Coordenador de revisão	Camila Christi Gazzani
Revisores	Cesar G. Sacramento, Lillian Miyoko Kumai, Raquel Alves Taveira, Ricardo Miyake
Produtor editorial	Roseli Said
Supervisor de iconografia	Silvio Klugin
Coordenador de iconografia	Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica	Fernando Cambetas
Licenciamento de textos	Marina Murphy Diniz
Coordenador de artes	Narjara Lara
Design e capa	Sergio Cândido com imagens de Shutterstock
Edição de arte	Alexandre Miasato Uehara
Diagramação	Setup
Assistente	Camilla Felix Cianelli
Ilustrações	CJT/Zapt, Francisco Vilachã, Luciano da S. Teixeira, Luis Augusto Ribeiro, Luis Fernando R. Tucillo, João Anselmo, Mozart Couto, Rodval Matias, Setup, Vicente Mendonça
Tratamento de imagens	Emerson de Lima
Protótipos	Magali Prado
077708.003.001	Impressão e acabamento

O material de publicidade e propaganda reproduzido nesta obra está sendo utilizado apenas para fins didáticos, não representando qualquer tipo de recomendação de produtos ou empresas por parte do(s) autor(es) e da editora.

Nos livros desta coleção são sugeridos vários experimentos. Foram selecionados experimentos seguros, que não oferecem riscos ao estudante. Ainda assim, recomendamos que professores, pais ou responsáveis acompanhem sua realização atentamente.



**Editora
Saraiva**

SAC

0800-0117875

De 2ª a 6ª, das 8h às 18h

www.editorasaraiva.com.br/contato

Avenida das Nações Unidas, 7221 - 1º andar - Setor C - Pinheiros - CEP 05425-902

Ao estudante

Elaboramos este trabalho com a certeza de proporcionar a você um caminho metódico e bem planejado para um início consistente no aprendizado de Física. Nem por um momento perdemos de vista a necessidade de despertar seu real interesse pela disciplina. Para alcançar esse objetivo, criamos uma obra rica em situações contextuais, baseadas em ocorrências do dia a dia. Muitos exemplos, ilustrações e outros recursos foram inseridos com o intuito de instigar sua curiosidade e seu desejo de saber mais e se aprofundar nos temas abordados.

A obra foi dividida em três volumes, um para cada ano do Ensino Médio. No primeiro volume, apresentamos a Mecânica, dividida em Cinemática, Dinâmica e Estática (dos sólidos e dos fluidos). No segundo, tratamos da Termologia, Ondulatória e Óptica Geométrica. E, no terceiro, abordamos a Eletricidade – composta de Eletrostática, Eletrodinâmica e Eletromagnetismo – e a Física Moderna.

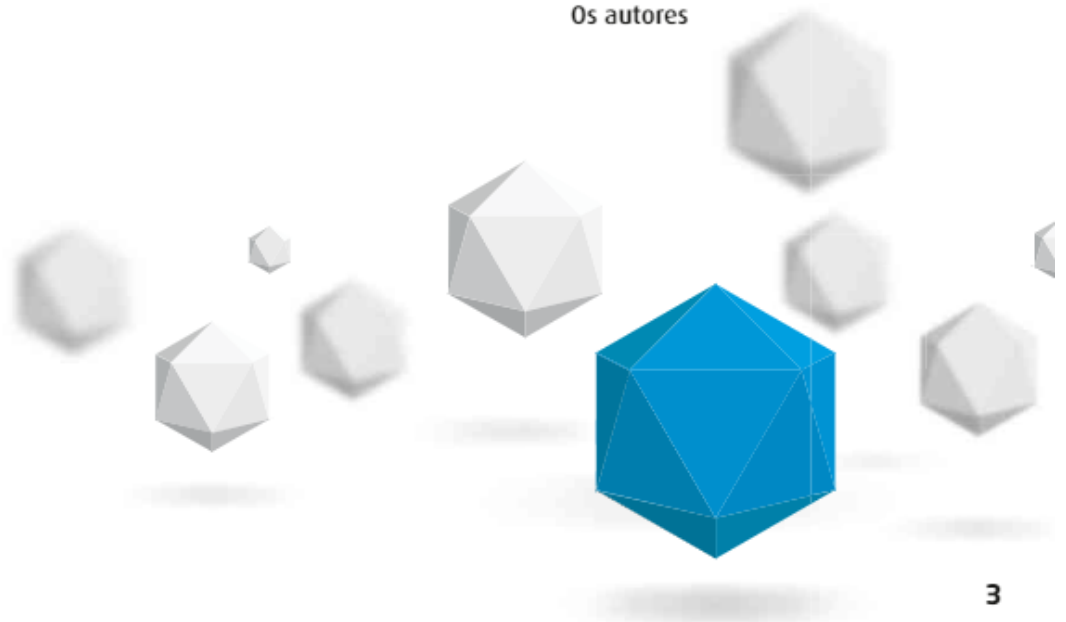
Os grandes ramos da disciplina, como a Dinâmica, a Cinemática e a Estática no volume 1, constituem unidades de cada livro. Estas, por sua vez, são divididas em capítulos que trazem, além do texto teórico, propostas de experimentos, textos complementares e leituras que muito irão colaborar para a boa compreensão do conteúdo.

Em todos os capítulos há duas seções de atividades: as **Questões comentadas**, que, trazendo as resoluções, constroem a linguagem específica da disciplina e propõem uma primeira operacionalização com os conceitos apresentados; e as **Questões propostas**, destinadas às atividades de sala de aula e de casa.

E, ao término de cada volume, são dadas as respostas de todas as atividades apresentadas, exceto as do boxe **Descubra mais** e as do **Compreensão, pesquisa e debate** – que faz parte da seção **Intersaberes** –, pois tais questionamentos visam promover a pesquisa e propor desafios adicionais e deverão ser objeto de debates com colegas e professores.

Temos certeza de que seu percurso pelos capítulos e páginas deste trabalho contribuirá para que seu conhecimento, sua visão de mundo e seu senso crítico se ampliem em grande medida. Desejamos que você utilize esta obra com a mesma vibração e entusiasmo com que a escrevemos.

Os autores





Abertura de unidade
 Na **Abertura de unidade** é feita uma breve apresentação da área da Física que será estudada e a maneira como a unidade foi estruturada, indicando-se os capítulos que a compõem.



Abertura de capítulo

Na **Abertura de capítulo**, você poderá encontrar uma introdução ao tema e o início do estudo teórico. Na obra, a teoria é plena em abordagens históricas, seja no texto principal, seja em boxes e outros recursos, com o intuito de contribuir para a percepção da evolução das ideias, desde as eras antiga e clássica até os dias atuais.



Já pensou nisto?

Neste boxe, você verá imagens fotográficas acompanhadas de títulos instigadores. Esses títulos são propostos quase sempre em forma de perguntas ou simples provocações, cujo objetivo é motivá-lo a fazer a leitura do conteúdo, estabelecendo conexões com situações do cotidiano.



Ampliando o olhar

Nesta seção, você encontrará textos complementares cuja intenção é propor outras referências fenomenológicas, históricas e tecnológicas, além de curiosidades e justificativas que poderão contribuir para a construção do conhecimento da Física e sua relação com outras áreas do conhecimento.



Em busca de explicações

Nos textos propostos nesta seção, você verá questionamentos e problematizações interessantes acompanhados de uma explicação da Física, ou de verificações matemáticas.

FAÇA VOCÊ MESMO *Ampliando suas habilidades de Física*

É possível fazer uma progressão linear para a velocidade média de um objeto em movimento retilíneo uniforme? Como você acha que seria? Explique sua resposta.

Material necessário

- 1. Uma fita elástica ou um pedaço de barbante com comprimento suficiente para fazer um círculo com o diâmetro de aproximadamente 1 m.
- 2. Um objeto pequeno e leve, como uma bolinha de madeira ou uma bolinha de metal.
- 3. Um cronômetro ou relógio digital.
- 4. Um espaço plano e lizo, como um piso de madeira ou um piso de concreto.

Procedimento

1. Estenda a fita elástica ou o barbante em uma linha reta no chão. Marque o início e o fim da linha com uma seta.
2. Coloque o objeto no início da linha e empurre-o para o fim da linha com uma velocidade constante. Marque o tempo que o objeto leva para percorrer a distância.
3. Repita o experimento várias vezes, variando a velocidade inicial do objeto. Anote os tempos.
4. Calcule a velocidade média para cada uma das tentativas. Compare os resultados.

Analisando o experimento

1. Qual a velocidade média do objeto em movimento retilíneo uniforme? Como você acha que seria? Explique sua resposta.

2. Como você acha que a velocidade média do objeto em movimento retilíneo uniforme varia com a velocidade inicial do objeto? Explique sua resposta.

Faça você mesmo
A seção **Faça você mesmo** traz atividades experimentais ou de verificação simples que poderão auxiliá-lo na compreensão de fenômenos e conceitos importantes da Física.

QUESTÕES COMENTADAS

1. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 100 m em 20 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

2. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 200 m em 40 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

3. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 300 m em 60 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

4. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 400 m em 80 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

5. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 500 m em 100 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

6. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 600 m em 120 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

7. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 700 m em 140 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

8. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 800 m em 160 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

9. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 900 m em 180 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

10. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1000 m em 200 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

11. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1100 m em 220 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

12. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1200 m em 240 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

13. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1300 m em 260 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

14. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1400 m em 280 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

15. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1500 m em 300 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

16. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1600 m em 320 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

17. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1700 m em 340 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

18. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1800 m em 360 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

19. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1900 m em 380 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

20. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 2000 m em 400 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

Questões comentadas
Em **Questões comentadas**, você terá um conjunto de atividades resolvidas em detalhes, que poderão auxiliá-lo como ponto de partida para a resolução de atividades semelhantes.

QUESTÕES PROPOSTAS

1. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 100 m em 20 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

2. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 200 m em 40 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

3. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 300 m em 60 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

4. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 400 m em 80 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

5. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 500 m em 100 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

6. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 600 m em 120 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

7. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 700 m em 140 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

8. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 800 m em 160 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

9. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 900 m em 180 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

10. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1000 m em 200 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

11. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1100 m em 220 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

12. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1200 m em 240 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

13. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1300 m em 260 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

14. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1400 m em 280 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

15. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1500 m em 300 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

16. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1600 m em 320 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

17. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1700 m em 340 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

18. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1800 m em 360 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

19. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1900 m em 380 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

20. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 2000 m em 400 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

Questões propostas
Nesta seção, você encontrará atividades formuladas para resolução em sala de aula e em casa. Essas atividades estão dispostas conforme a sequência da teoria e em ordem crescente de dificuldade. As **Questões propostas** são, em sua maioria, ricas em temas transversais que possibilitarão discussões relacionadas a outras áreas do conhecimento, meio ambiente, cidadania etc.

Descubra mais
No boxe **Descubra mais**, você encontra questões que o convidam a pesquisar e a conhecer um pouco mais sobre os assuntos estudados. Com isso, você poderá ampliar a abordagem do texto e descobrir temas correlatos enriquecedores.

Intersaberes
Na seção **Intersaberes**, você terá acesso a textos que poderão ser explorados de maneira integrada com outras disciplinas. É uma oportunidade de complementar e aprofundar o conteúdo do capítulo, estabelecer conexões entre diferentes áreas do conhecimento, realizar pesquisas e promover um debate de opiniões envolvendo os colegas e o professor.

INTERSABERES

Textos que se conectam

1. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 100 m em 20 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

2. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 200 m em 40 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

3. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 300 m em 60 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

4. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 400 m em 80 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

5. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 500 m em 100 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

6. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 600 m em 120 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

7. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 700 m em 140 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

8. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 800 m em 160 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

9. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 900 m em 180 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

10. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1000 m em 200 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

11. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1100 m em 220 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

12. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1200 m em 240 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

13. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1300 m em 260 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

14. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1400 m em 280 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

15. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1500 m em 300 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

16. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1600 m em 320 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

17. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1700 m em 340 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

18. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1800 m em 360 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

19. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 1900 m em 380 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?

20. Um objeto em movimento retilíneo uniforme percorre a distância de 2000 m em 400 s. Qual a velocidade média do objeto em m/s?



SUMÁRIO

INTRODUÇÃO À FÍSICA

A FÍSICA 10

- 1** A Física na natureza e na tecnologia .. 10
Ampliando o olhar
 A Física no desenvolvimento científico e tecnológico 12
- 2** Potências de dez e notação científica 13

- 3** Contagem e medição de uma grandeza 13
- 4** Padrões de unidades de medida 14
- 5** Informações adicionais 15
- 6** Ordem de grandeza 17

A MECÂNICA, UMA DAS PARTES DA FÍSICA 18

- 1** Mecânica 18
- 2** As partes da Mecânica 18
Ampliando o olhar
 A Cinemática e a Dinâmica 19
- 3** O modelo de partícula ou ponto material 20
- 4** Grandeza vetorial e grandeza escalar 20



CINEMÁTICA

CAPÍTULO 1

INICIAÇÃO À CINEMÁTICA ESCALAR E MOVIMENTO UNIFORME 22

- 1** Introdução 22
- 2** Referencial 22
- 3** Instante e intervalo de tempo 23
Em busca de explicações
 Método do carbono 14 para a determinação de idades (datação) 23
- 4** Movimento e repouso 25
- 5** Trajetória 26
- 6** Rapidez média 28
- 7** Espaço 28
- 8** Variação de espaço e distância percorrida 29

- 9** Velocidade escalar média 30
- 10** Velocidade escalar instantânea 31
- 11** Movimento uniforme 34

CAPÍTULO 2

MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO 40

- 1** Movimento acelerado, movimento retardado e movimento uniforme 40
- 2** Aceleração escalar 41
- 3** Movimento uniformemente variado 42

CAPÍTULO 3

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME 50

- 1** Introdução 50
- 2** Enfoque angular 51
- 3** Velocidade escalar angular 51

- 4** Período e frequência 53
Faça você mesmo
 Estudando engrenagens acopladas por uma corrente 56

CAPÍTULO 4

VETORES E CINEMÁTICA VETORIAL 59

- 1** Grandezas escalares e vetoriais 59
- 2** Vetores e operações com vetores 60
- 3** Deslocamento vetorial 67
- 4** Velocidade vetorial média 68
- 5** Velocidade vetorial (instantânea) 68
- 6** Aceleração vetorial média 69
- 7** Aceleração vetorial (instantânea) 69
- 8** Velocidade relativa, de arrastamento e resultante 74
- 9** Princípio de Galileu 74
Em busca de explicações
 Aeronaves em voo sob a ação de ventos 76
- Intersaberes**
 Furacão: ira da natureza 80



DINÂMICA

CAPÍTULO 5

PRINCÍPIOS DA DINÂMICA 82

- 1** Introdução 82
- 2** O efeito dinâmico de uma força 83
- 3** Conceito de força resultante 83
- 4** Equilíbrio de uma partícula 84
- 5** Conceito de inércia 85
- 6** O Princípio da Inércia (1ª Lei de Newton) 86
Faça você mesmo
Observando a inércia de repouso de uma moeda 87
Ampliando o olhar
Newton versus Einstein 88
- 7** O Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton) 89
Ampliando o olhar
O protótipo do quilograma 90
- 8** Peso de um corpo 92
Ampliando o olhar
Elevadores 94
Faça você mesmo
Determinando experimentalmente a intensidade de \vec{g} 94
- 9** Deformações em sistemas elásticos .. 96
Faça você mesmo
Obtendo a constante elástica de uma mola 97
- 10** O Princípio da Ação e Reação (3ª Lei de Newton) 99
Faça você mesmo
Máquina de Atwood 106

Intersaberes

A força de resistência do ar e o estudo da queda vertical de um corpo no ar 111

CAPÍTULO 6

ATRITO ENTRE SÓLIDOS 114

- 1** Introdução 114

- 2** Atrito estático 115
Faça você mesmo
Determinando experimentalmente o coeficiente de atrito estático 117
- 3** Atrito cinético 119
- 4** Lei do atrito 122
Ampliando o olhar
Leonardo da Vinci 122

CAPÍTULO 7

RESULTANTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA 128

- 1** Componentes da força resultante 128
 - 2** A componente tangencial (\vec{F}_t) 129
 - 3** A componente centrípeta (\vec{F}_{cp}) 130
Em busca de explicações
Velocidade e estabilidade no automobilismo 132
Faça você mesmo
Looping com lata cheia de água 133
Em busca de explicações
Avião em curva circular contida em plano horizontal 134
 - 4** As componentes tangencial e centrípeta nos principais movimentos 135
Faça você mesmo
Gira-gira 136
 - 5** Força centrífuga 137
- Intersaberes**
Como é viver em ambientes de microgravidade? 143

CAPÍTULO 8

GRAVITAÇÃO 145

- 1** Introdução 145
Ampliando o olhar
Plutão-Caronte 147
- 2** As leis de Kepler 148
- 3** Universalidade das leis de Kepler 150
Ampliando o olhar
Universo particular 150
- 4** Lei de Newton da Atração das Massas 152
- 5** Satélites 153

- Ampliando o olhar*
A Estação Espacial Internacional (EEI) 155
- 6** Estudo do campo gravitacional de um astro 158
Em busca de explicações
Por que estrelas e planetas são praticamente esféricos? 160
Ampliando o olhar
Buracos negros 160

Intersaberes

Teorias que se sucedem 164

CAPÍTULO 9

MOVIMENTOS EM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME (BALÍSTICA) 166

- 1** Introdução 166
- 2** Aceleração de um corpo em movimento livre 167
- 3** Campo gravitacional uniforme 167
- 4** Movimento vertical em campo gravitacional uniforme 167
- 5** Propriedades do movimento vertical 168
Ampliando o olhar
Uma experiência imaginária de Galileu 170
- 6** Movimento parabólico nas proximidades da Terra 173
Faça você mesmo
Estudando o alcance horizontal em um movimento parabólico ... 175

CAPÍTULO 10

TRABALHO E POTÊNCIA 180

- 1** Energia e trabalho 180
Ampliando o olhar
O Sol – nossa grande “fornalha” ... 181
- 2** Trabalho de uma força constante ... 183
- 3** Sinais do trabalho 183
- 4** Casos particulares importantes 183
- 5** Cálculo gráfico do trabalho 185
- 6** Trabalho da força peso 185
- 7** Trabalho da força elástica 186

8	O Teorema da Energia Cinética.....	187
9	Trabalho no erguimento de um corpo	188
10	Potência	192
11	Rendimento.....	193
	<i>Ampliando o olhar</i>	
	Árvores laboriosas: trabalho no erguimento de água e os rios voadores da Amazônia	195
Intersaberes		
	Potência em cachoeiras.....	198

CAPÍTULO 11**ENERGIA MECÂNICA E SUA CONSERVAÇÃO** 201

1	Princípio da conservação – Intercâmbios energéticos	201
	<i>Ampliando o olhar</i>	
	Um luxo de lixo!.....	203

2	Unidades de energia	204
3	Energia cinética	204
4	Energia potencial	204
	<i>Ampliando o olhar</i>	
	Skate radical: o Big Air	206
5	Cálculo da energia mecânica.....	209
6	Sistema mecânico conservativo	209
7	Princípio da Conservação da Energia Mecânica.....	210
	<i>Em busca de explicações</i>	
	Emoção no looping vertical	211

Intersaberes

	Salvo pelo neutrino.....	217
--	--------------------------	-----

CAPÍTULO 12**QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUA CONSERVAÇÃO** 218

1	Impulso de uma força constante	218
2	Quantidade de movimento	219
3	Teorema do impulso.....	220
	<i>Ampliando o olhar</i>	
	Air bags: frenagens menos traumáticas.....	221
	<i>Em busca de explicações</i>	
	Mochila voadora.....	224
4	Sistema mecânico isolado.....	226
	<i>Faça você mesmo</i>	
	Canhão de sal de frutas.....	226
5	Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento	227
	<i>Faça você mesmo</i>	
	Propulsão de dispositivos.....	229
6	Estudo das colisões mecânicas.....	232
	<i>Em busca de explicações</i>	
	O balão teimoso.....	235

**ESTÁTICA****CAPÍTULO 13****ESTÁTICA DOS SÓLIDOS** 241

1	Introdução.....	241
2	Estática do ponto material e estática do corpo extenso	242
3	Equilíbrio do ponto material.....	242
4	Equilíbrio do corpo extenso.....	245
	<i>Faça você mesmo</i>	
	Investigando uma nova grandeza	245
5	Momento escalar de uma força em relação a um eixo.....	247
	<i>Em busca de explicações</i>	
	O braço do momento	248

6	Condições de equilíbrio do corpo extenso	249
7	Alavancas.....	249
	<i>Ampliando o olhar</i>	
	Algumas alavancas nos seres vivos.....	251
8	Centro de gravidade.....	252
	<i>Faça você mesmo</i>	
	Estudando o centro de gravidade de um sistema.....	253
9	Equilíbrio de corpos apoiados.....	255

CAPÍTULO 14**ESTÁTICA DOS FLUIDOS** 260

1	Introdução.....	260
2	Massa específica ou densidade absoluta (μ)	260
3	Densidade de um corpo (d)	261
	<i>Ampliando o olhar</i>	
	O ciclo das águas.....	262
4	O conceito de pressão.....	264

5	Pressão exercida por uma coluna líquida	265
6	O Teorema de Stevin	265
7	A pressão atmosférica e o experimento de Torricelli.....	267
	<i>Em busca de explicações</i>	
	A sucção impossível.....	268
	<i>Faça você mesmo</i>	
	A vela que ergue água	269
8	O Teorema de Pascal	272
9	Vasos comunicantes	273
10	Prensa hidráulica	275
11	O Teorema de Arquimedes.....	275
	<i>Faça você mesmo</i>	
	Verificando o Princípio de Arquimedes	278

Intersaberes

	A atmosfera terrestre.....	283
--	----------------------------	-----

RESPOSTAS DAS QUESTÕES PROPOSTAS 285**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** 288**MANUAL DO PROFESSOR – Orientações didáticas** 289

INTRODUÇÃO À FÍSICA



Thomson/Agência Imagens

Fotografia do lançamento do ônibus espacial Endeavour. Maio de 2011.

NESTA
UNIDADE



A FÍSICA



A MECÂNICA,
UMA DAS
PARTES DA FÍSICA



A FÍSICA

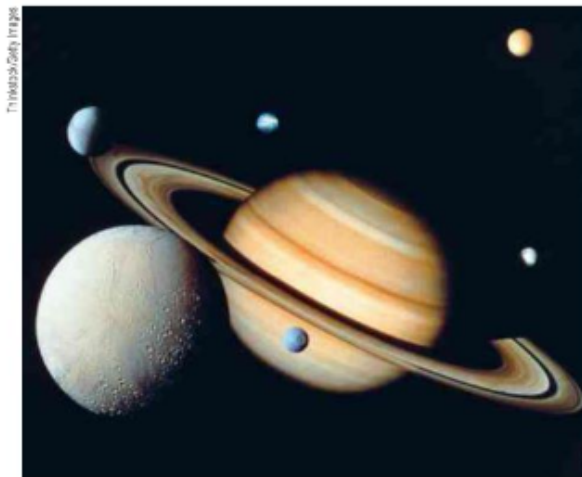
1. A FÍSICA NA NATUREZA E NA TECNOLOGIA

A Física, como o próprio nome oriundo do grego (*physis* = natureza) já indica, é uma das ciências que estudam a natureza. Tudo o que acontece na natureza é denominado **fenômeno natural**, mesmo que nada tenha de extraordinário. O simples fato de uma camisa molhada secar no varal é um fenômeno natural, assim como a queda de uma laranja que se desprende de seu galho.

O estudo da Física Clássica é dividido em cinco grandes partes: Mecânica, Termologia, Ondulatória, Óptica e Eletricidade. Nesta coleção, no Volume 3, você encontra alguns capítulos de Física Moderna.

Veja alguns exemplos de fenômenos naturais estudados pela Física, além de algumas aplicações tecnológicas:

- O movimento orbital de satélites, planetas e outros corpos celestes é estudado em **Mecânica**.



Representação artística de Saturno e algumas de suas luas (com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia).

- A solidificação da água (formação do gelo) e a obtenção de baixas temperaturas (em uma geladeira, por exemplo) são estudadas em **Termologia**.



Alimentos refrigerados em uma geladeira.

- As micro-ondas usadas em um forno (ou em transmissões via satélite) e até a coloração das bolhas de água e sabão são estudadas em **Ondulatória**.



Bolhas coloridas de água e sabão.

- A **Óptica** é a parte da Física que, entre outras aplicações, explica a formação do arco-íris e ainda nos dá o conhecimento necessário para que possamos desenvolver aparelhos como o microscópio óptico.



Cientista utilizando um microscópio.

- A causa de descargas elétricas na atmosfera (raios) é estudada em **Eletricidade**. Em cartões magnéticos, bilhetes de metrô e fitas de áudio e vídeo, informações são gravadas e reproduzidas em razão de conhecimentos de **Eletricidade** e **Magnetismo**.

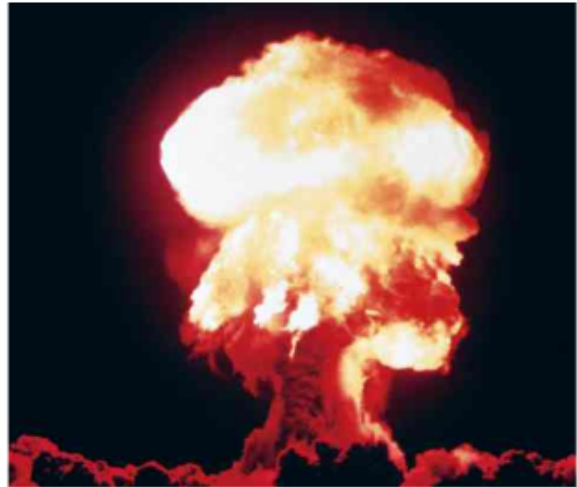


Relâmpagos na cidade de Debrecen, Hungria.



Fita de vídeo e fita cassete, que já foram muito utilizadas, cartão magnético e bilhete de metrô.

- A fusão nuclear, presente tanto na liberação de energia pelo Sol como na explosão de uma bomba de hidrogênio, é um processo estudado em **Física Moderna**.



Teste de explosão nuclear, Estados Unidos, 1957.

Também é a Física que nos permite entender a flutuação de um navio, a coloração azul do céu, o sentido das brisas litorâneas, as vantagens da panela de pressão e da garrafa térmica, os motores a explosão, as miragens, o cintilar das estrelas, a bússola, o funcionamento de motores elétricos, alto-falantes, microfones, a geração de energia elétrica nas usinas e tantas outras coisas.

O progresso das diversas ciências fez com que elas passassem a interagir cada vez mais umas com as outras. Por isso, é preciso saber que o estudo da Física é muito importante, não apenas para quem vai seguir alguma carreira na área das chamadas Ciências Exatas, como a Engenharia, a Geologia, a Química, entre outras, mas também é fundamental na Biologia e, conseqüentemente, na Medicina. Basta lembrar, por exemplo, da transmissão dos impulsos nervosos (sinais elétricos) através dos neurônios, da ressonância magnética, da importância e dos perigos dos raios X, da ultrassonografia, da endoscopia, das cirurgias a *laser* e da tomografia por emissão de pósitron (PET, do inglês *positron emission tomography*).

A Física também é muito importante na Odontologia. Sabe-se, por exemplo, que os materiais usados na restauração dos dentes devem ter coeficientes de dilatação iguais ou quase iguais ao do próprio dente, ou seja, devem dilatar-se como o material dentário, evitando assim a queda da obturação ou danos causados ao material do próprio dente. Além disso, um profissional dessa área precisa saber dos cuidados que se deve ter ao usar raios X.

Na Música, a Física também está presente. Afinar um violão, por exemplo, significa fazer com que suas cordas vibrem em frequências bem definidas, ou seja, executem determinado número de vibrações por segundo.

Até no Direito a Física tem importância. A análise da trajetória de uma bala de revólver, que pode levar à solução de um crime, requer conhecimentos físicos.

Talvez você já tenha encontrado alguém que pen-

se que as estrelas são pontos brilhantes grudados em uma abóbada chamada céu, ou uma pessoa que duvide que o ser humano pisou na superfície da Lua. Provavelmente, você também já ouviu alguém dizer que os objetos, dentro de um satélite em órbita, não caem porque lá não existe gravidade.

O acesso a conhecimentos básicos de Física vai torná-lo capaz de esclarecer todos esses fatos, e muitos outros, a você mesmo e a essas pessoas.

A Física no desenvolvimento científico e tecnológico

Leia a seguir um texto dos físicos Raymond Serway e John Jewett sobre a relevância da Física no desenvolvimento científico e tecnológico.

Física, a ciência física mais fundamental, lida com os princípios básicos do universo. Ela é a fundação sobre a qual estão baseadas as outras ciências – Astronomia, Biologia, Química e Geologia. A beleza da Física está na simplicidade de suas teorias fundamentais e na maneira em que um número pequeno de conceitos, equações e suposições básicas podem alterar e expandir nossa visão do mundo ao nosso redor.

A Física Clássica, desenvolvida antes de 1900, inclui as teorias, os conceitos, as leis e as experiências em Mecânica Clássica, Termodinâmica e Eletromagnetismo. Por exemplo, Galileu Galilei (1564-1642) fez contribuições significativas para a Mecânica Clássica por meio de seu trabalho sobre as leis do movimento com aceleração constante. Na mesma época, Johannes Kepler (1571-1630) usou observações astronômicas para desenvolver leis empíricas para os movimentos dos corpos planetários.

Contudo, as contribuições mais importantes para a Mecânica Clássica foram fornecidas por Isaac Newton (1642-1727), que desenvolveu a Mecânica Clássica como uma teoria sistemática e foi um dos criadores do cálculo como uma ferramenta matemática. Embora tenham continuado no século XVIII desenvolvimentos importantes na Física Clássica, a Termodinâmica e o Eletromagnetismo não foram desenvolvidos até a parte final do século XIX, principalmente porque os aparelhos para as experiências controladas eram ou muito rudes ou então não estavam disponíveis até essa época. Embora muitos fenômenos elétricos e magnéticos tenham sido estudados mais cedo, o trabalho de James Clerk Maxwell (1831-1879) forneceu uma teoria unificada para o Eletromagnetismo. [...]

[...] Uma revolução maior na Física, chamada usualmente de *Física Moderna*, começou próximo ao final do século XIX. A Física Moderna desenvolveu-se principalmente porque muitos fenômenos físicos não podiam ser explicados pela Física Clássica. Os dois desenvolvimentos mais importantes na era moderna foram a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica. A Teoria da Relatividade de Einstein revolucionou completamente os conceitos tradicionais de espaço, tempo e energia. A teoria de Einstein descreve corretamente o movimento de corpos movendo-se com velocidades comparáveis à velocidade da luz. A Teoria da Relatividade também mostra que a velocidade da luz é um limite superior da velocidade de um corpo e que a massa e a energia estão relacionadas. A Mecânica Quântica foi formulada por inúmeros cientistas ilustres para fornecer descrições dos fenômenos físicos em nível atômico.

Os cientistas trabalham continuamente para melhorar nossa compreensão das leis fundamentais, e novas descobertas são feitas todo dia. Em muitas áreas de pesquisa existe uma grande sobreposição entre Física, Química e Biologia. Evidência para esta sobreposição é constatada nos nomes de algumas subespecialidades na ciência – biofísica, bioquímica, físico-química, biotecnologia, e assim por diante. Inúmeros avanços tecnológicos em épocas recentes são o resultado de esforços de muitos cientistas, engenheiros e técnicos. Alguns dos desenvolvimentos mais notáveis na segunda metade do século XX são: (1) missões espaciais para a Lua e outros planetas, (2) microcircuitos e computadores de alta velocidade, (3) técnicas de imagem sofisticadas utilizadas na pesquisa científica e na medicina, e (4) várias realizações notáveis em engenharia genética. O impacto destes desenvolvimentos e descobertas na nossa sociedade tem sido de fato grande, e descobertas e desenvolvimentos futuros serão muito provavelmente emocionantes, desafiadores, e de grande benefício para a humanidade [...].

SERWAY, Raymond A.; JEWETT JR., John W. *Princípios de Física* (v. 1 - Mecânica Clássica). Tradução de André Kock Torres Assis. São Paulo: Thomson, 2004.

□ POTÊNCIAS DE DEZ E NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Sobretudo nas Ciências Naturais – Física, Química e Biologia – é comum termos de lidar com quantidades muito grandes ou muito pequenas.

O número de moléculas de água que há em 1 litro desse líquido, por exemplo, é aproximadamente 33 500 000 000 000 000 000 000 000 e a massa de cada uma delas é cerca de:

0,000 000 000 000 000 000 000 0299 grama.

Uma maneira simplificada de escrever esses números de modo que ocupem menos espaço e, acima de tudo, facilite operar com eles é, obviamente, muito bem-vinda.

Podemos fazer isso por meio de uma notação exponencial que utiliza potências de dez, isto é, potências do tipo 10^n , em que o número 10 e o número n são, respectivamente, a base e o expoente da potência.

Usando esse recurso, as duas quantidades acima podem ser escritas, por exemplo, assim:

$335 \cdot 10^{23}$ moléculas e $2,99 \cdot 10^{23}$ grama.

Veja o primeiro número:

33 500 000 000 000 000 000 000 000, moléculas



Se a vírgula (em vermelho) for levada para a posição indicada pela seta azul, ficará deslocada 23 casas decimais para a esquerda. Com isso, o número original ficará multiplicado por 10^{23} e, portanto, ficará alterado. Para voltar ao que era, precisa então ser multiplicado por 10^{23} e, assim, ele fica:

$335 \cdot 10^{23}$ moléculas

Veja agora o outro:

0,000 000 000 000 000 000 000 0299 grama



Se a vírgula (em vermelho) for levada para a posição indicada pela seta azul, ficará deslocada 23 casas decimais para a direita. Com isso, o número original ficará multiplicado por 10^{23} e, portanto, ficará alterado. Então, para não mudar seu valor, precisa ser multiplicado por 10^{23} , ficando assim:

$2,99 \cdot 10^{23}$ grama

Notação científica

Certo atlas de Astronomia fornece o seguinte valor da distância média da Terra ao Sol:

149 600 000 km

Usando potências de dez, esse valor pode ser expresso de várias maneiras, como $1\,496 \cdot 10^5$ km, $149,6 \cdot 10^6$ km, $14,96 \cdot 10^7$ km ou $1,496 \cdot 10^8$ km, por exemplo.

Todas estão corretas, mas a última, $1,496 \cdot 10^8$ km, está no formato denominado **notação científica**.

O que caracteriza a notação científica é uma potência de dez – no exemplo é 10^8 – multiplicada por um número – no exemplo é 1,496 – que tenha, antes da vírgula, um **único** algarismo, e que esse algarismo solitário seja **diferente de zero** – no exemplo, é 1.

Portanto, as outras formas escritas, embora estejam corretas, não estão em notação científica porque têm, antes da vírgula, mais de um algarismo.

Também não está em notação científica, apesar de correta, a forma $0,1496 \cdot 10^9$ km porque, embora exista um único algarismo antes da vírgula, ele é **igual** a zero.

Observe que entre as quantidades $335 \cdot 10^{23}$ moléculas e $2,99 \cdot 10^{23}$ grama, que nos acompanham desde o início desta seção, apenas a segunda está em notação científica.

3. CONTAGEM E MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

Grandeza é a denominação matemática de tudo que pode ser expresso por um **número de unidades**, mediante uma contagem ou uma medição.

Veja uma situação em que é feita uma **contagem**.

João foi à geladeira verificar quantos ovos tinha para comer. Contou e viu que tinha 8 ovos. Oito ovos é uma grandeza em que o **número** é o 8 e a **unidade** de contagem é o **ovo**.

Note que o valor de uma grandeza – no caso, quantidade de ovos –, encontrado por meio de uma mera contagem, é exato.

Fazer a **medição** de uma grandeza, ou **medir** essa grandeza, também requer a determinação de um **número** de unidades – no caso, unidades de medida. O número de unidades de **medida** encontrado é a medida da grandeza.

Observe a ilustração a seguir, que representa o velocímetro de um automóvel em determinado momento de uma viagem.



A posição do ponteiro indica o valor da velocidade do veículo na unidade de medida km/h (quilômetro por hora).

Qual a velocidade registrada nesse velocímetro?

Vemos que o ponteiro está entre 80 e 90 km/h, acima dos 85 km/h, mas não temos certeza se o valor da velocidade fica mais bem expresso, por exemplo, por 87 ou 88 km/h. Vamos supor que se tenha optado por 87 km/h. Quanto ao **8**, não há dúvida: é um **algarismo certo**. Já o **7** foi avaliado, é um **algarismo duvidoso**. O algarismo certo e o algarismo duvidoso são denominados **algarismos significativos** (nesse exemplo, o **8** e o **7**).

Essa dúvida revela que a medida que obtemos não é exata, ao contrário de um valor determinado por uma contagem, que é totalmente preciso (exato), como no caso daqueles oito ovos.

Uma medida tem precisão limitada pelo instrumento de medição utilizado.

Se a escala do nosso velocímetro tivesse subdivisões de 1 em 1 km/h, poderíamos ler um número inteiro e exato de km/h, mas a dúvida persistiria já na primeira casa decimal: será que é, por exemplo, 87,4 ou 87,5 km/h? Vamos supor que se tenha optado por 87,4 km/h. Nesse caso, o **8** e o **7** são algarismos certos. Já o **4** foi avaliado. Portanto, passamos a ter três algarismos significativos: o **8**, o **7** e o **4**. Os algarismos significativos que devem estar presentes nesse número são os **certos** (lidos) e o primeiro **duvidoso** (avaliado).

É verdade que a medida seria mais precisa, mas jamais exata. Isso acontece em toda medição de qualquer outra grandeza.

Podemos, finalmente, afirmar que:

Medir uma grandeza significa encontrar um número, sempre com precisão limitada, que indica quantas vezes ela contém uma unidade de medida.

A principal finalidade deste item não é exigir o rigoroso respeito aos algarismos significativos em todos os cálculos, mas evitar abusos na quantidade de algarismos presentes nos resultados obtidos. O resultado da divisão de 450 m² por 20,2 m não pode ter tanta precisão como os 22,277228 m fornecidos pela calculadora.

4. PADRÕES DE UNIDADES DE MEDIDA

Antigamente, cada país definia suas próprias unidades de medida, o que acarretava dificuldades no intercâmbio entre eles. Imagine o que isso acarretaria hoje!

Na Inglaterra, por exemplo, o rei Henrique I decretou, no ano de 1120, que o padrão (!) de comprimento seria a distância entre a ponta de seu nariz e a ponta

do seu dedo médio quando seu braço era esticado na horizontal: essa unidade era a **jarda**.

Na França, o rei Luís XIV usou o comprimento de seu pé para definir outro padrão (!) de comprimento: o **pé**.

De modo similar surgiu a **polegada**, baseada em outra parte de algum rei: uma falange do dedo polegar.

É muito fácil notar que definições desse tipo (e havia outras!) não tinham nenhum rigor, além de serem vulneráveis.

Com o passar dos séculos, foram surgindo padrões cada vez mais precisos das unidades de medida.

O Sistema Internacional de Unidades

O **Sistema Internacional de Unidades**, abreviado por **SI**, é um conjunto de unidades de medida de todas as grandezas, adotado mundialmente. Além das unidades, ele inclui prefixos, que são múltiplos e submúltiplos, na base 10, dessas unidades, e normas ortográficas que estabelecem como devem ser escritos os prefixos e as unidades.

Unidades

A partir de sete unidades, ditas **unidades fundamentais**, e de mais duas, ditas **unidades suplementares** (destas, apenas uma será usada em nosso curso), foram definidas todas as outras unidades.

Cada unidade fundamental ou suplementar tem um padrão preciso e reproduzível.

Entre as fundamentais estão o **metro**, o **quilograma** e o **segundo**.

O quadro a seguir fornece as sete unidades fundamentais (incluindo uma suplementar – a última da lista), seus símbolos e as grandezas – também ditas grandezas fundamentais, além de uma suplementar – que são medidas nessas unidades:

Unidade		Grandeza
Nome	Símbolo	
metro	m	comprimento
quilograma	kg	massa
segundo	s	tempo
ampère	A	intensidade de corrente elétrica
kelvin	K	temperatura termodinâmica
mol	mol	quantidade de matéria
candela	cd	intensidade luminosa
radiano	rad	ângulo plano

Existem alguns múltiplos das unidades fundamentais, que não pertencem ao SI, mas têm uso permitido.

São eles:

- minuto (min): $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$;
- hora (h): $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3\,600 \text{ s}$;
- dia (d): $1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3\,600 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}$;
- tonelada (t): $1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg}$.

Para a medição de ângulos planos o SI estabelece a unidade radiano (rad), mas permite o uso do grau ($^\circ$), do minuto ($'$) e do segundo ($''$).

Pelo fato de o grau ser a unidade mais comumente usada na medição de ângulos planos – nos esquadros, por exemplo, podemos encontrar, além do ângulo de 90° , dois ângulos de 45° ou um de 60° e outro de 30° – é altamente provável que o estudante não conheça a unidade radiano, mas isso não deve preocupá-lo porque mais adiante ela será definida. Se quiser saber a quantos graus ela corresponde, veja: $1 \text{ rad} \cong 57^\circ$.

Combinando convenientemente as oito unidades do quadro anterior, obtemos todas as outras unidades de medida, ditas **unidades derivadas**, usadas na medição das demais grandezas, também ditas **grandezas derivadas**.

Se multiplicarmos metro por metro, por exemplo, obteremos a unidade metro quadrado (m^2), para medir a grandeza derivada área.

Analogamente, a multiplicação metro por metro por metro fornece o metro cúbico (m^3), que é a unidade de volume no SI.

Entretanto, apesar de não pertencer ao SI, esse sistema também aceita a unidade de volume **litro**, cujo símbolo é ℓ (ou **L**, para evitar eventual risco de confusão com o algarismo 1). A unidade 1 m^3 equivale a $1\,000 \ell$.

O quociente da unidade metro pela unidade segundo, por sua vez, gera a unidade metro por segundo (m/s), para medir a grandeza derivada velocidade, e assim por diante.

Prefixos usados no SI

Os prefixos apresentados na tabela a seguir significam potências de dez e são simbolizados por letras comuns, exceto uma: a letra grega μ (lê-se “mi”).

Seu uso simplifica sobremaneira a grafia de quantidades muito grandes ou muito pequenas:

Nome do prefixo	Símbolo do prefixo	Potência de dez que o prefixo significa	Significado do prefixo na forma decimal
yotta	Y	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000

peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
giga	G	10^9	1 000 000 000
mega	M	10^6	1 000 000
quilo	k	10^3	1 000
hecto	h	10^2	100
deca	da	10^1	10
deci	d	10^{-1}	0,1
centi	c	10^{-2}	0,01
mili	m	10^{-3}	0,001
micro	μ	10^{-6}	0,000 001
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001
pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001
zepto	z	10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001
yocto	y	10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001

É importante observar que o prefixo quilo é simbolizado por **k** minúsculo, diferentemente do que podemos ver com frequência em açougues, feiras, mercearias, supermercados e placas de sinalização de trânsito.

Consulte a tabela anterior para entender as seguintes igualdades:

- $1 \text{ kg} = 1 \cdot 10^3 \text{ g} = 1\,000 \text{ g}$;
(1 quilograma é igual a 1 000 gramas)
- $1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,001 \text{ m}$;
(1 milímetro é igual a 1 milésimo do metro)
- $1 \text{ mg} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 0,001 \text{ g}$;
(1 miligrama é igual a 1 milésimo do grama)
- $1 \text{ Gm} = 1 \cdot 10^9 \text{ m} = 1\,000\,000\,000 \text{ m}$;
(1 gigmetro é igual a 1 bilhão de metros)
- $1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$.
(1 centímetro é igual a 1 centésimo do metro)

5. INFORMAÇÕES ADICIONAIS

Dois extremos

Para medir distâncias extremamente grandes ou extremamente pequenas, além do uso dos prefixos, também são definidas algumas unidades especiais.

Na Astronomia, por exemplo, usa-se uma unidade de comprimento denominada **ano-luz**, que é a distância percorrida pela luz, no vácuo, durante 1 ano terrestre:

$$1 \text{ ano-luz} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Essa unidade é útil principalmente para medir distâncias entre estrelas.

Já no caso de medições das dimensões de um átomo e de outros comprimentos extremamente pequenos, usa-se uma unidade denominada **angstrom**, cujo símbolo é Å.

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

De volta às medidas do rei

Aquelas unidades definidas pelas medidas do rei, como o pé e a polegada, por exemplo, juntamente com várias outras unidades, compuseram o sistema inglês de unidades. Entretanto, nesse sistema, elas têm relações bem definidas com as unidades correspondentes do SI.

Principalmente para satisfazer eventuais curiosidades, citamos a seguir algumas dessas relações:

- 1 polegada = 2,54 centímetros (na construção civil, usualmente aproximada para 25 milímetros);
- 1 pé = 30,48 centímetros;
- 1 milha terrestre = 1,609 quilômetro;
- 1 milha marítima = 1,852 quilômetro.

Em trabalhos científicos só se utiliza atualmente o SI, mas na linguagem comum dos países de língua inglesa o sistema inglês ainda é bastante usado.

No Brasil, a polegada, por exemplo, já foi muito usada como unidade de medida de diâmetros internos de canos e tubulações, de bitolas de vergalhões de ferro usados em vigas e colunas de concreto, mas hoje está quase abandonada.



Um tubo de PVC de 4 polegadas é, hoje, muito mais comumente chamado de tubo de PVC de 100 milímetros.

Entretanto, a polegada ainda se impõe na definição do tamanho da tela de televisores e monitores.



Televisor de 20 polegadas.

Além da polegada, convivemos com outras unidades do sistema inglês.

Ao calibrar os pneus de um veículo, por exemplo, informamos quantas libras por polegada quadrada de pressão queremos (na verdade, erroneamente, falamos apenas “libras”).

Quando se pretende adquirir um aparelho de ar-condicionado, logo vem a pergunta:

— De quantos “Btu”?

Escrita corretamente, Btu/hora, a sigla citada na pergunta, é uma unidade de potência do sistema inglês ($1000 \frac{\text{Btu}}{\text{h}} \cong 300 \text{ watts}$).

Jct 33	10 mi	16 km
Los Angeles	283 mi	453 km

Placa indicativa de distâncias medidas em milhas com as conversões aproximadas em quilômetros. Confira essas conversões.



Velocímetro de um automóvel, com escala em milhas por hora e conversões aproximadas em quilômetros por hora. Confira a equivalência entre 50 MPH e 80 km/h.



Pensando o sistema inglês

Converse com seus colegas e procure identificar o que precisaria acontecer para que os brasileiros e todos os demais povos pudessem substituir o sistema inglês pelo SI na aquisição de televisores e aparelhos de ar-condicionado, na calibração de pneus, na navegação aérea e marítima etc.

6. ORDEM DE GRANDEZA

Observe as potências de dez: 10^{-2} , 10^{-1} , 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 e 10^4 .

Se você quiser escolher uma delas para melhor representar, em **centímetros**, a altura de uma geladeira, qual escolherá?

Certamente, escolherá 10^2 , pois 10^2 cm é igual a 100 cm, o que equivale a 1 m.

Perceba que 10^1 e 10^3 fogem muito da realidade já que não é nada comum uma geladeira com altura próxima de 10 cm ou de 1 000 cm (dez metros)!

A potência de dez que melhor representa uma grandeza é denominada **ordem de grandeza** da grandeza.

Assim, em centímetros, a ordem de grandeza da altura de uma geladeira é 10^2 , não importando se sua altura é 160 cm, 180 cm ou 200 cm, por exemplo.

A ordem de grandeza, apesar de ser uma “aproximação da aproximação”, é importante em todas as ciências naturais.

Não se sabe, por exemplo, qual é o tamanho de um elétron. Entretanto, um experimento realizado em mecânica quântica revela indícios de que ele mede menos que 10^{-16} m, o que já é um começo do conhecimento.

Se perguntarem qual é a espessura de uma folha de papel deste livro, sem um instrumento de grande precisão você não saberá responder. Entretanto, sem usar instrumento nenhum, é possível fazer uma estimativa.

Separe um conjunto de folhas que você julgue ter 1 cm de espessura, conte o número de folhas do conjunto e faça um cálculo.

O autor fez isso, tomando um conjunto de folhas da página 115 à 275: o número de páginas é 160 (275 – 115), mas o número de folhas é 80 – a metade de 160 – porque cada folha tem duas páginas.

Em seguida, dividiu 1 cm por 80 folhas:

$$\frac{1 \text{ cm}}{80 \text{ folhas}} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ cm/folha}$$

Portanto, a ordem de grandeza da espessura da folha é 10^{-2} cm, já que a potência de 10 mais próxima de 1,25 é 10^0 , que é igual a 1.

Note que manter o 1,25 seria uma falsa informação de precisão, uma vez que o julgamento da grossura do conjunto das 80 folhas foi feito a olho.

Destaque-se que conhecer simplesmente a ordem de grandeza – uma potência de dez – é muito bom quando se trata de mera estimativa.

Físicos, químicos, biólogos e outros cientistas de áreas afins lidam muito com ordens de grandeza, principalmente quando precisam fazer estimativas rápidas.

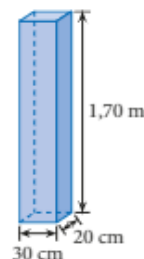
Exemplo:

O diâmetro médio de uma célula de nosso corpo é da ordem de $10 \mu\text{m}$ (10^{-5} m). Determine a ordem de grandeza da quantidade de células em um ser humano adulto.

Resolução:

Tratando-se de uma estimativa, vamos imaginar uma célula como um pequeno cubo de aresta da ordem de 10^{-5} m. Assim, a ordem de grandeza do volume de uma célula é $(10^{-5} \text{ m})^3$, que é igual a 10^{-15} m^3 .

Agora, vamos estimar o volume de um adulto, imaginando-o um prisma de altura igual a 1,70 m e base retangular de lados iguais a 30 cm e 20 cm:



Um adulto modelado por um prisma.

O volume desse adulto é dado pela multiplicação:
 $30 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 1,7 \text{ m} = 0,3 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 1,7 \text{ m} =$
 $= 3 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot 1,7 \text{ m} = 1,02 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3.$

Antes de continuar, perceba que, em meio a tanta imprecisão, não faz sentido preocupar-se com os algarismos significativos!

Continuando, concluímos que a ordem de grandeza do volume desse adulto é 10^{-1} m^3 .

Vamos, finalmente, determinar a ordem de grandeza da quantidade de células que cabe em 10^{-1} m^3 :

$$\frac{10^{-1} \text{ m}^3}{10^{-15} \text{ m}^3/\text{célula}} = 10^{14} \text{ células}$$



A MECÂNICA, UMA DAS PARTES DA FÍSICA

1. MECÂNICA

Astros girando em torno de outros astros, meteoroides caindo na atmosfera de nosso planeta, brisas levando jangadas da terra para o mar ou do mar para a terra, vendavais e furacões ocorrendo aqui e acolá, pessoas caminhando pelas ruas, atletas correndo em provas esportivas, veículos trafegando nas estradas, águas descendo rios, sangue correndo em nossas artérias e veias, ondas propagando-se na superfície da água, ondas sonoras que saem de um alto-falante e chegam aos ouvintes, uma quantidade imensa de ondas eletromagnéticas (luz visível, ultravioleta, infravermelha, micro-ondas, entre outras) passando por nós, átomos e moléculas em agitação no interior dos corpos, elétrons percorrendo fios condutores em circuitos elétricos, partículas atingindo rapidez extraordinária nos aceleradores de partículas. Em todas as situações citadas, que são apenas alguns exemplos entre tantos, está presente o conceito de **movimento**, ou seja, em todas elas algo está mudando de lugar.

Também vemos, em nosso cotidiano, corpos que não estão em movimento, isto é, corpos que não saem do lugar em que estão. Dizemos que esses corpos estão em **repouso**. É o caso, por exemplo, das nossas casas e dos postes de distribuição de energia elétrica.

Neste livro trataremos da Mecânica Clássica, que, para abreviar, chamaremos simplesmente de Mecânica.

A **Mecânica** é a parte da Física que estuda o movimento e o repouso dos corpos, sem levar em conta os movimentos microscópicos que acontecem no interior deles, como oscilações de núcleos atômicos e movimentos de elétrons. Assim, a Mecânica estuda, por exemplo, o movimento de um avião, mas não trata do movimento de agitação de seus átomos e moléculas. Apesar desse enfoque limitado, ela fornece subsídios fundamentais para as demais áreas da Física.

Desde a Antiguidade, o ser humano preocupa-se em explicar os fenômenos que ocorrem na natureza. O movimento dos corpos foi alvo das primeiras atenções. A Mecânica é a mais antiga das partes da Física, contudo não se sabe ao certo quando começou seu desenvolvimento.

Podemos citar Aristóteles, Arquimedes, Ptolomeu, Copérnico, Galileu, Kepler e Newton como alguns dos grandes expoentes na evolução da Mecânica. Einstein também deu passos gigantescos, porém já na era da chamada Física Moderna.

2. AS PARTES DA MECÂNICA

Observe a fotografia a seguir.



Vista aérea de complexo viário em Los Angeles, Califórnia.

Ela mostra, em um certo momento, veículos em movimento retilíneo e veículos em movimento curvilíneo. Certamente alguns estão mais velozes que outros.

A partir do instante em que essa fotografia foi tirada, é possível que, durante algum tempo, certos veículos tenham mantido sua velocidade e que outros tenham se tornado mais rápidos ou mais lentos.

A descrição de tudo isso, qualitativa e quantitativamente, é feita por meio de conceitos e grandezas definidos em uma parte da Mecânica denominada **Cinemática**.

Os porquês de poder acontecer tudo o que a Cinemática descreve são respondidos graças a conceitos e grandezas definidos em outra parte da Mecânica, chamada **Dinâmica**.

A Mecânica tem ainda uma terceira parte que trata exclusivamente de corpos em repouso: é a **Estática**.

Formalizando essa divisão da Mecânica em três partes, temos:

- A **Cinemática** é a parte da Mecânica que trata do repouso e do movimento apenas os descrevendo, isto é, sem se preocupar com as causas que determinam o estado de repouso ou as características do estado de movimento. As grandezas físicas fundamentais de que a Cinemática se vale são o **comprimento** e o **tempo**.

- A **Dinâmica** é a parte da Mecânica que investiga as causas que determinam e modificam as características dos movimentos dos corpos. É, sem dúvida, a essência da Mecânica, pois é na Dinâmica que são estabelecidas as relações entre movimento, massa e força. As grandezas fundamentais para o desenvolvimento dessa parte são, usualmente, o **comprimento**, o **tempo** e a **massa**.

Grosso modo, pode-se dizer que a Dinâmica explica aquilo que a Cinemática apenas descreve.

- A **Estática** é a parte da Mecânica que estuda especificamente as condições para que ocorra o repouso dos corpos, denominado equilíbrio estático. É, na verdade, uma análise mais aprofundada de uma situação de equilíbrio estudada na Dinâmica.

A Cinemática e a Dinâmica

Para exemplificar a diferença entre a Cinemática e a Dinâmica, vamos citar duas das três grandes descobertas do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), fantásticas tanto pela maneira como aconteceram quanto pelos poucos recursos da época.

Dispondo de observações e medições feitas por outros dois astrônomos, o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) e o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), Kepler concluiu que os planetas do Sistema Solar descrevem órbitas elípticas em torno do Sol e que este ocupa um dos focos das elipses.

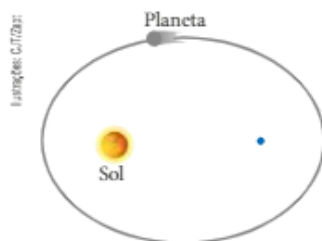
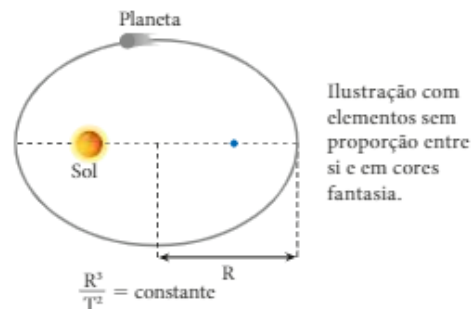


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Entretanto, Kepler não explicou (nem tinha como) por que as órbitas têm esse formato. Ele simplesmente as **descreveu**, ou seja, tratou os movimentos planetários segundo a Cinemática.

Kepler descobriu também que a divisão do cubo do semieixo maior da elipse (R^3) pelo quadrado do ano, ou seja, do tempo T para completar

uma volta em torno do Sol (T^2), dava o mesmo resultado para todos os planetas então conhecidos.



O curioso é que ele chegou a essa conclusão simplesmente manipulando os números de que dispunha, fazendo realmente tentativas.

Mais uma vez, Kepler tratou os movimentos planetários segundo a Cinemática: descobriu um fato referente a esses movimentos, mas não explicou o porquê desse fato.

Posteriormente, o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727), usando leis que ele mesmo descobriu e recursos de cálculo que ele próprio inventou, justificou as descobertas de Kepler: explicou por que as órbitas são elípticas e por que R^3/T^2 é uma constante. Além disso, provou que as órbitas também podem ter outras formas e que aquilo que Kepler descobriu para os planetas do Sistema Solar vale também para o movimento orbital de qualquer astro.

Podemos dizer, então, que Newton tratou os movimentos dos astros segundo a Dinâmica.

3. O MODELO DE PARTÍCULA OU PONTO MATERIAL

Como veremos adiante nesta mesma seção, qualquer corpo – que, obviamente, tem um tamanho (volume) – muitas vezes pode ser representado por um simples ponto.

Antes, vamos falar um pouco sobre a Terra, um corpo redondo com cerca de 12 800 km de diâmetro.

O estudo dos sismos (terremotos) contribuiu muito para se obter indícios de como a Terra é por dentro.

As ondas geradas pelos abalos sísmicos – ondas sísmicas – se propagam no interior do planeta a partir do hipocentro, ponto em que o sismo tem origem, e podem ser detectadas por sismógrafos em todo o mundo.

Mudanças de direção dessas ondas ao longo da propagação possibilitaram concluir que existem partes internas do planeta com matéria no estado líquido e outras com matéria no estado sólido.

A lava expelida por um vulcão é magma, matéria de certa forma semelhante a um concreto mole e muito quente, que vaza por frestas na litosfera, a casca sólida do planeta. A análise das lavas evidenciou que a temperatura interna do planeta é muito alta e revelou alguns materiais existentes dentro dele.

A grande maioria dos terremotos ocorre nas mesmas regiões em que está também a grande maioria dos vulcões ativos. Essas regiões são as fronteiras entre as placas tectônicas – pedaços em que a litosfera está fragmentada, encaixados semelhantemente a um grande quebra-cabeça.

Nessa brevíssima análise do nosso planeta, seria possível desconsiderar suas dimensões e tratá-lo como um simples ponto? Obviamente, não. Um ponto não tem partes e, por isso, não é possível falar em **regiões de um ponto**.

Portanto, na análise feita, o fato de a Terra ter dimensões não pode ser ignorado e ela precisa ser tratada como um corpo extenso.

A Terra também precisa ser tratada como um corpo extenso no estudo do movimento de rotação que realiza em torno de seu eixo imaginário. É útil destacar que a rotação de qualquer corpo requer um eixo em torno do qual giram partes desse corpo.

Devido a esse movimento, assistimos à alternância de períodos diurnos e noturnos. Além disso, quando é dia em uma região, é noite em outra.

Portanto, nenhuma rotação pode ser caracterizada em um ponto.

Vamos pensar agora em outro movimento da Terra: a translação ao redor do Sol.

Esse movimento não é afetado de modo mensurável pelas dimensões do planeta nem por seus

diferentes climas, por suas atividades sísmicas e vulcânicas ou por outros processos que ocorrem nele.

Por isso, na análise desse movimento, a Terra pode ser representada por meio de um **modelo de ponto material** ou **partícula**: ignoramos seu volume e a representamos por um ponto.

Modelo é algo que se adota para substituir uma situação real, de modo que simplifique a análise dela sem acarretar erros significativos.

Em Física, a adoção de modelos é muito frequente. Ao longo deste curso você lidará com vários outros.

4. GRANDEZA VETORIAL E GRANDEZA ESCALAR

Pedro resolveu fazer uma longa caminhada e, depois de muito caminhar, nem sabia mais de que lado ficava seu bairro. Por sorte, encontrou alguém que, ao ser interrogado, lhe disse:

— Moço, seu bairro fica pertinho. Daqui até lá são só uns cinco quilômetros.

Será que bastava a Pedro conhecer a distância a ser percorrida (5 km) até sua casa para encontrá-la?

Obviamente, não. Precisava também saber em que reta seguir, que significa conhecer a **direção** da caminhada, e, nessa reta, para que lado devia ir, que significa conhecer o **sentido** da caminhada.

— Vou andar cinco quilômetros para onde? – perguntou à pessoa, quem, em seguida, respondeu apontando com o braço esticado:

— Está vendo um coqueiro lá no alto do morro? Mire nele e vá em frente.

Foi assim que Pedro conseguiu voltar para casa.

Observe, então, que uma mudança de posição como essa que Pedro teve de realizar – uma grandeza denominada **deslocamento** –, além de um número de unidades de medida, precisa também de uma orientação espacial – **direção** e **sentido** – para ficar plenamente determinada.

Grandezas desse tipo são ditas grandezas **vetoriais**.

Vamos pensar agora em outra situação.

A mãe de Danilo, suspeitando que ele estava com febre, mediu sua temperatura e leu trinta e nove graus Celsius (39 °C) na escala do termômetro.

A grandeza medida pela mãe de Danilo, ou seja, a temperatura, ficou completamente determinada pelo número 39. Não seria cabível a pergunta: 39 °C para onde?

Grandezas desse tipo são ditas grandezas **escalares**.

Na Física você vai conhecer muitas outras grandezas escalares e também muitas outras grandezas vetoriais.

UNIDADE

1

CINEMÁTICA

A Cinemática é a parte da Física que estuda os movimentos, sem, no entanto, investigar as causas que os produzem e modificam. Ela geralmente descreve como a posição, a velocidade e a aceleração variam em função do tempo e, para isso, utiliza funções matemáticas. É um estudo preliminar que visa desenvolver as bases para uma análise mais completa, a qual é feita em Dinâmica.



Fotografia estroboscópica mostrando um taco de golfe em movimento numa jogada. Nesta fotografia, o intervalo de tempo entre duas imagens é de 0,01 segundo.

NESTA
UNIDADE

1

INICIAÇÃO À
CINEMÁTICA ESCALAR
E MOVIMENTO
UNIFORME

2

MOVIMENTO
UNIFORMEMENTE
VARIADO

3

MOVIMENTO
CIRCULAR UNIFORME

4

VETORES E CINEMÁTICA
VETORIAL

CAPÍTULO

1

INICIAÇÃO À CINEMÁTICA ESCALAR E MOVIMENTO UNIFORME

□ INTRODUÇÃO

Imagine que você embarca em um trem e, sentado diante de uma das janelas, observa do lado de fora outro trem bem próximo ao seu, parado em uma linha férrea paralela. Subitamente você nota que o outro trem se desloca, passando devagar pela janela de onde é feita a visualização. Esse fato causará, durante alguns instantes, certa confusão mental e você certamente questionará qual dos dois comboios está partindo da estação. Falta alguma coisa para fundamentar a resposta, não é? Com certeza, faz-se necessário um referencial que possibilite uma conclusão.

Você observa, então, que sua posição em relação a uma coluna na plataforma da estação não se altera e logo conclui: “É o outro trem que está dando início à sua viagem. O meu ainda está parado”.

Passado esse momento, seu trem também inicia o deslocamento, dando-lhe a impressão de se tornar cada vez mais veloz. A sensação de velocidade é proporcionada pela rapidez com que você percebe os objetos externos “passarem” pela janela do trem. Mas quem está, afinal, se deslocando: os objetos externos ou o próprio trem? Vamos responder: ambos podem estar em movimento. Tudo depende do referencial adotado.

Ao longo do percurso até o destino você poderá notar que, em alguns trechos, a velocidade do trem ora aumenta com rapidez, ora permanece praticamente inalterada. Já em outros momentos a velocidade do comboio se reduz a zero, quando ele para nas estações do itinerário. As maneiras segundo as quais você comprime o encosto do assento ou é “projetado” para a frente dão a percepção fisiológica da intensidade da aceleração. Na primeira situação, você provavelmente dirá: “Puxa, que arrancada!”. Ou, no último caso, talvez comente: “Nossa, que freada!”.

Em casos como esses, em que os corpos já dispõem de “caminhos” prontos para serem seguidos, como automóveis em rodovias, trens em ferrovias e outros, a descrição adequada dos movimentos é feita por meio de grandezas definidas **escalarmente**. Daí a denomi-

nação cinemática escalar utilizada no título deste capítulo. Nos dois capítulos seguintes, os movimentos também serão descritos por meio de grandezas escalares.

2. REFERENCIAL

Certamente você já percebeu a importância de saber em que lugar estão os objetos de sua casa, como suas roupas e seu material escolar, por exemplo.

Para ser possível descrever o movimento de um corpo, também é necessário saber dizer **onde ele está**, ou seja, conhecer sua **posição**, que sempre é dada em relação a algum outro corpo denominado **referencial**.

Referencial é um corpo (ou um conjunto de corpos) em relação ao qual são definidas as posições de outros corpos.

Observe a fotografia a seguir.



Vista noturna da cidade de São Paulo.

Vemos na fotografia duas luas no céu.

Sabemos, porém, que isso não é real, pois nosso planeta possui apenas um satélite natural: a Lua.

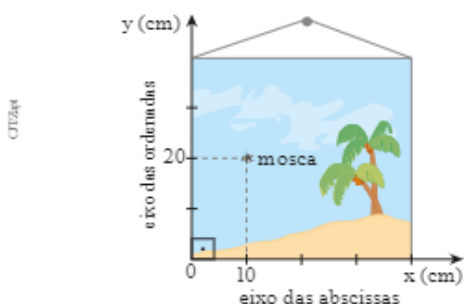
Vamos explicar o que aconteceu.

O obturador de uma máquina fotográfica fixada em um tripé foi aberto em determinado horário, registrando uma imagem da Lua. Minutos depois foi aberto novamente, e outra imagem da Lua ficou registrada no **mesmo** fotograma do filme.

Em relação a um referencial na superfície da Terra – esse referencial pode ser, por exemplo, o solo, os prédios ou os postes de iluminação –, a Lua mudou de posição entre o momento da primeira exposição e o momento da segunda.

Em muitos casos é conveniente associar um sistema de eixos cartesianos ortogonais ao corpo tomado como referencial. A posição de um outro corpo, em relação a esse referencial, fica bem estabelecida pelas coordenadas lidas nesses eixos e expressas por números de unidades de comprimento.

Considere, por exemplo, uma mosca pousada em um quadro suspenso em uma parede, conforme a figura:



Tomando o próprio quadro como referencial, podemos dar a posição da mosca dizendo que ela está a 10 cm do lado esquerdo e a 20 cm do lado inferior. Se, porém, associarmos ao quadro um sistema de eixos cartesianos Oxy , a posição da mosca em relação ao quadro ficará definida pela abscissa $x = 10$ cm e pela ordenada $y = 20$ cm.

3. INSTANTE E INTERVALO DE TEMPO

Fundamentalmente, há dois tipos de perguntas cujas respostas envolvem a grandeza tempo. O primeiro tipo de pergunta pode ser exemplificado assim:

A quantos minutos do primeiro tempo o atacante Nilo marcou o primeiro gol no jogo (fictício) entre as equipes do Alexandria Futebol Clube e do Esporte Clube Assuã?

Essa pergunta solicita a “localização” no tempo de uma ocorrência, de um momento. Esse momento é denominado **instante**.

O instante é determinado por uma quantidade, que simbolizaremos por t . Essa quantidade representa quantas unidades de tempo já se passaram desde um instante inicial escolhido arbitrariamente, como $t_0 = 0$, chamado **origem dos tempos**. Assim, no jogo a que nos referimos, $t_0 = 0$ significa o instante em que o jogo se iniciou, ocasião em que o árbitro acionou seu cronômetro.

Nessa partida, o primeiro gol de Nilo ocorreu no instante $t_1 = 20$ minutos, o que significa que se passaram 20 minutos desde a origem dos tempos até o momento do gol.

O segundo tipo de pergunta pode ser exemplificado assim:

Quanto tempo a torcida do Alexandria teve de esperar, desde a marcação do primeiro gol, para que seu atacante Nilo marcasse o segundo?

Observe que essa pergunta solicita um tempo decorrido, ou seja, uma duração, uma sucessão de instantes entre certo instante t_1 e outro instante t_2 . A essa sucessão de instantes damos o nome de **intervalo de tempo** e o representamos por Δt (lê-se delta t). O cálculo de Δt é feito subtraindo-se t_1 (ocorrido antes) de t_2 (ocorrido depois):

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

O primeiro gol de Nilo foi marcado aos 20 minutos do primeiro tempo ($t_1 = 20$ min), e o segundo, aos 37 minutos do primeiro tempo ($t_2 = 37$ min). Então, o intervalo de tempo decorrido entre os dois gols é calculado do seguinte modo:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 37 \text{ min} - 20 \text{ min} \Rightarrow \Delta t = 17 \text{ min}$$

NOTA

Em Física, a letra grega Δ é usada com muita frequência para simbolizar a variação ΔG de uma grandeza G qualquer, sempre fazendo $G_{\text{final}} - G_{\text{inicial}}$.

$$\Delta G = G_{\text{final}} - G_{\text{inicial}}$$

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

Método do carbono 14 para a determinação de idades (datação)

Para você descobrir a idade de uma pessoa, basta conhecer sua data de nascimento. Como você determinaria, no entanto, a idade de um fóssil, como a ossada de um animal já extinto, por exemplo?

Quase todo o carbono existente na natureza (pouco menos de 99%) é o chamado carbono 12, cujo núcleo atômico é constituído de 6 prótons e 6 nêutrons. Além dele, há uma pequena quantidade (pouco mais de 1%) de carbono 13 (núcleo com 6 prótons e 7 nêutrons) e uma pequeníssima quantidade de **carbono 14** (núcleo com

6 prótons e 8 nêutrons). Em cada bilhão de átomos de carbono, apenas dez são de carbono 14.

Átomos de um mesmo elemento químico, cujos núcleos têm o mesmo número de prótons e diferentes números de nêutrons, são denominados isótopos desse elemento. Assim, o carbono 12, o carbono 13 e o carbono 14 são isótopos do carbono.

Dizemos que o núcleo de um átomo é estável quando ele não se modifica espontaneamente com o passar do tempo: os núcleos do carbono 12 e do carbono 13, por exemplo, são estáveis.

Um núcleo atômico é **instável** ou **radiativo** quando se modifica espontaneamente com o passar do tempo, transformando-se em um núcleo de outro elemento químico. A isso damos o nome de **desintegração radiativa**, fenômeno que acontece com o carbono 14 e com vários outros elementos. Portanto, dos três isótopos do carbono, apenas o carbono 14, que vamos representar por C-14, é radiativo.

A atmosfera terrestre é permanentemente bombardeada pela radiação cósmica proveniente do Sol e de outros corpos celestes. Nessa radiação, que é altamente energética, estão presentes ondas eletromagnéticas, elétrons, prótons, partículas alfa (partículas constituídas de 2 prótons e 2 nêutrons) etc. Quando núcleos estáveis de átomos presentes na atmosfera são atingidos pela radiação cósmica, entre outras ocorrências, há uma liberação de nêutrons de alta energia. Núcleos estáveis de nitrogênio, ao serem bombardeados por esses nêutrons, transformam-se em núcleos radiativos de C-14:

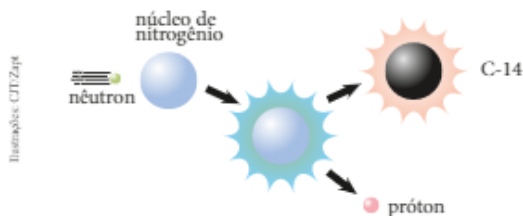
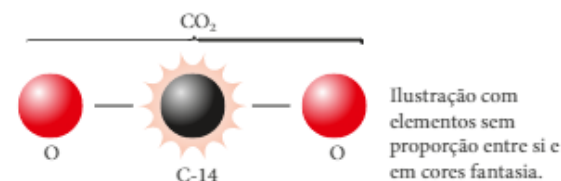


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Como se aprende em Química, o gás carbônico (CO_2) é formado a partir do carbono e do oxigênio. Assim, de todo gás carbônico presente na atmosfera, uma pequeníssima quantidade tem o C-14. Na fotossíntese, as plantas e as algas absorvem gás carbônico e, com isso, passam a conter o C-14.



Ao se alimentarem dessas plantas e algas, os animais também passam a ter C-14 em seus tecidos.

Embora núcleos de C-14 estejam se desintegrando e, com isso, deixando de ser C-14, há uma reposição natural, pois, na atmosfera, eles sempre são produzidos. Consequentemente, o percentual desse isótopo, tanto na atmosfera como nos seres vivos, é praticamente constante: dez átomos de C-14 em cada bilhão de átomos de carbono (acredita-se que essa constância seja verdadeira de 70 000 anos atrás até hoje).

Entretanto, quando um ser vivo morre, o percentual de C-14 existente nele passa a diminuir com o tempo, já que deixa de haver reposição. O conhecimento desse percentual permite determinar a idade de fósseis, múmias e papéis antigos, entre outros materiais orgânicos.

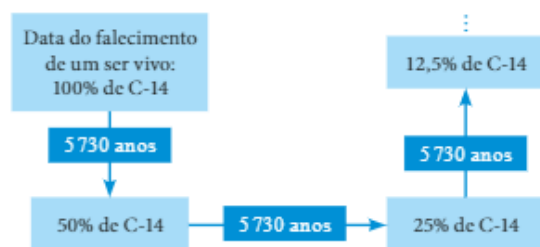


Datação de osso pelo método de C-14.

No Brasil, o Laboratório de Geocronologia da USP e o Laboratório do Instituto de Física da UFBA fazem datação pelo C-14.

A **meia-vida** do C-14, isto é, o tempo para que certa quantidade de núcleos desse isótopo se reduza à metade, por desintegração radiativa, é de 5 730 anos.

Então, se for encontrada uma ossada com percentual de C-14 reduzido a 50% (metade) em relação a um ser vivo, concluiremos que sua idade é 5 730 anos. Se esse percentual estiver reduzido a 25% (metade da metade), a ossada tem 5 730 anos + 5 730 anos = 11 460 anos, e assim por diante:

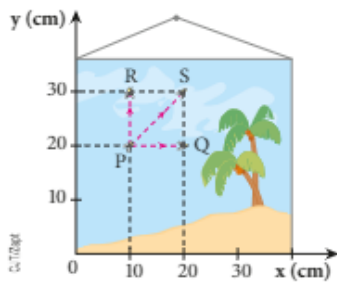


A Matemática fornece uma fórmula geral para obter a idade a partir de **qualquer percentual** de relação.

O C-14 é adequado para a datação de material orgânico com idade entre 500 e 50 000 anos. Há, entretanto, outros elementos radiativos adequados a outras faixas de idade e aptos não só para a datação de material orgânico.

4. MOVIMENTO E REPOUSO

Dizemos que uma partícula se encontra em movimento quando ela muda de posição com o passar do tempo; caso contrário, encontra-se em repouso. Os conceitos de movimento e de repouso são apresentados a partir do conceito de posição. Como a posição é estabelecida em relação a um referencial, movimento e repouso também são conceitos relativos a um referencial.



Vamos considerar novamente o exemplo do quadro suspenso em uma parede, apresentado no início deste capítulo. Associe-mos a ele um sistema de eixos cartesianos ortogonais Oxy , com os eixos graduados em centímetros.

Suponha que uma mosca esteja pousada no ponto P , cuja posição é dada por $x = 10$ cm e por $y = 20$ cm. Se, durante certo intervalo de tempo, a mosca permanece em P , ou seja, se ela não muda de posição, dizemos que ela está em repouso em relação ao quadro. Observe que, nesse caso, nenhuma das coordenadas de posição da mosca variou.

Entretanto, se em certo intervalo de tempo a mosca muda, por exemplo, de P para Q ou de P para R ou, ainda, de P para S , dizemos que ela está em movimento em relação ao quadro durante esse intervalo. Note que mudar de posição pode significar variar somente x ou somente y ou x e y simultaneamente.

Um ponto material está em **movimento** em relação a um referencial quando sua posição varia com o tempo em relação a esse referencial.

Um ponto material está em **repouso** em relação a um referencial quando sua posição não varia com o tempo em relação a esse referencial.

Na fotografia a seguir, o avião situado na parte inferior, que vamos chamar de avião **A**, está sendo abastecido por outro, que vamos chamar de avião **B**, em pleno voo.



Jato sendo abastecido em pleno voo.

O avião **A** está em repouso ou em movimento?

Em relação à superfície da Terra, esse avião está em movimento, já que sua posição varia com o tempo.

Entretanto, para o abastecimento ser possível, o avião **A** não pode mudar de posição em relação a **B**. Isso significa que **A** está em repouso em relação a **B**.

Portanto, um mesmo corpo pode estar em movimento em relação a um referencial e em repouso em relação a outro, ou seja, os conceitos de movimento e repouso são **relativos**, fato já apontado no início desta seção.

Nossas casas, por exemplo, estão em repouso em relação à superfície da Terra, pois não mudam de posição em relação ao solo. Em relação ao Sol, entretanto, elas estão em movimento, pois, juntamente com a Terra, mudam de posição em relação ao Sol.

Simetria dos conceitos de repouso e movimento

Dois trens estavam parados em uma estação, um ao lado do outro.

José, sentado em um banco de um dos trens, viu Juliana, que foi sua colega de escola anos atrás, sentada em um banco do outro trem.

Ela também reconheceu José, e os dois, dentro das possibilidades, começaram a se comunicar.

De repente, **José viu Juliana entrando em movimento e Juliana também viu José entrando em movimento.**

O rapaz, entretanto, olhou para a plataforma de embarque da estação e percebeu que seu trem ainda estava parado. Concluiu, então, que era o trem dela que estava partindo.

Como explicar o que José e Juliana viram? Qual trem, afinal, estava se movendo?

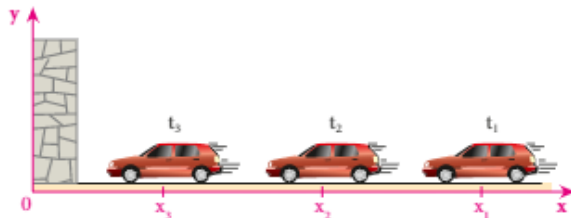
O problema é, novamente, uma questão de referencial.

Naqueles momentos, **em relação à plataforma**, o trem que se movia era o de Juliana. O de José ainda estava em repouso.

Contudo, considerando referenciais nos trens, o trem de Juliana entrou em movimento **em relação ao trem de José** e o trem de José entrou em movimento **em relação ao trem de Juliana.**

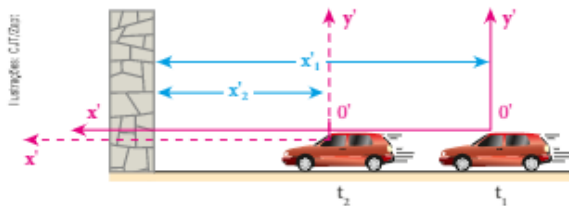
Se um corpo **A** está em movimento (ou em repouso) em relação a um corpo **B**, então **B** também está em movimento (ou em repouso) em relação a **A**. Isso equivale a dizer que os conceitos de movimento e repouso são **simétricos**.

Considere, por exemplo, um automóvel dirigindo-se frontalmente a um muro. Tomando o muro como referencial e associando a ele um sistema cartesiano $0xy$, observamos que a posição do automóvel varia com o tempo, pois sua abscissa x está variando. Portanto, **o automóvel está em movimento em relação ao muro.**



Nos instantes t_1 , t_2 e t_3 , as abscissas do automóvel valem x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente.

Tomando, agora, o automóvel como referencial e associando a ele um sistema cartesiano $0'x'y'$, observamos que a posição do muro também varia, pois sua abscissa x' está variando. Portanto, **o muro está em movimento em relação ao automóvel.**



Nos instantes t_1 e t_2 , as abscissas do muro valem x'_1 e x'_2 , respectivamente.

Em uma corrida automobilística, quando tomamos como referencial a arquibancada ou a pista e as paisagens ao seu redor, o carro de corrida se movimenta em um sentido. Se tomarmos o carro como referencial, a arquibancada, a pista e as paisagens também estão em movimento, porém em sentido oposto.



Carro de Fórmula 1 em alta velocidade.

5. TRAJETÓRIA

Quando um ponto material se movimenta em relação a certo referencial, ele ocupa diferentes pontos à medida que o tempo passa, descrevendo, assim, uma linha, que pode ser reta ou curva.

Na fotografia a seguir, os rastros deixados no ar pelos cinco aviões revelam lugares por onde eles passaram momentos antes de estarem nas posições em que os vemos.



Rastros produzidos no ar revelam as formas das trajetórias dos cinco aviões.

Dentro dos limites da fotografia, podemos perceber que as posições ocupadas pelos aviões definem "caminhos" retilíneos (ou, pelo menos, praticamente retilíneos). Esses "caminhos" são as **trajetórias** dessas aeronaves em relação à Terra.

Já na próxima fotografia, um veículo está descrevendo uma trajetória curvilínea também em relação à Terra.



As trajetórias dos veículos que percorrem esse trecho da rodovia são curvilíneas.

No fragmento de um mapa do Brasil a seguir, vemos linhas representando alguns rios. Essas linhas indicam as sinuosas trajetórias descritas pela água, ou seja, os lugares por onde ela passa ao escoar ao longo dos rios.

Alguns afluentes do rio Amazonas

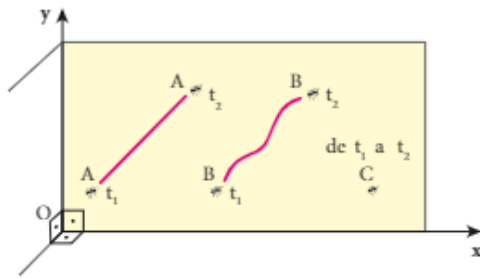


Fonte: ÍSOLA, Leda; CALDINI, Vera. Atlas geográfico Saraiva. São Paulo: Saraiva, 2013.

Para um corpo que possa ser tratado segundo o modelo de ponto material, podemos dizer que:

Trajétória de um ponto material em movimento é a linha que ele descreve em relação a um referencial. Caso o ponto material encontre-se em repouso, sua trajetória reduz-se a um ponto.

Imagine, por exemplo, que três formigas A, B e C se mantiveram em uma mesma parede durante certo intervalo de tempo, de t_1 a t_2 . A figura a seguir mostra os lugares onde elas estiveram nesse intervalo de tempo.

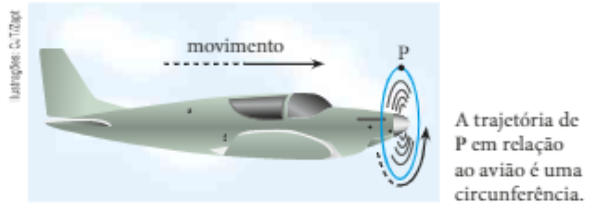


Concluimos que a trajetória descrita em relação à parede foi retilínea para a formiga A, curvilínea para a formiga B e reduziu-se a um ponto para a formiga C, que não se moveu em relação à parede.

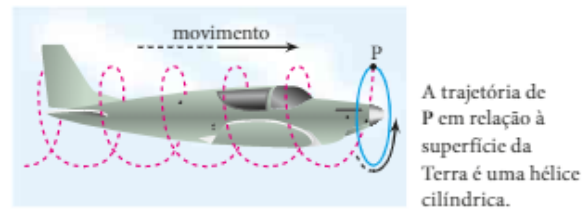
O conceito de trajetória também é relativo, isto é, está vinculado à apreciação de um referencial. Assim, a trajetória descrita por uma partícula, durante certo

intervalo de tempo, pode variar de um referencial para outro.

Considere, por exemplo, um avião em voo retilíneo e horizontal e um ponto P, situado em uma das extremidades da hélice. A trajetória desse ponto P, em relação ao avião, é uma circunferência.



Em relação a um referencial no solo, entretanto, a trajetória desse mesmo ponto P é uma hélice cilíndrica.



A hélice cilíndrica descrita é o resultado da composição de dois movimentos: um movimento circular e um movimento retilíneo horizontal, perpendicular ao plano do primeiro.



O que é uma cicloide?

A figura a seguir representa um vagão em movimento em relação ao solo, seguindo trilhos retilíneos e horizontais, de modo que suas rodas rolem sem deslizar. Observe o ponto P indicado na periferia de uma delas.

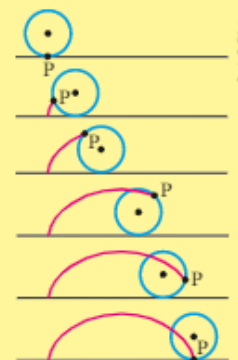


A trajetória do ponto P em relação a um referencial no vagão é uma **circunferência**, pois, em relação ao vagão, o ponto P realiza um movimento circular em torno do eixo da roda.

Trajetória do ponto P em relação ao vagão.

Vamos analisar, agora, a trajetória de P em relação a um referencial no **solo**. Em relação ao solo, o ponto P descreve um movimento circular em torno do eixo da roda e, **ao mesmo tempo**, realiza uma translação horizontal para a direita em virtude do movimento do vagão. A trajetória de P em relação ao solo é uma curva denominada **cicloide**, que se vê destacada em magenta na figura ao lado. (A rigor, essa curva é a **cicloide simples**, pois existem cicloides com aspectos diferentes.)

Você acabou de ver mais um exemplo mostrando que a trajetória de um ponto depende do referencial.



6. RAPIDEZ MÉDIA

A **rapidez média** (em inglês, *average speed*), também conhecida por velocidade média, sem nenhum outro adjetivo, é uma grandeza que vamos simbolizar por rap_m .

Ela é a maneira mais simples de conceituar velocidade média no dia a dia de pessoas. Basta dividir por Δt , que nunca é negativo, a distância total d percorrida, que também nunca é negativa, por uma pessoa, ou outro corpo qualquer, nesse intervalo de tempo.

Então definimos:
$$\text{rap}_m = \frac{d}{\Delta t}$$

Note que, como d e Δt nunca são negativos, rap_m também nunca será negativa.

A distância d deve ser medida ao longo da trajetória: é o número de quilômetros, ou de metros, ou de outra unidade de comprimento, **realmente** percorrido.

Vamos ver um exemplo de cálculo de rap_m :

Imagine que às 14 h, Pedro partiu de automóvel da cidade de São Paulo com destino à cidade do Rio de Janeiro, onde chegou às 19 h, após percorrer cerca de 400 km.

Vamos calcular a rapidez média de Pedro nessa viagem. Temos: $d = 400 \text{ km}$; $t_1 = 14 \text{ h}$ e $t_2 = 19 \text{ h}$.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 19 \text{ h} - 14 \text{ h} \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ h}$$

Então:

$$\text{rap}_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{400 \text{ km}}{5 \text{ h}} \Rightarrow \text{rap}_m = 80 \text{ km/h}$$

Esse resultado significa que, **em média**, o veículo percorreu 80 km em cada hora — pode ter percorrido mais de 80 km em alguns intervalos de uma hora e menos de 80 km em outros. É pouquíssimo provável que tenha percorrido sempre 80 km em cada hora.

Se a viagem de volta, pela mesma rodovia, também durou 5 h, a rap_m continua valendo 80 km/h.

7. ESPAÇO

Imagine um automóvel movendo-se em uma rodovia. Como podemos fornecer sua posição em um determinado instante, ou seja, onde ele está nesse instante?

Observe a fotografia ao lado.

Carro transitando em uma estrada.



No momento em que ela foi tirada, o automóvel estava no km 35 de determinada rodovia.

Isso significa que o automóvel estava a 35 km do km 0 (o chamado marco zero) dessa rodovia, medidos ao longo dela. Note que a indicação (km 35), lida no marco quilométrico, fornece a posição do veículo em relação ao marco zero.

Obviamente essa maneira de dar a posição de um corpo só é possível no caso de trajetórias previamente estabelecidas, ou seja, conhecidas de antemão.

De fato, a rodovia já estava pronta para ser seguida e os marcos quilométricos já estavam fixados à beira dela.

Ao valor lido nos marcos quilométricos vamos dar o nome de **espaço** e simbolizá-lo por s . Assim, o espaço do automóvel no instante em que a fotografia foi tirada é $s = 35 \text{ km}$.

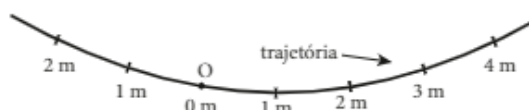
Você provavelmente nunca viu, por exemplo, um marco quilométrico com a indicação $-km \ 20$. Em uma rodovia não são utilizados espaços negativos. Entretanto, no estudo formal dos movimentos, muitas vezes precisamos deles.

Suponha que uma partícula descreva uma trajetória já construída, como a representada na figura a seguir.



Como o ponto de referência (que, em uma rodovia, corresponde ao km 0) não está estabelecido, podemos adotá-lo arbitrariamente em algum lugar da trajetória. Pode ser, por exemplo, o ponto O indicado na próxima figura. Em relação a ele, deverão ficar determinados os espaços que fornecerão, a cada instante, a posição da partícula.

Na trajetória representada a seguir, vamos marcar pontos situados a 1 m, 2 m, 3 m etc. em relação a O .



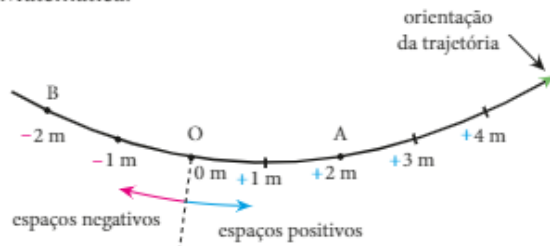
Suponha que, em certo instante, a partícula esteja a 2 m de O . Qual é o valor do espaço correspondente à sua posição?

Observe que a informação “a 2 m de O ” não determina uma única posição na trajetória, mas sim **duas**, pois a partícula tanto pode estar à direita como à esquerda de O .

Então, algo ainda precisa ser feito para distinguir uma posição da outra: o espaço correspondente a uma possível posição deve ser diferente do espaço correspondente à outra.

Para fazer essa distinção, adotamos a seta desenhada na trajetória (veja a figura a seguir). Essa seta indica o sentido em que a trajetória está orientada, ou, em uma linguagem simplificada, indica o “sentido da trajetória”.

Dessa maneira, por meio de um sinal (+ ou -) atribuído aos espaços, distinguimos as posições à direita de **O** das posições à esquerda desse ponto, de modo análogo ao que se faz com a reta numérica em Matemática.



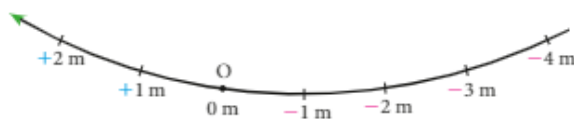
Agora podemos responder à pergunta formulada.

Se a partícula estiver no ponto **A**, seu espaço será: $s_A = +2 \text{ m}$ (o sinal de + pode ser omitido).

Se estiver em **B**, seu espaço será: $s_B = -2 \text{ m}$.

E, obviamente, se ela estiver em outro lugar, seu espaço terá outro valor.

Se fosse adotada outra orientação para a trajetória, como está indicado na figura a seguir, os sinais dos espaços ficariam trocados.



Espaço(s) de uma partícula é a grandeza que determina sua posição em relação à trajetória, posição esta dada pelo comprimento do trecho de trajetória compreendido entre a partícula e o ponto **O**, acrescido de um sinal positivo ou negativo, conforme a região em que ela se encontra. O ponto **O** é denominado **origem dos espaços**. Note que a orientação da trajetória indica o sentido dos espaços crescentes.

Símbolos de unidades e símbolos de grandezas

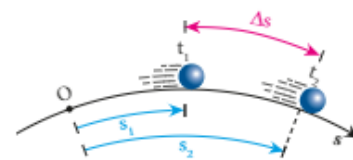
As **unidades de medida** das grandezas têm símbolos bem determinados. O Sistema Internacional de Unidades estabelece, por exemplo, que o símbolo do

metro é **m** e o do quilograma é **kg**. As **grandezas**, entretanto, não têm símbolos oficiais. Assim, cada grandeza pode ser simbolizada por qualquer letra. Por isso, podemos encontrar a grandeza **espaço** simbolizada pelas letras **e**, **s**, **x**, **y**, entre outras.

8. VARIACÃO DE ESPAÇO E DISTÂNCIA PERCORRIDA

Variação de espaço (ou deslocamento escalar)

Observe, na figura a seguir, uma partícula que se desloca do instante t_1 , em que o espaço vale s_1 , até o instante t_2 , em que o espaço vale s_2 .



A variação de espaço Δs (lê-se “delta esse”) entre t_1 e t_2 é dada por:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

Das duas posições consideradas, uma é inicial e outra é final. Assim, a **variação de espaço** é o espaço na posição final menos o espaço na posição inicial.

É importante notar que, se a posição inicial e a posição final coincidirem, teremos Δs igual a zero. Se a partícula mover-se no sentido da trajetória, s_2 será maior que s_1 e, portanto, Δs será **positivo**. Entretanto, se a partícula mover-se em sentido contrário ao da trajetória, s_2 será menor que s_1 e, assim, Δs será **negativo**.

Diversas grandezas escalares podem assumir valores positivos ou negativos. Chama-se **módulo** ou **valor absoluto** da grandeza o número, sem sinal, acompanhado da unidade de medida (símbolo do módulo: | |).

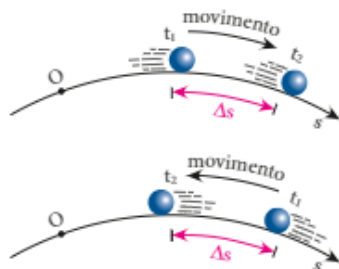
Distância percorrida

Distância percorrida é uma grandeza que informa quanto a partícula percorreu entre dois instantes, devendo ser calculada sempre em valor absoluto.

É preciso considerar dois casos:

1º caso: A partícula desloca-se sempre em um mesmo sentido

Nesse caso, a distância percorrida é igual ao módulo da variação do espaço.

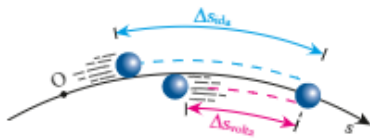


Na primeira figura, Δs é positivo. Na segunda, Δs é negativo. Entretanto, nas duas figuras, temos:

$$\text{distância percorrida} = |\Delta s|$$

2º caso: A partícula inverte o sentido de seu movimento

Nesse caso, a distância percorrida é calculada adicionando-se os módulos da variação de espaço em cada sentido, isto é, o Δs na ida com o Δs na volta, ambos tomados em módulo:



$$\text{distância percorrida} = |\Delta s_{\text{ida}}| + |\Delta s_{\text{volta}}|$$

NOTA

Nos dois casos, a distância percorrida é o d usado na definição de v_m .

9. VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA

Observe as cenas representadas a seguir.



De acordo com as figuras, um automóvel partiu às 6 horas da manhã de uma cidade situada no km 10 de uma rodovia. Seguindo por essa rodovia, esse automóvel chegou às 10 horas da mesma manhã ao seu destino, que era outra cidade situada no km 250. Analisando esses dados, concluímos que a variação de espaço do automóvel foi de 240 km ($\Delta s = 250 \text{ km} - 10 \text{ km} = 240 \text{ km}$) num intervalo de tempo de 4 horas ($\Delta t = 10 \text{ h} - 6 \text{ h} = 4 \text{ h}$). Assim, podemos afirmar que, em média, a variação de espaço foi de 60 km por hora. Essa grandeza é denominada **velocidade escalar média** e simbolizada por v_m .

Velocidade escalar média

entre dois instantes é a variação de espaço ocorrida, em média, por unidade de tempo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No exemplo anterior, obtivemos $v_m = 60 \text{ km/h}$. Isso não significa que o automóvel percorreu necessariamente 60 km em cada hora. Pode ser, por exemplo, que na primeira hora de viagem ele tenha percorrido 80 km, na segunda hora, 50 km, na terceira, 40 km e na quarta, 70 km. Por isso dizemos que, **em média**, ele percorreu 60 km em cada hora.

Com relação às **unidades de medida de velocidade**, note que elas correspondem sempre a um quociente de uma unidade de comprimento por uma de tempo. Assim, no SI, temos:

$$\text{unid}(v) = \frac{\text{unid}(s)}{\text{unid}(t)} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A unidade de velocidade, no SI, é o **metro por segundo (m/s)**.

Frequentemente, usamos também a unidade **quilômetro por hora (km/h)** e vale a seguinte relação:

$$3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$$

$$\text{De fato: } \frac{3,6 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{3,6 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}$$

10. VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

Na apresentação da seção anterior, um automóvel sofreu uma variação de espaço de 240 km durante um intervalo de tempo de 4 h, o que determinou uma velocidade escalar média de 60 km/h.

Observe que esse resultado não nos permite saber como foi o movimento em diferentes instantes daquele intervalo de 4 horas. De fato, dependendo das condi-

ções de tráfego e do comportamento do motorista, o automóvel pode ter corrido mais em certos instantes e menos em outros, mas nada sabemos. Isso quer dizer que o velocímetro do automóvel, isto é, o seu medidor de velocidade, certamente indicou valores diferentes em diferentes instantes. O valor indicado pelo velocímetro em certo instante é o valor absoluto da **velocidade escalar instantânea** do automóvel nesse instante. É essa velocidade que nos faz conhecer de fato o movimento no decorrer do tempo.



Grandes velocidades

Você já pensou em exemplos de situações que envolvem grandes velocidades? Veja alguns a seguir.

No movimento de translação, a Terra desloca-se em torno do Sol com uma velocidade escalar média de 108 000 km/h. Uma pessoa **P**, situada no Equador, gira em torno do eixo do planeta a quase 1 700 km/h.

A luz que o Sol nos envia viaja no vácuo a cerca de 300 000 km/s, que é, pelos conhecimentos atuais da Física, o limite de velocidade no Universo.

Os sons e os ruídos produzidos na superfície da Terra propagam-se no ar com velocidades próximas de 340 m/s.

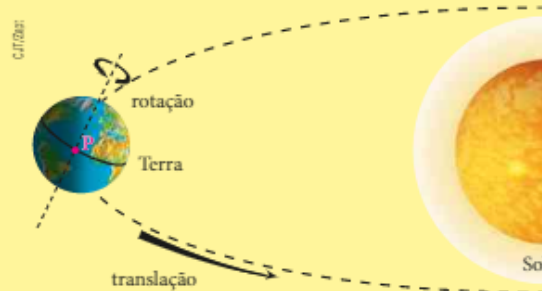


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.



O TGV (*train à grande vitesse*) atingiu a velocidade recorde de 574,8 km/h em abril de 2007.



O guepardo (ou chita), o mais veloz dos mamíferos, consegue atingir cerca de 110 km/h de velocidade (quase 31 m/s), enquanto um atleta olímpico, nos 100 metros rasos, corre, em média, a 10 m/s.

QUESTÕES COMENTADAS



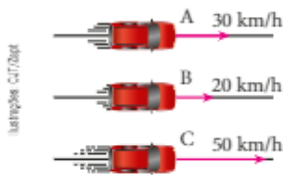
1 Considere três veículos A, B e C. Se A está em movimento em relação a B, e B está em movimento em relação a C:

- a) é possível que A esteja em movimento em relação a C?
b) podemos garantir que A está em movimento em relação a C?

RESOLUÇÃO

a) É possível. Confirmemos isso por meio do seguinte exemplo:

Os veículos A, B e C movem-se no mesmo sentido sobre retas paralelas, com A a 30 km/h, B a 20 km/h e C a 50 km/h.

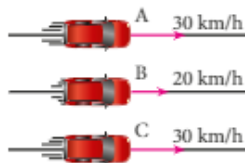


O veículo A corre mais que o veículo B. Então, A está em **movimento** em relação a B.

O veículo B corre menos que o veículo C. Então, B também está em **movimento** em relação a C.

O veículo A corre menos que o C. Então, A também está em **movimento** em relação a C.

- b) Não podemos. E isso pode ser constatado por meio do exemplo a seguir, em que consideramos novamente três veículos A, B e C movendo-se no mesmo sentido sobre retas paralelas, com A a 30 km/h, B a 20 km/h e C a 30 km/h.



O veículo A corre mais que o B. Então, A está em **movimento** em relação a B.

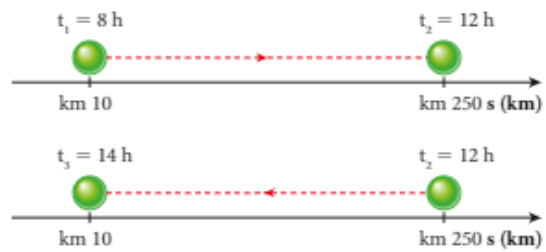
O veículo B corre menos que o C. Então, B está em **movimento** em relação a C.

Entretanto, A corre tanto quanto C, e, por isso, A está em **repouso** em relação a C.

Observe que, se o veículo B estivesse a 30 km/h como os outros dois, qualquer veículo estaria em repouso em relação aos demais.

Respostas: a) Sim; b) Não.

2 Um motociclista partiu do km 10 de uma rodovia às 8 horas da manhã (t_1) e chegou ao km 250 às 12 horas (t_2). Imediatamente, ele iniciou a viagem de volta, retornando ao km 10 às 14 horas (t_3).



Calcule a rapidez média (ou velocidade média) rap_m e a velocidade escalar média v_m do motociclista entre os instantes:

- a) t_1 e t_2 ; b) t_2 e t_3 ; c) t_1 e t_3 .

RESOLUÇÃO

Consideremos Δt o intervalo de tempo, Δs a variação do espaço e d a distância percorrida.

a) Entre t_1 e t_2 , temos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 12 - 8 \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ h}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 250 - 10 \Rightarrow \Delta s = 240 \text{ km}$$

$$d = |\Delta s| \Rightarrow d = 240 \text{ km}$$

Então:

$$rap_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{240 \text{ km}}{4 \text{ h}} \Rightarrow rap_m = 60 \text{ km/h}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{240}{4} \Rightarrow v_m = 60 \text{ km/h}$$

Note que v_m resultou positiva, pois o movimento ocorreu no sentido da trajetória.

b) Entre t_2 e t_3 , temos:

$$\Delta t = t_3 - t_2 = 14 - 12 \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ h}$$

$$\Delta s = s_3 - s_2 = 10 - 250 \Rightarrow \Delta s = -240 \text{ km}$$

$$d = |\Delta s| \Rightarrow d = 240 \text{ km}$$

Então:

$$rap_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{240 \text{ km}}{2 \text{ h}} \Rightarrow rap_m = 120 \text{ km/h}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-240}{2} \Rightarrow v_m = -120 \text{ km/h}$$

Observe que v_m resultou negativa, pois o movimento ocorreu em sentido contrário ao da trajetória.

c) Entre t_1 e t_3 , temos:

$$\Delta t = t_3 - t_1 = 14 - 8 \Rightarrow \Delta t = 6 \text{ h}$$

$$\Delta s = s_3 - s_1 = 10 - 10 \Rightarrow \Delta s = 0 \text{ km}$$

$$d = |\Delta s_{\text{ida}}| + |\Delta s_{\text{volta}}| = 240 \text{ km} + 240 \text{ km} \Rightarrow d = 480 \text{ km}$$

Então:

$$rap_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{480 \text{ km}}{6 \text{ h}} \Rightarrow rap_m = 80 \text{ km/h}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0 \text{ km}}{6 \text{ h}} \Rightarrow v_m = 0 \text{ km/h}$$

O resultado $v_m = 0$ costuma decepcionar as pessoas que esperam da Física uma utilidade prática. De fato, não é esse cálculo que interessa fazer na prática, mas sim o cálculo de rap_m .

Entretanto, o tratamento matemático que estamos destinando ao estudo do movimento é útil e facilita a resolução de muitos problemas reais. Além disso, esse resultado, es-

tranho do ponto de vista prático, tem uma interpretação: uma grandeza que é positiva durante um intervalo de tempo e negativa em um outro intervalo pode ter valor médio nulo no intervalo de tempo total.

Respostas: a) 60 km/h e 60 km/h;

b) 120 km/h e -120 km/h; c) 80 km/h e 0 km/h.

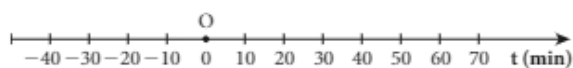


QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

3. O tempo também pode ser representado em um eixo. A origem desse eixo significa o instante $t = 0$ em que foi iniciada uma contagem de tempo. Pode ser o início de um dia (zero hora), por exemplo, mas pode ser um momento qualquer em que um cronômetro foi acionado para começar a medir a duração de algum fenômeno. Após observar o eixo t representado a seguir, faça o que se pede.



- Determine o intervalo de tempo entre os instantes 10 min e 60 min.
- O que significa o instante -20 min?
- Determine o intervalo de tempo entre os instantes -20 min e 30 min.

4. Um automóvel aproxima-se de um paredão, como ilustra a figura:



É **incorreto** afirmar que:

- o automóvel está em movimento em relação ao paredão.
- o paredão está em movimento em relação ao automóvel.
- o paredão está em repouso em relação ao solo.
- o motorista está em repouso em relação ao automóvel, mas em movimento em relação à superfície da Terra.
- o paredão está em repouso em relação ao automóvel.

5. O centro da Terra descreve uma trajetória praticamente circular em torno do centro do Sol. A Lua também descreve uma trajetória praticamente circular em torno do centro da Terra. Apresente uma evidência de que essas duas trajetórias não estão contidas em um mesmo plano.

6. Em certo instante, um automóvel encontra-se no km 120 de uma rodovia. Em outras palavras, o espaço do automóvel nesse instante é igual a 120 km. Isso significa que:

- o automóvel já percorreu 120 km certamente.

- o automóvel está em movimento no referido instante, no sentido da trajetória.
- o automóvel, nesse instante, está em repouso.
- o automóvel encontra-se a 120 km do km 0, medidos ao longo da trajetória.
- a distância do local em que o automóvel está até o km 0, medida em linha reta, é 120 km necessariamente.

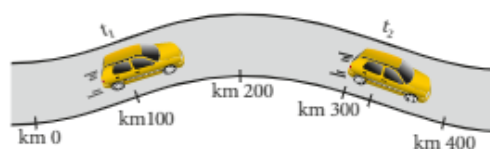
7. A velocidade escalar média de um ônibus que se moveu sempre no mesmo sentido foi de 10 m/s, em certo intervalo de tempo. Isso significa que o ônibus:

- percorreu necessariamente 10 metros em cada segundo.
- iniciou o movimento no espaço 10 m.
- possivelmente percorreu 10 metros em cada segundo.
- certamente nunca parou durante esse intervalo de tempo.
- não pode ter percorrido 15 metros em algum segundo.

8. Dois automóveis, A e B, partem em um mesmo instante de uma cidade X com destino a outra cidade Y, distante 420 km de X. O automóvel A faz o percurso em 5 horas e o B, em 6 horas. Pode-se afirmar que:

- o automóvel B percorreu uma distância maior que a percorrida por A.
- a velocidade escalar média de B é maior que a de A.
- é possível que, em algum momento, B tenha sido mais veloz que A.
- A esteve sempre na frente de B.
- A e B não pararam nenhuma vez durante a viagem.

9. Um automóvel inicia uma viagem no km 100 de uma rodovia às 10 horas da manhã (t_1), chegando ao km 340 às 14 horas (t_2).



Calcule a velocidade escalar média do automóvel.

10. Pedro caminhou 117,45 m durante 2,25 min. Paulo, com velocidade escalar média igual a 0,81 m/s, caminhou durante 2 min 25 s. Calcule:

- a) a velocidade escalar média de Pedro, em m/s;
b) a distância percorrida por Paulo, em m.

11. Um coelho e um jabuti apostaram uma corrida em um percurso de 800 m, partindo emparelhados e no mesmo instante (sete horas da manhã de um dia nublado). Suponha que o jabuti e o coelho corram com velocidades constantes, respectivamente iguais a 1,6 m/min e 24 km/h. Após percorrer 200 m, o coelho, estimulado pela má *performance* de seu oponente, parou para tirar uma soneca. Quando acordou, retomou imediatamente a corrida e, ao chegar ao final do percurso, teve uma desconcertante surpresa: o jabuti já estava lá comemorando a vitória.

- a) Determine quanto tempo (Δt) durou a soneca do coelho.
b) O que se pode afirmar sobre a velocidade escalar média do coelho ao longo de todo o percurso?

12. Uma pessoa viaja em um automóvel cujo velocímetro está danificado. Desejando saber sua velocidade média em determinado percurso e sabendo que os postes da rede elétrica dispostos à margem da estrada distam 60 m um do outro, a pessoa começa a marcar o tempo no instante em que passa em frente a um certo poste (que chamaremos de 1^o poste). A pessoa constata que transcorreram 45,6 s até passar pelo 20^o poste.

Calcule em km/h a velocidade média nesses 45,6 s.

11. MOVIMENTO UNIFORME

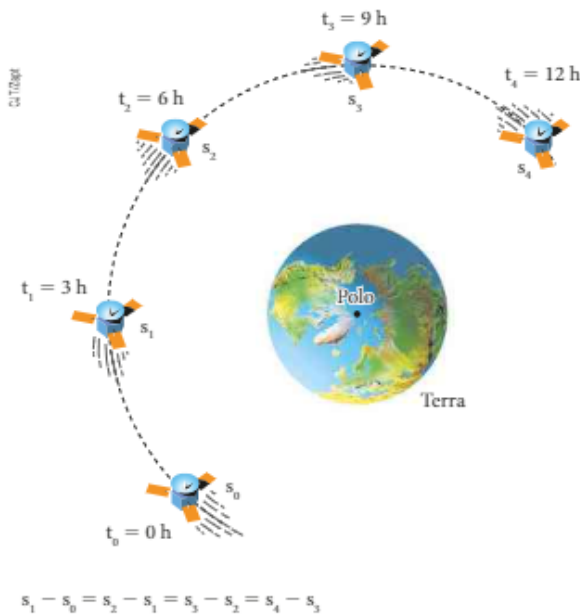
Um movimento é denominado **uniforme** quando ocorre com uma velocidade escalar que não se modifica com o passar do tempo. É o que pode acontecer, por exemplo, com alguns automóveis modernos dotados de piloto automático.

Em condições de trânsito livre, mesmo um automóvel sem esse recurso pode manter-se em movimento praticamente uniforme durante algum tempo.

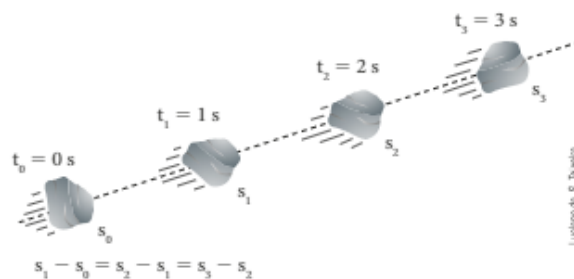
Na natureza, encontramos casos interessantes de movimentos uniformes, como a propagação da luz e do som em meios homogêneos ou o movimento de uma rocha numa região do Universo em que o campo gravitacional seja desprezível.

Movimento uniforme (MU) é aquele em que a velocidade escalar instantânea é constante e diferente de zero, de modo que o móvel sofre iguais variações de espaço em iguais intervalos de tempo.

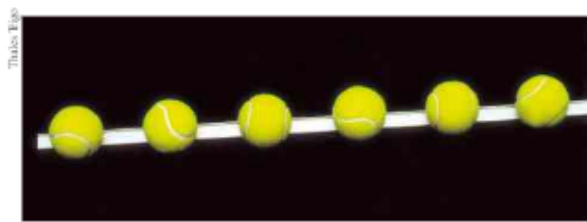
Observe que, na definição apresentada, não foi feita nenhuma restrição à forma da trajetória, podendo ser retilínea ou curvilínea. Veja os exemplos seguintes:



Muitos satélites artificiais realizam movimentos uniformes e circulares. Mais uma vez, pode-se observar que, em iguais intervalos de tempo, as distâncias percorridas são iguais. Evidentemente, esses satélites estão submetidos à gravidade terrestre. (Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.)



Uma rocha lançada em uma região do Universo de gravidade desprezível realiza um movimento uniforme e retilíneo. Observe que, em iguais intervalos de tempo, ela percorre distâncias iguais.

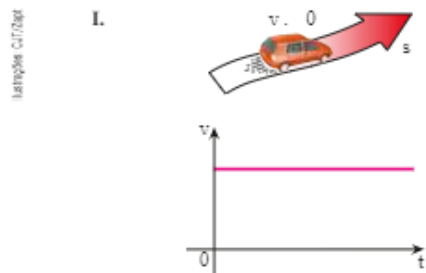


Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis em movimento uniforme. Observe que, em iguais intervalos de tempo, os deslocamentos escalares da bola também são iguais.

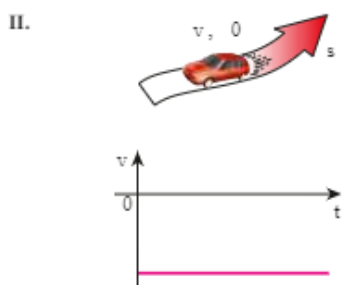
Representação gráfica da velocidade escalar instantânea em função do tempo

Em todos os instantes do intervalo de tempo em que um movimento é uniforme, a velocidade escalar instantânea é sempre a mesma.

Então, a representação gráfica dessa velocidade em função do tempo pode ser:



A velocidade escalar é constante e diferente de zero, o que nos leva à conclusão de que o movimento é uniforme. A velocidade escalar é positiva e, por isso, concluímos que o movimento se dá no sentido da trajetória.



A velocidade escalar é constante e diferente de zero, portanto, o movimento é uniforme. A velocidade escalar é negativa, então, o movimento se dá em sentido contrário ao da trajetória.

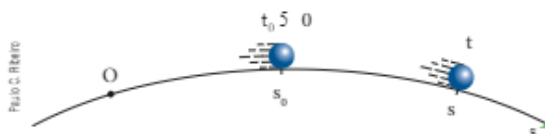
NOTA

No **repouso**, a velocidade escalar é constante e igual a **zero**. Nesse caso, a representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo é:



Função horária do espaço

Considere uma partícula em movimento uniforme descrevendo a trajetória representada a seguir:



Essa trajetória está orientada, sendo o ponto O a origem dos espaços. No instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos), a partícula estava em um ponto no qual o espaço era s_0 (espaço inicial). Em um instante qualquer t , a partícula está em um ponto de espaço s .

Observe que, em um movimento uniforme, a velocidade escalar média (v_m) em qualquer intervalo de tempo coincide com a velocidade escalar instantânea (v) em qualquer instante, uma vez que esta última é constante.

Assim, podemos escrever, no intervalo de t_0 a t :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{s - s_0}{t}$$

$$s - s_0 = v t$$

$$s = s_0 + v t$$

A expressão obtida é a **função horária dos espaços** para qualquer movimento uniforme.

Observe que, nessa expressão:

- s_0 é o espaço em $t_0 = 0$, ou seja, o espaço inicial;
- v é a velocidade escalar;
- s é o espaço em um instante t qualquer.

Observe, também, que a função obtida é do **primeiro grau** em t .

Em muitas situações, é mais conveniente escrever essa função da seguinte forma:

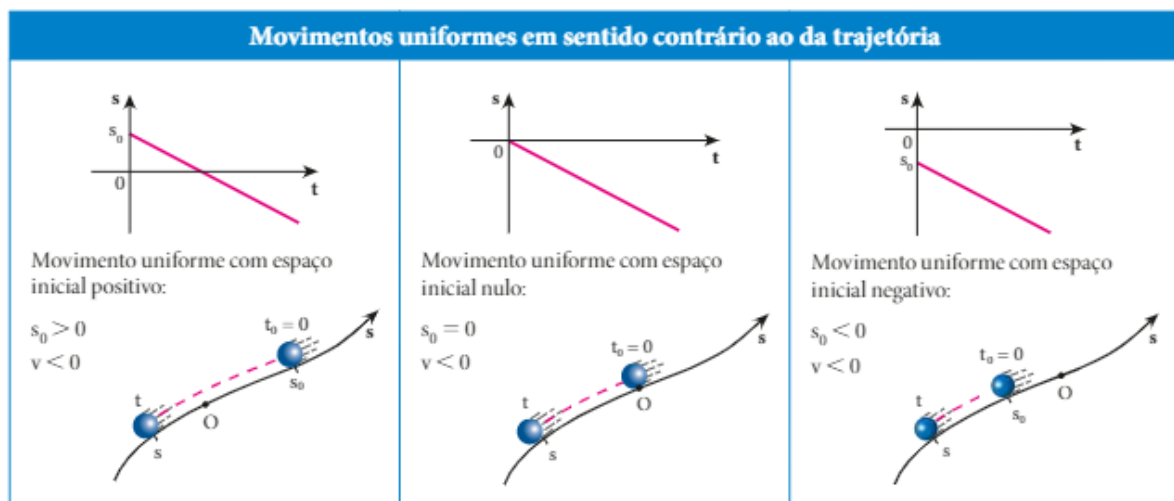
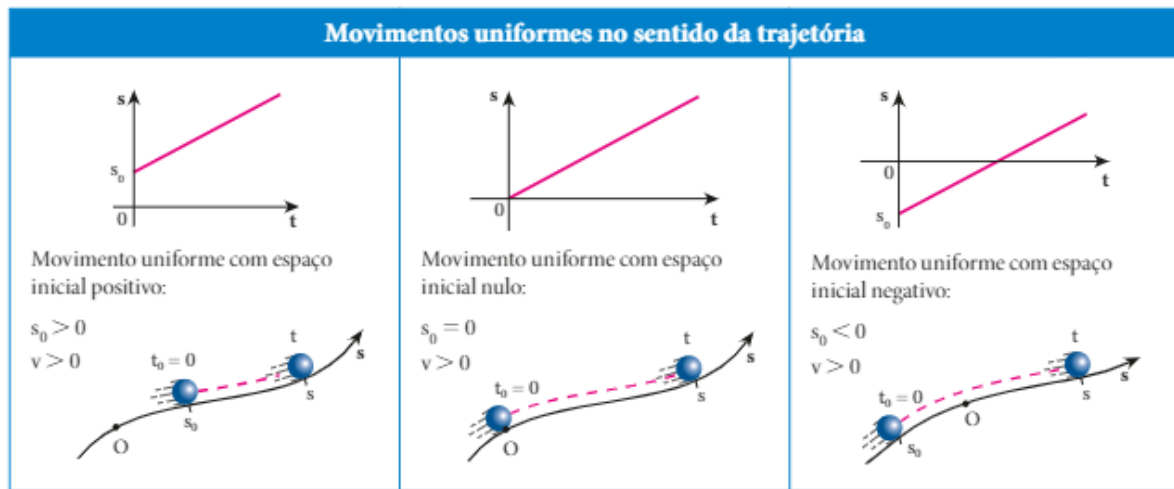
$$\Delta s = v t$$

em que Δs é o deslocamento escalar ocorrido desde o instante $t_0 = 0$ até o instante t .

Frequentemente, encontramos enunciados de questões em que a orientação da trajetória e a origem dos espaços não são dadas. Se tivermos de equacionar um movimento, nesses casos, **adotamos** uma orientação para a trajetória e **escolhemos** um ponto qualquer dela para ser a origem dos espaços.

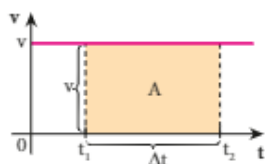
Representação gráfica do espaço em função do tempo

Como a função horária do movimento uniforme, $s = s_0 + v t$, é do primeiro grau em t , sua representação gráfica é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos, podendo enquadrar-se em um dos casos apresentados a seguir:



Propriedade do gráfico da velocidade escalar em função do tempo

Considere o gráfico da velocidade escalar v em função do tempo t em um movimento uniforme. Vamos escolher dois instantes quaisquer t_1 e t_2 e calcular a "área" A que eles determinam entre o eixo dos tempos e o gráfico:



A região destacada no gráfico é um retângulo, cuja base representa o intervalo de tempo Δt entre t_1 e t_2 e a altura representa a velocidade escalar.

Lembrando que a área de um retângulo é determinada multiplicando-se a medida de sua base pela medida de sua altura, temos:

$$A = \Delta t v \quad (\text{I})$$

Como $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, temos que: $\Delta s = \Delta t v$ (II)

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$A = \Delta s$$

Assim, temos que:

No gráfico da velocidade escalar (v) em função do tempo (t), a “área” entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes t_1 e t_2 , expressa a variação de espaço entre t_1 e t_2 .

$$\text{“área”} = \Delta s = s_2 - s_1$$

Observe que, a rigor, não calculamos a área do retângulo, pois esta seria o produto do **comprimento** da base pelo **comprimento** da altura. Na verdade, fizemos o produto daquilo que a base representa (Δt) por aquilo que a altura representa (v). É por esse motivo que escrevemos “área” usando aspas.

QUESTÕES COMENTADAS



13 As funções horárias do espaço de duas partículas, A e B, que se movem numa mesma reta orientada, são dadas no SI por:

$$s_A = 4t \quad \text{e} \quad s_B = 120 - 2t$$

A origem dos espaços é a mesma para o estudo dos dois movimentos, o mesmo ocorrendo com a origem dos tempos. Determine:

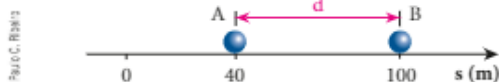
- a distância que separa as partículas no instante $t = 10$ s;
- o instante em que essas partículas se encontram;
- a posição em que se dá o encontro.

RESOLUÇÃO

a) Em $t = 10$ s, temos:

$$s_A = 4(10) \Rightarrow s_A = 40 \text{ m}$$

$$s_B = 120 - 2(10) \Rightarrow s_B = 100 \text{ m}$$



Assim, no instante $t = 10$ s, a distância entre as partículas é:

$$d = 100 - 40 \Rightarrow d = 60 \text{ m}$$

b) No instante em que essas partículas se encontram, (t_c), seus espaços são iguais. Então, podemos escrever:

$$4t_c = 120 - 2t_c \Rightarrow t_c = 20 \text{ s}$$

c) A posição em que se dá o encontro é dada pelo espaço correspondente:

$$s_A = 4t_c = 4(20) \Rightarrow s_A = 80 \text{ m} \Rightarrow s_A = s_B = 80 \text{ m}$$

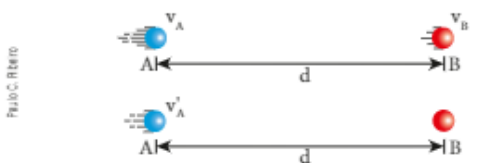
Respostas: a) 60 m; b) 20 s; c) 80 m

O texto a seguir apresenta outra maneira de determinar o instante e a posição do encontro das partículas.

Considere duas partículas, A e B, movendo-se numa mesma trajetória, com velocidades escalares constantes v_A e v_B , medidas em relação ao solo. Seja d a “distância” que as separa no instante $t_0 = 0$. A determinação do **instante de encontro** (t_c) entre elas pode ser feita de um modo bem mais simples, adotando-se como referencial **uma das partículas**. Com isso, a

velocidade dessa partícula torna-se igual a zero (ela “para”) e a velocidade da outra terá módulo igual à diferença entre os módulos de v_A e v_B , quando elas se moverem no mesmo sentido, e módulo igual à soma dos módulos de v_A e v_B , quando se moverem em sentidos opostos. Veja os seguintes esquemas:

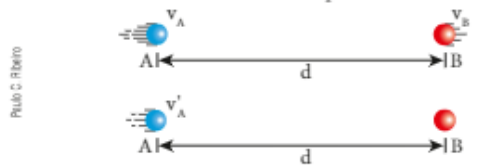
- A e B movem-se no mesmo sentido



(Referencial em B)
Lembrando que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, calculamos t_c fazendo:

$$|v'_A| = \frac{d}{t_c}, \text{ em que } |v'_A| = |v_A| - |v_B|$$

- A e B movem-se em sentidos opostos



(Referencial em B)
Como $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, calculamos t_c fazendo

$$|v'_A| = \frac{d}{t_c}, \text{ em que } |v'_A| = |v_A| + |v_B|$$

A questão 13 se enquadra no 2º caso.

Assim, adotando um referencial na partícula B, temos:

$$|v'_A| = |v_A| + |v_B| = 4 + 2 \Rightarrow |v'_A| = 6 \text{ m/s}$$

Como $s_{0A} = 0$ e $s_{0B} = 120$ m, temos, em $t_0 = 0$, $d = 120$ m.

Assim:

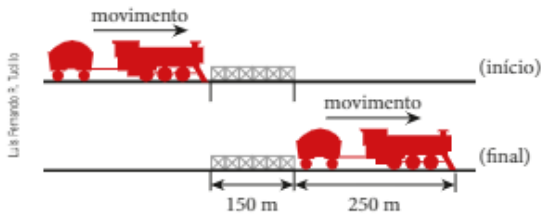
$$|v'_A| = \frac{d}{t_c} \Rightarrow 6 = \frac{120}{t_c} \Rightarrow t_c = 20 \text{ s}$$

Substituindo t_c em qualquer das duas funções horárias do espaço, achamos a posição do encontro na reta orientada.

14 Calcule o tempo que um trem de 250 m de comprimento, viajando a 72 km/h, demora para atravessar completamente uma ponte de 150 metros de extensão.

RESOLUÇÃO

Os desenhos representam o trem no início e no final da travessia:

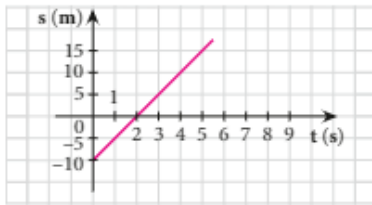


Então, durante a travessia, o trem percorre 400 m com velocidade escalar igual a 72 km/h, que equivale a 20 m/s.

Assim: $\Delta s = v t \Rightarrow 400 = 20t \Rightarrow t = 20 \text{ s}$

Resposta: 20 s.

15 O movimento uniforme de um beija-flor tem sua função horária representada no diagrama:



Determine para esse movimento:

- a) a forma da trajetória descrita pelo beija-flor;
- b) o espaço inicial e a velocidade escalar;
- c) a função horária dos espaços.

RESOLUÇÃO

- a) A forma da trajetória descrita pelo beija-flor está **indeterminada**, já que o gráfico do espaço em função do tempo nada informa a esse respeito.
- b) O espaço inicial é lido diretamente no gráfico, no instante $t_0 = 0 \text{ s}$. Assim: $s_0 = -10 \text{ m}$

Para o cálculo da velocidade escalar (constante), devemos ler, no gráfico, os valores do espaço em dois instantes quaisquer. Por exemplo:

• Em $t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow s_1 = 0$; • Em $t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow s_2 = 10 \text{ m}$.

Assim: $v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 0}{4 - 2} \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$

- c) A função horária dos espaços num movimento uniforme é do tipo: $s = s_0 + v t$.

Assim, temos: $s = -10 + 5t \text{ (SI)}$

Respostas: a) Indeterminada; b) -10 m e 5 m/s ; c) $s = -10 + 5t \text{ (SI)}$.

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

16. Na procura de cardumes, um pescador usa o **sonar** de seu barco, que emite um sinal de ultrassom. Esse sinal propaga-se pela água, incide em um cardume, onde sofre reflexão, retornando ao barco 0,30 s após a emissão. A que profundidade está o cardume, sabendo que a velocidade do ultrassom na água é igual a 1 480 m/s?

17. A figura a seguir mostra dois móveis pontuais A e B em movimento uniforme, com velocidades escalares de módulos respectivamente iguais a 11 m/s e 4 m/s. A situação representada na figura corresponde ao instante $t_0 = 0 \text{ s}$.



Determine:

- a) as funções horárias do espaço para os movimentos de A e de B;
- b) o instante em que A e B se encontram;
- c) os espaços de A e de B no instante do encontro.

18. Às oito horas da manhã, uma motocicleta está passando pelo km 10 de uma rodovia, a 120 km/h, e um automóvel está passando pelo km 60 da mesma rodovia a 80 km/h. Sabendo que os dois veículos viajam no mesmo sentido e supondo que suas velocidades escalares sejam constantes, determine o horário em que a motocicleta irá alcançar o automóvel.

19. Um trem de 200 m de comprimento move-se com velocidade escalar constante de 72 km/h. Calcule o tempo decorrido para esse trem passar completamente:

- a) por uma pessoa parada à beira da ferrovia;
- b) por um túnel de 100 m de extensão.

20. As informações seguintes são resultados de testes feitos com um determinado automóvel:

Consumo (em velocidades constantes)

Velocidade (km/h)	40	60	80	100	120	40
Consumo (km/L)	14,44	13,12	10,84	8,63	7,33	12,83
Marcha usada	5ª	5ª	5ª	5ª	5ª	4ª

Distância necessária para freagem

Velocidade (km/h)	40	60	80	100	120
Distância (m)	8,40	18,70	32,30	50,15	70,60

Suponha que esse automóvel percorra 90 km, com velocidade escalar constante, nas mesmas condições dos testes.

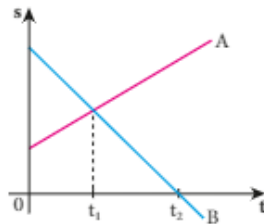
- Quanto tempo gasta a 120 km/h?
- Quanto tempo gasta a 100 km/h?
- Qual é o volume de combustível consumido nos itens *a* e *b*?
- Se o carro tivesse de frear repentinamente, quais seriam as distâncias necessárias correspondentes aos itens *a* e *b*?

NOTA

As distâncias necessárias para a freagem parecem grandes demais porque os testes são feitos considerando o motorista em pânico: ele pisa no freio e na embreagem ao mesmo tempo.

21. O movimento de um carro que viaja a 100 km/h ao longo de uma estrada retilínea é observado por meio de um radar. Na tela do aparelho, o carro é caracterizado por um ponto que se desloca 36 cm enquanto o carro percorre 5,0 km. Qual é a velocidade do ponto na tela do radar?

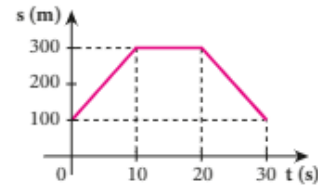
22. Consideremos os gráficos do espaço (*s*) em função do tempo (*t*) para dois corpos *A* e *B* que se movem na mesma trajetória orientada:



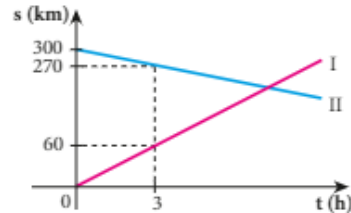
- Em que sentido se movem *A* e *B* em relação à orientação da trajetória?
- O que acontece no instante t_1 ?
- Qual é a posição de *B* no instante t_2 ?

23. É dado o gráfico $s \times t$ para o movimento de um ciclista como mostrado a seguir.

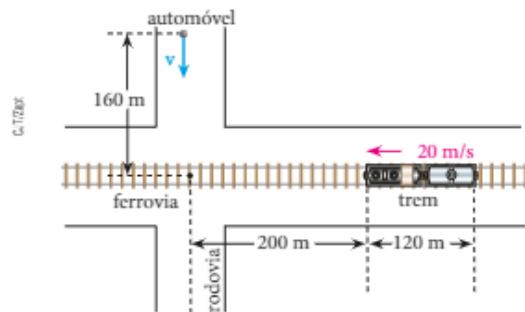
Represente graficamente a velocidade escalar do ciclista no intervalo de 0 a 30 s.



24. Dois tratores, *I* e *II*, percorrem a mesma rodovia e suas posições variam com o tempo, conforme o gráfico a seguir. Determine o instante do encontro desses veículos.



25. O motorista de um automóvel, moço muito distraído, dirige seu veículo com velocidade constante *v* pela rodovia representada na figura a seguir.



Um trem de 120 m de comprimento, com velocidade constante de 20 m/s, move-se pela ferrovia, que cruza com a rodovia sem nenhuma sinalização. Em determinado instante, o automóvel e o trem estão nas posições indicadas. Para que valores da velocidade *v* do automóvel não haverá acidente? Considere o automóvel um ponto material.



DESCUBRA MAIS

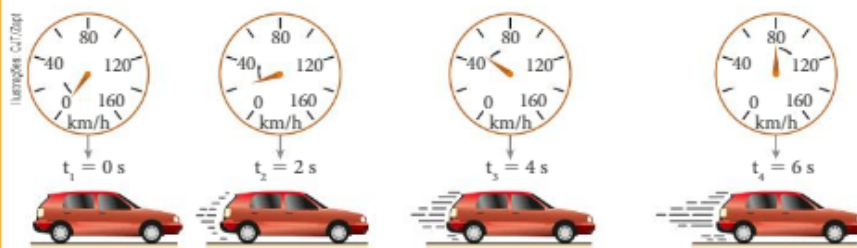
- Em quanto é estimada a idade da Terra? E a idade do Universo?
- Como podem ser efetuados esses cálculos?

CAPÍTULO

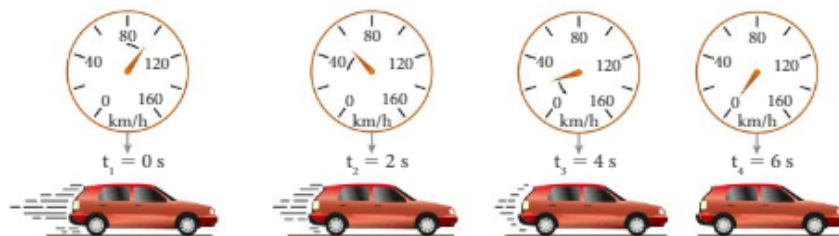
2

MOVIMENTO
UNIFORMEMENTE
VARIADO1. MOVIMENTO ACELERADO, MOVIMENTO RETARDADO
E MOVIMENTO UNIFORME

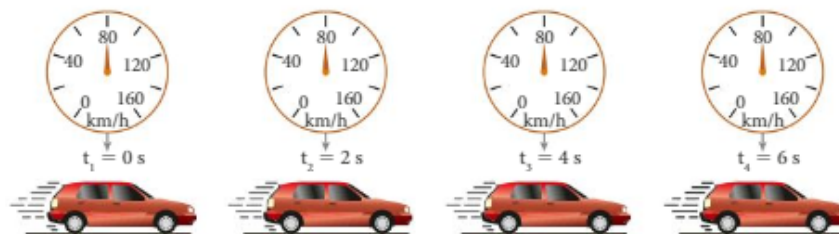
O movimento de uma partícula é dito variado quando sua velocidade escalar instantânea varia no decorrer do tempo. Se, em certo intervalo de tempo, a partícula mover-se cada vez mais rapidamente, isto é, se o módulo de sua velocidade escalar instantânea for sempre crescente, seu movimento variado será do tipo **acelerado**. O movimento de um automóvel, cujo velocímetro fornece as indicações ilustradas a seguir, é acelerado.



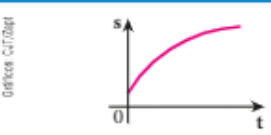


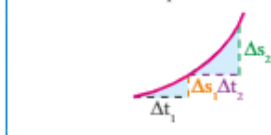
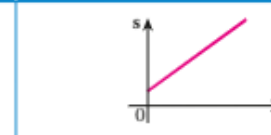
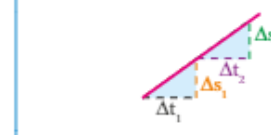
Já se uma partícula se mover cada vez mais lentamente durante certo intervalo de tempo, isto é, se o módulo de sua velocidade escalar instantânea for sempre decrescente, seu movimento variado será do tipo **retardado**. É o caso do movimento de um automóvel cujo velocímetro fornece as indicações a seguir.



Como já sabemos, se a indicação do velocímetro for sempre a mesma e diferente de zero durante certo intervalo de tempo, o movimento não será variado, mas sim **uniforme**, como exemplificado a seguir.



Em cada um dos gráficos a seguir (A, B e C), do espaço s em função do tempo t , vamos verificar se o movimento correspondente é acelerado, retardado ou uniforme.

Gráfico A	Gráfico B	Gráfico C
 <p>O movimento é retardado, porque, em iguais intervalos de tempo Δt, os deslocamentos Δs são cada vez menores: o módulo da velocidade escalar diminui com o passar do tempo.</p>  <p>Para $\Delta t_1 = \Delta t_2$, temos $\Delta s_2 < \Delta s_1$.</p>	 <p>O movimento é acelerado, porque, em iguais intervalos de tempo Δt, os deslocamentos Δs são cada vez maiores: o módulo da velocidade escalar aumenta com o passar do tempo.</p>  <p>Para $\Delta t_1 = \Delta t_2$, temos $\Delta s_2 > \Delta s_1$.</p>	 <p>O movimento é uniforme, porque, em iguais intervalos de tempo Δt, os deslocamentos Δs também são iguais (e não nulos): a velocidade escalar é constante e diferente de zero.</p>  <p>Para $\Delta t_1 = \Delta t_2$, temos $\Delta s_2 = \Delta s_1$.</p>

2. ACELERAÇÃO ESCALAR

Para comparar o desempenho de automóveis, são realizados testes em pistas de prova.

Suponha que dois automóveis, **A** e **B**, tenham sido testados em uma mesma pista.

Dirigindo o veículo **A**, o piloto de provas conseguiu uma variação de velocidade escalar de 0 km/h a 100 km/h, em aproximadamente 40 s.

Dividindo essa variação (100 km/h) pelo intervalo de tempo (40 s) em que ela ocorreu, obtemos:

$$\frac{100 \text{ km/h}}{40 \text{ s}} = \frac{2,5 \text{ km/h}}{\text{s}}$$

Uma interpretação imediata desse resultado poderia ser: em cada segundo da duração do teste, a velocidade escalar do veículo **A** sempre variou 2,5 km/h. Isso, entretanto, é pouco provável.

É muito mais provável que em alguns segundos a variação da velocidade escalar tenha sido maior e, em outros, menor que 2,5 km/h.

Assim, o resultado $\frac{2,5 \text{ km/h}}{\text{s}}$ significa que, em **média**, a velocidade escalar de **A** variou 2,5 km/h em cada segundo. Esse resultado é a **aceleração escalar média** do automóvel **A**.

Ao testar o veículo **B**, o piloto conseguiu uma variação de velocidade escalar, de 0 km/h a 100 km/h, em cerca de 10 s.

Observe que a variação da velocidade foi igual à do teste anterior (100 km/h), mas aconteceu em um intervalo de tempo menor (10 s).

Dividindo a citada variação pelo intervalo de tempo, obtemos:

$$\frac{100 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = \frac{10 \text{ km/h}}{\text{s}}$$

Esse resultado, que é a aceleração escalar média do automóvel **B** no teste realizado, significa que a velocidade escalar desse veículo variou, em média, 10 km/h em cada segundo.

Portanto, a velocidade escalar de **B** variou mais rapidamente que a de **A**, e por isso o desempenho de **B**, nesse aspecto, é melhor que o de **A**.

Formalizando a definição da aceleração escalar média, que vamos simbolizar por α_m (lê-se "alfa m"), temos:

Aceleração escalar média entre dois instantes é a variação de velocidade escalar instantânea ocorrida, em média, por unidade de tempo:

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\text{final}} - v_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}}$$

Quando a taxa de variação da velocidade escalar com o tempo, em vez de ser determinada em um intervalo de tempo, é determinada em um **instante**, obtemos a aceleração escalar instantânea, que vamos simbolizar por α .

É importante salientar que o conceito de aceleração escalar diz respeito não apenas aos casos em que o corpo "ganha" velocidade, mas também aos casos em que ele "perde" velocidade. Então, para a aceleração escalar de um corpo ser diferente de zero, basta que sua velocidade escalar esteja **variando**.

Para exemplificar o cálculo da aceleração escalar média em um caso em que um corpo “perde” velocidade, suponha que um automóvel, com velocidade escalar igual a 108 km/h, passe a frear, parando após 6 s. Temos, então:

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_m = \frac{0 \text{ km/h} - 108 \text{ km/h}}{6 \text{ s}}$$

$$\text{Logo: } \alpha_m = -\frac{18 \text{ km/h}}{\text{s}}$$

Esse resultado significa que a velocidade escalar do veículo diminuiu, em média, 18 km/h a cada segundo.

Se a velocidade escalar for constante, a aceleração escalar será igual a zero, independentemente do valor da velocidade. A luz, por exemplo, propaga-se no vácuo com uma velocidade que é, segundo a Física atual, a maior possível: cerca de 300 000 km/s. Entretanto, essa velocidade é constante (movimento uniforme) e, por isso, a aceleração escalar da luz é nula durante a citada propagação.

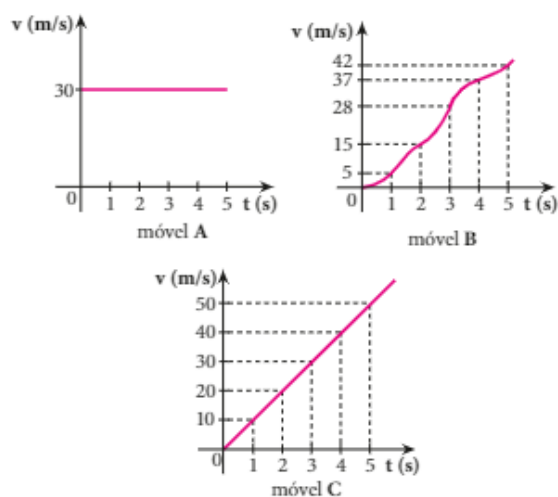
Com relação às **unidades de medida de aceleração**, note que elas são sempre quocientes de uma unidade de velocidade por uma de tempo. No SI, temos:

$$\text{unid}(\alpha) = \frac{\text{unid}(v)}{\text{unid}(t)} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Concluimos, então, que a unidade de aceleração no SI é o **metro por segundo ao quadrado (m/s²)**.

3. MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

Consideremos três móveis, **A**, **B** e **C**, cujas velocidades escalares instantâneas estão representadas em função do tempo nos gráficos a seguir:



Analisando o gráfico correspondente ao móvel **A**, percebemos que sua velocidade escalar é constante e igual a 30 m/s. Então, o movimento de **A** é uniforme e, por isso, sua aceleração escalar é constantemente nula.

Analisando o gráfico correspondente ao móvel **B**, notamos que sua velocidade escalar varia com o tempo. Então, o movimento de **B** é variado e, conseqüentemente, sua aceleração escalar não é nula.

Com relação ao movimento de **C**, observamos que sua velocidade escalar também varia com o tempo, tratando-se, portanto, de mais um movimento variado.

Então, tanto o movimento de **B** como o de **C** são variados. Existe, porém, uma diferença marcante entre os dois: a velocidade escalar de **C** sofre variações iguais em iguais intervalos de tempo, o que não ocorre com a velocidade escalar de **B**.

De fato, de acordo com os gráficos, temos que a velocidade escalar de **B** varia 5 m/s no primeiro segundo, 10 m/s no segundo, 13 m/s no terceiro, 9 m/s no quarto e 5 m/s no último segundo; isso significa que a aceleração escalar de **B** é variável. Já a velocidade escalar de **C** varia sempre 10 m/s em cada segundo, o que significa que sua aceleração escalar é constante e igual a 10 m/s². Por isso, o movimento variado de **C** é denominado **movimento uniformemente variado**.

Movimento uniformemente variado (MUV)

é aquele em que a aceleração escalar é constante e diferente de zero. Conseqüentemente, a velocidade escalar sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais.

No estudo desse movimento, obteremos meios de estabelecer relações entre tempo, espaço, deslocamento escalar, velocidade escalar e aceleração escalar.

Com isso seremos capazes de resolver problemas como os exemplificados a seguir.

Exemplo 1:



No processo de decolagem, um avião pode realizar, com boa aproximação, um movimento uniformemente variado (**acelerado**). Conhecendo-se a velocidade v

que o avião precisa atingir para decolar e sua aceleração escalar, seremos capazes de calcular o comprimento necessário de pista (Δs) e o intervalo de tempo de duração da decolagem (t).

Exemplo 2:



Durante a freagem, um automóvel pode realizar um movimento uniformemente variado (**retardado**). Conhecendo-se sua velocidade inicial v_0 e sua aceleração de retardamento, seremos capazes de calcular o comprimento necessário de percurso (Δs) e o intervalo de tempo de duração da freagem (t).



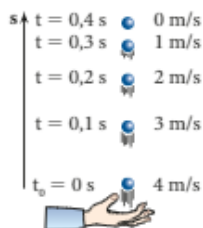
Fotografia estroboscópica de carrinho em movimento uniformemente variado.

Exemplo mais comum de movimento uniformemente variado:

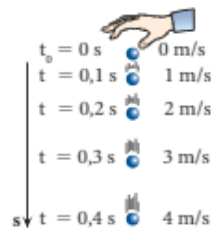
Quando um corpo bastante denso se move no ar, com velocidades baixas, a resistência do ar ao movimento é desprezível. É o que acontece, por exemplo, com uma esfera de aço de 2 cm de diâmetro movendo-se em relação ao ar a 4 m/s.

Como será justificado em Dinâmica, o movimento de um corpo, abandonado ou lançado verticalmente nas proximidades da superfície da Terra, é uniformemente variado desde que a resistência do ar possa ser desprezada. Além disso, veremos que a aceleração do corpo, chamada **aceleração da gravidade**, tem módulo g igual a $9,8 \text{ m/s}^2$, independentemente da massa do corpo.

Para simplificar os cálculos, arredondamos esse valor para 10 m/s^2 ; isso quer dizer que o módulo da velocidade do corpo varia 10 m/s em cada segundo. Isso também significa, por exemplo, que o módulo da velocidade do corpo varia 1 m/s em cada décimo de segundo ($0,1 \text{ s}$):



Uma esfera de aço lançada verticalmente para cima realiza, durante a subida, um MUV retardado: o módulo de sua velocidade diminui 1 m/s em cada décimo de segundo.



Uma esfera de aço solta de determinada altura realiza, ao descer, um MUV acelerado: o módulo de sua velocidade aumenta 1 m/s em cada décimo de segundo.

Representação gráfica da aceleração escalar em função do tempo

Sendo uma constante diferente de zero, a aceleração escalar é representada graficamente de uma das duas maneiras seguintes:



Aceleração escalar positiva.

Aceleração escalar negativa.

Observe que a aceleração escalar média de uma partícula em movimento uniformemente variado, calculada em qualquer intervalo de tempo, coincide com a aceleração escalar instantânea em qualquer instante, por esta ser igual durante todo o movimento.

Assim, num MUV, temos:

$$\alpha_m = \alpha \quad (\text{constante e diferente de zero})$$

Função horária da velocidade escalar instantânea

Vamos imaginar uma partícula em movimento uniformemente variado, numa trajetória orientada. Chamemos de v_0 sua velocidade escalar no instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos) e de v sua velocidade escalar num instante t qualquer.



Podemos escrever: $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{v - v_0}{t - t_0}$

$$\alpha = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v - v_0 = \alpha t \Rightarrow v = v_0 + \alpha t$$

Essa expressão fornece a velocidade escalar v num instante t qualquer do movimento. Ela é, por isso, denominada **função horária da velocidade escalar instantânea**.

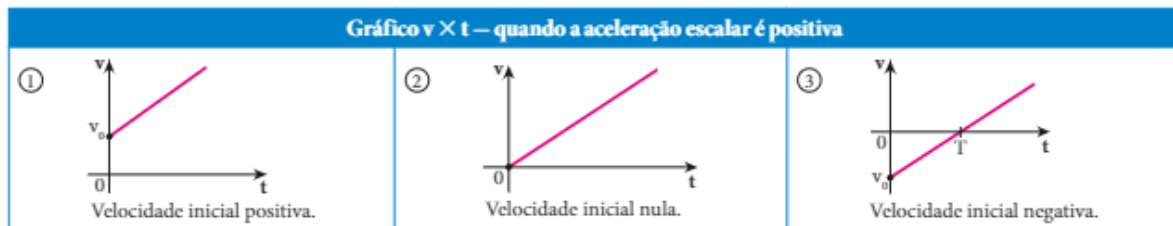
Observe que a função obtida é do **primeiro grau** em t .

Representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo

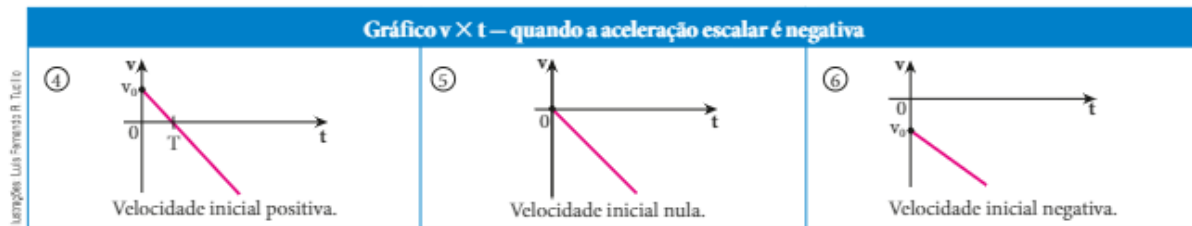
Como vimos, a função horária da velocidade escalar no movimento uniformemente variado é do primeiro grau em t : $v = v_0 + \alpha t$

Conseqüentemente, sua representação gráfica é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos.

Se a aceleração escalar α for positiva, a função será crescente e sua representação gráfica poderá assumir os seguintes aspectos:



Entretanto, se a aceleração escalar for negativa, poderemos ter:



Vamos recordar: um movimento é acelerado quando $|v|$ cresce com t , e retardado quando $|v|$ decresce com t .

Analisando os gráficos anteriores, concluímos que o movimento é acelerado:

- no caso dos gráficos 1 e 2 e, após o instante T , também no caso do gráfico 3. Note que, nessas três situações, temos: $v > 0$ e $\alpha > 0$ (mesmo sinal);
- no caso do gráfico 4, após o instante T , e no caso dos gráficos 5 e 6. Observe que, nessas três situações, temos: $v < 0$ e $\alpha < 0$ (mesmo sinal).

Por outro lado, o movimento é retardado:

- no caso do gráfico 3, antes do instante T . Nessa situação, temos $v < 0$ e $\alpha > 0$ (sinais contrários);
- no caso do gráfico 4, antes do instante T . Agora, temos: $v > 0$ e $\alpha < 0$ (sinais contrários).

Podemos, então, concluir que:

Em um movimento **acelerado**, a velocidade escalar e a aceleração escalar têm o **mesmo sinal**, isto é, são ambas positivas ou ambas negativas.

Em um movimento **retardado** a velocidade escalar e a aceleração escalar têm **sinais contrários**.

Vamos, agora, relacionar cada um dos gráficos de 1 a 6 com movimentos verticais — de uma pedra, por exemplo — nas proximidades da superfície da Terra (da superfície até alturas desprezíveis em comparação com o raio do nosso planeta), desprezando influências do ar (movimentos verticais livres). Nesses movimentos, a aceleração escalar é constante e tem módulo aproximadamente igual a 10 m/s^2 .

Os gráficos 1, 2 e 3 correspondem aos movimentos da pedra analisados em relação à trajetória (vertical) orientada **para baixo**:

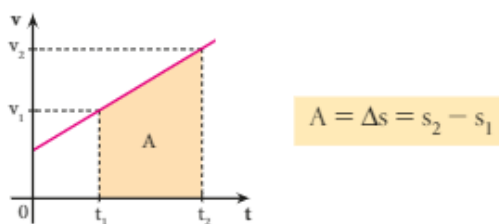
Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3
<p>No instante $t_0 = 0 \text{ s}$, a pedra foi lançada verticalmente para baixo. Seu movimento é acelerado: $v > 0$ e $\alpha > 0$.</p>	<p>No instante $t_0 = 0 \text{ s}$, a pedra foi abandonada ($v_0 = 0 \text{ m/s}$). Durante a queda, seu movimento é acelerado: $v > 0$ e $\alpha > 0$.</p>	<p>No instante $t_0 = 0 \text{ s}$, a pedra foi lançada verticalmente para cima e parou no instante $t_2 = T = 2 \text{ s}$. Durante a subida, seu movimento foi retardado: $v < 0$ e $\alpha > 0$. A partir do instante t_2, a pedra desceu em movimento acelerado: $v > 0$ e $\alpha > 0$.</p>

Os gráficos 4, 5 e 6 correspondem aos movimentos da pedra analisados em relação à trajetória (vertical) orientada para cima:

Gráfico 4	Gráfico 5	Gráfico 6
<p>No instante $t_0 = 0$ s, a pedra foi lançada verticalmente para cima e parou no instante $t_2 = T = 2$ s. Durante a subida, seu movimento foi retardado: $v > 0$ e $\alpha < 0$. A partir do instante t_2, a pedra desceu em movimento acelerado: $v < 0$ e $\alpha < 0$.</p>	<p>No instante $t_0 = 0$ s, a pedra foi abandonada ($v_0 = 0$ m/s). Durante a queda, seu movimento é acelerado: $v < 0$ e $\alpha < 0$.</p>	<p>No instante $t_0 = 0$ s, a pedra foi lançada verticalmente para baixo. Seu movimento é acelerado: $v < 0$ e $\alpha < 0$.</p>

Propriedade do gráfico da velocidade escalar em função do tempo

No gráfico da velocidade escalar (v) em função do tempo (t), a "área" A compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos, do instante t_1 até o instante t_2 , expressa a variação de espaço Δs entre esses instantes:



Apesar de essa propriedade ter sido demonstrada no Capítulo 1 para o caso particular do movimento uniforme, frisamos que ela é válida para qualquer movimento.

Velocidade escalar média no MUV

O movimento uniformemente variado tem uma propriedade bastante útil: a velocidade escalar média entre dois instantes, t_1 e t_2 , é a média aritmética entre as velocidades escalares v_1 e v_2 nesses instantes.

Para provar essa propriedade, vamos usar o gráfico anterior, lembrando que a área A de um trapézio é dada por:

$$A = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Então: } \Delta s = A = \frac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\text{Como } v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ temos: } v_m = \frac{\frac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

QUESTÕES COMENTADAS

1 Um automóvel está a 30 m/s quando seus freios são acionados, garantindo-lhe uma aceleração de retardamento de módulo 5 m/s^2 , suposta constante. Determine quanto tempo decorre até o automóvel parar.

RESOLUÇÃO

Vamos representar o automóvel numa trajetória supostamente orientada, como na figura:



Durante todo o movimento, a velocidade escalar do automóvel é positiva, uma vez que ele se move no sentido da trajetória. Como o movimento é retardado, a aceleração escalar deve ter sinal oposto ao da velocidade escalar.

Assim, a aceleração escalar é negativa e vale:

$$\alpha = -5 \text{ m/s}^2$$

Como $v = v_0 + \alpha t$, temos:

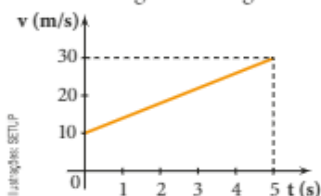
$$v = 30 - 5t$$

Fazendo $v = 0$, calculamos t :

$$0 = 30 - 5t \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

Resposta: 6 s

2 A velocidade escalar de um móvel variou com o tempo conforme o gráfico a seguir:



Calcule:
 a) a distância percorrida pelo móvel no intervalo de tempo de 0 s a 5 s;
 b) a velocidade escalar média do móvel no mesmo intervalo de tempo.

RESOLUÇÃO

a) Como a velocidade escalar instantânea foi positiva duran-

te todo o intervalo de tempo considerado, a distância percorrida (**d**) é igual à variação de espaço (Δs), que é dada pela "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos. Assim:

$$d = \text{"área"} = \frac{(30 + 10)}{2} \cdot 5 \Rightarrow d = 100 \text{ m}$$

b) Aplicando a fórmula da velocidade escalar média, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100}{5} \Rightarrow v_m = 20 \text{ m/s}$$

Note que v_m é a média aritmética entre as velocidades

$$\text{nos instantes 0 s e 5 s: } v_m = \frac{10 + 30}{2} \Rightarrow v_m = 20 \text{ m/s}$$

Respostas: a) 100 m; b) 20 m/s.

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

3. É dada a seguinte função horária da velocidade escalar de uma partícula em movimento uniformemente variado:

$$v = 15 + 20t \text{ (SI)}$$

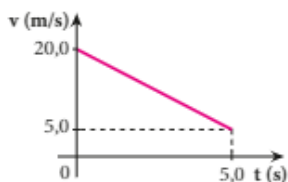
Determine:

- a) a velocidade escalar inicial e a aceleração escalar da partícula;
- b) a velocidade escalar no instante 4 s;
- c) o instante em que a velocidade escalar vale 215 m/s.

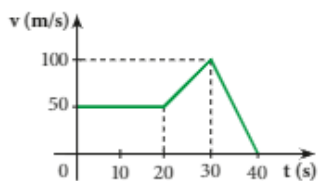
4. No instante $t_0 = 0$ s, um automóvel a 20 m/s passa a frear com aceleração escalar constante igual a -2 m/s^2 . Determine:

- a) a função horária de sua velocidade escalar;
- b) o instante em que sua velocidade escalar se anula.

5. A velocidade escalar de um móvel variou com o tempo conforme o gráfico ao lado. Calcule a velocidade escalar desse móvel no instante $t = 3,5$ s.



6. Trace em seu caderno o gráfico da aceleração escalar em função do tempo, correspondente ao gráfico $v \times t$ dado ao lado.

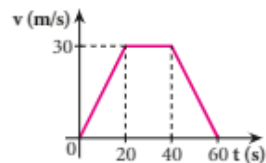


7. Um motociclista entra em um túnel a 10 m/s. A partir desse instante, acelera uniformemente a 2 m/s^2 , chegando ao fim do túnel com velocidade de 26 m/s.

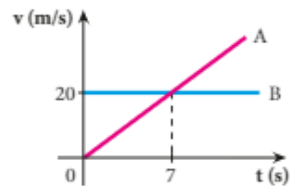
- a) Trace em seu caderno o gráfico da velocidade escalar do motociclista em função do tempo desde o instante $t_0 = 0$ s (entrada no túnel) até o instante de saída (t').

b) Calcule o comprimento do túnel.

8. A velocidade escalar de um corpo variou de acordo com o gráfico ao lado. Dessa maneira, ele percorreu uma determinada distância **d**. Que velocidade escalar constante esse corpo deveria manter no mesmo intervalo de tempo de 60 s para percorrer a mesma distância **d**?



9. Um automóvel **A** encontra-se em repouso diante de um semáforo fechado. Assim que o semáforo abre, **A** está entrando em movimento e outro automóvel **B** está passando por ele. O gráfico ao lado mostra as velocidades escalares de **A** e **B** em função do tempo.



- a) Em que instante **t** os automóveis voltam a se encontrar?
- b) Qual foi a máxima distância entre eles no intervalo de tempo de 0 s a **t**?

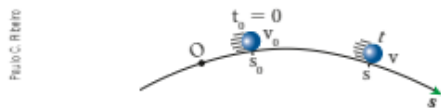
10. Uma locomotiva parte de uma estação **A** e para em uma estação **B**, distante 1200 m de **A**. O máximo módulo da aceleração que ela consegue manter é de 3 m/s^2 , tanto na fase de aceleração como na de retardamento. Sabendo que é proibido trafegar nessa região com velocidade superior a 30 m/s, calcule o mínimo intervalo de tempo possível para ir de **A** a **B**, sem problemas com a fiscalização.

Sugestão: Resolva essa questão utilizando o gráfico da velocidade escalar em função do tempo.

11. Releia a questão anterior. Agora, resolva-a supondo que não haja limitação para a velocidade.

Função horária do espaço

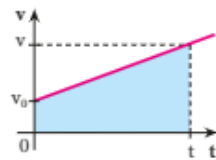
Considere uma partícula em movimento uniformemente variado numa trajetória orientada:



No instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos), o espaço é s_0 e a velocidade escalar é v_0 . No instante t , o espaço é s e a velocidade escalar é v .

Queremos a expressão de s em função de t . Para isso, traçamos o gráfico $v \times t$:

Como já vimos, a "área" destacada na figura expressa a variação de espaço Δs de 0 a t :



$$\Delta s = \frac{(v_0 + v)}{2} \cdot t$$

Lembrando que $v = v_0 + \alpha t$, temos:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v_0 + \alpha t)}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Como $\Delta s = s - s_0$, obtemos: $s - s_0 = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$

Assim, chegamos à **função horária dos espaços** em um MUV:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Note que essa função é do **segundo grau** em t .

Em muitas situações, é mais conveniente escrever da seguinte forma a função obtida:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \quad \Delta s \text{ é o deslocamento escalar}$$

ocorrido desde o instante $t_0 = 0$ até o instante t .

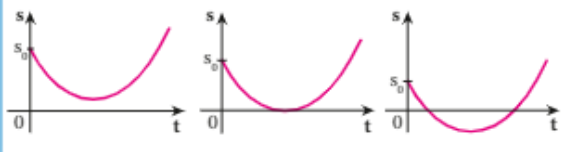
Representação gráfica do espaço em função do tempo

Como vimos, no MUV o espaço varia com o tempo conforme uma função do segundo grau em t :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

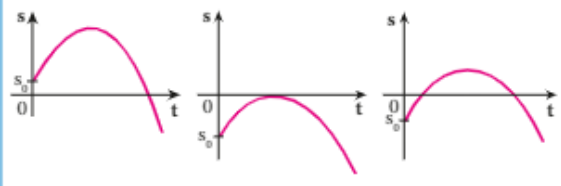
Portanto, a representação gráfica dessa função é um arco de parábola. Além disso, quando a aceleração escalar for positiva, esse arco terá sua concavidade voltada para cima, podendo ter, por exemplo, os seguintes aspectos:

Gráfico $s \times t$ — quando a aceleração escalar é positiva



Já, se a aceleração escalar for negativa, a concavidade do arco de parábola estará voltada para baixo. Exemplos:

Gráfico $s \times t$ — quando a aceleração escalar é negativa

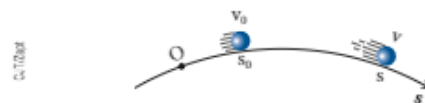


Em todos os gráficos $s \times t$ acima, no instante correspondente ao vértice do arco de parábola, a velocidade é nula, ocorrendo então a **inversão** do sentido do movimento.

Equação de Torricelli

Já relacionamos s com t e v com t .

Busquemos, agora, uma expressão que forneça a velocidade escalar v de uma partícula em movimento uniformemente variado em função de seu espaço s . Para isso, considere uma partícula que tem, em $t_0 = 0$, espaço s_0 e velocidade escalar v_0 e que, num instante t qualquer, tem velocidade escalar v e espaço s . Seja α sua aceleração escalar, constante e diferente de zero.



No movimento uniformemente variado:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (I) \quad v = v_0 + \alpha t \quad (II)$$

Isolando t numa das equações e substituindo na outra, obtemos v em função de s .

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(s - s_0) \text{ ou } v^2 = v_0^2 + 2\alpha \Delta s$$

A expressão obtida agiliza os cálculos em situações que não envolvem a variável t (tempo).

QUESTÕES COMENTADAS



12 Uma partícula em movimento uniformemente variado obedece à seguinte função horária dos espaços, com s em metros e t em segundos: $s = 12 - 8t + t^2$

- Represente graficamente o espaço em função do tempo no intervalo de 0 s a 8 s.
- Marque as posições da partícula numa trajetória suposta retilínea, nos instantes 0 s, 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s, 6 s, 7 s e 8 s.
- Determine a função horária da velocidade e construa o gráfico $v \times t$, de 0 s a 8 s.

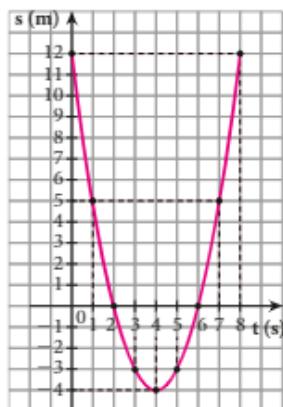
RESOLUÇÃO

a) Calculamos os espaços nos seguintes instantes:

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(0) + (0)^2 \Rightarrow s = 12 \text{ m} \\ t = 1 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(1) + (1)^2 \Rightarrow s = 5 \text{ m} \\ t = 2 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(2) + (2)^2 \Rightarrow s = 0 \text{ m} \\ t = 3 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(3) + (3)^2 \Rightarrow s = -3 \text{ m} \\ t = 4 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(4) + (4)^2 \Rightarrow s = -4 \text{ m} \\ t = 5 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(5) + (5)^2 \Rightarrow s = -3 \text{ m} \\ t = 6 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(6) + (6)^2 \Rightarrow s = 0 \text{ m} \\ t = 7 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(7) + (7)^2 \Rightarrow s = 5 \text{ m} \\ t = 8 \text{ s} &\Rightarrow s = 12 - 8(8) + (8)^2 \Rightarrow s = 12 \text{ m} \end{aligned}$$

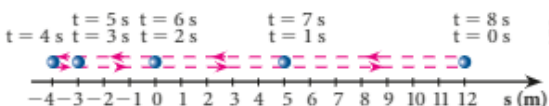
Organizamos os resultados numa tabela e, em seguida, fazemos a representação gráfica:

s (m)	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8



Observe que o gráfico obtido é um arco de parábola com a concavidade voltada para cima, o que sempre acontece quando a aceleração escalar é positiva.

b) Numa trajetória retilínea, as posições da partícula são dadas por:



De $t = 0 \text{ s}$ a $t = 4 \text{ s}$, a partícula moveu-se em sentido oposto ao da trajetória. Em $t = 4 \text{ s}$, que é o instante correspondente ao vértice da parábola no gráfico $s \times t$, ocor-

re a inversão do sentido do movimento. Nesse instante, a velocidade escalar é igual a zero. De $t = 4 \text{ s}$ a $t = 8 \text{ s}$, a partícula moveu-se no mesmo sentido da trajetória.

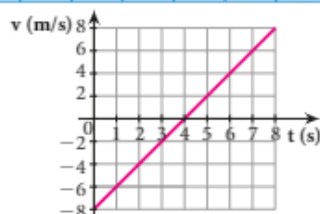
De $t = 0 \text{ s}$ a $t = 4 \text{ s}$, o movimento foi retardado, pois a partícula percorreu, por segundo, uma distância cada vez menor. De $t = 4 \text{ s}$ a $t = 8 \text{ s}$, o movimento foi acelerado, pois a distância percorrida, por segundo, foi cada vez maior.

Observe que a partícula passou pela origem dos espaços duas vezes: em $t = 2 \text{ s}$ e em $t = 6 \text{ s}$. Note também que a forma do gráfico $s \times t$ nada tem a ver com a da trajetória.

c) Da função horária do espaço, temos: $v_0 = -8 \text{ m/s}$ e $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$

$$\text{Então: } v = v_0 + \alpha t \Rightarrow v = -8 + 2t$$

v (m/s)	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8



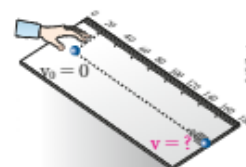
Analise os resultados dos itens *a*, *b* e *c* desta questão para concluir que:

- Quando um movimento uniformemente variado apresenta duas etapas, a de ida e a de volta, ambas são descritas pelas **mesmas equações**, desde que a orientação da trajetória seja a mesma na ida e na volta.
- Os intervalos de tempo de duração do movimento entre dois pontos determinados, na ida e na volta, são **iguais**.
- As velocidades escalares, em uma mesma posição, têm o **mesmo** valor absoluto na ida e na volta.

Respostas: a) Ver gráfico; b) Ver gráfico; c) $v = -8 + 2t$; ver gráfico.

13 Uma esfera de aço é abandonada numa rampa inclinada na qual está colocada uma fita métrica graduada em centímetros, como representa a figura.

Sabendo que a aceleração escalar da esfera é praticamente constante e igual a 5 m/s^2 , calcule sua velocidade escalar v no final da rampa.



RESOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \text{Temos: } s_0 &= 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}; s = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m} \\ v_0 &= 0 \text{ m/s}; \alpha = 5 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } v^2 &= v_0^2 + 2\alpha(s - s_0) \\ v^2 &= 0^2 + 2 \cdot 5 \cdot (1,8 - 0,2) \Rightarrow v = 4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Resposta: 4 m/s



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

14. Os aviões decolam e se mantêm em voo graças a uma força para cima, denominada sustentação, que atua em suas asas. Essa força é consequência da queda de pressão que ocorre na região superior das asas quando o ar escoar por elas, e sua intensidade aumenta quando a velocidade do avião em relação ao ar aumenta. Assim, para decolar, um avião precisa atingir uma velocidade suficientemente alta. Em um horário em que não ventava, um avião a jato de grande porte precisou atingir a velocidade de 540 km/h para conseguir decolar. Foi cronometrado um tempo de 30 s desde quando o avião começou a se mover até atingir essa velocidade.

Supondo que ele tenha sido acelerado uniformemente, determine, nesses 30 s:

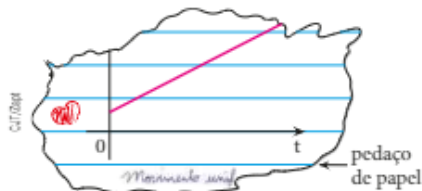
- sua aceleração escalar, em m/s^2 ;
- o comprimento do trecho de pista percorrido, que corresponde ao mínimo comprimento que a pista precisa ter para o sucesso da decolagem.

15. Um automóvel move-se a 108 km/h quando seu motorista pisa severamente no freio, para parar o veículo em 3 s. Calcule a distância percorrida pelo automóvel nesses 3 s.

16. Com relação a um movimento uniformemente variado, com as etapas de ida e volta, podemos afirmar que:

- a trajetória da partícula é um arco de parábola.
- antes do instante correspondente ao vértice da parábola do gráfico do espaço s em função do tempo t o movimento é acelerado.
- a partícula não pode passar por um mesmo ponto duas vezes.
- no instante correspondente ao vértice da parábola no gráfico $s \times t$, ocorre a inversão do sentido do movimento.
- no instante da inversão do sentido do movimento, tanto a velocidade como a aceleração escalar são nulas.

17. No lixo de uma sala de aula de segundo ano do Ensino Médio, foi encontrado um pedaço de papel em que estava traçado um gráfico referente a um movimento. Só era possível ler "Movimento unif".

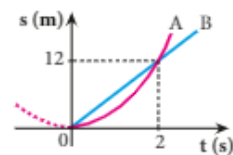


Pode-se afirmar que esse gráfico corresponde a um movimento:

- certamente uniforme.
- certamente uniformemente variado.

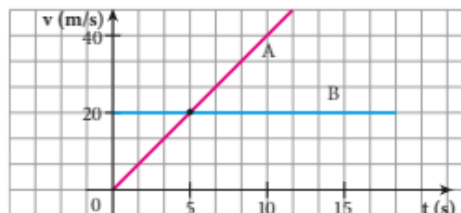
- certamente retilíneo.
- uniforme ou uniformemente variado.
- acelerado com certeza.

18. São dados a seguir os gráficos referentes aos movimentos de dois veículos A e B. O gráfico de A é um arco de parábola com vértice em $t = 0$ s.



Calcule a velocidade escalar de A em $t = 2$ s.

19. No instante $t_0 = 0$ s, dois motociclistas A e B estão em uma mesma posição de uma estrada. Considerando essa posição como origem dos espaços e sabendo que suas velocidades escalares se comportam em relação ao tempo conforme o diagrama abaixo, trace em seu caderno, num mesmo par de eixos, os gráficos do espaço em função do tempo para A e B, indicando o instante e a posição em que voltam a se encontrar.



20. No tubo de imagem de um televisor, um elétron, liberado com velocidade nula por um filamento quente, é acelerado uniformemente por um campo elétrico, atingindo a velocidade de $6 \cdot 10^6$ m/s após percorrer 1,8 cm. Calcule a aceleração escalar desse elétron.

21. Um automóvel está a 72 km/h quando seus freios são acionados, imprimindo-lhe uma aceleração escalar constante de módulo igual a 5 m/s^2 . Calcule a distância que ele percorre desde o instante em que inicia a freada até parar e a duração desse percurso.

22. Um automóvel movia-se numa avenida quando seu motorista percebeu que o semáforo do cruzamento logo adiante estava fechado. O motorista freou, mas não conseguiu parar antes do cruzamento, atingindo outro veículo. Com base nos danos causados nos veículos, técnicos da polícia estimaram que o automóvel do motorista infrator estava a 36 km/h no momento da colisão. A 50 m do acidente, foi encontrada uma marca no asfalto, que corresponde ao local em que o motorista pisou desesperadamente no freio. Sabendo que os freios do veículo conseguem produzir uma aceleração escalar praticamente constante, de módulo igual a 8 m/s^2 , calcule sua velocidade, em km/h, imediatamente antes de o motorista pisar no freio.



MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

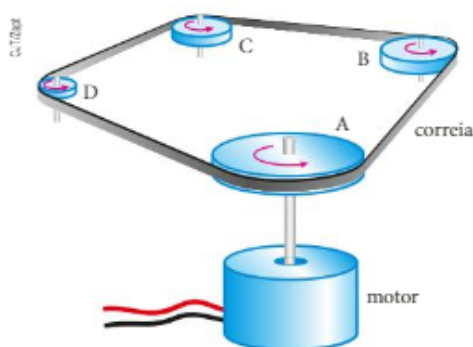
1. INTRODUÇÃO

Estudaremos aqui movimentos circulares, isto é, aqueles em que as trajetórias dos pontos são circunferências. Esses movimentos merecem uma atenção especial por terem grande importância prática, principalmente quando são **uniformes**.

Muitos dos satélites artificiais e, com boa aproximação, até mesmo a Lua realizam movimentos circulares e uniformes em torno da Terra. O mesmo acontece com os pontos da Terra que se deslocam ao redor do seu eixo de rotação.

Partículas eletrizadas, como elétrons, prótons e íons, quando são lançadas perpendicularmente a um campo magnético uniforme e constante e se submetem apenas a esse campo, realizam um movimento circular e uniforme. Isso tem fundamental importância para equipamentos destinados, por exemplo, ao bombardeio de núcleos atômicos (aceleradores de partículas) e para equipamentos que medem massas atômicas (espectrômetros de massa), como se pode ver no estudo de Eletricidade.

Observe a figura:



A figura representa uma polia A em movimento de rotação, acionada por um motor. As polias B, C e D estão acopladas à polia A por meio de uma correia que não desliza nelas e adquirem rotação no mesmo sentido da rotação de A. Conhecendo-se o número de rotações que o eixo do motor realiza por minuto

e os raios das polias, podemos determinar o número de rotações por minuto que cada uma delas realiza. Além disso, trocando uma das polias por outra de raio conveniente, podemos obter o número de rotações por minuto que quisermos.

O câmbio de uma bicicleta também funciona dessa maneira. Uma roda dentada gira com o pedal e, por meio de uma corrente, transmite rotação a uma outra roda dentada que gira com a roda traseira, que é a roda motriz.

A vantagem de cada marcha é detalhada na questão comentada 9 do Capítulo 13, **Estática dos sólidos**.

Observe agora a fotografia a seguir. Nela vemos rodas dentadas acopladas não por uma correia ou por uma corrente, mas por contato direto.



Fotografia de engrenagens por contato direto.

Quando uma das rodas é colocada em movimento de rotação e está acoplada a uma outra, esta também adquire esse tipo de movimento. Nessa situação, porém, as duas rodas em contato realizam rotações em sentidos contrários. O número de rotações por minuto continua relacionado aos raios das rodas. A caixa de câmbio dos automóveis também opera dessa maneira. Engatar uma marcha é acoplar, por contato, uma roda dentada em outra de raio adequado a cada situação, como: colocar o veículo em movimento, mantê-lo em movimento em uma subida íngreme e desenvolver velocidades mais altas em trechos de estrada em que isso é possível.

2. ENFOQUE ANGULAR

O estudo descritivo dos movimentos foi feito, até aqui, por meio das grandezas escalares espaço (s), velocidade escalar média (v_m) e instantânea (v) e aceleração escalar média (α_m) e instantânea (α). Podemos chamar todas essas grandezas de **lineares**, pois suas definições provêm, direta ou indiretamente, de medidas de comprimento.

Assim, podemos dizer que s é o espaço linear, v_m e v são as velocidades escalares lineares (média e instantânea, respectivamente), e α_m e α são as acelerações escalares lineares (média e instantânea, respectivamente).

Quando, porém, estudamos movimentos circulares, torna-se útil acrescentar as definições das grandezas escalares **angulares**, isto é, grandezas escalares definidas, direta ou indiretamente, a partir de medidas de ângulos.

É o que vamos fazer a seguir, mas, para tanto, é necessário conhecer duas unidades de medida de ângulos.

Interessa-nos expressar a medida de um ângulo em graus e, principalmente, em radianos.

Um **grau** ($^\circ$) é o ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ do ângulo de uma volta completa de uma circunferência.

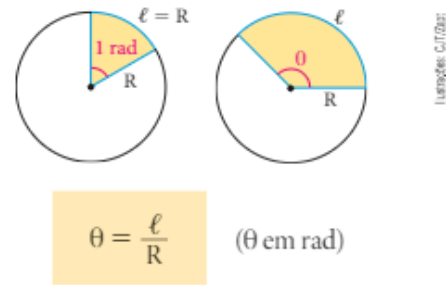
Um **radiano** (**rad**) é a medida do ângulo central que determina na circunferência um arco cujo comprimento (ℓ) é igual ao raio (R). Um radiano corresponde a aproximadamente 57° .

Decorre, da definição do radiano, que um ângulo central qualquer θ (lê-se “teta”) fica determinado, em radianos, pelo quociente do comprimento do arco que ele “enxerga” (ℓ) pelo raio da circunferência (R).

Assim, por exemplo, se o raio R da circunferência for igual a 10 cm e o comprimento ℓ do arco for igual a 30 cm, teremos:

$$\theta = \frac{\ell}{R} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \theta = 3 \text{ rad}$$

Observe que a unidade radiano não tem nenhuma dimensão (unidade) física, uma vez que corresponde ao quociente de um comprimento por outro comprimento, resultando em um número puro. Poderíamos até escrever $\theta = 3$ em vez de $\theta = 3 \text{ rad}$. No entanto, esse procedimento não é conveniente, pois é mais importante que fique evidenciado o critério adotado para determinar o ângulo.



Lembrando que o perímetro (comprimento) de uma circunferência de raio R é igual a $2\pi R$, vamos converter em radianos o ângulo de uma volta (360°):

$$\theta = \frac{\ell}{R} = \frac{2\pi R}{R} \Rightarrow \theta = 2\pi \text{ rad}$$

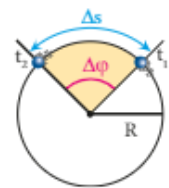
Portanto: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

Disso decorre, por exemplo, que: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$; $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$; $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$; $\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$; $\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$.

3. VELOCIDADE ESCALAR ANGULAR

Considere as posições que uma partícula móvel ocupa numa circunferência nos instantes t_1 e t_2 .

Entre os instantes t_1 e t_2 , a partícula sofre um deslocamento escalar que pode ser dado linearmente por Δs ou angularmente por $\Delta\phi$.



O quociente desse deslocamento angular ($\Delta\phi$) pelo intervalo de tempo (Δt) em que ele ocorre é a **velocidade escalar média angular** ω_m (lê-se “ômega m”) nesse intervalo:

$$\omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

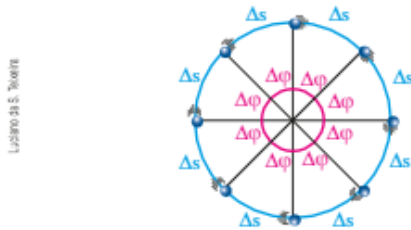
Com relação à **unidade de velocidade angular**, se os ângulos forem medidos em radianos (rad) e o tempo em segundos (s), a velocidade angular será dada em **radianos por segundo** (rad/s).

Como estamos interessados nos movimentos circulares **uniformes**, em que v e ω são iguais em todos os instantes, escrevemos:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Essa é a **velocidade angular instantânea**.

Uma partícula está em **movimento circular e uniforme (MCU)** quando descreve uma trajetória circular, percorrendo arcos de comprimentos (Δs) iguais em iguais intervalos de tempo (Δt), quaisquer que sejam esses intervalos. Evidentemente, a partícula em MCU também varre ângulos ($\Delta\phi$) iguais em iguais intervalos de tempo.



A figura acima representa uma partícula em MCU. Nessa figura, os intervalos de tempo entre duas posições consecutivas são iguais.

Em outras palavras, podemos escrever:

Movimento circular e uniforme (MCU) é todo movimento de trajetória circular em que a velocidade escalar, linear ou angular, é constante e diferente de zero.

$$v = \text{constante} \neq 0 \quad \omega = \text{constante} \neq 0$$

Relação entre velocidades escalares angular e linear no MCU

Vamos, agora, relacionar a velocidade escalar angular (ω) com a velocidade escalar linear (v).

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (I)$$

Da figura anterior, $\Delta\phi$ é dado, em radianos, por:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \Delta s = R \Delta\phi \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$v = \frac{R \Delta\phi}{\Delta t} = R \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

Assim:

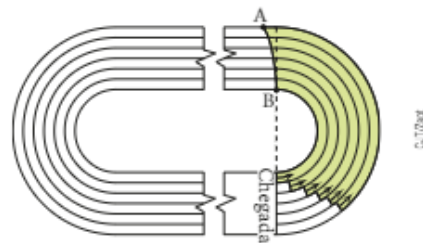
A **velocidade escalar angular** (ω) é igual à velocidade escalar linear (v) dividida pelo raio (R) da circunferência:

$$\omega = \frac{v}{R} \text{ ou } v = \omega R$$

Observe a fotografia a seguir.

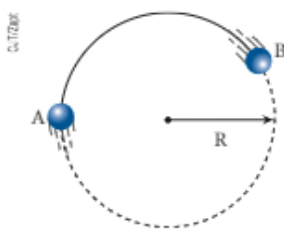


No início de uma corrida de 800 m, por exemplo, os atletas não largam um ao lado do outro para compensar o fato de as raia internas serem mais curtas que as externas. Assim, eles largam de posições não emparelhadas e só passam a ter liberdade de mudar de raia no final da primeira curva (arco AB), quando os comprimentos dos trechos de raia (destacados na figura a seguir) se igualam.



QUESTÕES COMENTADAS

1 Uma partícula percorre, em 10 s, o arco de circunferência AB representado na figura, de A para B, em MCU:



Sabendo que \widehat{AB} mede 60 cm e $R = 30$ cm, determine, no percurso de A até B:

- a velocidade escalar linear;
- a velocidade escalar angular.

RESOLUÇÃO

a) A velocidade escalar linear é dada por: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Sendo $\Delta s = 60$ cm e $\Delta t = 10$ s, temos:

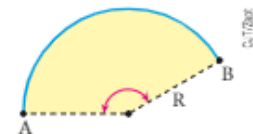
$$v = \frac{60}{10} \Rightarrow v = 6 \text{ cm/s}$$

b) A velocidade escalar angular é dada por: $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (I)$

O deslocamento angular $\Delta\phi$ é calculado, em radianos, pelo quociente do comprimento do arco AB pelo raio R :

$$\Delta\phi = \frac{60}{30} \Rightarrow \Delta\phi = 2 \text{ rad}$$

$$\text{Em (I): } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2}{10} \Rightarrow \omega = 0,2 \text{ rad/s}$$

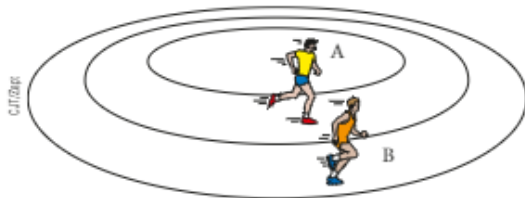


O item **b** também poderia ser resolvido desta maneira:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{6}{30} \Rightarrow \omega = 0,2 \text{ rad/s}$$

Respostas: a) 6 cm/s; b) 0,2 rad/s

2 Dois corredores treinam numa pista circular. O corredor **A** corre pela pista interna, enquanto o **B** corre pela externa.



Sabendo que ambos os corredores completam uma volta no mesmo intervalo de tempo, compare:

- suas velocidades escalares angulares;
- suas velocidades escalares lineares.

RESOLUÇÃO

- Os dois corredores completam uma volta num mesmo intervalo de tempo Δt . Ao fazer isso, ambos realizam um mes-

mo deslocamento angular $\Delta\phi$, igual a 2π rad. Lembrando que a velocidade escalar angular (ω) é dada por: $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$

Logo: $\omega_A = \omega_B$

Isso significa que **A** e **B** percorreram um mesmo ângulo num mesmo intervalo de tempo.

- No mesmo intervalo de tempo Δt , decorrido durante uma volta, o deslocamento linear Δs é maior para o corredor **B**, uma vez que a circunferência externa tem perímetro maior que a interna. Assim, no mesmo Δt , temos: $\Delta s_B > \Delta s_A$

A velocidade escalar linear (v) é dada por: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Logo: $v_B > v_A$

Isso significa que, no mesmo intervalo de tempo Δt , a distância percorrida por **B** foi maior que a percorrida por **A**, apesar de os ângulos varridos terem sido iguais.

Este item **b** poderia ser resolvido lembrando que: $v = \omega R$, em que R é o raio da circunferência.

Como o valor de ω é igual para **A** e para **B**, concluímos que o valor de v é maior para **B**, uma vez que **B** descreve a circunferência de raio maior.

Respostas: a) $\omega_A = \omega_B$; b) $v_B > v_A$



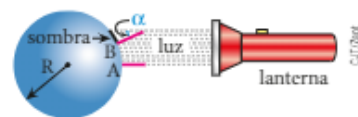
QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

- Um automóvel move-se ao longo de uma pista circular de raio igual a 200 metros. Em certo instante, sua velocidade angular vale 0,1 rad/s. Quanto indica seu velocímetro, em km/h, nesse instante?

- Imagine uma esfera de raio R , com duas varetas fincadas nela nos pontos **A** e **B**, perpendicularmente à sua superfície e sobre uma mesma circunferência máxima (meridiano). Uma lanterna, que emite um feixe de raios de luz paralelos entre si, ilumina a esfera, como mostra a figura a seguir:



Na esfera, não se observa sombra da vareta fincada em **A**, mas se observa sombra da vareta fincada em **B**. Não é difícil medir o ângulo α indicado. Suponha que alguém mediu esse ângulo e encontrou $\alpha = 20^\circ$. Sabendo que o arco **AB** mede 10 cm e que o comprimento de uma circunferência de raio R é igual a $2\pi R$, calcule o raio R da esfera. (Adote $\pi = 3$.)

4. PERÍODO E FREQUÊNCIA

O MCU é um movimento periódico, isto é, todas as suas características se repetem em iguais intervalos de tempo. Cada intervalo corresponde ao tempo que a partícula leva para completar uma volta. Esse tempo denomina-se **período** do MCU e é simbolizado por T .

Período (T) de um MCU é o intervalo de tempo decorrido durante uma volta de uma dada partícula.

O período, evidentemente, pode ser medido em qualquer unidade de tempo, mas sua unidade no SI é o segundo (s).

Por exemplo, em uma roda-gigante, o período do movimento é o intervalo de tempo em que uma das gôndolas completa uma volta.

No caso dos ponteiros de um relógio analógico, embora os movimentos não sejam uniformes pelo fato de se moverem aos "saltos", eles são periódicos. Os períodos dos ponteiros dos segundos, dos minutos e das horas são, respectivamente, iguais a 60 s (1 min), 60 min (1 h) e 12 h.

Outra grandeza referente ao MCU é a **frequência**, simbolizada por f .

Suponha, por exemplo, que uma partícula complete uma volta a cada 0,1 s. Esse valor é o período (T) do movimento. Quantas voltas ela completa na unidade de tempo, no caso, 1 s?

Efetuada o cálculo, percebemos que ela completa dez voltas por segundo. Dizemos, então, que essa é a sua frequência (f): $f = 10$ voltas/s.

A **frequência (f)** do movimento circular e uniforme executado por uma partícula é o número de voltas que essa partícula efetua por unidade de tempo. Assim, se a partícula efetua n voltas durante um intervalo de tempo Δt , sua frequência é dada por:

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

A frequência pode ser medida em voltas por segundo, rotações por segundo (rps), rotações por minuto (rpm) e ciclos por segundo, entre outras formas.

Sempre que a unidade de frequência inclui o segundo, ela se denomina **hertz (Hz)**, que é a unidade dessa grandeza no SI.

Assim: $1 \text{ volta/s} = 1 \text{ rps} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

Na prática, é muito comum medir frequência em **rotações por minuto (rpm)**.

Para fazer conversões entre as unidades **rpm** e **Hz**, podemos usar a seguinte relação:

$$60 \text{ rpm} = \frac{60 \text{ rotações}}{\text{min}} = \frac{60 \text{ rotações}}{60 \text{ s}}$$

$$60 \text{ rpm} = 1 \frac{\text{rotação}}{\text{s}} \Rightarrow 60 \text{ rpm} = 1 \text{ Hz}$$

Relação entre período e frequência

Para relacionar a frequência com o período, lembre-se de que: $f = \frac{n}{\Delta t}$.

Se, nessa expressão, fizermos Δt igual a um período (T), o número de voltas (n) será igual a 1. Assim, teremos:

$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

Concluimos, então, que a frequência é igual ao inverso do período. Note que isso já era esperado, pois, quanto mais tempo demora uma volta (maior período), menos voltas são completadas numa unidade de tempo (menor frequência).



A Lua completa uma volta ao redor da Terra em aproximadamente 27 dias (período de translação). Nesse mesmo intervalo de tempo, ela também completa uma rotação em torno de seu eixo (período de rotação). Em virtude dessa igualdade dos períodos de translação e rotação da Lua, ela nos mostra sempre a mesma face. A outra face (face oculta) só ficou conhecida com o advento da era espacial.

Velocidade angular no MCU

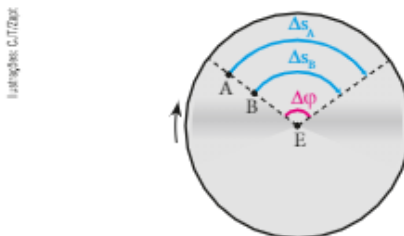
Como já vimos, a velocidade escalar angular, no MCU, é dada por: $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$.

Se fizermos Δt igual a um período (T), nesse intervalo de tempo a partícula completará uma volta e $\Delta\phi$ será igual a 2π rad. Assim, teremos:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Disco ou polia em rotação uniforme

Considere um disco ou uma polia em rotação uniforme em torno do eixo E:



Perceba que A e B são dois pontos quaisquer situados fora do eixo de rotação. Enquanto A percorre Δs_A , B percorre Δs_B , sendo $\Delta s_A > \Delta s_B$ e, portanto, $v_A > v_B$. O deslocamento angular $\Delta\phi$, entretanto, é igual para os dois pontos.

Então: $\omega_A = \omega_B$

Consequentemente:

$$T_A = T_B \quad \text{e} \quad f_A = f_B$$

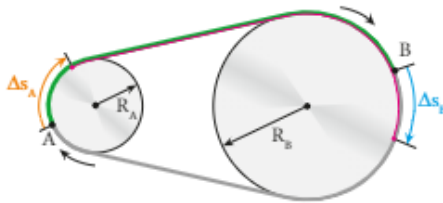
Note que, tanto em um disco como em uma polia, a velocidade angular ω é igual para **todos** os pontos que giram.

Por isso podemos dizer que a velocidade angular **do disco todo** ou **da polia toda** é igual a ω .

Acoplamento de polias e rodas dentadas

Polias podem ser acopladas por meio de correias ou por contato direto, de modo que uma polia rotando pode fazer a outra rotar também. Da mesma forma, rodas dentadas podem ser acopladas por contato direto, como acontece na caixa de câmbio de um automóvel, ou por meio de correntes, como acontece em uma bicicleta.

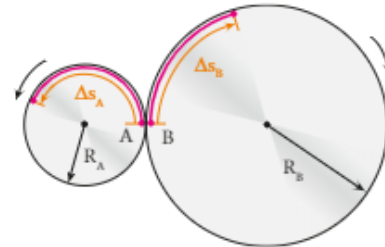
A figura a seguir representa duas polias de raios R_A e R_B que rotam no **mesmo sentido**, acopladas por uma correia que não desliza sobre elas.



Aqui, os pontos A e B estão nas periferias das polias. Enquanto A se desloca Δs_A , B se desloca Δs_B .

Como $\Delta s_A = \Delta s_B$, temos: $v_A = v_B$

Observe na figura a seguir que, ao contrário da situação descrita anteriormente, duas polias (ou rodas dentadas) de raios R_A e R_B rotam em **sentidos contrários**, acopladas por contato direto.



Nesse caso, os pontos A e B também estão nas periferias das polias. Enquanto A se desloca Δs_A , B se desloca Δs_B . Não havendo escorregamento na região de contato, cada ponto da periferia de uma polia faz contato com um **único** ponto da periferia da outra polia.

Assim, $\Delta s_A = \Delta s_B$; portanto: $v_A = v_B$

Perceba que, nas duas situações, temos:

$$\omega_A R_A = \omega_B R_B \Rightarrow 2\pi f_A R_A = 2\pi f_B R_B$$

Portanto: $f_A R_A = f_B R_B$



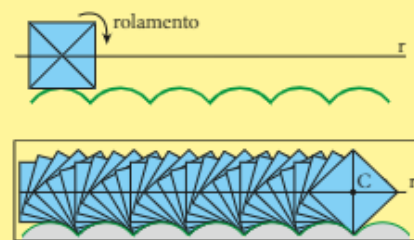
Uma bicicleta de rodas quadradas

Existe uma curva denominada **catenária**, cujo formato é praticamente o da "barriga" de um fio entre dois postes da rede elétrica ou de uma corrente suspensa entre dois suportes, usada para obstruir a passagem de veículos.

A figura ao lado representa vários arcos iguais de catenária, unidos horizontalmente. Se um quadrado, cujo lado tem comprimento igual ao de um dos arcos, rolar sobre eles, sem deslizar, de modo que os vértices do quadrado coincidam com os "bicos" (cúspides) entre arcos consecutivos, seu centro se moverá sobre a reta horizontal r .

Com base nessa propriedade da catenária, foi possível construir uma pista em que uma bicicleta de rodas quadradas se move normalmente, como uma bicicleta comum.

Experimento do professor Stan Wagon com uma bicicleta de rodas quadradas em uma pista especial para isso, construída em 2004 em St. Paul, Minnesota.



Enquanto o quadrado rola, seu centro C percorre a reta r .



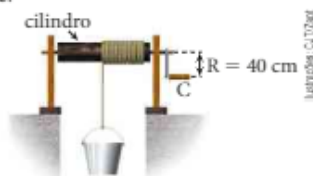
QUESTÕES COMENTADAS



5 Num lugar onde não se dispõe de energia elétrica, é usado um sarilho para tirar água de um poço. Essa máquina consta de um cilindro de raio $r = 15$ cm, fixo em um eixo que pode rotar apoiado em dois suportes. Uma das extremidades de uma corda é fixada no cilindro e a outra é amarrada em um balde. À medida que o cilindro gira, acionado por uma manivela de cabo C, a corda enrola-se nele numa única camada, e o balde sobe 9 m em 30 s, em movimento uniforme.

Na operação descrita, calcule:

- a velocidade angular do cilindro;
- a velocidade linear do cabo C.



RESOLUÇÃO

- a) A velocidade com que o balde sobe é: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Sendo $\Delta s = 9$ m e $\Delta t = 30$ s, temos:

$$v = \frac{9 \text{ m}}{30 \text{ s}} \Rightarrow v = 0,3 \text{ m/s}$$

Os pontos da corda também se movem com essa velocidade. Considere, então, um ponto A da corda em contato com um ponto P da periferia do cilindro, como mostra a figura ao lado.

Como a corda não escorrega no cilindro, temos: $v_p = v_A = 0,3$ m/s

$$\text{Então: } \omega_p = \frac{v_p}{r} = \frac{0,3}{0,15} \Rightarrow \omega_p = 2 \text{ rad/s}$$

Destacamos que todos os pontos do cilindro têm velocidade angular igual a 2 rad/s.

- b) A velocidade angular do cabo C é igual à do cilindro:

$$\omega_C = 2 \text{ rad/s.}$$

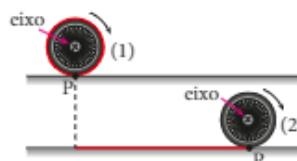
$$\text{Assim: } \omega_C = \frac{v_C}{R} \Rightarrow v_C = \omega_C \cdot R = 2 \cdot 0,4 \Rightarrow v_C = 0,8 \text{ m/s}$$

Respostas: a) 2 rad/s; b) 0,8 m/s

6 Uma motocicleta encontra-se em movimento em uma estrada asfaltada. Cada uma de suas rodas tem raio $R = 25$ cm e gira com frequência $f = 10$ Hz. Sabendo que as rodas não deslizam no asfalto, calcule a velocidade da motocicleta em km/h. (Use $\pi = 3,1$)

RESOLUÇÃO

Na figura a seguir, representamos uma roda da motocicleta em duas posições, (1) e (2). Da posição (1) até a posição (2), a roda completa uma volta. O ponto P está na periferia da roda.



Imagine que a periferia da roda, na posição (1), esteja pintada com uma estreita faixa de tinta vermelha fresca. O comprimento dessa faixa é $2\pi R$ (perímetro da circunferência). De (1) para (2), a roda deixa no asfalto uma marca vermelha de mesmo comprimento, pois a roda não desliza na pista. Note, então, que, num mesmo intervalo de tempo, o ponto P percorre $2\pi R$ em relação ao eixo da roda e este também percorre $2\pi R$ em relação à estrada. Portanto, a velocidade v_p do ponto P em relação ao eixo, é igual à velocidade v_e do eixo em relação à estrada: $v_p = v_e$.

Como a velocidade do eixo em relação à estrada é igual à velocidade v_M da motocicleta, temos: $v_M = v_p$.

Portanto, a velocidade da motocicleta tem o mesmo valor da velocidade do ponto P em seu movimento circular em torno do eixo: $v_M = v_p = \omega_p R = 2\pi f R$

$$\text{Assim: } v_M = 2 \cdot 3,1 \cdot 10 \cdot 0,25 \Rightarrow v_M = 15,5 \text{ m/s}$$

$$\text{Logo: } v_M = 56 \text{ km/h}$$

Resposta: 56 km/h

FAÇA VOCÊ MESMO

Estudando engrenagens acopladas por uma corrente

Uma bicicleta, mesmo dessas utilizadas por crianças, pode servir para sedimentar importantes conceitos sobre os movimentos de polias ou engrenagens acopladas por correias ou correntes.

O mecanismo básico de uma bicicleta se resume a duas engrenagens acopladas por uma corrente, como ilustra a fotografia ao lado. A engrenagem de raio maior, à qual estão conectados os pedais, denomina-se **coroa**, e a de raio menor, acoplada à roda traseira, é chamada **catraca** (ou pinhão).



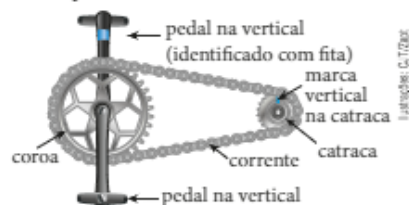
Fotografia mostrando coroa e catraca de bicicleta.

Material necessário

- 1 bicicleta;
- 1 régua ou trena;
- fita adesiva (branca, de preferência).

Procedimento

- I. Vire a bicicleta de rodas para cima, deixando-a apoiada sobre o guidão e o selim. Se ela for equipada com dispositivo seletor de velocidades, escolha uma determinada marcha de modo a ser utilizada uma mesma catraca em todo o procedimento. A catraca mais externa é a ideal. Não acople o extensor de catraca.
- II. Meça previamente com a régua ou trena os raios da coroa e da catraca e, em seguida, gire manualmente os pedais até obter uma posição em que eles fiquem alinhados na vertical. Identifique com a fita adesiva o pedal que ficou no plano superior e cole também na catraca um pedaço da mesma fita tal que ele seja radial, fique posicionado na vertical (paralelamente aos pedais) e voltado para cima. Veja a ilustração ao lado.
- III. Gire lentamente os pedais. Isso fará girar também a roda traseira. Observe que, enquanto o pedal destacado com a fita dá uma volta completa, o mesmo acontece com a coroa. De fato, isso deve ocorrer, pois os pedais e a coroa são peças que operam solidárias, acopladas entre si.
- IV. Retome a situação inicial, isto é, aquela em que o pedal identificado e a fita adesiva colada na catraca ficam em posição vertical, com ambos voltados para cima. Em seguida, faça com que o citado pedal dê exatamente uma volta e conte, ainda que de maneira aproximada, o número de voltas realizado pela catraca. Será possível obter nesse caso uma relação muito importante que servirá para determinar a relação de frequências (e de períodos) da coroa e da catraca.



Analisando o experimento

1. Que grandezas ligadas à cinemática do movimento circular são comuns aos movimentos dos pedais e da coroa?
2. Junto com um colega, desenvolva a relação entre as frequências (e períodos) de rotação e os raios da coroa e da catraca. Verifique ainda se essas frequências (e períodos) estão na razão direta ou inversa dos raios medidos. Que grandeza física comum à coroa e à catraca permitiu obter, por meio de cálculos, as relações de frequências (e períodos) com os respectivos raios das engrenagens? Se necessário, peça ajuda do professor.
3. Você conhece outros mecanismos semelhantes ao da bicicleta em que podem ser tiradas conclusões parecidas? Pesquise.
4. Considerando uma bicicleta dotada de dispositivo seletor de velocidades, para você se deslocar com grande velocidade, deve selecionar uma catraca de raio grande ou pequeno?
5. E, para você subir uma ladeira bem íngreme, deve-se selecionar uma catraca de raio grande ou pequeno?



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

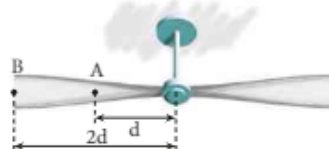
7. Um corpo em movimento circular e uniforme completa 20 voltas em 10 segundos. Determine a frequência e o período desse movimento.

8. Uma furadeira pode atingir a rotação máxima de 3000 rpm. Nessa situação, calcule o período do movimento no SI.

9. O ponteiro dos segundos de um relógio tem 1,2 m de comprimento. Calcule, em m/s, a velocidade da extremidade desse ponteiro. Use $\pi = 3$.

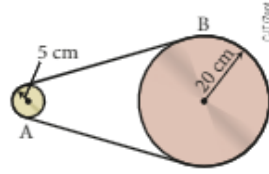
10. As pás de um ventilador rotam com velocidade angular constante ω .

CIT/2011



Compare os períodos (T), as frequências (f), as velocidades escalares angulares (ω) e as velocidades escalares lineares (v) dos pontos A e B da pá.

11. Na situação esquematizada ao lado, temos duas polias, A e B, acopladas por uma correia inextensível. Quando a polia A gira, movimentada a correia, que faz a polia B girar também.



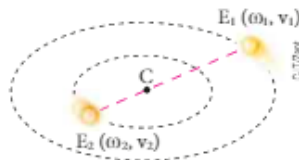
Admitindo que não haja escorregamento entre a correia e as polias e supondo que a polia A execute 60 rpm, calcule:

- a frequência de rotação da polia B;
 - a velocidade linear de um ponto qualquer da correia.
- Use $\pi = 3,1$.

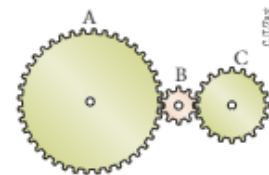
12. Num sistema, duas estrelas, E_1 e E_2 , descrevem circunferências de raios r_1 e r_2 , respectivamente, como representa a figura. Essas circunferências têm um mesmo centro C, denominado centro de massa da estrela dupla.

Sabendo que E_1 , E_2 e C se mantêm permanentemente alinhados, determine, para essas estrelas, a razão:

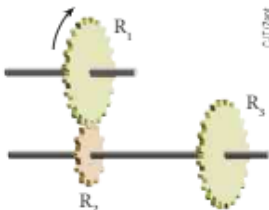
- ω_1/ω_2 entre suas velocidades angulares;
- v_1/v_2 entre suas velocidades lineares.



13. A figura representa um acoplamento de três rodas dentadas A, B e C que possuem 40, 10 e 20 dentes respectivamente. Lembrando que os dentes são todos iguais, quantas voltas dá a roda A enquanto a roda C completa 10 voltas?



14. Na figura, as rodas dentadas R_1 e R_3 são iguais e seus raios medem 50 cm, enquanto a roda dentada R_2 tem raio igual a 25 cm. As rodas R_2 e R_3 giram fixas a um mesmo eixo. A roda R_1 , acoplada à R_2 , gira com frequência 5 000 rpm.



Determine:

- a frequência de rotação das rodas R_2 e R_3 ;
- o quociente v_1/v_3 das velocidades escalares lineares de pontos na periferia das rodas R_1 e R_3 , respectivamente.

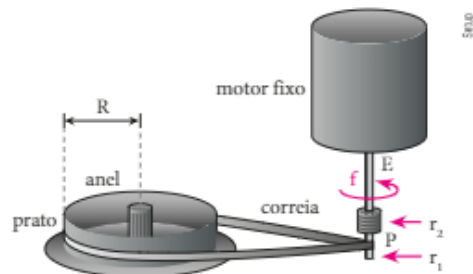
15. Os pneus de certo automóvel têm raio R igual a 25 cm. Calcule o módulo da velocidade desse veículo, em km/h, quando suas rodas rolam com frequência igual a 1 200 rpm. Use $\pi = 3$.

16. O aparelho usado para reproduzir sons gravados em discos de vinil é o toca-discos.

Foram fabricados muitos modelos de toca-discos e ainda hoje existem empresas investindo na produção desses aparelhos.

A figura a seguir é um esquema simplificado, de ponta-cabeça e fora de escala, de um sistema usado para girar o prato sobre o qual o disco é acomodado.

O anel de raio R igual a 90 mm está fixado no prato e é acoplado a uma peça metálica P por meio de uma correia de borracha.



A peça P está fixada no eixo E de um motor e possui duas partes cilíndricas: uma de raio r_1 igual a 1,20 mm e outra de raio r_2 igual a 1,62 mm.

Quando a correia está na parte de raio r_1 , como na figura, o prato gira com frequência igual a $\frac{100}{3}$ rpm $\left(33\frac{1}{3}$ rpm).

- Determine, em rpm, a frequência f de rotação do eixo E do motor.
- Calcule a frequência de rotação do prato quando, por meio de um dispositivo não representado na figura, a correia é levada para a parte de raio r_2 da peça P.



DESCUBRA MAIS

Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.), matemático e filósofo grego, foi quem determinou pela primeira vez o raio da Terra. Forme grupo com dois ou mais colegas e procure saber como isso foi possível. Pesquise também qual unidade de comprimento Eratóstenes usou e a quantos metros ela equivalia. Repita os cálculos que ele fez e compare o valor obtido na época com o valor médio atual, que é de aproximadamente 6 400 km.



VETORES E CINEMÁTICA VETORIAL

1. GRANDEZAS ESCALARES E VETORIAIS

Vivemos cercados de grandezas físicas.

O despertador toca estridente; são 6 h da manhã. O **tempo** é mesmo implacável, mas começou um novo dia e é hora de estudar.

Em um gesto decidido, você deixa a cama, dirige-se para o banheiro e acende a luz. Uma lâmpada de **potência** excessiva brilha forte no teto, chegando quase a ofuscar. Ora, isso não está de acordo com a proposta da família, que é de economizar **energia**. Todos estão dizendo que o valor cobrado na conta de luz tem andado pelas alturas...

Você abre a torneira da pia para iniciar sua higiene matinal e começa a escovar os dentes. Nota então que a água jorra com grande **vazão**, o que exige uma consciente intervenção. Afinal, também é preciso economizar água!

Em razão da **força** aplicada por uma rajada de vento, uma porta bate violentamente, quebrando o silêncio próprio da hora. Você se vê refletido no espelho de grande **área** embaçado pelo vapor ascendente vindo da água quente do chuveiro já aberto...

No rápido café da manhã, um bom pedaço de pão compõe com o leite escurecido pela grande **massa** de chocolate em pó a primeira refeição. Descendo no elevador do prédio, você lê uma vez mais aquela pequena placa que adverte sobre o **peso** máximo suportado pelo equipamento...

Já na calçada, você nota que o dia será quente, o que é confirmado pela **temperatura** indicada em um painel eletrônico: 24 °C. E eis que chega o esperado ônibus de sempre. O tráfego está intenso, o que impõe ao veículo um **deslocamento** lento pelas ruas do bairro. Visando realizar o percurso com a **velocidade média** prevista, o motorista aproveita para arrancar com grande **aceleração** nos trechos livres...

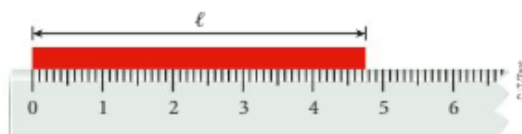
Você está sentado e tem sobre as pernas sua mochila cheia de livros, cadernos e outros objetos que incomodam um pouco por exercerem nas superfícies de apoio uma intensa **pressão**.

Ligeiramente atrasado, você finalmente chega ao colégio e percorre apressadamente o grande **comprimento** do corredor principal.

Essa rotina fictícia destaca as grandezas físicas tempo, potência, energia, vazão, força, área, massa, peso, temperatura, deslocamento, velocidade média, aceleração, pressão e comprimento, presentes em nosso dia a dia.

Em Física, há duas categorias de grandezas: as **escalares** e as **vetoriais**. As primeiras caracterizam-se apenas pelo valor numérico, acompanhado da unidade de medida. Já as segundas requerem um valor numérico (sem sinal), denominado **módulo** ou **intensidade**, acompanhado da respectiva unidade de medida e de uma orientação, isto é, uma **direção** e um **sentido**.

Na figura abaixo, o comprimento $\ell = 4,75$ cm medido por uma régua milimetrada é uma grandeza escalar, já que fica totalmente determinado pelo valor numérico (4,75) acompanhado da unidade de medida (cm).



O comprimento é uma **grandeza escalar**.

Entre outras, são grandezas escalares: área, massa, tempo, energia, potência, densidade, pressão, temperatura, carga elétrica e tensão elétrica.

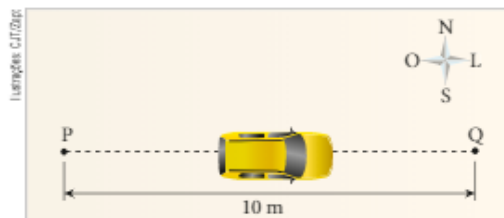
Considere agora o caso hipotético de uma embarcação com o casco avariado, em repouso em alto-mar, que receba pelo rádio a recomendação de se deslocar em linha reta 20 milhas a fim de chegar a um estaleiro onde será realizado o reparo necessário.

Mas há infinitas maneiras de cumprir o deslocamento sugerido, isto é, a embarcação poderá navegar a partir de sua posição inicial em infinitas **direções**. O deslocamento proposto não está determinado!

Eis que vem, então, uma informação complementar para que o barco navegue 20 milhas em linha reta na direção norte-sul. Porém, isso ainda não é tudo. É preciso dizer também se a embarcação deve navegar para o norte ou para o sul, ou seja, em que **sentido** deve ocorrer o deslocamento. De uma forma completa, o responsável pela embarcação deveria ser informado de que o deslocamento necessário para atingir o estaleiro deve ter módulo de 20 milhas, direção norte-sul e sentido para o sul. Só dessa maneira a embarcação conseguiria chegar sem rodeios ao destino recomendado.

Veja com isso que a definição de um deslocamento não é tão simples como a de um comprimento. Definir plenamente um deslocamento requer um **módulo**, uma **direção** e um **sentido**, sendo essa grandeza física de natureza **vetorial**.

Observe, na figura abaixo, que o deslocamento realizado pelo carro ao movimentar-se de **P** até **Q** é uma grandeza vetorial, caracterizada por um módulo (10 m), uma direção (leste-oeste) e um sentido (de oeste para leste).



O deslocamento é uma grandeza vetorial.

São também vetoriais as grandezas: velocidade, aceleração, força, impulso, quantidade de movimento (ou momento linear), vetor campo elétrico e vetor indução magnética, dentre outras.

Atenção: não confunda direção com sentido, pois são conceitos diferentes. Uma reta define uma direção. A essa direção podemos associar dois sentidos.

Na figura seguinte, os carros **A** e **B** percorrem uma mesma avenida retilínea e vão se cruzar. Suas velocidades têm a mesma direção, mas sentidos opostos.



Evite, portanto, expressões inadequadas do tipo: "O tráfego na avenida Paulista está congestionado nas duas direções...". A forma correta seria: "O tráfego

na avenida Paulista está congestionado nos dois sentidos...". Ou, ainda: "Ao atravessar a rua, olhe para as duas direções". O melhor seria: "Ao atravessar a rua, olhe para os dois sentidos".

Nas placas indicativas existentes em rodovias, o motorista obtém informações sobre direção e sentido a serem seguidos para chegar a um determinado destino. Essas informações se referem às grandezas vetoriais deslocamento e velocidade do veículo.

Fotografia mostrando uma placa em estrada.



Até este capítulo, velocidade e aceleração foram tratadas como grandezas de caráter escalar, pois não nos preocupamos com sua natureza vetorial, mas apenas com seus valores algébricos. Note que essa é uma simplificação conveniente e permitida quando as trajetórias são previamente conhecidas. Insistimos, entretanto, que ambas são grandezas vetoriais, cabendo-lhes, além do módulo ou intensidade, uma direção e um sentido.

Na fotografia ultrarrápida apresentada a seguir, um projétil atravessa uma maçã. Sua velocidade tem módulo (intensidade) próximo de 600 m/s (valor supersônico), direção horizontal e sentido da esquerda para a direita.

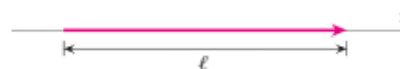


A velocidade é uma **grandeza vetorial**, já que possui módulo, direção e sentido.

2. VETORES E OPERAÇÕES COM VETORES

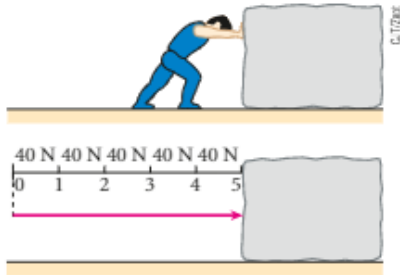
Vetor é um ente matemático constituído de um módulo, uma direção e um sentido, utilizado em Física para representar as grandezas vetoriais.

Um vetor pode ser esboçado graficamente por um segmento de reta orientado (seta):



O comprimento ℓ do segmento orientado está associado ao módulo do vetor, a reta suporte r fornece a direção, e a orientação (ponta aguçada do segmento) evidencia o sentido.

No exemplo das figuras a seguir, um homem está empurrando um bloco horizontalmente para a direita, aplicando sobre ele uma força de intensidade 200 N (N = newton, a unidade de força no SI).



A força de 200 N que o homem aplica no bloco (grandeza física vetorial) está representada pelo segmento de reta orientado, de comprimento 5,0 unidades, em que cada unidade de comprimento equivale a 40 N.

A notação de um vetor geralmente é feita utilizando-se uma letra sobreposta por uma pequena seta, por exemplo, \vec{a} , \vec{b} , \vec{v} , \vec{F} . Outra notação comum é obtida nomeando-se com letras maiúsculas as extremidades do segmento orientado que representa o vetor.



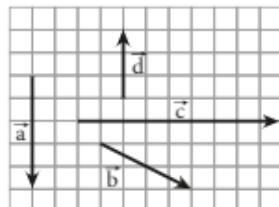
Nessa notação, faz-se sempre a letra que nomeia a ponta aguçada da seta menos a letra que nomeia a extremidade oposta (ou "origem"):

$$\vec{a} = B - A$$

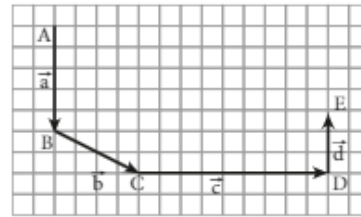
Adição de vetores

Considere os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} representados a seguir. Como podemos obter o vetor-soma (ou resultante) \vec{s} , dado por $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$?

Para responder a essa questão, faremos outra figura associando sequencialmente os segmentos orientados, representativos dos vetores-parcelas, de modo que a "origem" de um coincida com a ponta aguçada do que lhe antecede. Na construção dessa figura, devemos preservar as características de cada vetor: **módulo**, **direção** e **sentido**.



De acordo com a figura a seguir, o que se obtém é uma linha segmentada, denominada **linha poligonal**.



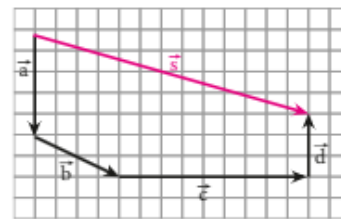
Nesse caso, temos:

$$\vec{a} = B - A; \vec{b} = C - B; \vec{c} = D - C; \vec{d} = E - D.$$

$$\text{Logo: } \vec{s} = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D)$$

$$\text{Assim: } \vec{s} = E - A$$

Na figura a seguir está ilustrado o vetor resultante \vec{s} . O segmento orientado que representa \vec{s} **sempre fecha o polígono** e sua ponta aguçada coincide com a ponta aguçada do segmento orientado que representa o último vetor-parcela.



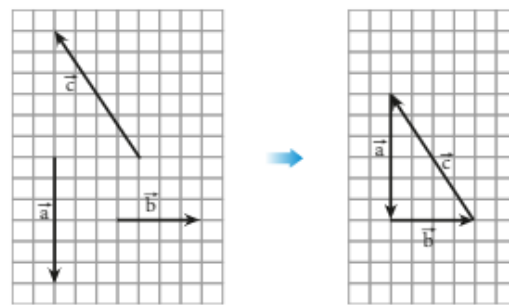
A esse método de adição de vetores damos o nome de **regra do polígono**.

NOTAS

- Vale a **propriedade comutativa**, isto é, a ordem dos vetores-parcelas não altera o vetor-soma.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{b} + \vec{e} + \vec{d} + \vec{a} + \vec{c}$$

- Se a linha poligonal dos vetores-parcelas for fechada, então o vetor-soma será **nulo**, como ocorre no caso da soma dos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} da figura abaixo.



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

Adição de dois vetores

Considere os vetores \vec{a} e \vec{b} na figura 1. Admitamos que seus segmentos orientados representativos tenham "origens" coincidentes no ponto O e que o ângulo formado entre eles seja θ .

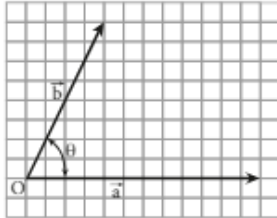


figura 1

Na figura 2 foi feita a adição $\vec{a} + \vec{b}$ pela regra do polígono:

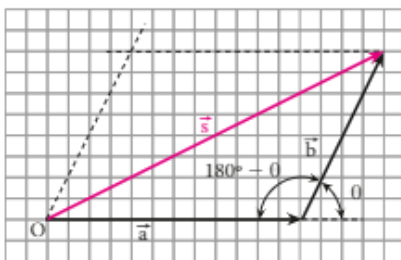


figura 2

Observe que o segmento orientado representativo do vetor resultante \vec{s} nada mais é que a **diagonal do paralelogramo** formado ao traçarmos linhas paralelas aos vetores.

Assim, dados dois vetores, é sempre possível obter graficamente o vetor-soma (resultante) pela **regra do paralelogramo**: fazemos que os segmentos orientados representativos dos vetores tenham "origens" coincidentes; da ponta aguçada do segmento orientado que representa um dos vetores, traçamos uma paralela ao segmento orientado que representa o outro vetor e vice-versa; o segmento orientado representativo do vetor resultante está na diagonal do paralelogramo obtido.

Nota-se que o módulo do vetor-soma (resultante) \vec{s} pode ser obtido aplicando-se uma importante relação matemática denominada **Lei dos cossenos** ao triângulo formado pelos segmentos orientados representativos de \vec{a} , \vec{b} e \vec{s} .

Seja a o módulo de \vec{a} , b o módulo de \vec{b} e s o módulo de \vec{s} , temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \theta)$$

$$\text{Mas: } \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\text{Assim: } s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

Subtração de dois vetores

Considere os vetores \vec{a} e \vec{b} representados na figura abaixo. Admita que os segmentos orientados representativos de \vec{a} e \vec{b} tenham "origens" coincidentes no ponto O e que o ângulo formado entre eles seja θ .

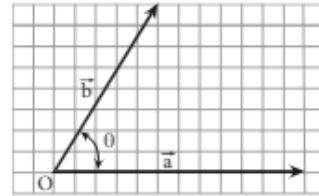


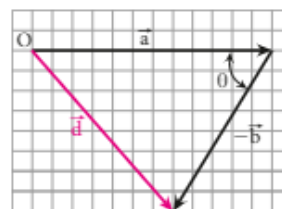
figura 1

O vetor diferença entre \vec{a} e \vec{b} ($\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$) pode ser obtido pela soma do vetor \vec{a} com o oposto de \vec{b} :

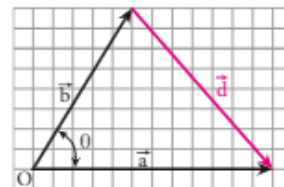
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

O oposto do vetor \vec{b} , ou seja, o vetor $-\vec{b}$, tem mesmo módulo e mesma direção de \vec{b} , porém sentido contrário, o que será justificado um pouco mais à frente.

Graficamente, temos:

figura 2
($\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$)

O vetor \vec{d} fica então representado na figura 1 como aparece a seguir.



O módulo de \vec{d} também fica determinado pela **Lei dos cossenos**.

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

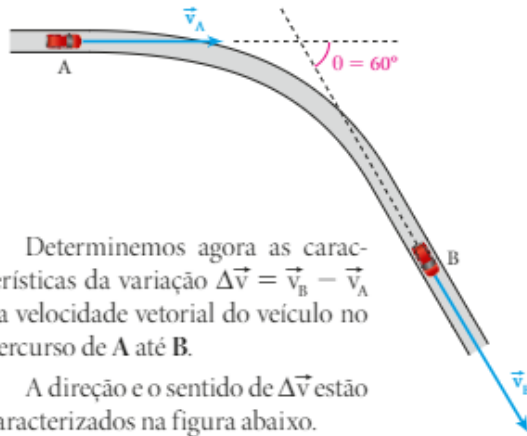
Variação de uma grandeza vetorial

A subtração de dois vetores tem caráter fundamental no estudo da Física.

A variação de uma grandeza vetorial qualquer ($\Delta \vec{G}$, por exemplo) é obtida subtraindo-se a grandeza inicial (\vec{G}_i) da grandeza final (\vec{G}_f).

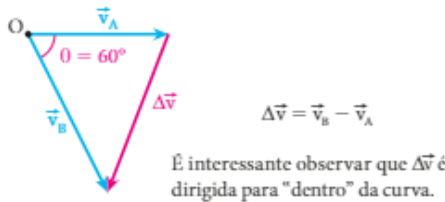
$$\Delta \vec{G} = \vec{G}_f - \vec{G}_i$$

Na ilustração a seguir, vê-se de cima um carro que percorre uma curva passando pelo ponto A com velocidade \vec{v}_A de intensidade 60 km/h e pelo ponto B com velocidade \vec{v}_B de intensidade 80 km/h. Podemos concluir que a variação da velocidade escalar desse carro tem módulo igual a 20 km/h.



Determinemos agora as características da variação $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ da velocidade vetorial do veículo no percurso de A até B.

A direção e o sentido de $\Delta\vec{v}$ estão caracterizados na figura abaixo.



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

É interessante observar que $\Delta\vec{v}$ é dirigida para "dentro" da curva.

A intensidade de $\Delta\vec{v}$ é determinada pela **Lei dos cossenos**: $\Delta v^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos \theta$

$$\Delta v^2 = (60)^2 + (80)^2 - 2 \cdot 60 \cdot 80 \cos 60^\circ$$

$$\Delta v^2 = 5200 \Rightarrow \Delta v \cong 72 \text{ km/h}$$

Observe que, nesse exemplo, a intensidade da variação da velocidade vetorial ($\cong 72 \text{ km/h}$) é diferente do módulo da variação da velocidade escalar (20 km/h).

Suponha que um tenista receba a bola com velocidade horizontal \vec{v}_1 de intensidade 80 km/h dirigida para a esquerda e realize um vigoroso voleio, devolvendo a bola também na horizontal com velocidade \vec{v}_2 de intensidade 100 km/h dirigida para a direita.

A variação da velocidade vetorial da bola, $\Delta\vec{v}$, fica determinada por: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$

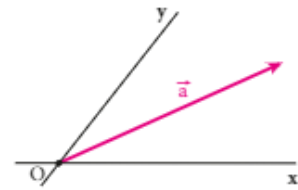


A intensidade de $\Delta\vec{v}$ é obtida por:

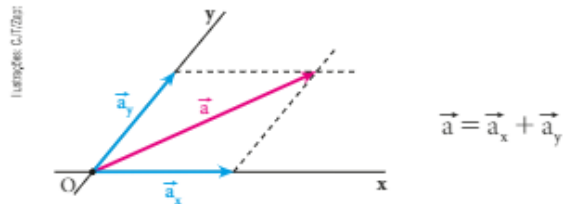
$$\Delta v = (100 + 80) \text{ km/h} \Rightarrow \Delta v = 180 \text{ km/h}$$

Decomposição de um vetor

Considere o vetor \vec{a} , representado na figura ao lado, e as retas x e y que se intersectam no ponto O, "origem" de \vec{a} .

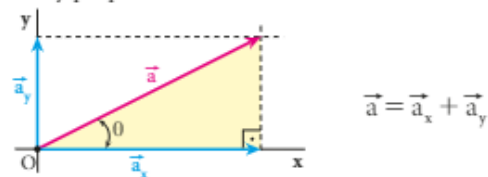


Conforme a regra do paralelogramo, podemos imaginar que o vetor \vec{a} é o resultante da soma de dois vetores, \vec{a}_x e \vec{a}_y , contidos, respectivamente, nas retas x e y:



Os vetores \vec{a}_x e \vec{a}_y são, portanto, componentes do vetor \vec{a} nas direções x e y.

Incita especial interesse, entretanto, o caso particular das componentes do vetor \vec{a} contidas em duas retas x e y perpendiculares entre si.



Levando em conta a regra do paralelogramo, teremos as componentes \vec{a}_x e \vec{a}_y , representadas na figura anterior.

Observando o triângulo retângulo destacado na figura e sendo a_x o módulo de \vec{a}_x , a_y o módulo de \vec{a}_y , a o módulo de \vec{a} e θ o ângulo formado entre \vec{a} e a reta x, são aplicáveis as seguintes relações:

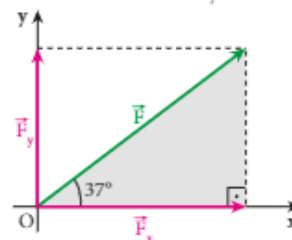
$$\cos \theta = \frac{a_x}{a} \Rightarrow a_x = a \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{a_y}{a} \Rightarrow a_y = a \sin \theta$$

Teorema de Pitágoras: $a^2 = a_x^2 + a_y^2$

Exemplo:

Nesta situação, estão calculadas as intensidades das componentes \vec{F}_x e \vec{F}_y da força \vec{F} representada na figura:



Consideremos os seguintes dados:

- $F = 20 \text{ N};$
- $\sin 37^\circ = 0,60;$
- $\cos 37^\circ = 0,80.$

$$F_x = F \cos 37^\circ \Rightarrow F_x = 20 \cdot 0,80 \text{ (N)} \Rightarrow F_x = 16 \text{ N}$$

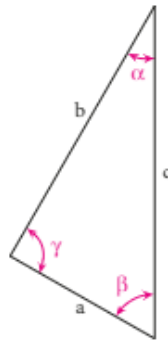
$$F_y = F \sin 37^\circ \Rightarrow F_y = 20 \cdot 0,60 \text{ (N)} \Rightarrow F_y = 12 \text{ N}$$

Por outro lado, a **Lei dos senos**, que estabelece a proporcionalidade entre a medida do lado de um triângulo qualquer e o seno do ângulo oposto a ele, pode ser muito útil no estudo dos vetores.

Considere, por exemplo, o triângulo ao lado, cujos lados medem **a**, **b** e **c** e cujos ângulos α , β e γ são ângulos internos desse triângulo, opostos respectivamente aos lados de medidas **a**, **b** e **c**.

A **Lei dos senos** estabelece que:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



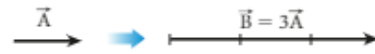
Multiplicação de um número real por um vetor

O produto de um número real **n**, não nulo, por um vetor \vec{A} é um vetor \vec{B} , tal que seu módulo é dado pelo

produto do módulo de **n** pelo módulo de \vec{A} , ou seja, $|\vec{B}| = |n| \cdot |\vec{A}|$. Sua direção é a mesma de \vec{A} ; seu sentido, no entanto, é o mesmo de \vec{A} se **n** for positivo, mas oposto ao de \vec{A} se **n** for negativo.

Exemplo 1:

Admitamos, por exemplo, $n = 3$. Sendo \vec{A} o vetor representado na figura, determinamos o vetor $\vec{B} = n\vec{A} = 3\vec{A}$:



Exemplo 2:

Consideremos $n = -\frac{1}{2}$. Sendo \vec{C} o vetor representado na figura, determinamos o vetor $\vec{D} = n\vec{C} = -\frac{1}{2}\vec{C}$:



Exemplo 3:

Façamos $n = -1$. Sendo \vec{E} o vetor representado na figura, determinamos o vetor $\vec{F} = n\vec{E} = -\vec{E}$ chamado **vetor oposto** de \vec{E} :

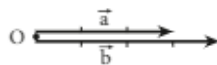


QUESTÕES COMENTADAS

1 Num plano α , temos dois vetores \vec{a} e \vec{b} com origens coincidentes, formando um ângulo θ . Se os módulos de \vec{a} e de \vec{b} são, respectivamente, iguais a 3 u e 4 u, determine o módulo do vetor-soma em cada um dos casos seguintes:
 a) $\theta = 0^\circ$ b) $\theta = 90^\circ$ c) $\theta = 180^\circ$ d) $\theta = 60^\circ$

RESOLUÇÃO

a) Se o ângulo formado pelos vetores é 0° , eles possuem a mesma direção e o mesmo sentido:



Sendo **s** o módulo do vetor-soma, temos, pela **Lei dos cossenos**:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 0^\circ = a^2 + b^2 + 2ab$$

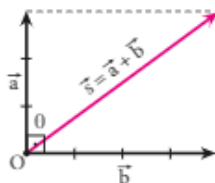
$$s^2 = (a + b)^2 \Rightarrow s = a + b$$

Assim: $s = 3 + 4 \Rightarrow s = 7 \text{ u}$

b) Se $\theta = 90^\circ$, e **s** é o módulo do vetor-soma, temos, pela **Lei dos cossenos**:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 90^\circ$$

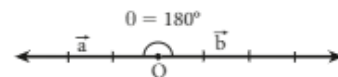
$$s^2 = a^2 + b^2$$



Podemos calcular **s** aplicando o **Teorema de Pitágoras**:

$$s^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow s = 5 \text{ u}$$

c) Se o ângulo formado pelos vetores é 180° , eles possuem a mesma direção, mas sentidos opostos:



Sendo **s** o módulo do vetor-soma temos, pela **Lei dos cossenos**:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 180^\circ = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$s^2 = (a - b)^2 \Rightarrow s = a - b$$

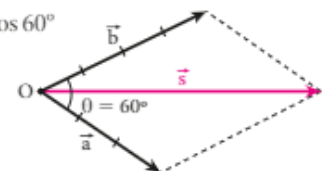
Assim: $s = 4 - 3 \Rightarrow s = 1 \text{ u}$

d) Para $\theta = 60^\circ$, aplicando a **Lei dos cossenos**, obtemos:

$$s^2 = 3^2 + 4^2 + 2(3)(4) \cos 60^\circ$$

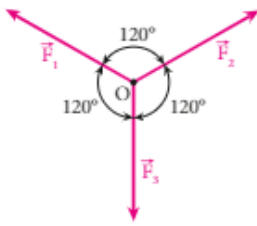
$$s^2 = 9 + 16 + 24 \cdot \frac{1}{2}$$

$$s^2 = 37 \Rightarrow s \cong 6 \text{ u}$$



Respostas: a) 7 u; b) 5 u; c) 1 u; d) aproximadamente 6 u

2 Três forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , contidas em um mesmo plano, estão aplicadas em uma partícula O , conforme ilustra a figura. \vec{F}_1 e \vec{F}_2 têm módulos iguais a 10 N.



Qual deve ser o módulo de \vec{F}_3 para que a soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$:

a) tenha módulo nulo?
 b) tenha módulo 5,0 N estando dirigida para baixo?

RESOLUÇÃO

Inicialmente, vamos calcular o módulo da soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Aplicando a **Lei dos cossenos**, temos:

$$s^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 120^\circ$$

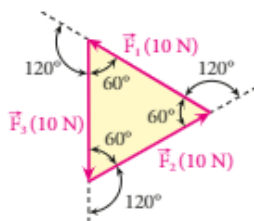
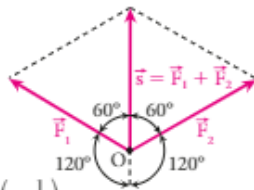
$$s^2 = (10)^2 + (10)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$s^2 = (10)^2 \Rightarrow s = 10 \text{ N}$$

\vec{F}_3 tem a mesma direção de $\vec{s} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, mas sentido oposto.

a) $F_3 - s = 0 \Rightarrow F_3 - 10 = 0 \Rightarrow F_3 = 10 \text{ N}$

Nesse caso, a linha poligonal de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 forma um **triângulo equilátero**, conforme ilustra a figura ao lado:

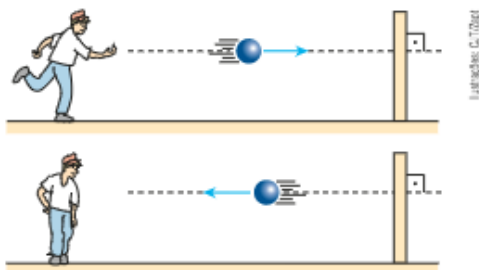


b) $F_3 - s = 5,0$
 $F_3 - 10 = 5,0$
 $F_3 = 15 \text{ N}$

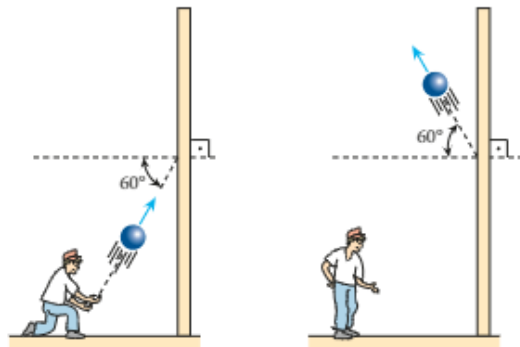
Respostas: a) 10 N; b) 15 N

3 Nas duas situações esquematizadas a seguir, o garoto lança uma bola de borracha contra uma parede vertical fixa. Admita que as colisões sejam perfeitamente elásticas, isto é, que a bola conserve o módulo de sua velocidade vetorial igual a v . Na situação 1, a bola vai e volta pela mesma reta horizontal. Na situação 2, a bola incide sob um ângulo de 60° em relação à reta normal à parede no ponto de impacto, sendo refletida sob um ângulo também de 60° em relação à mesma reta.

Situação 1



Situação 2



Calcule o módulo da variação da velocidade vetorial da bola:

- a) na situação 1; b) na situação 2.

RESOLUÇÃO

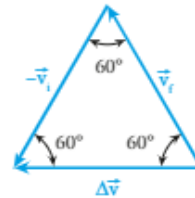
Em ambos os casos, a variação da velocidade vetorial da bola ($\Delta\vec{v}$) fica determinada pela diferença entre a velocidade final (\vec{v}_f) e a velocidade inicial (\vec{v}_i).

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{v}_f + (-\vec{v}_i)$$



$$|\Delta\vec{v}| = v + v \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = 2v$$

b) O triângulo formado pelos vetores \vec{v}_f , $-\vec{v}_i$ e $\Delta\vec{v}$ é equilátero e, por isso, esses três vetores têm módulos iguais.

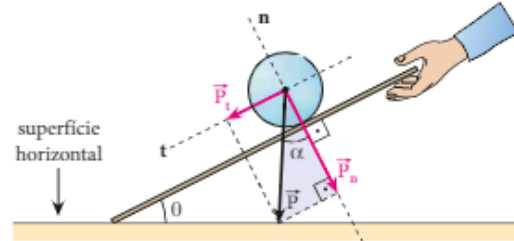
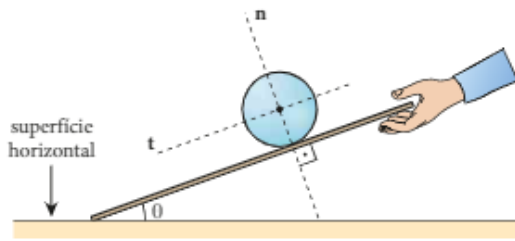


$$|\Delta\vec{v}| = v$$

Observe, neste caso, que a variação de velocidade escalar da bola é **nula**. Não confunda, portanto, variação de velocidade vetorial com variação de velocidade escalar.

Respostas: a) 2v; b) v

4 Uma peça decorativa fabricada em alumínio maciço é constituída de uma lâmina retangular e uma esfera com peso de intensidade P fixada à lâmina. Admita que uma pessoa vá inclinando uma das extremidades dessa peça, como representa a figura, de modo que a outra extremidade em contato com a superfície horizontal de apoio permaneça fixa, sem deslizar.



Estude como variam as intensidades das componentes tangencial (P_t) e normal (P_n) do peso da esfera, respectivamente, nas direções tangencial (t) e normal (n) à lâmina, em função do ângulo θ formado entre a lâmina e a superfície de apoio.

RESOLUÇÃO

Na figura a seguir está representado o peso \vec{P} da esfera e suas componentes \vec{P}_t e \vec{P}_n , respectivamente nas direções tangencial (t) e normal (n).

No triângulo retângulo destacado, $\alpha = \theta$ (semelhança de triângulos). Logo:

(I) $\text{sen } \theta = \frac{P_t}{P} \Rightarrow P_t = P \text{ sen } \theta$

(II) $\text{cos } \theta = \frac{P_n}{P} \Rightarrow P_n = P \text{ cos } \theta$

Resposta: $P_t = P \text{ sen } \theta$; $P_n = P \text{ cos } \theta$

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

5. Considere as grandezas físicas relacionadas a seguir, acompanhadas de um código numérico:

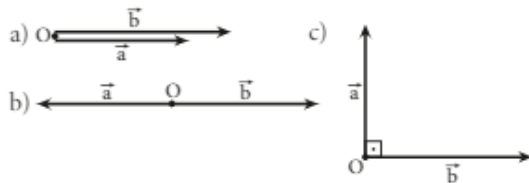
- | | |
|---------------|------------------|
| Energia (1) | Aceleração (5) |
| Massa (2) | Deslocamento (6) |
| Força (3) | Tempo (7) |
| Densidade (4) | Velocidade (8) |

Escrevendo em ordem crescente os códigos associados às **grandezas escalares** e os códigos associados às **grandezas vetoriais**, obtemos dois números com quatro algarismos cada um.

Determine:

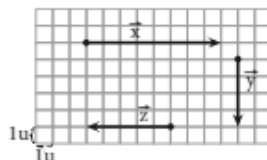
- o número correspondente às grandezas escalares;
- o número correspondente às grandezas vetoriais.

6. Determine o módulo do vetor-soma de \vec{a} ($a = 60 \text{ u}$) com \vec{b} ($b = 80 \text{ u}$) em cada caso:



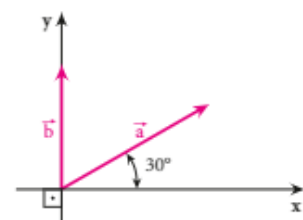
7. No plano quadrilado abaixo, estão representados três vetores: \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} .

Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.

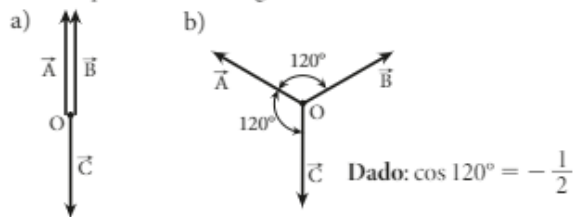


8. Os vetores \vec{a} e \vec{b} da figura ao lado têm módulos respectivamente iguais a 24 u e 21 u. Qual é o módulo do vetor-soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$?

Dado: $\text{sen } 30^\circ = 0,50$
 $\text{cos } 60^\circ = 0,50$



9. Considere três vetores coplanares \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} , de módulos iguais a x e com origens coincidentes num ponto O. Calcule o módulo do vetor resultante da soma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ nos dois casos esquematizados a seguir:



Dado: $\text{cos } 120^\circ = -\frac{1}{2}$

10. Três forças coplanares \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , de intensidades respectivamente iguais a 10 N, 15 N e 20 N, estão aplicadas em uma partícula. Essas forças podem ter suas direções modificadas de modo que se alterem os ângulos entre elas.

Determine para a resultante de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 :

- a intensidade máxima;
- a intensidade mínima.

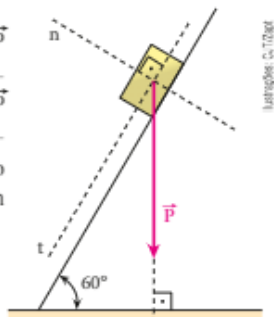
11. Considere duas forças \vec{F}_A e \vec{F}_B com intensidades respectivamente iguais a 12 N e 5,0 N. Calcule a intensidade das forças $\vec{S} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ e $\vec{D} = \vec{F}_A - \vec{F}_B$ nos casos a seguir:

- a) \vec{F}_A e \vec{F}_B têm mesma direção, mas sentidos opostos;
- b) \vec{F}_A e \vec{F}_B são perpendiculares.

12. O peso de um corpo é uma força vertical, dirigida para baixo. Na figura, está representado um bloco de peso P , apoiado em um plano inclinado de 60° em relação à horizontal.

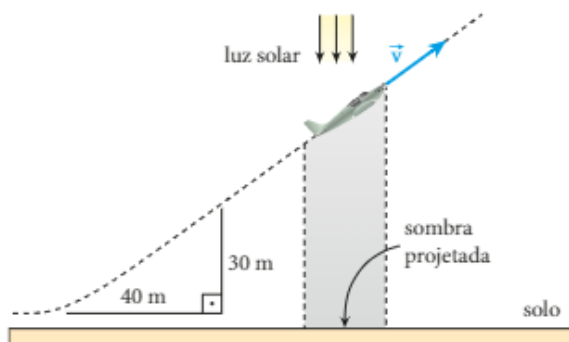
Sabendo que a intensidade de \vec{P} é igual a 20,0 N, calcule a intensidade das componentes de \vec{P} segundo as retas t e n , respectivamente tangente e normal ao plano inclinado no local em que se encontra o bloco.

Adote: $\sin 60^\circ \cong 0,87$ e $\cos 60^\circ = 0,50$.



13. Para decolar, um avião realiza a corrida na pista, alcançando voo com velocidade \vec{v} , de intensidade 360 km/h, que é mantida constante ao longo de uma trajetória retilínea e ascendente, como esquematizado. O Sol está a

pino, e a sombra do avião é projetada sobre o solo plano e horizontal.



Determine:

- a) a intensidade da velocidade com que a sombra do avião percorre o solo;
- b) o intervalo de tempo gasto pelo avião para atingir a altura de 480 m;
- c) a distância percorrida pelo avião desde o instante em que alça voo até o instante em que atinge a altura de 480 m.

3. DESLOCAMENTO VETORIAL

Uma compreensão mais consistente da Mecânica passa pela assimilação conceitual das grandezas físicas vetoriais que definiremos a seguir.

É importante destacar inicialmente, porém, que muito do que apresentaremos neste ponto do presente capítulo está fundamentado no pensamento do filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650), que é considerado um dos intelectuais mais influentes do pensamento ocidental.

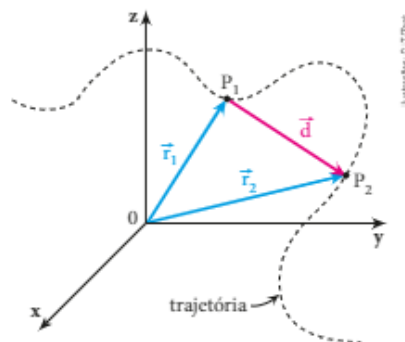


René Descartes: "Penso, logo existo". Óleo sobre tela de Frans Hals, c. 1649. Museu do Louvre.

Como filósofo, Descartes foi o fundador do movimento chamado Racionalismo, que se baseou na valorização da dúvida, isto é, na busca das verdades essenciais por meio do questionamento: "Nenhum objeto do pensamento resiste à dúvida, mas o próprio ato de duvidar é indubitável". Ele criou um método dedutivo que obedecia a uma sequência lógica: evidência, análise, síntese e enumeração. Uma das citações de Descartes, feita originalmente em latim – *Cogito, ergo sum.* –, tornou-se célebre: "Penso, logo existo".

No campo da Matemática, criou a geometria analítica, que funde Geometria e Álgebra, tendo como elemento de sustentação um sistema de coordenadas chamado cartesiano.

Considere uma partícula em movimento com relação a um referencial cartesiano $0xyz$. Na figura a seguir está indicada a trajetória descrita pela partícula, bem como as posições P_1 e P_2 ocupadas por ela, respectivamente, nos instantes t_1 e t_2 . Os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores-posição correspondentes a P_1 e P_2 . Os vetores-posição "apontam" a posição da partícula em cada ponto da trajetória. Sua "origem" está sempre na origem O do referencial e sua extremidade (ou ponta) aguçada coincide com o ponto em que a partícula se encontra no instante considerado.



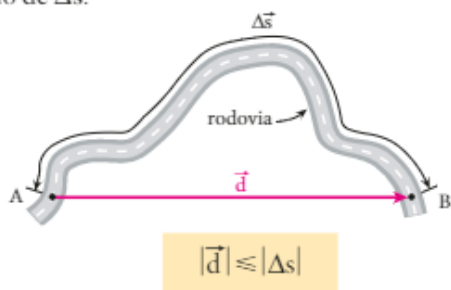
Definimos o deslocamento vetorial (\vec{d}) no percurso de P_1 a P_2 por meio da subtração vetorial:

$$\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

O **deslocamento vetorial** sempre conecta duas posições na trajetória. Sua "origem" coincide com o ponto de partida da partícula e sua extremidade (ou ponta) aguçada, com o ponto de chegada.

Na situação esquematizada na figura a seguir, um carro parte do ponto **A** e percorre a rodovia até atingir o ponto **B**. Nessa figura estão indicados o deslocamento vetorial \vec{d} e o deslocamento escalar Δs .

Observe que o módulo de \vec{d} nunca excede o módulo de Δs .



Ocorrerá o caso da igualdade $|\vec{d}| = |\Delta s|$ quando a trajetória for retilínea.

4. VELOCIDADE VETORIAL MÉDIA

É definida como o quociente do deslocamento vetorial \vec{d} pelo respectivo intervalo de tempo Δt .

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Como Δt é um escalar positivo, a velocidade vetorial média tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento vetorial (ambos são secantes à trajetória), como representa a figura:



ILUSTRAÇÃO: C. J. ZAPP

Vamos comparar agora o módulo da velocidade vetorial média com o módulo da velocidade escalar média. Sabemos que:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \text{ e } |v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

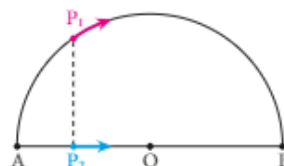
Lembrando que $|\vec{d}| \leq |\Delta s|$, podemos concluir que o módulo da velocidade vetorial média nunca excede o módulo da velocidade escalar média.

$$|\vec{v}_m| \leq |v_m|$$

Ocorrerá também o caso da igualdade $|\vec{v}_m| = |v_m|$ quando a trajetória for retilínea.

Exemplo:

Na figura a seguir, uma partícula P_1 vai de **A** até **B** percorrendo a semicircunferência de centro **O** e raio OA , enquanto outra partícula P_2 também vai de **A** até **B**, porém percorrendo o diâmetro que conecta esses dois pontos.



Supondo que as duas partículas se desloquem de **A** até **B** durante o **mesmo intervalo de tempo**, podemos concluir que:

- I. os deslocamentos vetoriais são iguais: $\vec{d}_1 = \vec{d}_2$.
- II. os deslocamentos escalares têm módulos diferentes: $|\Delta s_1| > |\Delta s_2|$.
- III. $|\vec{d}_1| < |\Delta s_1|$; $|\vec{d}_2| = |\Delta s_2|$
- IV. as velocidades vetoriais médias têm módulos iguais: $|\vec{v}_m| = |\vec{v}_m|$.
- V. as velocidades escalares médias têm módulos diferentes: $|v_m| > |v_m|$.
- VI. $|\vec{v}_m| < |v_m|$; $|\vec{v}_m| = |v_m|$.

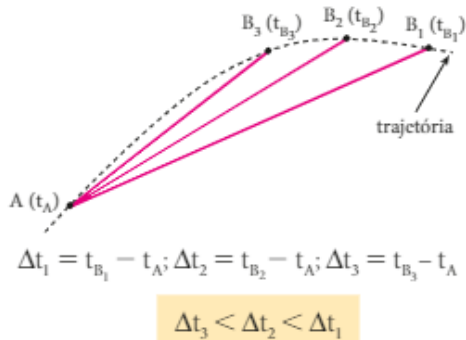
5. VELOCIDADE VETORIAL (INSTANTÂNEA)

Frequentemente denominada apenas velocidade vetorial, a velocidade vetorial instantânea é dada matematicamente por:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m$$

Como vimos, a velocidade vetorial média é secante à trajetória, apresentando mesma direção e mesmo sentido do deslocamento vetorial no intervalo de tempo considerado.

A velocidade vetorial instantânea, entretanto, pelo fato de ser definida em intervalos de tempo tendentes a zero, é **tangente à trajetória** em cada ponto e **orientada no sentido do movimento**.



Reduzindo-se a duração do intervalo de tempo, obtém-se no limite para Δt tendente a zero o ponto **B** praticamente coincidente com o ponto **A**. Com isso, no limite para Δt tendente a zero, a direção da velocidade vetorial média passa de secante a tangente à trajetória no ponto considerado.

Exemplo:



Nessa situação, uma partícula percorre de **A** para **C**, em movimento uniforme, a trajetória esquematizada. Estão representadas nos pontos **A**, **B** e **C** as velocidades vetoriais da partícula, todas tangentes à trajetória e orientadas no sentido do movimento.

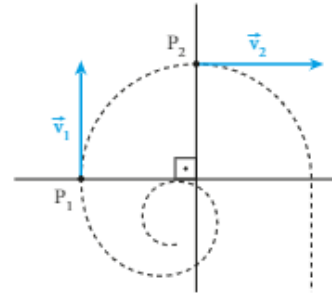
Observe que, embora as três velocidades vetoriais representadas tenham módulos iguais (movimento uniforme), $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B \neq \vec{v}_C$. Isso ocorre porque os vetores representativos dessas velocidades têm direções diferentes.

Dois ou mais vetores são iguais somente quando têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

O módulo (intensidade) da velocidade vetorial instantânea é sempre igual ao módulo da velocidade escalar instantânea: $|\vec{v}| = |v|$

6. ACELERAÇÃO VETORIAL MÉDIA

Considere agora uma partícula que, percorrendo uma trajetória como a esquematizada na figura a seguir, passa pela posição **P**₁ no instante **t**₁ com velocidade vetorial \vec{v}_1 e pela posição **P**₂ no instante **t**₂ com velocidade vetorial \vec{v}_2 .



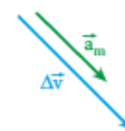
De **P**₁ para **P**₂, a partícula experimenta uma variação de velocidade vetorial $\Delta\vec{v}$, dada por: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$



A aceleração vetorial média da partícula no intervalo de **t**₁ a **t**₂ é definida por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Como Δt é um escalar positivo, a aceleração vetorial média (\vec{a}_m) tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido que a variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$).

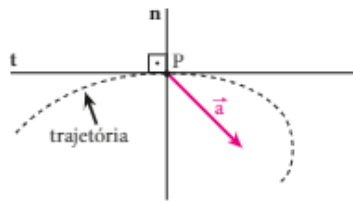


7. ACELERAÇÃO VETORIAL (INSTANTÂNEA)

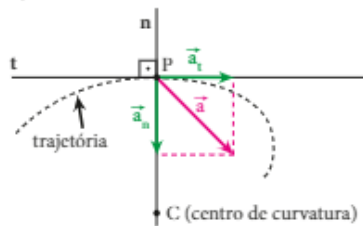
Em muitos casos simplesmente denominada aceleração vetorial, a aceleração vetorial instantânea é definida por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m$$

Admita que, ao percorrer a trajetória esboçada na figura a seguir, uma partícula tenha no ponto **P** uma aceleração vetorial \vec{a} . As retas **t** e **n** são, respectivamente, **tangente** e **normal** à trajetória no ponto **P**.



Decompondo \vec{a} segundo as retas **t** e **n**, obtemos, respectivamente, as componentes \vec{a}_t (**tangencial**) e \vec{a}_n (**normal**).



A componente normal de \vec{a} (\vec{a}_n), pelo fato de estar dirigida para o centro de curvatura da trajetória em cada instante, recebe a denominação **componente centrípeta** (\vec{a}_{cp}). Preferiremos essa última denominação e adotaremos o símbolo \vec{a}_{cp} .

Relacionando vetorialmente \vec{a} , \vec{a}_t e \vec{a}_{cp} , temos:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{cp}$$

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** e considerando **a** o módulo de \vec{a} , a_t o módulo de \vec{a}_t e a_{cp} o módulo de \vec{a}_{cp} , podemos escrever que:

$$a^2 = a_t^2 + a_{cp}^2$$

Por ter a direção do raio de curvatura da trajetória em cada ponto, a aceleração centrípeta também é denominada **aceleração radial**.

Componente tangencial ou aceleração tangencial (\vec{a}_t)

A **aceleração tangencial** está relacionada com as **variações de intensidade** da velocidade vetorial.

- Nos **movimentos variados**, isto é, naqueles em que a intensidade da velocidade vetorial é variável (movimentos acelerados ou retardados), a **aceleração tangencial é não nula**.

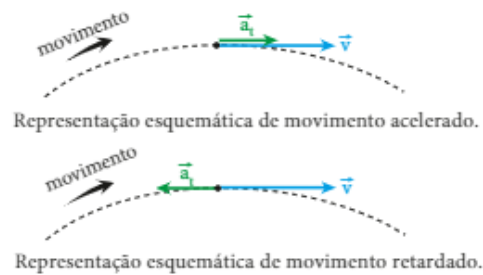
- Nos **movimentos uniformes**, isto é, naqueles em que a intensidade da velocidade vetorial é constante, a **aceleração tangencial é nula**.

Pode-se verificar que o módulo da aceleração tangencial é igual ao módulo da aceleração escalar.

$$|\vec{a}_t| = |\alpha|$$

A direção da aceleração tangencial é sempre a mesma da tangente à trajetória no ponto considerado, e seu sentido depende de o movimento ser acelerado ou retardado.

Nos **movimentos acelerados**, \vec{a}_t tem o **mesmo sentido** da velocidade vetorial; no entanto, nos **movimentos retardados**, \vec{a}_t tem **sentido oposto** ao da velocidade vetorial, conforme representam as figuras abaixo.



Componente centrípeta ou aceleração centrípeta (\vec{a}_{cp})

A **aceleração centrípeta** está relacionada com as **variações de direção** da velocidade vetorial.

- Nos **movimentos curvilíneos**, isto é, naqueles em que a direção da velocidade vetorial é variável, a **aceleração centrípeta é não nula**.
- Nos **movimentos retilíneos**, isto é, naqueles em que a direção da velocidade vetorial é constante, a **aceleração centrípeta é nula**.

Pode-se demonstrar que o módulo da aceleração centrípeta é calculado por:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$$

em que **v** é a velocidade escalar instantânea e **R** é o raio de curvatura da trajetória.

É interessante observar que, em uma mesma curva (**R** constante), $|\vec{a}_{cp}|$ é diretamente proporcional ao quadrado de **v**. Isso significa que, dobrando-se **v**, $|\vec{a}_{cp}|$ quadruplica.

Deve-se notar também que, em casos de movimento uniforme (\vec{v} constante), $|\vec{a}_{cp}|$ é inversamente proporcional a R . Isso significa que, dobrando-se R , $|\vec{a}_{cp}|$ reduz-se à metade.

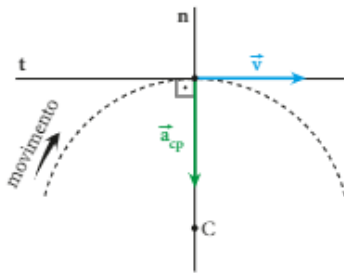


Christiaan Huygens, 1671

Christiaan Huygens (1629-1695), físico e astrônomo holandês. Gravura de Gerard Edelinck, baseada em pintura de Caspar Netscher, 1655. Bibliothèque Nationale, Paris. Huygens elucidou alguns fenômenos luminosos, como a difração, atribuindo à luz caráter ondulatório. Isso conflitou com as teorias de Newton, que tratavam a luz como um conjunto de partículas. Ao construir telescópios sofisticados para a sua época, Huygens descobriu a lua Titã de Saturno e explicou a natureza dos anéis que circundam esse planeta. A ele credita-se também a importante equação da aceleração centrípeta, dada por: $|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$

A direção da aceleração centrípeta (\vec{a}_{cp}) é sempre normal à trajetória e o sentido é sempre para o centro de curvatura.

Note que a aceleração centrípeta (\vec{a}_{cp}) e a velocidade vetorial (\vec{v}) são perpendiculares entre si. Isso se justifica pois, enquanto \vec{a}_{cp} é normal à trajetória, \vec{v} é tangencial.

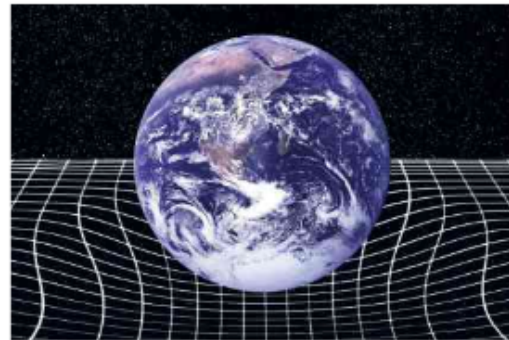


Retas: raridades naturais

É bastante difícil encontrar retas perfeitas na natureza. Os contornos curvos e sinuosos são muito mais comuns, como observamos na forma dos astros e dos seres vivos conhecidos. Todos os veículos de que dispomos – aviões, navios, ônibus, automóveis, bicicletas etc. –, em geral, percorrem trechos curvos até chegar ao seu destino.

O cientista alemão Albert Einstein (1879-1955) descreveu de maneira inédita e brilhante as ações gravitacionais: uma grande massa, como a de uma estrela, deforma significativamente o espaço-tempo nas suas vizinhanças.

De acordo com essa concepção, que integra a Teoria da Relatividade Especial, o Sol, por exemplo, deformaria o espaço-tempo ao seu redor, o que explicaria a manutenção dos planetas em sua órbita e as trajetórias curvas da luz, observáveis em sua propagação através do universo.



VICTOR DE SCHWANBERG/SPLURFEEK

Representação artística da deformação do espaço-tempo proposta por Einstein. A "vala" provocada pela presença de uma grande massa possibilitaria a gravitação de outras massas ao seu redor.



Na montanha-russa: aceleração e adrenalina

Das diversões propostas pelos parques, as montanhas-russas, construídas em versões cada vez mais radicais, sempre oferecem uma dose extra de emoção.

Nos trechos em que o movimento é **variado** (acelerado ou retardado), a aceleração vetorial admite uma componente **na direção da velocidade** (aceleração tangencial). Além disso, nos trechos em que a trajetória é **curvilínea**, a aceleração vetorial admite uma componente **perpendicular à velocidade**, dirigida para o centro de curvatura (aceleração centrípeta).



ART BY DINK WART/FOTAZINE

Montanha-russa em parque de diversões. Duisburg, Alemanha. Setembro de 2015.

QUESTÕES COMENTADAS

14 Um escoteiro, ao fazer um exercício de marcha com seu pelotão, parte de um ponto **P** e percorre esta sequência de deslocamentos:

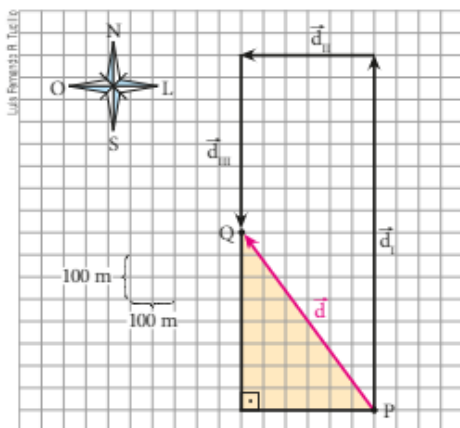
- I. 800 m para o Norte;
- II. 300 m para o Oeste;
- III. 400 m para o Sul.

Sabendo que a duração da marcha é de 8 min 20 s e que o escoteiro atinge um ponto **Q**, determine:

- a) o módulo do seu deslocamento vetorial de **P** a **Q**;
- b) o módulo da velocidade vetorial média e da velocidade escalar média de **P** a **Q**. (Dê suas respostas em m/s.)

RESOLUÇÃO

a) No esquema a seguir, estão representados os três deslocamentos parciais do escoteiro e também seu deslocamento total, de **P** até **Q**.



Aplicando o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo retângulo destacado, obtemos o módulo do deslocamento vetorial do escoteiro de **P** até **Q**.

$$|\vec{d}|^2 = (300)^2 + (400)^2 \Rightarrow |\vec{d}| = 500 \text{ m}$$

b) O intervalo de tempo gasto pelo escoteiro de **P** até **Q** é $\Delta t = 8 \text{ min } 20 \text{ s} = 500 \text{ s}$. Logo:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{v}_m| = \frac{500 \text{ m}}{500 \text{ s}} \Rightarrow |\vec{v}_m| = 1,0 \text{ m/s}$$

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{|\vec{d}_I| + |\vec{d}_{II}| + |\vec{d}_{III}|}{\Delta t}$$

$$|v_m| = \frac{800 + 300 + 400}{500} \text{ (m/s)} \Rightarrow |v_m| = 3,0 \text{ m/s}$$

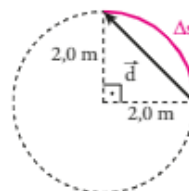
Respostas: a) 500 m; b) 1,0 m/s e 3,0 m/s

15 Considere uma partícula que percorre um quarto de circunferência de 2,0 m de raio em 10 s. Adotando $\sqrt{2} \cong 1,4$ e $\pi \cong 3,0$, determine:

- a) o módulo da velocidade escalar média da partícula;
- b) a intensidade da sua velocidade vetorial média.

RESOLUÇÃO

Na figura a seguir, estão indicados o deslocamento escalar (Δs) e o deslocamento vetorial (\vec{d}) da partícula:



$$|\Delta s| = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2 \cdot 3,0 \cdot 2,0}{4} \text{ (m)}$$

$$|\Delta s| = 3,0 \text{ m}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(2,0)^2 + (2,0)^2} = 2,0\sqrt{2} \text{ m}$$

$$|\vec{d}| = 2,0 \cdot 1,4 \text{ (m)} \Rightarrow |\vec{d}| = 2,8 \text{ m}$$

a) O módulo da velocidade escalar média é dado por:

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{3,0 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow |v_m| = 0,30 \text{ m/s}$$

b) A intensidade da velocidade vetorial média é dada por:

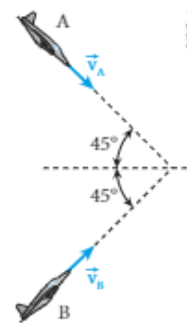
$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = \frac{2,8 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow |\vec{v}_m| = 0,28 \text{ m/s}$$

Observe, nesse caso, que $|\vec{v}_m| < |v_m|$.

Respostas: a) 0,30 m/s; b) 0,28 m/s

16 Dois aviões de combate, **A** e **B**, em movimento em um mesmo plano vertical, apresentam-se em determinado instante, conforme ilustra a figura, com velocidades vetoriais \vec{v}_A e \vec{v}_B de intensidades iguais a 1000 km/h.

Adotando $\sqrt{2} \cong 1,41$, determine as características da velocidade vetorial \vec{v}_R do avião **B** em relação ao avião **A** no instante considerado.



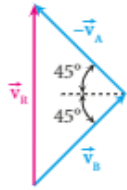
RESOLUÇÃO

Do ponto de vista vetorial, a velocidade de uma partícula 1 em relação a outra partícula 2 é $\vec{v}_{rel,2}$, dada pela subtração:

$$\vec{v}_{rel,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \text{ em que } \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}_2 \text{ são as velocidades vetoriais de 1 e 2 em relação ao solo.}$$

Assim, a velocidade \vec{v}_R do avião B em relação ao avião A fica determinada por: $\vec{v}_R = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow \vec{v}_R = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$

Graficamente, temos:



\vec{v}_R é vertical e dirigida para cima e sua intensidade pode ser obtida pelo Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}_R|^2 = |\vec{v}_A|^2 + |\vec{v}_B|^2$$

$$|\vec{v}_R|^2 = (1000)^2 + (1000)^2$$

$$|\vec{v}_R| = 1000\sqrt{2} \text{ (km/h)}$$

$$|\vec{v}_R| \cong 1410 \text{ km/h}$$

Observe que \vec{v}_R é a velocidade com que o piloto do avião A vê o avião B aproximar-se de sua aeronave.

Resposta: \vec{v}_R é vertical, dirigida para cima e de intensidade aproximadamente igual a 1410 km/h.

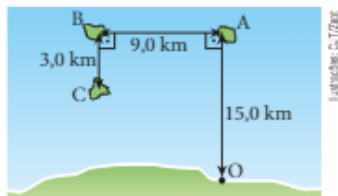


QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

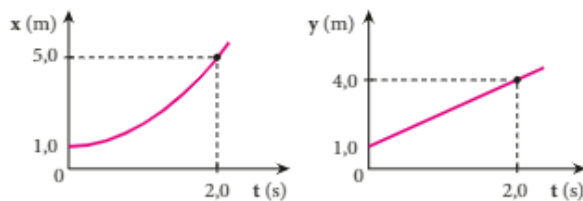
17. Uma embarcação carregada com suprimentos zarpa de um porto O na costa às 7 h para fazer entregas em três pequenas ilhas, A, B e C, posicionadas conforme representa o esquema.



A embarcação atraca na ilha C às 13 h do mesmo dia. Calcule para o percurso total de O até C:

- a velocidade escalar média;
- a velocidade vetorial média.

18. Considere uma partícula em movimento sobre o plano cartesiano Oxy . Suas coordenadas de posição variam em função do tempo, conforme mostram os gráficos abaixo:



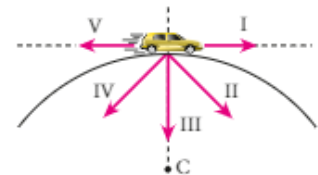
No intervalo de $t_0 = 0$ s a $t_1 = 2,0$ s, calcule:

- a intensidade do deslocamento vetorial da partícula;
- a intensidade da sua velocidade vetorial média.

19. O carrinho esquematizado na figura a seguir percorre a trajetória circular da esquerda para a direita. I, II, III, IV e V são vetores que podem estar associados ao movimento.

Indique, justificando, que vetores representam melhor a velocidade e a aceleração do carrinho nos seguintes casos:

- o movimento é acelerado;
- o movimento é retardado;
- o movimento é uniforme.



20. Admita que a trajetória da Terra em torno do Sol seja uma circunferência de raio $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ m e que o ano terrestre tenha duração $T = 3,1 \cdot 10^7$ s.

Considerando o movimento de translação da Terra em torno do Sol e adotando $\pi \cong 3,1$, determine:

- o módulo da velocidade vetorial do planeta em km/s;
- a intensidade da sua aceleração vetorial em m/s^2 .

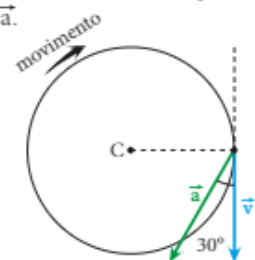
21. Uma partícula percorre uma trajetória circular de 6,0 m de diâmetro, obedecendo à função $v = 1,0 + 4,0 t$, com v em m/s e t em s. Para o instante $t = 0,50$ s, determine:

- a intensidade da velocidade vetorial;
- a intensidade da aceleração vetorial.

22. Uma partícula percorre uma circunferência de 1,5 m de raio no sentido horário, como está representado na figura abaixo. No instante t_0 , a velocidade vetorial da partícula é \vec{v} e a aceleração vetorial é \vec{a} .

Sabendo que $|\vec{v}| = 3,0$ m/s:

- calcule $|\vec{a}|$;
- diga se no instante t_0 o movimento é **acelerado** ou **retardado**. Justifique sua resposta.



8. VELOCIDADE RELATIVA, DE ARRASTAMENTO E RESULTANTE

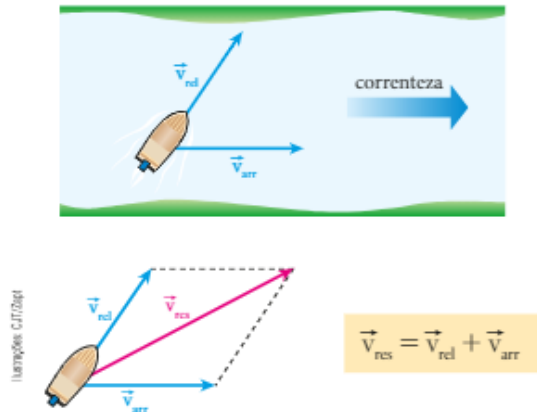
Consideremos um barco navegando em um rio, conforme ilustra a figura ao lado. Sejam \vec{v}_{rel} a velocidade do barco em relação às águas e \vec{v}_{arr} a velocidade das águas em relação às margens.

O barco tem, portanto, dois movimentos parciais: o **movimento relativo**, provocado pelo motor em relação às águas, com velocidade \vec{v}_{rel} , e o **movimento de arrastamento**, provocado pela correnteza, com velocidade \vec{v}_{arr} .

Fazendo a composição desses movimentos, o barco apresentará em relação às margens um **movimento resultante** com velocidade \vec{v}_{res} , que é dada pela soma vetorial de \vec{v}_{rel} com \vec{v}_{arr} .

Note que o movimento provocado pelo motor do barco (movimento relativo) é o que a embarcação teria

em relação às margens se no rio não houvesse correnteza (águas estivessem em repouso).



Casos particulares notáveis

Simbolizando por v_{res} , v_{rel} e v_{arr} os módulos de \vec{v}_{res} , \vec{v}_{rel} e \vec{v}_{arr} , respectivamente, temos:

<p>I. O barco navega a favor da correnteza.</p> $v_{res} = v_{rel} + v_{arr}$	<p>II. O barco navega contra a correnteza.</p> $v_{res} = v_{rel} - v_{arr}$	<p>III. O barco é dirigido perpendicularmente à correnteza.</p> $v_{res}^2 = v_{rel}^2 + v_{arr}^2$
--	---	--

9. PRINCÍPIO DE GALILEU

Analisando a situação ilustrada na figura do item **III**, da seção **8**, como faríamos para calcular o intervalo de tempo Δt gasto pelo barco na travessia do rio, cuja largura admitiremos igual a L ?

Consideramos no cálculo apenas o movimento relativo do barco, independentemente do movimento de arrastamento imposto pela água, pois a componente da velocidade associada à travessia é, nesse caso, exclusivamente \vec{v}_{rel} . A componente \vec{v}_{arr} está relacionada com o deslocamento do barco rio abaixo, não tendo nenhuma relação com a travessia propriamente dita.

O cálculo do intervalo de tempo Δt é feito por:

$$v_{rel} = \frac{L}{\Delta t}$$

Logo:
$$\Delta t = \frac{L}{v_{rel}}$$

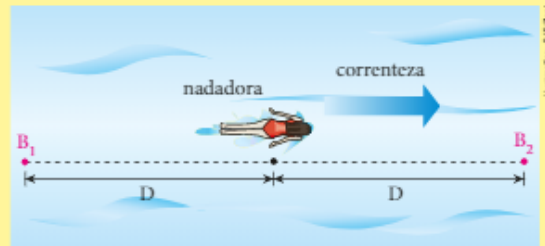
Estudando situações análogas a esta, o cientista italiano Galileu Galilei (1564-1642) enunciou que:

Se um corpo apresenta um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem. Consequentemente, o intervalo de tempo de duração do movimento relativo é **independente** do movimento de arrastamento.



Uma situação intrigante!

Imagine que uma nadadora esteja descendo um rio sob a ação exclusiva da correnteza, arrastada pela água com velocidade constante de intensidade v_{arr} , medida em relação às margens. Suponha que sua posição seja equidistante (distância D) de duas boias iguais, B_1 e B_2 , que também descem o rio sob a ação exclusiva da água. Veja a ilustração ao lado.



Ela resolve, então, agarrar uma das boias e, para isso, coloca-se a nadar em linha reta rumo a uma delas com velocidade constante de intensidade v_{rel} , medida em relação à água. Qual das duas boias a nadadora conseguiria atingir no menor intervalo de tempo, B_1 ou B_2 ? Pense um pouco.

Se você optou por B_1 ou por B_2 , você errou, já que qualquer uma das boias poderia ser alcançada em um mesmo intervalo de tempo de duração T !

A explicação para esse fato é a seguinte: como a água afeta igualmente o movimento da nadadora e o das boias, impondo aos três a velocidade própria da correnteza (v_{arr}), podemos raciocinar como se esse arrastamento não existisse. Logo, tudo se passa como se a água e as boias estivessem em repouso e só a nadadora se movimentasse! Isso significa que as duas boias poderiam ser alcançadas em intervalos de tempo de igual duração, já que a nadadora se desloca em movimento uniforme a partir de uma posição equidistante de ambas.

$$\text{O valor de } T \text{ fica determinado por: } v_{rel} = \frac{D}{T} \Rightarrow T = \frac{D}{v_{rel}}$$

Visando reforçar o conceito de que o movimento relativo é independente do movimento de arrastamento, vamos estudar o exemplo a seguir, em que uma locomotiva de brinquedo se deslocará com velocidade constante sobre trilhos retílineos, montados em cima de uma mesa horizontal forrada com uma toalha, indo da extremidade **A** à extremidade **B**.

Para tanto, considere duas situações:

I. A locomotiva irá de **A** até **B** com velocidade \vec{v}_{rel} em relação à toalha, que será mantida em repouso em relação à mesa.



II. A locomotiva irá de **A** até **B** com velocidade \vec{v}_{rel} em relação à toalha e esta, por sua vez, será puxada com velocidade \vec{v}_{arr} em relação à mesa.



Nas duas situações, o intervalo de tempo Δt gasto pela locomotiva na travessia da mesa, da extremidade **A** à extremidade **B** do trilho, será o mesmo, independentemente do movimento de arrastamento imposto pela toalha na situação II.

Sendo L a distância de **A** até **B**, o intervalo de tempo Δt fica determinado nos dois casos por:

$$v_{rel} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v_{rel}}$$

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

Aeronaves em voo sob a ação de ventos

Os aviões modernos dispõem de um grande número de equipamentos que auxiliam na pilotagem, além de computadores e sistemas de segurança, o que lhes permite voar praticamente sozinhos, com mínima ingerência da tripulação.

A cabine de comando, em alguns casos, mais parece um ambiente multimídia repleto de *joysticks* e *video games*.



Piloto (à esquerda) e copiloto em ação na cabine de comando de um moderno avião de passageiros.

Apesar de todos esses dispositivos, condições meteorológicas adversas podem surgir durante um voo, exigindo eficiência de todos esses aparelhos e perícia do comandante.

Suponha que logo após uma decolagem a cabine de comando de um grande avião de passageiros receba a informação de que um forte vento com velocidade de arrastamento (\vec{v}_{arr}) com intensidade constante igual a 72 km/h soprará horizontalmente durante toda a viagem no sentido de oeste para leste.

Admita que a velocidade do avião em relação ao ar, sem vento, (\vec{v}_{rel}) tenha intensidade constante de 650 km/h e que o voo tenha sido planejado para ocorrer horizontalmente no sentido de sul para norte ao longo de 1 292 km.

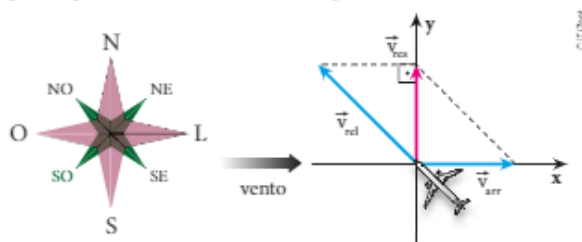


Decolagem para voo em linha reta com intenso vento lateral.

- Junto com um colega, analise e resolva a situação proposta a seguir. Se necessário, peça auxílio ao professor. Se a intensidade da velocidade de arrastamento imposta pelo vento (\vec{v}_{arr}) aumentar, o que deverá ocorrer com a intensidade da velocidade do avião em relação ao ar sem vento (\vec{v}_{rel}) e com o ângulo θ formado entre essa velocidade e a direção sul-norte para que a velocidade resultante do avião em relação ao solo (\vec{v}_{res}) não se modifique?

Para seguir a rota planejada, o piloto deverá aproar o avião entre noroeste e norte de modo que a velocidade resultante da aeronave, medida em relação ao solo, seja horizontal com sentido de sul para norte.

Isso significa que a equipe de comando terá de providenciar uma composição entre o movimento relativo da aeronave e a velocidade de arrastamento imposta pelo vento. Observe o esquema abaixo:



A partir da situação proposta, desprezando-se os intervalos de tempo gastos no taxiamento em solo, decolagem e pouso, como seria feito o cálculo da duração total do voo?

- Aplicando-se o **Teorema de Pitágoras**, calcula-se inicialmente a intensidade da velocidade resultante (\vec{v}_{res}) do avião.

$$(\vec{v}_{rel})^2 = (\vec{v}_{res})^2 + (\vec{v}_{arr})^2 \Rightarrow (650)^2 = (\vec{v}_{res})^2 + (72)^2$$

$$\text{Logo: } v_{res} = 646 \text{ km/h}$$

- Em seguida, sabendo-se que o movimento resultante é uniforme, calcula-se a duração total do voo.

$$v_{res} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow 646 = \frac{1292}{\Delta t}$$

$$\text{De modo que: } \Delta t = 2,0 \text{ h}$$

É importante observar que, conhecidos os lados do triângulo retângulo destacado no esquema (\vec{v}_{rel} , \vec{v}_{arr} e \vec{v}_{res}), pode-se determinar por meio de relações trigonométricas o valor do ângulo θ entre o eixo da fuselagem do avião e a direção sul-norte. Apresente, pelo menos, duas dessas relações.

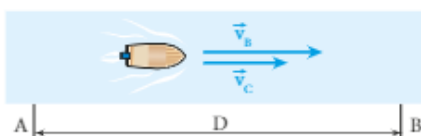
QUESTÕES COMENTADAS



23 Um barco motorizado desce um rio deslocando-se de um porto A até um porto B, distante 36 km, em 0,90 h. Em seguida, esse mesmo barco sobe o rio deslocando-se do porto B até o porto A em 1,2 h. Sendo v_B a intensidade da velocidade do barco em relação às águas e v_C a intensidade da velocidade das águas em relação às margens, calcule v_B e v_C .

RESOLUÇÃO

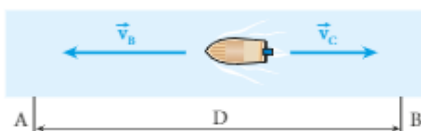
O barco **desce** o rio:



$$v_B + v_C = \frac{D}{\Delta t_1} \Rightarrow v_B + v_C = \frac{36 \text{ km}}{0,90 \text{ h}}$$

$$v_B + v_C = 40 \text{ (km/h)} \quad (\text{I})$$

O barco **sobe** o rio:



$$v_B - v_C = \frac{D}{\Delta t_2} \Rightarrow v_B - v_C = \frac{36 \text{ km}}{1,2 \text{ h}}$$

$$v_B - v_C = 30 \text{ (km/h)} \quad (\text{II})$$

Fazendo (I) + (II), temos: $2v_B = 70 \Rightarrow v_B = 35 \text{ km/h}$

De (I) ou (II), obtemos: $v_C = 5,0 \text{ km/h}$

Se ocorresse uma situação particular em que $v_B = v_C$, o barco permaneceria em repouso em relação às margens do rio. Nesse caso, o "esforço" exercido por seu motor seria anulado pelo "esforço" provocado pelo arrastamento das águas.

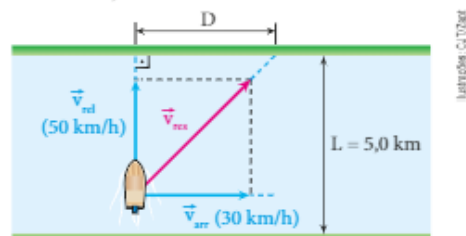
Resposta: 35 km/h e 5,0 km/h.

24 Um rio de margens retilíneas e largura constante igual a 5,0 km tem águas que correm paralelamente às margens, com velocidade de intensidade 30 km/h. Um barco, cujo motor lhe imprime velocidade de intensidade sempre igual a 50 km/h em relação às águas, faz a travessia do rio.

- Qual é o mínimo intervalo de tempo possível para que o barco atravesse o rio?
- Para atravessar o rio no intervalo de tempo mínimo, que distância o barco percorre paralelamente às margens?
- Qual é o intervalo de tempo necessário para que o barco atravesse o rio percorrendo a menor distância possível?

RESOLUÇÃO

- A travessia do rio é feita no menor intervalo de tempo possível quando a velocidade do barco em relação às águas é mantida **perpendicular** à velocidade da correnteza. (O movimento relativo é independente do movimento de arrastamento.)



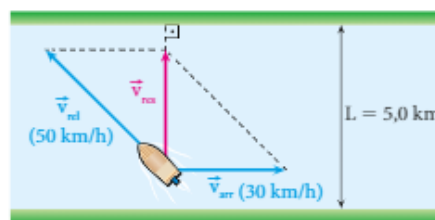
Travessia em **tempo mínimo**

$$v_{\text{rel}} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow 50 = \frac{5,0}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0,10 \text{ h} = 6,0 \text{ min}$$

- A distância D que o barco percorre paralelamente às margens, arrastado pelas águas do rio, é calculada por:

$$v_{\text{arr}} = \frac{D}{\Delta t} \Rightarrow 30 = \frac{D}{0,10} \Rightarrow D = 3,0 \text{ km}$$

- A travessia do rio é feita com o barco percorrendo a menor distância possível entre as margens quando sua velocidade em relação ao solo (velocidade resultante) é mantida **perpendicular** à velocidade da correnteza.



Travessia em **distância mínima**

- Pelo **Teorema de Pitágoras**:

$$(v_{\text{rel}})^2 = (v_{\text{res}})^2 + (v_{\text{arr}})^2 \Rightarrow (50)^2 = (v_{\text{res}})^2 + (30)^2$$

$$v_{\text{res}} = 40 \text{ km/h}$$

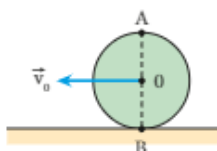
- $v_{\text{res}} = \frac{L}{\Delta t'} \Rightarrow 40 = \frac{5,0}{\Delta t'}$

$$\Delta t' = 0,125 \text{ h} = 7,5 \text{ min}$$

Observe que, neste caso, o barco "anda pouco", mas "demora muito", já que parte do "esforço" de seu motor é utilizado para "brigar" com a água.

Respostas: a) 6,0 min; b) 3,0 km; c) 7,5 min.

25 Um disco rola sobre uma superfície plana, sem deslizar. A velocidade do centro **O** é \vec{v}_0 .



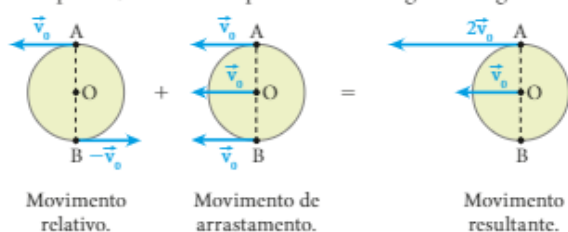
Em relação ao plano de rolagem, responda:

- a) qual é a velocidade \vec{v}_B do ponto **B**?
- b) qual é a velocidade \vec{v}_A do ponto **A**?

RESOLUÇÃO

Os pontos **A** e **B** têm **dois movimentos parciais**: o **relativo**, provocado pela **rotação** do disco, e o de **arrastamento**, provocado pela **translação**. O movimento **resultante**, observado do plano de rolagem, é a **composição** desses movimentos parciais.

Como não há deslizamento da roda, a velocidade do ponto **B**, em relação ao plano de rolagem, é **nula**. Por isso, as velocidades desse ponto, devidas aos movimentos relativo e de arrastamento, devem ter mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos, como está representado nas figuras a seguir:



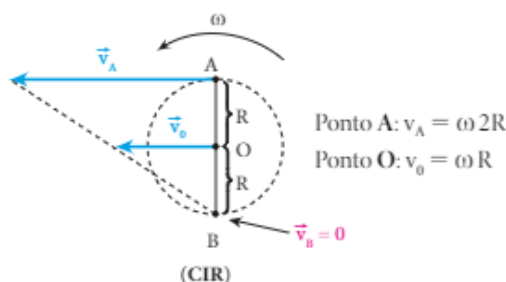
a) Ponto **B**: $\vec{v}_B = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} \Rightarrow \vec{v}_B = -\vec{v}_0 + \vec{v}_0$

$\vec{v}_B = \vec{0}$

b) Ponto **A**: $\vec{v}_A = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_0$

$\vec{v}_A = 2\vec{v}_0$

Em situações como essa, podemos raciocinar também em termos do **centro instantâneo de rotação (CIR)**, que, no caso, é o ponto **B**. Tudo se passa como se **A** e **B** pertencessem a uma "barra rígida", de comprimento igual ao diâmetro do disco, articulada em **B**. Essa barra teria, no instante considerado, velocidade angular ω , de modo que:



Comparando-se as duas expressões, conclui-se que:

$v_A = 2v_0$

Respostas: a) $\vec{0}$; b) $2\vec{v}_0$

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

26. Um garoto vai da base de uma escada rolante até seu topo e volta do topo até sua base, gastando um intervalo de tempo total de 12 s. A velocidade dos degraus da escada rolante em relação ao solo é de 0,50 m/s e a velocidade do garoto em relação aos degraus é de 1,5 m/s. Desprezando o intervalo de tempo gasto pelo garoto na inversão do sentido do seu movimento, calcule o comprimento da escada rolante.

27. Um barco provido de um motor que lhe imprime velocidade de 40 km/h em relação às águas é posto a navegar em um rio de margens paralelas e largura igual a 10 km, cujas águas correm com velocidade de 10 km/h em relação às margens.

- a) Qual é o menor intervalo de tempo para que o barco atravesse o rio? Esse intervalo de tempo depende da velocidade da correnteza?
- b) Supondo que o barco atravesse o rio no menor intervalo de tempo possível, qual é a distância percorrida por ele em relação às margens?

28. Seja \vec{v}_1 a velocidade de um barco em relação às águas de um rio de margens paralelas e \vec{v}_2 a velocidade das águas em relação às margens. Sabendo que $v_1 = 40$ km/h e que

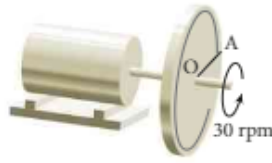
$v_2 = 20$ km/h, determine o ângulo entre \vec{v}_1 e \vec{v}_2 para que o barco atravesse o rio perpendicularmente às margens. Admita que \vec{v}_2 seja paralela às margens.

29. Um trem dotado de janelas laterais retangulares de dimensões 80 cm (base) \times 60 cm (altura) viaja ao longo de uma ferrovia retilínea e horizontal com velocidade constante de intensidade 40 km/h. Ao mesmo tempo, cai uma chuva vertical (chuva sem vento), de modo que as gotas apresentam, em relação ao solo, velocidade constante de intensidade v . Sabendo que o trajeto das gotas de chuva observado das janelas laterais do trem tem a direção da diagonal dessas janelas, determine:

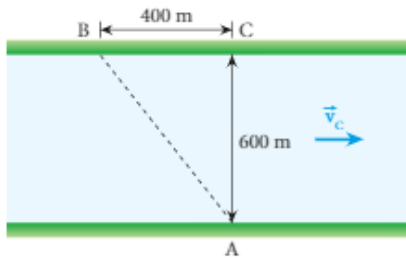
- a) o valor de v ;
- b) a intensidade da velocidade das gotas de chuva em relação a um observador no trem.

30. Um inseto percorre o raio $OA = 10$ cm da polia representada na figura, com velocidade de intensidade constante igual a 5,0 cm/s, medida em relação à polia. Esta, por sua vez, está rigidamente acoplada ao eixo de um motor que gira de modo uniforme, realizando 30 rotações por minuto. Sabendo que o inseto passa pelo ponto **O** no instante $t_0 = 0$,

calcule a intensidade da sua velocidade em relação à base de apoio do motor no instante $t_1 = 0,80$ s. Adote nos cálculos $\pi = 3$.



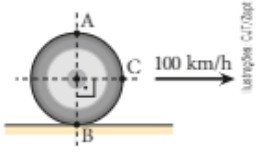
31. Considere um rio de margens paralelas e cuja correnteza tem velocidade constante de módulo v_C . Uma lancha tem velocidade relativa às águas constante e de módulo 10 m/s. Navegando em linha reta, a lancha parte do ponto A e atinge a margem oposta no ponto B, indicado na figura, gastando um intervalo de tempo de 100 s.



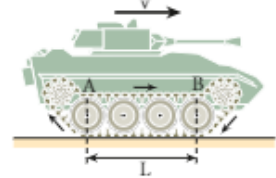
Pede-se: calcular o valor de v_C .

32. Um carro trafega a 100 km/h sobre uma rodovia retilínea e horizontal. Na figura, está representada uma das ro-

das do carro, na qual estão destacados três pontos: A, B e C. Desprezando derrapagens, calcule as intensidades das velocidades de A, B e C em relação à rodovia. Adote nos cálculos $\sqrt{2} \cong 1,4$.



33. O tanque de guerra esquematizado na figura está em movimento retilíneo e uniforme para a direita, com velocidade de módulo v . Não há escorregamento da esteira em relação ao solo nem da esteira em relação aos roletes.



Os roletes maiores têm raio R e giram em torno dos respectivos eixos com frequência de 50 rpm.

Os roletes menores, das extremidades, têm raio $\frac{2R}{3}$ e também giram em torno dos respectivos eixos.

Sabendo que determinado elo da esteira gasta 1,5 s para se deslocar do ponto A até o ponto B, conforme indicado na figura, e que nesse intervalo de tempo esse elo sofre um deslocamento de 6,0 m em relação ao solo, calcule:

- o valor de v , bem como o do comprimento L ;
- a frequência de rotação dos roletes menores.



DESCUBRA MAIS

- No capítulo 3, **Movimento circular uniforme**, você viu a definição de velocidade escalar angular, medida no SI em rad/s, e que, de forma geral, expressa a rapidez de varredura de ângulos. Em uma avaliação mais ampla, que passe pelo estudo da rotação de sólidos, a velocidade angular é uma grandeza escalar ou vetorial? Pesquise.
- Admita que exista uma longa ferrovia retilínea denominada Norte-Sul superposta a um dos meridianos terrestres e que cruze a linha do Equador. Um trem-bala trafega regularmente nessa ferrovia com velocidade constante de intensidade igual a 500 km/h em relação ao solo. Considere o movimento de rotação da Terra com período de 24 h e suponha que o planeta seja esférico com raio igual a $6,4 \cdot 10^6$ m. Em relação a um referencial fixo no centro da Terra, qual é a intensidade da velocidade do trem, em km/h, no instante em que ele cruza a linha do Equador?
- Se a calota de um carro que se desloca em movimento retilíneo e uniforme se desprender da roda, no instante em que ela tocar o solo, ainda em rotação em um plano perpendicular ao da estrada e deslocando-se no sentido do movimento do carro, seu centro desenvolverá uma velocidade de translação relativa ao solo menor que a do veículo. Por isso, o acessório se distanciará do automóvel, tendendo a se tornar um objeto perdido. Suponha que, no instante em que a calota toca o solo, sua velocidade angular seja igual à velocidade angular de rotação das rodas do carro. Explique por que a calota se distancia do veículo e substancie sua justificativa em expressões matemáticas.

INTERSABERES

Furacão: ira da natureza

O vocábulo *furacão* vem da cultura maia, dos povos que habitavam a península de Yucatán, na América Central. É uma referência ao deus Huracan, divindade que se incumbia da constante tarefa de destruir e reconstruir a natureza, sendo por isso associado a tormentas e vendavais.

Os furacões são ciclones tropicais de grande intensidade que se originam em latitudes geralmente baixas, nas regiões próximas à linha do Equador, quando aglomerados de nuvens de chuva recebem, por convecção, o ar quente e úmido que sobe das águas mornas dos oceanos. São sistemas de baixa pressão que fazem com que grandes massas de ar girem como um vórtice (redemoinho) em torno de um núcleo central denominado olho, provocando, em terra, tempestades muito fortes e ventos de até 320 km/h. Constituem, com os terremotos, uma força natural de imenso poder destruidor. Na maior parte dos casos, no hemisfério Sul os ciclones tropicais têm rotação horária, ocorrendo o oposto no hemisfério Norte. O sentido com que se movimentam as massas de ar é determinado principalmente pela rotação da Terra, que impõe às diversas camadas atmosféricas forças de cisalhamento diferentes entre si. Essas forças são mais intensas nas proximidades da linha do Equador, onde os pontos do solo giram ao redor do eixo do planeta com velocidades tangenciais maiores, impondo ao ar das proximidades movimentos mais céleres.

Se os furacões fossem simétricos e permanecessem imóveis em relação ao solo, os ventos soprariam em posições equidistantes do olho com velocidades de mesma intensidade. Em razão de seu deslocamento paralelo à crosta, porém, os ventos em posições equidistantes do olho apresentam velocidades distintas em relação a um referencial terrestre, fruto da composição dos movimentos relativo e de arrastamento a que ficam sujeitas as massas de ar.

O furacão Andrew, que atingiu o estado da Flórida em agosto de 1992, foi o mais devastador já registrado nos Estados Unidos. O pior de todos até o momento, entretanto, foi o Mitch, que, em outubro e novembro de 1998, provocou verdadeira desolação em Honduras, Nicarágua, El Salvador, Guatemala e sul da Flórida, tendo sido classificado como de categoria 5 na escala de Saffir-Simpson, que vai de 1 a 5. O Katrina, de categoria 4, atingiu de forma contundente a cidade de Nova Orleans, no estado estadunidense de Luisiana, em agosto de 2005.

No Brasil, é comum a ocorrência de ciclones extratropicais, sobretudo na Região Sul, porém com ventos menos intensos que os de um ciclone tropical ou mesmo um furacão. Os ciclones extratropicais se formam em águas de temperaturas mais baixas, por volta de 24 °C.

Um furacão oriundo das águas do Mar do Caribe, que aparece nesta fotografia de satélite obtida em setembro de 2004, ao adentrar a costa leste dos Estados Unidos, teve maior potencial destrutivo do lado direito do seu olho, já que, devido à composição dos movimentos relativo e de arrastamento, a velocidade dos ventos em relação ao solo nessa região foi maior que em posições simétricas do lado esquerdo.



NASA image courtesy: Arizona Daily Star

Compreensão, pesquisa e debate

1. Junto com um colega, pesquise acerca das diferenças entre ciclones e furacões. Além disso, descubra o que são e como se formam os tornados. Compartilhe, com os demais colegas e o professor, as informações obtidas.
2. O número de ciclones extratropicais tem aumentado significativamente no Brasil, especialmente na Região Sul do país. Que teorias melhor justificam esse fato? Se necessário, peça orientação ao professor para realizar essa pesquisa. Professores de outras disciplinas também podem ser consultados.

UNIDADE

2

DINÂMICA

A **Dinâmica** é a parte da Física que estuda os movimentos considerando as causas que os produzem e modificam. Esse setor da Mecânica exige em sua apresentação outras grandezas além de comprimento e tempo. São necessários também os conceitos de massa, força, energia e quantidade de movimento, entre outros.

Astronauta Stephen Robinson em missão no espaço, preso ao Canadarm2, braço da Estação Espacial Internacional. Agosto de 2005.

NESTA UNIDADE

5

PRINCÍPIOS DA DINÂMICA

6

ATRITO ENTRE SÓLIDOS

7

RESULTANTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA

8

GRAVITAÇÃO

9

MOVIMENTOS EM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME (BALÍSTICA)

10

TRABALHO E POTÊNCIA

11

ENERGIA MECÂNICA E SUA CONSERVAÇÃO

12

QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUA CONSERVAÇÃO

CAPÍTULO

5

PRINCÍPIOS DA DINÂMICA

1. INTRODUÇÃO

Hoje, temos à nossa disposição muito mais tecnologia do que tinham as pessoas dos séculos passados. Dispomos atualmente de telefones celulares, *laptops*, *tablets*, TVs de plasma, entre outros itens que proporcionam nossa conectividade e conforto.

Mas de onde veio esse conhecimento que culminou em todas essas tecnologias que não param de evoluir? Ele surge com os primeiros humanos, seres inteligentes, que nunca pararam de inovar e aprimorar seus inventos.

Devemos, então, contemplar as eras passadas com respeito, gratidão e admiração, uma vez que a evolução do conhecimento ocorre de maneira interligada, com uma descoberta fomentando a aparição das próximas.

Vivemos em um Universo em movimento. Galáxias se movem; o mesmo acontece com estrelas, planetas etc. Uma pedra em queda, uma pessoa caminhando ou um elétron se movimentando no interior de um acelerador de partículas são situações de movimento que exigem análise e compreensão.

Os movimentos fascinam o espírito indagador humano desde os mais remotos tempos. Muitos pen-

sadores formularam hipóteses na tentativa de explicá-los. O filósofo grego Aristóteles apresentou teorias que vigoraram por muitos séculos, pois se adequavam ao pensamento religioso da época. Posteriormente, entretanto, suas ideias foram em grande parte refutadas por Galileu Galilei. Depois deste, seguiram-se Isaac Newton e Albert Einstein, que deram sustentação matemática às teorias já existentes e ampliaram o conhecimento sobre os movimentos.

A **Dinâmica** é a parte da Mecânica que estuda os movimentos, considerando os fatores que os produzem e modificam.

Nessa parte da Física, aparecem as leis que regem os movimentos, envolvendo os conceitos de massa, força e energia, entre outros. Em nosso estudo, abordaremos a chamada Mecânica Clássica, que é baseada nos pensamentos de Galileu e Newton. Apresentaremos em Física Moderna os fundamentos da Mecânica Relativística de Einstein.

Ludovico Colonna/Alamy/Vecore di Forte - Palazzo Armeria



Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.). Considerado um dos maiores pensadores do Ocidente, nasceu na Grécia, na cidade de Estagira (hoje em dia, Stavros), dominada na época pelos macedônios. Discípulo de Platão, durante grande parte da sua vida viveu em Atenas, onde produziu uma obra de importância fundamental para o desenvolvimento do pensamento humano, abrangendo praticamente todos os assuntos de interesse para a Filosofia e a Ciência. Seus postulados constituem a base da lógica e muitas

de suas citações sobre os movimentos tiveram, no mínimo, relevância histórica, já que estimularam outros pensadores a iniciar uma discussão mais fundamentada sobre o assunto.

Fonte: O Galilei Galilei, Janus Stalman, 1636/Retrat: Martinus Nicolaus, Giovanni Leotta



Galileu Galilei (1564-1642). Italiano de Pisa, é considerado o fundador da Ciência Moderna pela introdução do **método científico** – compreensão e comprovação das leis da natureza por meio da experimentação sistemática. Estudou a queda dos corpos e inventou uma série de instrumentos científicos ligados à Hidrostática e à Astronomia. Desenvolveu o telescópio, que lhe permitiu observar a Lua, os

anéis de Saturno, os satélites de Júpiter e as manchas solares. Deu forte apoio à teoria heliocêntrica de Copérnico, o que lhe custou enfrentamentos com a Igreja.

2. O EFEITO DINÂMICO DE UMA FORÇA

Na Cinemática, estudamos diversas situações em que a aceleração vetorial não é nula, ou seja, as partículas movimentam-se com velocidade vetorial variável. É o que acontece, por exemplo, nos movimentos acelerados, em que há aumento do módulo da velocidade no decorrer do tempo. Entretanto, esses movimentos de aceleração não nula foram apresentados sem que fosse feita uma pergunta fundamental: quem é o agente físico causador da aceleração? E a resposta aqui está: é a **força**.

Somente sob a ação de uma força é que uma partícula pode ser acelerada, isto é, pode experimentar variações de velocidade vetorial ao longo do tempo.

Força é o agente físico cujo efeito dinâmico é a aceleração.

Os *dragsters* são veículos capazes de arrancar com acelerações muito elevadas, se comparadas às dos carros comuns, conseguindo atingir 500 km/h em apenas 8 s, depois de partirem do repouso. Isso se deve a um motor especial, de grande potência, instalado em uma estrutura leve e de aerodinâmica adequada. Para obter essa aceleração, os *dragsters* requerem uma força propulsora externa que é aplicada pelo solo sobre as rodas motrizes traseiras.



Dragster em sessão de teste em pista de corrida. Las Vegas, 2012.

3. CONCEITO DE FORÇA RESULTANTE

Consideremos o arranjo experimental representado na figura a seguir, em que um bloco, apoiado em uma mesa horizontal e lisa, é puxado horizontalmente pelos garotos A e B.



O garoto A puxa o bloco para a direita, aplicando-lhe uma força \vec{F}_A . O garoto B, por sua vez, puxa o bloco para a esquerda, exercendo uma força \vec{F}_B . Esquemáticamente, temos:



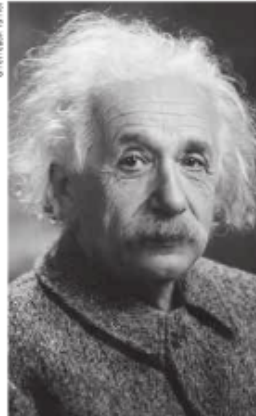
St. James Thornhill, Portrait of Sir Isaac Newton, 1710. The Bridgeman Art Library/Woodfin Camp



Isaac Newton (1642-1727). Inglês, natural de Woolstorp, fundamentou-se nos trabalhos de Galileu para apresentar as leis do movimento em seu livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Elaborou a extremamente importante Lei da Atração das Massas, que deu à Física e à Astronomia explicações essenciais. Formulou teorias sobre Óptica e estudou a decomposição da luz branca em prismas. Ao perceber que a matemática da época

era insuficiente para descrever completamente os fenômenos físicos conhecidos, desenvolveu o Cálculo Diferencial e Integral, abrindo novos horizontes aos pesquisadores.

© Getty Images



Albert Einstein (1879-1955). Alemão de Ulm, publicou, em 1905, a Teoria da Relatividade ao descobrir que os princípios da Mecânica Clássica de Galileu e Newton eram inadequados para descrever movimentos de corpos a velocidades próximas à da luz no vácuo (aproximadamente $3,0 \cdot 10^8$ m/s). Em sua teoria, os conceitos de comprimento, massa e tempo adquirem caráter relativo, já que dependem

da velocidade do corpo considerado. Einstein, homem genial, foi distinguido com o Nobel de Física, em 1921, por trabalhos sobre o efeito fotoelétrico.

Se apenas **A** puxasse o bloco, este seria acelerado para a direita, com aceleração \vec{a}_A . Se, entretanto, apenas **B** puxasse o bloco, este seria acelerado para a esquerda, com aceleração \vec{a}_B .

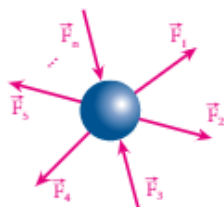
Supondo que **A** e **B** puxem o bloco conjuntamente, observaremos como produto final uma aceleração \vec{a} , que poderá ter características diversas. Tudo dependerá da intensidade de \vec{F}_A comparada à de \vec{F}_B :

- se $|\vec{F}_A| > |\vec{F}_B|$, notaremos \vec{a} dirigida para a direita;
- se $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$, teremos $\vec{a} = \vec{0}$;
- se $|\vec{F}_A| < |\vec{F}_B|$, \vec{a} será orientada para a esquerda.

A **força resultante** de \vec{F}_A e \vec{F}_B equivale a uma força única que, atuando sozinha, imprime ao bloco a mesma aceleração \vec{a} que \vec{F}_A e \vec{F}_B imprimiriam se agissem em conjunto.

Considere a partícula da figura ao lado submetida à ação de um sistema de **n** forças.

A resultante (\vec{F}) desse sistema de forças é a soma vetorial das **n** forças que o compõem:



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

É fundamental destacar, porém, que a resultante \vec{F} não é uma força a mais a agir na partícula; \vec{F} é apenas o resultado de uma adição vetorial.

4. EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

Dizemos que uma partícula está em **equilíbrio** em relação a um dado referencial quando a resultante das forças que nela agem é nula.

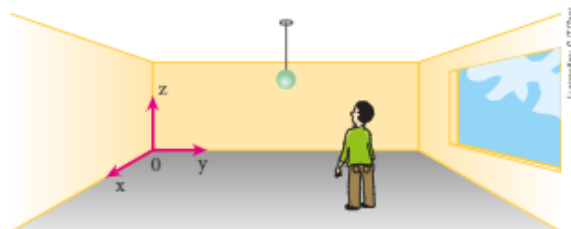
Distinguem-se dois tipos de equilíbrio para uma partícula: **equilíbrio estático** e **equilíbrio dinâmico**.

Equilíbrio estático

Dizemos que uma partícula está em **equilíbrio estático** quando se apresenta em repouso em relação a um dado referencial.

Estando em equilíbrio estático, uma partícula tem velocidade vetorial constante e nula ($\vec{v} = \text{constante} = \vec{0}$).

Considere, por exemplo, a situação da figura abaixo, em que um homem pendurou no teto de uma sala uma pequena esfera, utilizando um cordão. Suponha que ele tenha associado a um dos cantos da sala um referencial cartesiano, formado pelos eixos **x** (abscissas), **y** (ordenadas) e **z** (cotas).



Se a posição da esfera é invariável em relação ao referencial adotado, temos uma situação de equilíbrio estático. A esfera está em repouso (velocidade vetorial nula) e a resultante das forças que nela agem é nula.

Equilíbrio dinâmico

Dizemos que uma partícula está em **equilíbrio dinâmico** quando se apresenta em movimento retilíneo e uniforme (MRU) em relação a um dado referencial.

Estando em equilíbrio dinâmico, uma partícula tem velocidade vetorial constante e não nula ($\vec{v} = \text{constante} \neq \vec{0}$).

Considere, por exemplo, uma rampa seguida de uma plataforma plana, horizontal e infinitamente longa. Uma partícula parte do repouso no ponto **A**, desce a rampa em movimento acelerado e atinge a plataforma horizontal.



Por algum tempo, a partícula percorre a plataforma até parar. Por que a partícula para? Isso se deve às forças resistentes que se opõem ao seu movimento: a força de atrito, entre a partícula e a superfície da plataforma, e a força de resistência exercida pelo ar.

Suponha, agora, que seja feito um bom polimento na superfície, de modo que se reduza a intensidade do atrito atuante na partícula. Repetindo o experimento, o que observamos? Nesse caso, a partícula desce a rampa e percorre, na plataforma horizontal, um espaço maior que no caso anterior. Isso se deve à menor resistência ao movimento.

Se fosse possível eliminar completamente o atrito e a resistência do ar, o que ocorreria se, mais uma vez, a partícula fosse abandonada no ponto A? Agora ela desceria a rampa aceleradamente e, na plataforma horizontal, se moveria indefinidamente, já que a plataforma é suposta infinita. Durante o movimento na plataforma, a partícula estaria livre da ação de uma força resultante. Assim, não haveria força alguma favorecendo o movimento ou opondo-se a ele. Sob resultante nula, a partícula seguiria com velocidade vetorial constante e não nula, isto é, seguiria em movimento retilíneo e uniforme.

Nas condições do último caso, temos, no trecho horizontal, uma situação de equilíbrio dinâmico.

Outro exemplo em que se pode analisar o equilíbrio dinâmico é o lançamento de uma nave espacial da Terra rumo a um astro distante. Inicialmente seu movimento é acelerado sob a ação dos sistemas propulsores em franco funcionamento.



Representação artística de nave espacial em movimento acelerado (elementos sem proporção entre si e em cores fantasia).

Ao atingir regiões do espaço onde as influências gravitacionais são desprezíveis, entretanto, os sistemas propulsores podem ser desligados. Com esses sistemas desligados a nave não para; segue em movimento retilíneo e uniforme, mantendo constante a velocidade que tinha no instante do desligamento. Livre de ações gravitacionais significativas e com os sistemas propulsores desligados, a nave está em equilíbrio dinâmico.



Representação artística de nave espacial em MRU – equilíbrio dinâmico (elementos sem proporção entre si e em cores fantasia).

5. CONCEITO DE INÉRCIA

Inércia é a tendência dos corpos em conservar sua velocidade vetorial.

Exemplifiquemos o conceito de inércia abordando uma situação conhecida de todos: trata-se do corriqueiro caso do passageiro que viaja de pé no corredor de um ônibus.

Suponhamos que o ônibus esteja parado diante de um semáforo. Quanto valem as velocidades do ônibus e do passageiro em relação à Terra? Zero! Então, o ônibus arranca e, como se diz na linguagem cotidiana, o passageiro é “jogado para trás”. Nesse momento, ele está manifestando **inércia de repouso**, pois tende a continuar, em relação à Terra, parado no mesmo lugar. É importante frisar que, em relação à Terra, o passageiro não foi “jogado para trás”: na realidade, seu corpo apenas manifestou uma tendência de manter a velocidade nula.

Vamos supor ainda que o ônibus esteja viajando por uma estrada retilínea, plana e horizontal, com velocidade de 60 km/h. Quanto vale a velocidade do passageiro, nesse caso, em relação à Terra? Também 60 km/h. Então, o ônibus freia bruscamente e o passageiro é “atirado para a frente”. Nessa situação, ele está manifestando **inércia de movimento**, pois tende a continuar, em relação à Terra, com a mesma velocidade (60 km/h), em movimento retilíneo e uniforme. É importante destacar que, em relação à Terra, o passageiro não foi “atirado para a frente”: na realidade, seu corpo apenas manifestou uma tendência de manter a velocidade anterior à freada.

Considerando as situações apresentadas, o passageiro entrará em movimento a partir do repouso ou será freado a partir de 60 km/h se receber, do meio que o cerca, uma **força**. Só com a aplicação de uma força externa adequada é que suas tendências inerciais serão vencidas e, conseqüentemente, sua velocidade vetorial será alterada. Assim, podemos concluir:

Tudo o que possui matéria tem inércia.
A inércia é uma característica própria da matéria.

Para que as tendências inerciais de um corpo sejam vencidas, é necessária a intervenção de força externa.

6. O PRINCÍPIO DA INÉRCIA (1ª LEI DE NEWTON)

Este princípio está implícito nas seções anteriores. Vamos agora formalizá-lo por meio de dois enunciados equivalentes.

Primeiro enunciado

Se a força resultante sobre uma partícula é nula, ela permanece em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

Como exemplo, admitamos um grande lago congelado, cuja superfície é perfeitamente lisa, plana e horizontal. No local, não há presença de ventos e a influência do ar é desprezível. Em um caminhão parado no meio do lago, a força resultante é nula. Se o motorista tentar arrancar com o veículo, não conseguirá, pois, por causa da inexistência de atrito, o caminhão permanecerá "patinando", sem sair do lugar.

Ilustração: C. F. Z. B.



Enquanto a força resultante for nula, o caminhão, que já estava parado, permanecerá em repouso por inércia.

Vamos supor, no entanto, que alguma força externa coloque o caminhão em movimento e, ime-

diatamente, pare de atuar sobre ele. Após isso, a velocidade do veículo será constante, ou seja, ele seguirá em linha reta, em movimento uniforme. Se o motorista virar o volante para qualquer lado ou acionar os freios, nada ocorrerá. Pelo fato de a força resultante ser nula, o movimento do caminhão não será afetado.



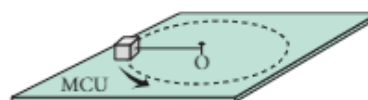
Quando em movimento, enquanto a força resultante for nula, o caminhão seguirá em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

Segundo enunciado

Um corpo livre de uma força externa resultante é incapaz de variar sua própria velocidade vetorial.

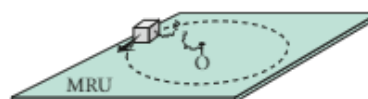
Para entender o **Princípio da Inércia** nesse ponto de vista, analisemos o próximo exemplo.

Na figura a seguir, está representada uma superfície plana, horizontal e perfeitamente lisa, sobre a qual um bloco, ligado à superfície por um fio inextensível, realiza um movimento circular e uniforme (MCU) em torno do centro **O**.



Nesse caso, embora tenha módulo constante, a velocidade vetorial do bloco varia em direção de um ponto para outro ponto da trajetória. Quem provoca essa variação na direção da velocidade do bloco? É a força aplicada pelo fio que, em cada instante, tem a direção do raio da circunferência e está dirigida para o centro **O**. É ela que mantém o bloco em movimento circular.

Suponha que, em dado instante, o fio se rompa. O bloco "escapará pela tangente", passando a descrever, sobre a superfície, um movimento retilíneo e uniforme (MRU).



Pode-se concluir, então, que, eliminada a força exercida pelo fio, o bloco se torna incapaz de, por si só, variar sua velocidade vetorial. Ele segue, por inércia, em trajetória reta com velocidade constante.

Note que, para variar a velocidade vetorial de um

corpo, é necessária a intervenção de uma força resultante, fruto das ações de agentes externos ao corpo. Sozinho (livre de força resultante externa), um corpo em movimento mantém, por inércia, velocidade vetorial constante.

FAÇA VOCÊ MESMO

Observando a inércia de repouso de uma moeda

Manifestações da inércia dos corpos podem ser notadas em diversas ocorrências do dia a dia, como na situação que propomos a seguir.

Material necessário

- 1 moeda de 1 real ou equivalente;
- 1 placa retangular bem lisa, de acrílico ou papelão;
- 1 copo de vidro transparente.

Procedimento

- Coloque a moeda sobre a placa e esta sobre a boca do copo, apoiando todo o conjunto em cima de uma mesa. Cuide para que durante o procedimento o copo não se desloque.
- Puxe vigorosa e rapidamente a placa, na direção horizontal. Você perceberá a moeda cair dentro do copo, atingindo seu fundo.



Analisando o experimento

- Com base nos conceitos de força resultante e peso, e também na **1ª Lei de Newton** (Princípio da Inércia), redija uma explicação para o fenômeno observado. Compare seu texto com o de seus colegas e discuta os resultados obtidos.
- Se a placa retangular fosse bastante áspera, ainda assim a moeda cairia dentro do copo?
- Se você puxasse a placa retangular lentamente, ainda assim a moeda cairia dentro do copo?
- Enumere outras situações práticas similares à da atividade experimental proposta que você já tenha vivenciado em seu dia a dia.
- Considere um enorme bloco de gelo em forma de paralelepípedo apoiado sobre a carroceria de um caminhão inicialmente em repouso em uma estrada reta, plana e horizontal. Despreze qualquer atrito entre o gelo e a superfície de apoio, bem como a resistência do ar. Admita ainda que a carroceria do veículo consista simplesmente de uma plataforma plana paralela ao solo. Se o caminhão arrancar, imprimindo um movimento acelerado, o que ocorrerá com o bloco de gelo? Justifique sua resposta com base em princípios físicos.

Newton versus Einstein

As concepções de Isaac Newton fecharam harmoniosamente um momento de verdadeira gênese da Física, liderada por Copérnico, Kepler e Galileu. Newton publicou, em 1687, sua obra-mestra, *Principia*, em que, fundamentado nos trabalhos de seus predecessores, teceu considerações filosóficas e formulou suas três consagradas leis, além da Lei da Gravitação. Ele se mostrou humilde e reverente em reconhecer a fundamentalidade dessas três figuras, dizendo: “Se enxerguei mais longe foi porque subi em ombros de gigantes”.

A chamada Física Clássica, que teve seu apogeu entre os séculos XVI e XIX, explica satisfatoriamente os fatos que ocorrem na escala humana, isto é, no mundo macroscópico e ponderável. O equilíbrio de estruturas, o movimento de animais e corpos terrestres de dimensões métricas e o escoamento de fluidos, tudo isso, entre outras coisas, é descrito de forma convincente por meio de leis primordiais que se baseiam essencialmente no conceito de força.

Os preceitos formulados pelo grego Arquimedes no século III a.C. explicam o comportamento de alavancas, parafusos e outras máquinas simples, além de objetos submetidos à ação da força de empuxo, inerente a situações de imersão em líquidos e gases. Galileu Galilei (1564-1642), por sua vez, rompeu com a simplória conduta empirista, baseada meramente em observações, substanciando suas explicações com linguagem matemática, como pode ser notado em seus escritos sobre a queda dos corpos e hidrostática. Já Isaac Newton (1642-1727) deu um passo além ao incorporar definitivamente a Matemática à Física e formular a Lei da Gravitação, que trouxe explicações essenciais a uma melhor compreensão do movimento dos astros catalogados até sua época.

A eficiência da Física Clássica em explicar os fenômenos conhecidos era tamanha que, em meados do século XIX, muitos cientistas, ainda privados dos prodígios que apareceriam mais tarde com o advento dos equipamentos elétricos, foram levados a um momento de acomodação ao acreditarem que não haveria nada mais a ser desvendado. Isso certamente foi um equívoco!

Hoje em dia, veículos convencionais e dispositivos utilizados para diversos fins operam conforme as regras da Física Clássica. Também

a primeira viagem tripulada à Lua, ocorrida em julho de 1969, baseou-se quase exclusivamente nas imposições e tecnologias egressas da Mecânica Newtoniana.

No princípio do século XX, porém, iniciou-se uma nova era – a da Física Moderna –, mais voltada para o conceito de energia, agora definitivamente estabelecido. Essa etapa foi catalisada por melhores instrumentos experimentais, movidos a eletricidade, e outros recursos, como os aceleradores de partículas, que colaboraram para trazer à luz situações cuja descrição não se coadunava com as leis anteriormente propostas. Fenômenos como o da emissividade do corpo negro, analisado pelo alemão Max Planck (1858-1947), e do efeito fotoelétrico, descrito brilhantemente por Albert Einstein (1879-1955), mostraram os limites da Física Clássica, que se apresentava cada vez mais impotente para explicar as ocorrências do recém-descoberto mundo quântico.

Isso desencadeou nas cinco primeiras décadas do século XX, principalmente, uma verdadeira corrida científica em que, além de Planck e Einstein, algumas figuras se notabilizaram, como Ernest Rutherford, Madame Marie Curie, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Louis de Broglie, entre outras.



Físicos reunidos em Bruxelas, Bélgica, em 1927, para a Conferência de Solvay, que ocorre trianualmente. Esse grupo foi decisivo na elaboração dos fundamentos da Física Quântica, plataforma teórica que, juntamente com a Relatividade Especial, ampliou os limites da Física. A Mecânica Quântica continua em franco desenvolvimento, demonstrando ainda hoje grande vitalidade científica.

Mas os trabalhos de Einstein foram realmente decisivos para o que viria a seguir. O cientista jamais imaginou que sua explicação do efeito fotoelétrico lhe renderia um Prêmio Nobel, em 1921, nem que conduziria os mentores das futuras tecnologias a construir sistemas capazes de abrir e fechar portas automaticamente ou acender e apagar lâmpadas sem a ação humana. Calculadoras eletrônicas, fotômetros

fotográficos, veículos espaciais, além de outros utensílios fotovoltaicos, tiveram êxito com base no efeito fotoelétrico. Einstein também fez estudos que culminaram na implementação do *laser*, sigla em inglês para *light amplification by stimulated emission of radiation* (luz amplificada por emissão de radiação estimulada), essencial em leitores de CDs e DVDs, instrumentos para corte de materiais, comunicação em redes de fibras ópticas, giroscópios e até mesmo em Medicina. A Teoria da Relatividade Especial, uma das grandes contribuições de Einstein, teve notória relevância na compreensão mais profunda da gravidade e na criação de sistemas práticos, como o GPS, sigla em inglês para *Global Positioning System* (sistema de posicionamento global), que utiliza uma rede de satélites artificiais para localizar corpos na superfície terrestre com precisão centimétrica. Outro grande legado do cientista

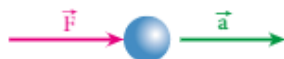
foi sua célebre equação $E = mc^2$, que relaciona as possíveis transformações de massa em energia e vice-versa, sendo capaz de explicar o processo de fusão nuclear que ocorre continuamente nas estrelas. Einstein viu, porém, com tristeza, esta sua fórmula servir de base para a fabricação de bombas atômicas, como as que destruíram Hiroshima e Nagasaki, no Japão, em 1945.

Enfim, quem teve importância maior, Newton ou Einstein? Não há dúvida de que a resposta é: ambos! Esses dois gênios da ciência influenciaram, cada um em seu tempo, todo um modo de pensar e proceder, permitindo que a humanidade compreendesse a natureza mais profundamente. Isso possibilitou viver com melhores padrões de segurança e conforto e usufruir a tecnologia de que hoje dispomos, que veio a integrar os povos e democratizar o conhecimento e as informações.

7. O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA (2ª LEI DE NEWTON)

Consideremos uma partícula submetida à ação de uma força resultante \vec{F} . O que devemos esperar que aconteça com essa partícula? Ela adquirirá uma aceleração \vec{a} , isto é, experimentará variações de velocidade com o decorrer do tempo.

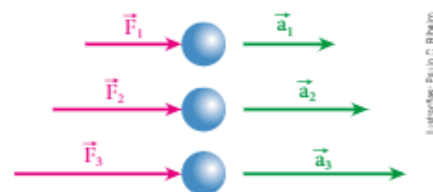
Supondo que \vec{F} seja horizontal e dirigida para a direita, qual será a direção e o sentido de \vec{a} ? Mostra a experiência que \vec{a} terá a mesma orientação de \vec{F} , ou seja, será horizontal para a direita.



Se \vec{F} é a resultante das forças que agem em uma partícula, esta adquire uma aceleração \vec{a} de mesma orientação que \vec{F} , isto é, \vec{a} tem a mesma direção e o mesmo sentido que \vec{F} .

Se aumentarmos a intensidade de \vec{F} , o que ocorrerá? Verifica-se que esse aumento provoca um aumento diretamente proporcional no módulo de \vec{a} . A partícula experimenta variações de velocidade cada vez maiores, para um mesmo intervalo de tempo.

Considere o exemplo esquematizado a seguir, em que uma mesma partícula é submetida, sucessivamente, à ação das forças resultantes \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 . Conseqüentemente, como já dissemos, a partícula irá adquirir, respectivamente, as acelerações \vec{a}_1 , \vec{a}_2 e \vec{a}_3 .



Ilustrações: Paulo C. Ribeiro

Assim, se $F_3 > F_2 > F_1$, devemos ter $a_3 > a_2 > a_1$. Lembrando que o módulo da aceleração é diretamente proporcional à intensidade da força, podemos escrever:

$$\frac{F_3}{a_3} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_1}{a_1} = k$$

em que k é a constante da proporcionalidade.

A constante k está ligada à dificuldade de se produzir, na partícula, determinada aceleração, isto é, refere-se à medida da inércia da partícula. Essa constante denomina-se **massa** (inercial) da partícula e é simbolizada por m . Daí segue que:

$$\frac{F_3}{a_3} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_1}{a_1} = m$$

Ou, de forma genérica: $\frac{F}{a} = m \Rightarrow F = m a$

Escrevendo essa expressão na forma vetorial, temos:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Tendo em vista o exposto, cabe ao **Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton)** o seguinte enunciado:

Se \vec{F} é a resultante das forças que agem em uma partícula, então, em consequência de \vec{F} , a partícula adquire, na mesma direção e no mesmo sentido da força, uma aceleração \vec{a} , cujo módulo é diretamente proporcional à intensidade da força.

A expressão matemática da **2ª Lei de Newton** é:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

No SI, a unidade de massa é o quilograma (kg), que corresponde à massa de um protótipo cilíndrico de platina iridiada, conservado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França.



Para se ter uma noção simplificada da unidade **quilograma**, basta considerar 1 litro de água pura, que a 4° C, tem massa de 1 quilograma.

Um litro de leite tipo C, que tem uma grande porcentagem de água, apresenta massa muito próxima de 1 kg.

Outras unidades de massa frequentemente usadas são indicadas a seguir.

- grama (g): $1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg} = 10^{-3} \text{ kg}$;
- miligrama (mg): $1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g} = 10^{-6} \text{ kg}$;
- tonelada (t): $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 10^3 \text{ kg}$.

Conforme vimos em **Cinemática**, a unidade SI de aceleração é o metro por segundo ao quadrado (m/s^2).

Considerando que $\vec{F} = m \vec{a}$, podemos deduzir a unidade de força:

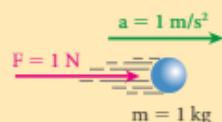
$$\text{unid (F)} = \text{unid (m)} \cdot \text{unid (a)}$$

No SI, temos:

$$\text{unid (F)} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{newton (N)}$$

Costuma-se definir 1 newton da seguinte maneira:

Um newton é a intensidade da força que, aplicada em uma partícula de massa igual a 1 quilograma, produz na sua direção e no seu sentido uma aceleração de módulo 1 metro por segundo, por segundo, ou seja, 1 metro por segundo ao quadrado.



PAULO C. RIBEIRO

O protótipo do quilograma

A medição de massa e das demais grandezas físicas que com ela se relacionam – como força, energia e quantidade de movimento – depende de um objeto cilíndrico de platina-irídio com diâmetro e altura iguais a 39 mm (do tamanho de uma ameixa), confeccionado há mais de cem anos. Esse protótipo, entretanto, tem se mostrado inadequado, já que foi comprovada uma alteração de sua massa em cerca de 50 microgramas desde a sua elaboração. Por isso, está se cogitando um padrão de medida de massa com base em algum fenômeno natural, que se repita da mesma forma independentemente de época ou condições externas. Duas abordagens despontam como mais promissoras: uma está relacionada à massa de uma determinada quantidade de carbono-12 e outra envolve fenômenos quânticos.

Outras duas grandezas físicas fundamentais – o comprimento e o tempo – já dispõem de unidades de medida no SI definidas a partir de fenômenos naturais. Um metro equivale à distância percorrida pela luz no vácuo durante $1/299\,792\,458$ de segundo. Por sua vez, um segundo corresponde à duração de $9\,192\,631\,770$ períodos da radiação emitida pelo átomo de césio-133 na transição entre dois níveis hiperfinos de seu estado fundamental.



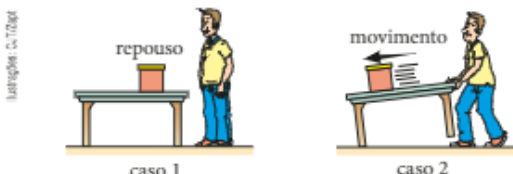
Fotografia do quilograma-padrão, exposto no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, França.

© 2008 BIPM/IFIP/IFCC/IFGHP

QUESTÕES COMENTADAS



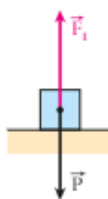
1 Nas situações esquematizadas a seguir, um mesmo bloco de peso \vec{P} é apoiado sobre a superfície plana de uma mesa, que é mantida em repouso em relação ao solo horizontal. No caso 1, o bloco permanece parado e, no caso 2, ele desce a mesa inclinada, deslizando com velocidade vetorial constante.



Sejam \vec{F}_1 e \vec{F}_2 as forças totais de contato que a mesa aplica sobre o bloco nos casos 1 e 2, respectivamente, pede-se para comparar \vec{F}_1 com \vec{F}_2 .

RESOLUÇÃO

Caso 1: bloco em repouso.



Trata-se de uma situação de **equilíbrio estático** e, por isso, a força resultante no bloco deve ser nula.

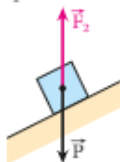
Logo, a força de contato \vec{F}_1 deve equilibrar o peso \vec{P} .

$$\vec{F}_1 = -\vec{P}$$

\vec{F}_1 tem o mesmo módulo de \vec{P} , a mesma direção, porém sentido oposto.

Caso 2: bloco em movimento retilíneo e uniforme.

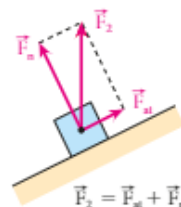
Trata-se de uma situação de **equilíbrio dinâmico** e, por isso, a força resultante no bloco



também deve ser nula. Ele se move por inércia, e a força de contato \vec{F}_2 deve equilibrar o peso \vec{P} .

$$\vec{F}_2 = -\vec{P}$$

\vec{F}_2 tem o mesmo módulo de \vec{P} , a mesma direção, porém sentido oposto. É importante citar que a força de contato \vec{F}_2 é a soma vetorial da força de atrito (\vec{F}_{at}) com a reação normal da mesa (\vec{F}_n).

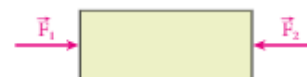


$$\vec{F}_2 = \vec{F}_n + \vec{F}_{at}$$

Comparando \vec{F}_1 com \vec{F}_2 , podemos afirmar que: $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$

Resposta: $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$

2 O bloco da figura tem massa igual a 4,0 kg e está sujeito à ação exclusiva das forças horizontais \vec{F}_1 e \vec{F}_2 :



Sabendo que as intensidades de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 valem, respectivamente, 30 N e 20 N, determine o módulo da aceleração do bloco.

RESOLUÇÃO

Como $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$, o bloco é acelerado horizontalmente para a direita por uma força resultante \vec{F} , cuja intensidade é:

$$F = F_1 - F_2 \Rightarrow F = (30 - 20) \text{ N} \Rightarrow F = 10 \text{ N}$$

A aceleração \vec{a} do bloco pode ter seu módulo calculado pelo **Princípio Fundamental da Dinâmica**:

$$F = m a \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{10 \text{ N}}{4,0 \text{ kg}} \Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Resposta: 2,5 m/s²



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

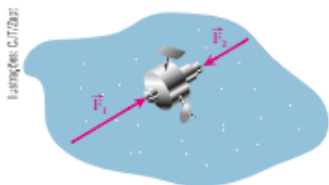
3. Analise as proposições a seguir.

- I. O cinto de segurança, item de uso obrigatório no trânsito brasileiro, visa aplicar aos corpos do motorista e dos passageiros forças que contribuam para vencer sua inércia de movimento.
- II. Um cachorro pode ser acelerado simplesmente puxando com a boca a guia presa à coleira atada em seu pescoço.
- III. O movimento orbital da Lua ao redor da Terra ocorre por inércia.

Estão **corretas**:

- a) I, II e III.
- b) Somente I e II.
- c) Somente II e III.
- d) Somente I e III.
- e) Somente I.

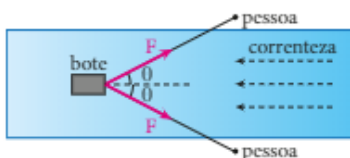
4. Uma espaçonave de massa $8,0 \cdot 10^2$ kg em movimento retilíneo e uniforme em um local de influências gravitacionais desprezíveis tem ativados simultaneamente dois propulsores que a deixam sob a ação de duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 de mesma direção e sentidos opostos, conforme está representado no esquema a seguir.



Sendo as intensidades de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 respectivamente iguais a 4,0 kN e 1,6 kN, determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração vetorial adquirida pela espaçonave.

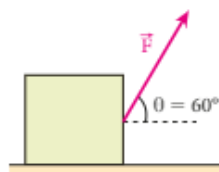
5. A figura a seguir ilustra duas pessoas (representadas por pontos), uma em cada margem de um rio, puxando um bote de massa 600 kg através de cordas ideais paralelas ao solo. Neste instante, o ângulo que cada corda faz com a direção da correnteza do rio vale $\theta = 37^\circ$, o módulo da força de tração na corda é $F = 80$ N e o bote possui aceleração de módulo $0,02$ m/s², no sentido contrário ao da correnteza. (O sentido da correnteza está indicado por setas tracejadas.) Calcule o módulo da força que a correnteza exerce no bote.

Use: $\sin 37^\circ = 0,6$ e $\cos 37^\circ = 0,8$.



6. Um projétil de massa 10 g repousa na câmara de um fuzil quando o tiro é disparado. Os gases provenientes da explosão comunicam ao projétil uma força média de intensidade $1,2 \cdot 10^3$ N. Sabendo que a detonação do cartucho dura $3,0 \cdot 10^{-3}$ s, calcule o módulo da velocidade do projétil imediatamente após o disparo.

7. Uma caixa contendo livros, com massa igual a 25 kg, será arrastada a partir do repouso sobre o solo plano e horizontal sob a ação de uma força constante \vec{F} de intensidade 160 N, representada na figura a seguir. Sabendo que ao longo do deslocamento a caixa receberá do solo uma força de atrito de intensidade 50 N, pede-se determinar:



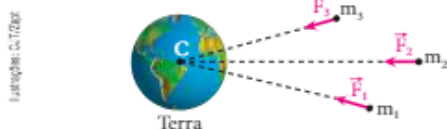
- a) a intensidade da aceleração que será adquirida pela caixa;
- b) o intervalo de tempo que ela gastará para percorrer os primeiros 2,4 m.

8. PESO DE UM CORPO

Uma caixa de isopor vazia é leve ou pesada? Um grande paralelepípedo maciço de aço é leve ou pesado? As noções de leve ou pesado fazem parte de nosso dia a dia e nos possibilitam responder de imediato a perguntas como essas: a caixa de isopor vazia é leve e o grande paralelepípedo maciço de aço é pesado.

Um corpo é tanto mais pesado quanto mais intensa for a **força de atração gravitacional** exercida pelo planeta sobre ele.

Também sabemos que, se largarmos uma laranja ou outros corpos nas proximidades da Terra, eles cairão verticalmente, indo ao encontro da superfície do planeta. Isso se deve também a uma interação de natureza gravitacional que ocorre entre a Terra e o corpo, que recebe uma força atrativa dirigida para o centro de massa do planeta. Essa força é o que, na ausência de atritos, faz o corpo despencar em movimento acelerado até colidir com o solo.



As massas m_1 , m_2 e m_3 são atraídas gravitacionalmente por meio das forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 respectivamente. (Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.)

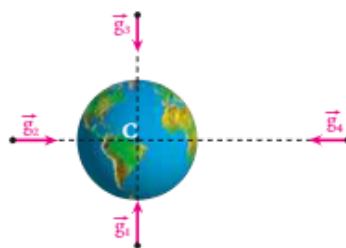
Desprezando os efeitos ligados à rotação da Terra, podemos dizer em primeira aproximação que:

O **peso** de um corpo é a força de atração gravitacional exercida sobre ele.

É importante destacar que a aceleração produzida pela força gravitacional (peso) é a **aceleração da gravidade** (\vec{g}), que constitui o vetor característico da interação de campo entre a Terra e o corpo.

Para pontos situados fora da Terra, o vetor \vec{g} e a força peso têm a mesma orientação: são radiais à "esfera" terrestre e dirigidos para o seu centro.

A intensidade de \vec{g} , por sua vez, depende do local em que é feita a avaliação. Como veremos no Capítulo 8, quanto maior for a distância do ponto considerado ao centro da Terra, menor será a magnitude da aceleração da gravidade, o que significa que $|\vec{g}|$ decresce com a altitude. Além disso, e em razão principalmente da rotação da Terra, verifica-se que, sobre a superfície terrestre, do Equador para os polos, $|\vec{g}|$ cresce, mostrando que o valor dessa aceleração varia com a latitude.



Representação do vetor \vec{g} em quatro diferentes pontos do campo gravitacional terrestre. (Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.)

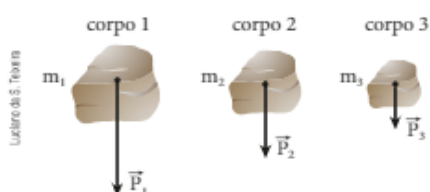
Por meio de diversos experimentos, pôde-se constatar que, ao nível do mar e em um local de latitude 45°, o módulo de \vec{g} (denominado normal) vale:

$$g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

Como podemos, porém, calcular o peso de um corpo? Para responder a essa pergunta, vamos considerar a situação a seguir.

Sejam três corpos de pesos $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, com massas respectivamente iguais a m_1, m_2 e m_3 , situados em um mesmo local.

Através de experimentos, verifica-se que a intensidade do peso é diretamente proporcional à massa do corpo considerado. À maior massa corresponde o peso de maior intensidade.



Levando em conta a proporcionalidade mencionada, podemos escrever que:

$$\frac{|\vec{P}_1|}{m_1} = \frac{|\vec{P}_2|}{m_2} = \frac{|\vec{P}_3|}{m_3} = k \text{ (constante)}$$

A constante da proporcionalidade (**k**) é o módulo da aceleração da gravidade do local, o que nos permite escrever que: $\frac{|\vec{P}|}{m} = |\vec{g}| \Rightarrow |\vec{P}| = m |\vec{g}|$

Ou, vetorialmente: $\vec{P} = m \vec{g}$

Note que a massa **m** é uma grandeza escalar, e o peso \vec{P} é uma grandeza vetorial. Assim, o peso tem direção (da vertical do lugar) e sentido (para baixo).

De acordo com os preceitos da Mecânica Clássica, a massa de um corpo é uma característica sua, sendo constante em qualquer ponto do Universo. No entanto, o mesmo não ocorre com o peso, que é função do local, já que depende de \vec{g} . Na Lua, por exemplo, uma pessoa pesa cerca de $\frac{1}{6}$ do que pesa na Terra, pois o módulo da aceleração da gravidade na superfície lunar é cerca de $1,67 \text{ m/s}^2$.

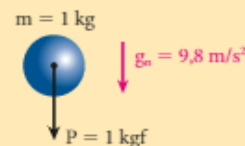
0 quilograma-força (kgf)

Um **quilograma-força** é uma unidade de força usada na medição da intensidade de pesos e é definida pela intensidade do peso de um corpo de 1 quilograma de massa, situado em um local onde a gravidade é normal (aceleração da gravidade com módulo $g_n \cong 9,8 \text{ m/s}^2$).

$$P = m g$$

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ kg m/s}^2$$



Destaquemos que, em um ponto onde a gravidade é normal ($g_n \cong 9,8 \text{ m/s}^2$), o peso de um corpo em kgf é numericamente igual à sua massa em kg. Vejamos a relação entre quilograma-força (kgf) e newton (N).

Como $1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ kg m/s}^2$ e $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$, temos:

$$1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ N}$$



Afinal, as balanças são medidores de peso ou de massa?

As balanças, como as encontradas em supermercados, farmácias ou em nossas casas, são dinamômetros acionados pela força de compressão que exercemos sobre elas, cuja intensidade é igual à do nosso peso nas condições da avaliação. Esses dispositivos, no entanto, indicam em seus mostradores uma medida de massa – em quilogramas, por exemplo – que está mais de acordo com o hábito das pessoas, que teriam dificuldade em expressar seus pesos em newtons ou quilogramas-força. Onde se deveria ler “980 N” ou “100 kgf”, por exemplo, o fabricante grafa “100 kg”.



Elevadores

Uma das grandes invenções do milênio passado foi, sem dúvida, o elevador. Apresentado originalmente pelo mecânico norte-americano Elisha Graves Otis (1811-1861), em 1854, na feira de Nova York, esse engenho modificou o cenário urbano do planeta, uma vez que, a partir dele, foram viabilizados os arranha-céus, que proporcionaram às grandes cidades a possibilidade de crescimento vertical.

O elevador permite o içamento e o abaixamento de cargas em condições seguras e confortáveis. Para tanto, utiliza um sistema de contrapesos conectados por cabos de aço à cabina. Esses cabos passam por roldanas e são tracionados por um motor elétrico.

Elevadores podem se comportar como verdadeiras câmaras de produção de gravidade artificial diferente da gravidade normal ($g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$). Isso ocorre quando se deslocam verticalmente, para cima ou para baixo, com acelerações diferentes de zero.

Se o elevador subir ou descer com aceleração dirigida para cima, tudo o que estiver em seu interior aparentará um peso maior que o real, ocorrendo o contrário se subir ou descer com aceleração orientada para baixo.

Uma situação intrigante é a do elevador que se desloca com aceleração igual à da gravidade (\vec{g}). Nesse caso, os corpos em seu interior aparentam peso nulo, permanecendo imponderáveis, em levitação.

Alguns parques de diversões têm brinquedos que simulam elevadores em queda livre. Durante o despencamento vertical do sistema, os ocupantes sofrem grandes descargas de adrenalina e sentem um “frio na barriga”, que se justifica pela levitação das vísceras dentro do abdome.



Georgy Virela/Beo Camaro World

Simulação de queda livre em parque de diversões: adrenalina e “frio na barriga”. Penha, Santa Catarina.

FAÇA VOCÊ MESMO

Determinando experimentalmente a intensidade de \vec{g}

Há muitas maneiras de obter experimentalmente a intensidade da aceleração da gravidade. Vamos propor um procedimento relativamente simples que, se bem realizado, pode conduzir a um valor bem próximo do teórico: **9,81 m/s²**.

Material necessário

- 1 cronômetro digital (disponível em alguns modelos de telefone celular);
- 1 trena ou fita métrica;
- 1 arruela metálica (ou anel) de pequenas dimensões (diâmetro próximo de 1 cm);
- 1 fio de náilon fino, desses utilizados como linha de pescar, de comprimento um pouco maior que 2 m;
- fita adesiva ou pequenos pregos (tachinhas);
- óleo de cozinha.

Procedimento

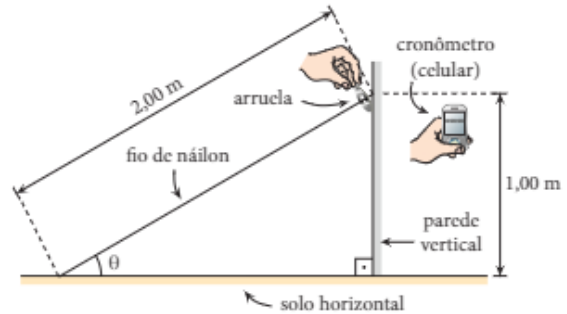
- Mergulhe previamente o fio de náilon no óleo de cozinha; lubrifique também a arruela com o mesmo líquido para atenuar os atritos, certamente existentes. Em seguida, passe o fio de náilon pelo orifício da arruela.
- Feito isso, fixe uma das extremidades do fio de náilon no solo e a outra em uma parede vertical de modo que este ponto de fixação fique a 1 m de altura em relação ao piso. As extremidades do fio podem ser fixadas utilizando-se a fita adesiva ou os pequenos pregos (tachinhas).

A ilustração ao lado representa a montagem pronta para ser utilizada.

Observe que o ângulo θ formado entre o fio de náilon e o solo é praticamente igual a 30° . Isso pode ser verificado fazendo-se:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{1,00 \text{ m}}{2,00 \text{ m}} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



- III. Abandone a arruela junto ao ponto de fixação do fio de náilon na parede vertical, acionando simultaneamente o cronômetro, previamente zerado. Cronometre então o intervalo de tempo gasto pela arruela para percorrer os 2,00 m de extensão do fio. É muito importante que a medida encontrada para esse intervalo de tempo seja obtida com a maior precisão possível. Para tanto, repita a medição várias vezes, adotando como valor mais provável, a ser utilizado nos cálculos, o da **média aritmética** das diversas medidas verificadas no cronômetro. Quanto mais próximo de **0,903 s** for o intervalo de tempo obtido, melhor.

Analisando o experimento

Pode-se dizer que o movimento descrito pela arruela é uniformemente acelerado, o que nos permite calcular a intensidade de sua aceleração ao longo do fio de náilon como fazemos a seguir:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Com $\Delta s = 2,00 \text{ m}$, $v_0 = 0$ e $t \cong 0,903 \text{ s}$, temos:

$$2,00 = 0 + \frac{\alpha}{2} (0,903)^2 \Rightarrow \alpha \cong 4,905 \text{ m/s}^2$$

A componente de peso da arruela na direção do fio de náilon (componente tangencial) tem intensidade dada por:

$$P_t = P \text{ sen } \theta \Rightarrow P_t = mg \text{ sen } \theta \quad (\text{I})$$

Mas, não levando em conta os possíveis atritos, a força resultante responsável pela aceleração da arruela é a componente de seu peso na direção do fio de náilon (componente tangencial).

Logo, aplicando-se a **2ª Lei de Newton**, obtemos:

$$F = ma \Rightarrow P_t = ma \quad (\text{II})$$

Comparando-se (I) e (II), segue que:

$$ma = mg \text{ sen } \theta \Rightarrow g = \frac{a}{\text{sen } \theta}$$

Substituindo a por $4,905 \text{ m/s}^2$ e $\text{sen } \theta$ por $0,5$, determinamos a intensidade aproximada da aceleração da gravidade no local (g):

$$g \cong \frac{4,905}{0,5} \text{ m/s}^2 \Rightarrow g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$$

Realize as atividades a seguir.

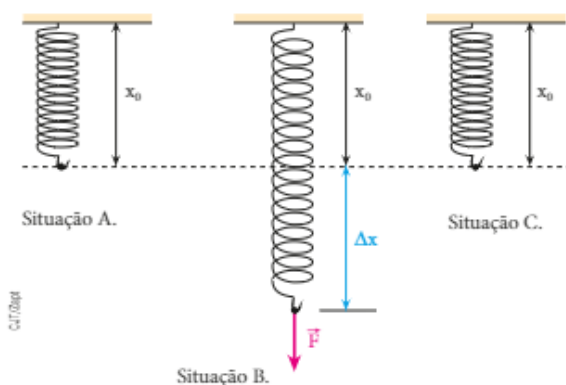
1. Avalie o resultado encontrado em seu experimento e reflita sobre o que pode ser feito para torná-lo mais próximo de $9,81 \text{ m/s}^2$.
2. Será que a lubrificação do fio de náilon e da arruela pode ser melhorada? O que podemos fazer para atenuar ainda mais os atritos? Aponte soluções.
3. A medição do intervalo de tempo gasto pela arruela em sua descida, feita com o cronômetro do telefone celular, pode ser mais bem realizada? O tempo de reação do experimentador exerce alguma influência no resultado? Proponha métodos melhores que permitam obter valores mais exatos desse intervalo de tempo.
4. Por que foi sugerido medir-se o intervalo de tempo de descida da arruela diversas vezes, tirando-se uma média aritmética dos valores experimentais encontrados?
5. Você é capaz de propor outro procedimento experimental para se obter o valor da aceleração da gravidade de um local? Compartilhe suas ideias com os colegas e o professor.

9. DEFORMAÇÕES EM SISTEMAS ELÁSTICOS

Lei de Hooke

Robert **Hooke** (1635-1705), cientista inglês de raro senso prático, notabilizou-se como antagonista de muitas ideias do seu contemporâneo Isaac Newton. Desenvolveu mecanismos operados por molas que permitiram a construção de relógios de maior precisão. Aperfeiçoou o microscópio e, ao observar pedaços de cortiça com esse instrumento, notou a existência de uma unidade construtiva, que chamou de célula (do latim *cellula*: pequenos cômodos ou celas adjacentes). Esse termo se tornou usual entre os biólogos para denominar estruturas elementares de matéria viva.

Consideremos a figura a seguir, em que uma mola de massa desprezível tem uma de suas extremidades fixa.



O comprimento da mola na situação **A** é seu comprimento natural (x_0). Portanto, a mola não está deformada.

Na situação **B**, uma força \vec{F} foi aplicada à extremidade livre da mola, provocando nela uma deformação (alongamento) Δx .

Na situação **C**, \vec{F} foi suprimida e a mola recobrou seu comprimento natural (x_0).

Pelo fato de a mola ter recobrado seu comprimento natural (x_0) depois de cessada a ação da força, dizemos que ela experimentou uma **deformação elástica**.

Em seus estudos sobre deformações elásticas, Robert Hooke chegou à seguinte conclusão, que ficou conhecida por **Lei de Hooke**:

Em regime elástico, a deformação sofrida por uma mola é **diretamente proporcional** à intensidade da força que a provoca.

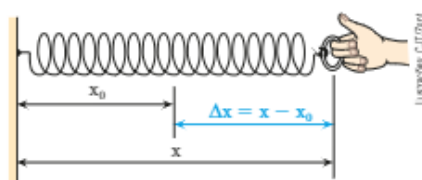
Esta é a expressão matemática da **Lei de Hooke**:

$$F = K \Delta x$$

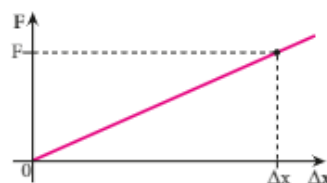
em que F é a intensidade da força deformadora;
 K é a constante de proporcionalidade;
 Δx é a deformação (alongamento ou encurtamento sofrido pela mola).

A constante de proporcionalidade K é uma qualidade da mola considerada que depende do material de que é feita a mola e das dimensões que ela possui. A constante K é comumente chamada de **constante elástica** e tem por unidade, no SI, o N/m.

Consideremos o modelo experimental representado na figura a seguir, em que uma mola de eixo horizontal é puxada, por uma pessoa, para a direita.



Admitindo-se que a mola esteja em regime de deformação elástica, o gráfico da intensidade da força exercida pela pessoa em função da deformação é representado a seguir.



Esse comportamento linear dura até o limite de elasticidade da mola. A partir daí, o formato do gráfico se modifica.

Embora na apresentação da **Lei de Hooke** tenhamos nos baseado na deformação de uma mola, a conclusão a que chegamos estende-se a quaisquer sistemas elásticos de comportamento similar. Como exemplo, podemos destacar uma tira de borracha ou um elástico que, ao serem tracionados, também podem obedecer a essa lei.

O coeficiente angular da reta representativa da **Lei de Hooke** fornece a constante elástica da mola.

$$\text{Coeficiente angular} = \frac{F}{\Delta x} = K$$

FAÇA VOCÊ MESMO

Obtendo a constante elástica de uma mola

O experimento que vamos propor a seguir é uma forma de se determinar a constante elástica K de uma mola que, operando em regime elástico, obedeça à **Lei de Hooke**.

Material necessário

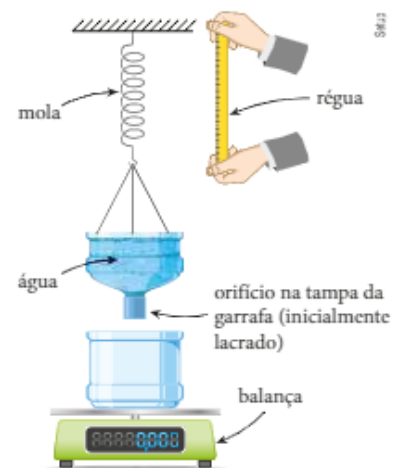
- 1 balança de precisão, de preferência eletrônica (digital);
- 1 mola leve e elástica com aproximadamente 20 cm de comprimento natural;
- 1 garrafa PET de 2 L com a respectiva tampa;
- 1 panela ou vasilha com capacidade aproximada de 1,5 L;
- 1 régua, trena ou fita métrica;
- pedaços de barbante para amarração;
- fita adesiva;
- tesoura;
- prego e martelo.

ATENÇÃO!

Cuidado para não se ferir quando for utilizar a tesoura e o martelo.

Procedimento

- Fixe a mola em um suporte por uma de suas extremidades de modo que seu eixo longitudinal permaneça na vertical.
- Corte a garrafa PET ao meio, transversalmente, cuidando atentamente para não se machucar. Com auxílio do prego e do martelo faça três ou mais furos na parte da garrafa dotada do gargalo para fixá-la na extremidade livre da mola. Utilize os barbantes para fazer a amarração com a mola, de modo que o gargalo, fechado com a tampa, fique voltado para baixo. Faça também um pequeno furo no centro da tampa da garrafa por onde possa escoar água em vazão praticamente constante. Lacre inicialmente esse furo com a fita adesiva.
- Coloque a outra metade da garrafa PET sobre a balança, já devidamente ligada, de modo que o centro de sua base fique alinhado com o eixo da mola.
- Encha a panela com água e despeje gradualmente o líquido na parte da garrafa presa à mola até quase o seu preenchimento total. Meça com a régua, nessas condições, o comprimento L_i atingido pela mola e anote esse valor. Anote também o valor indicado pela balança M_i nesse momento para a pequena massa do recipiente vazio.
- Montado o aparato, retire o lacre de fita adesiva da tampa da garrafa e observe a água escoar lentamente, em vazão praticamente constante, para a parte da garrafa PET apoiada no prato da balança. Observe atentamente a evolução das indicações do aparelho e o encurtamento da mola.
- Depois de escoada toda a água do recipiente de cima para o de baixo, meça com a régua o comprimento final L_f adquirido pela mola e verifique também a massa M_f indicada na balança. Anote esses dois valores.



Analisando o experimento

A constante elástica da mola, K , fica determinada observando-se que a redução na intensidade da força elástica sofrida pela mola (ΔF) é igual ao acréscimo de peso verificado na balança (ΔP), isto é:

$$\Delta F = \Delta P \Rightarrow K \Delta L = \Delta Mg$$

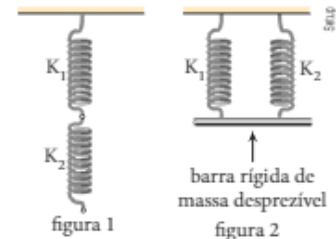
Assim, temos o seguinte:

$$K(L_i - L_f) = (M_f - M_i)g \Rightarrow K = \frac{(M_f - M_i)}{L_i - L_f}g$$

Determinados experimentalmente os valores numéricos de M_f e M_p , em quilogramas, de L_i e L_f , em metros, e considerando $g \cong 10 \text{ m/s}^2$, podemos calcular a constante elástica da mola, em N/m.

Realize o mesmo experimento mais de uma vez e compare os resultados obtidos. Em seguida, faça o que se pede.

- Utilize um cronômetro para medir o intervalo de tempo gasto pela água para escoar do recipiente de cima para o de baixo (pode ser o cronômetro talvez existente em seu telefone celular) e esboce graficamente:
 - a variação do comprimento apresentado pela mola em função do tempo;
 - a variação da massa, indicada na balança em função do tempo.
- Molas “duras”, como as utilizadas em suspensões de veículos, têm constante elástica grande ou pequena? E molas “moles”, como as utilizadas em alguns modelos de canetas esferográficas, têm constante elástica grande ou pequena?
- Imagine que você disponha de duas molas de constantes elásticas respectivamente iguais a K_1 e K_2 . Se essas molas forem associadas sequencialmente em série, como na figura 1, de que forma será calculada a constante elástica equivalente à associação? E se elas forem associadas em paralelo, como na figura 2, de que maneira será feito esse cálculo? Converse com um colega para resolver esta questão. Se necessário, peça orientação ao professor.
- Observe o selim de uma bicicleta apoiado sobre duas molas verticais idênticas de constantes elásticas iguais a K . Se você apoiasse esse selim em apenas uma mola central que apresentasse desempenho igual ao das duas molas citadas operando conjuntamente, qual seria a constante elástica dessa mola?



O dinamômetro

O **dinamômetro** (ou “balança de mola”) é um dispositivo destinado a indicar intensidade de forças.

O funcionamento desse aparelho baseia-se nas deformações elásticas sofridas por uma mola que tem ligado a si um cursor. À medida que a mola é deformada, o cursor corre ao longo de uma escala impressa no aparato de suporte.

A calibração da escala, que pode ser graduada em newtons, em kgf ou em qualquer outra unidade de força, é feita utilizando-se corpos-padrão de pesos conhecidos.

A força resultante no dinamômetro, suposto de massa desprezível – dinamômetro ideal –, é nula. Isso significa que suas extremidades são puxadas por forças opostas, isto é, de mesma intensidade e direção, mas de sentidos contrários.



Uma importante característica funcional de um dinamômetro é o fato de ele indicar a intensidade da força aplicada **em uma de suas extremidades**. No caso da figura anterior, o dinamômetro indica a intensidade de \vec{F} (ou de $-\vec{F}$) e não o dobro desse valor, como poderia ser imaginado.

No caso de ambas as extremidades estarem interligadas a um fio tracionado, o dinamômetro indica a intensidade da força de tração estabelecida no fio.

Veja o exemplo a seguir, em que dois rapazes tracionam uma corda que tem intercalado em si um dinamômetro ideal:



Como ambos puxam as extremidades da corda em sentidos opostos com 400 N, o dinamômetro registra 400 N, que é o valor da tração estabelecida no fio.

10. O PRINCÍPIO DA AÇÃO E REAÇÃO (3ª LEI DE NEWTON)

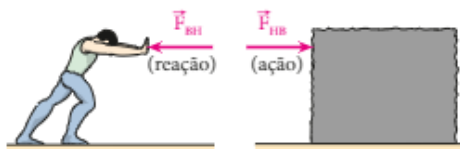
Analisemos a situação a seguir, em que um homem empurra horizontalmente para a direita um pesado bloco.



Ao empurrar o bloco, o homem aplica sobre ele uma força \vec{F}_{11B} , que convencionaremos chamar de **força de ação**.

Será que o bloco também “empurra” o homem? Sim! Fatos experimentais mostram que, se o homem exerce força no bloco, este faz o mesmo em relação ao homem. O bloco aplica no homem uma força \vec{F}_{B1P} , dirigida para a esquerda, que convencionaremos chamar de **força de reação**.

Em resumo, o homem exerce no bloco uma força \vec{F}_{11B} , horizontal e para a direita. O bloco, por sua vez, exerce no homem uma força de reação \vec{F}_{B1P} , horizontal e para a esquerda.



O homem e o bloco trocam entre si forças de ação e reação.

Verifica-se que as forças \vec{F}_{11B} e \vec{F}_{B1P} são opostas, isto é, $\vec{F}_{11B} = -\vec{F}_{B1P}$. Devemos entender, então, que \vec{F}_{11B} e \vec{F}_{B1P} têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos. Supondo, por exemplo, que a intensidade da ação (F_{11B}) seja 100 N, observaremos que a intensidade da reação (F_{B1P}) também será 100 N.

Outro detalhe importante é o fato de as forças de ação e reação estarem aplicadas em **corpos diferentes**. No caso da situação descrita, a ação (\vec{F}_{11B}) está aplicada no bloco, enquanto a reação (\vec{F}_{B1P}) está aplicada no homem.

O **Princípio da Ação e Reação** pode ser enunciado da seguinte maneira:

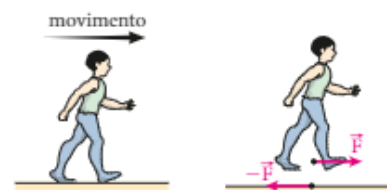
A toda força de ação corresponde uma de reação, de modo que essas forças têm sempre mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, estando aplicadas em corpos diferentes.

É importante destacar que as forças de ação e reação, por estarem aplicadas em corpos diferentes, nunca se equilibram mutuamente, isto é, nunca se anulam.

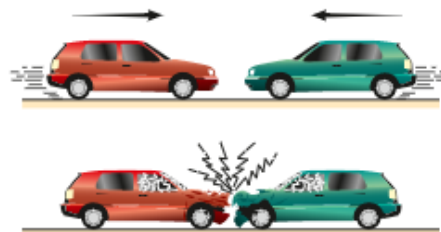
Em nossa vida prática, várias são as situações relacionadas com o **Princípio da Ação e Reação**. Vejamos algumas delas.

Exemplo 1: Ao caminhar, uma pessoa age no chão, empurrando-o “para trás”. Este, por sua vez, reage na pessoa, empurrando-a “para a frente”.

Observemos, nesse caso, que a ação está aplicada no solo, enquanto a reação está aplicada na pessoa.



Exemplo 2: Na colisão entre dois automóveis, ambos se deformam. Isso prova que, se um deles age, o outro reage em sentido contrário. Os automóveis trocam forças de ação e reação que têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos.

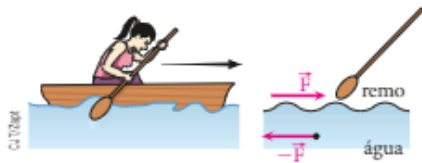


Embora os carros troquem forças de intensidades iguais, ficará menos deformado aquele que receber a pancada em uma região de estrutura mais resistente.

Exemplo 3: Ao remar em um barco, uma pessoa põe em prática a **Lei da Ação e Reação**. O remo age na água, empurrando-a com uma força $-\vec{F}$. Esta, por sua vez, reage no remo, empurrando-o em sentido oposto com uma força \vec{F} .

É importante notar que a ação $-\vec{F}$ está aplicada na água, enquanto a reação \vec{F} está aplicada no remo.

Ação e reação aplicam-se em **corpos diferentes**.



Exemplo 4: Consideremos um corpo sob a influência do campo gravitacional terrestre. Conforme sabemos, o corpo é atraído gravitacionalmente, sendo solicitado por uma força \vec{P} . Mas se a Terra, por meio do seu campo de gravidade, age no corpo, este reage na Terra, atraindo-a com uma força $-\vec{P}$.

O corpo e a Terra interagem gravitacionalmente, trocando entre si forças de ação e reação. Observe-mos que \vec{P} está aplicada no corpo, enquanto $-\vec{P}$ está aplicada na Terra (no seu centro de massa).

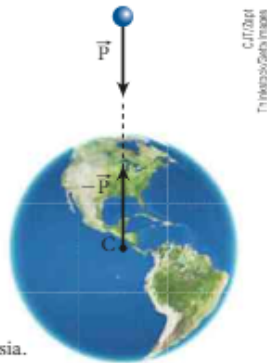


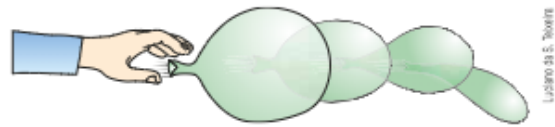
Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Nos três primeiros exemplos, as forças de ação e reação exercidas pelos corpos descritos são **forças de contato**. Entretanto, no exemplo 4, as forças trocadas pela Terra e pelo corpo são **forças de campo**, pois advêm de uma interação a distância, que não necessita de contato para ocorrer.

É importante perceber que as forças de ação e reação têm sempre a mesma natureza, ou seja, são ambas de contato ou ambas de campo.

Aplicação da 3ª Lei de Newton

Um experimento simples que você já deve ter realizado está esquematizado na figura a seguir, na qual está representado um balão de borracha movimentando-se à medida que expelle o ar existente em seu interior.



Esse fenômeno pode ser explicado pelo **Princípio da Ação e Reação**. Cada partícula do ar ejetado recebe uma “força para trás”. Essas partículas, que são em grande número, reagem no balão com “pequenas forças para a frente”. Essas “forças” originam uma força resultante expressiva, capaz de acelerar o corpo elástico.

QUESTÕES COMENTADAS

8 Na Terra, um astronauta de massa M tem peso P . Supondo que na Lua a aceleração da gravidade seja um sexto da verificada na Terra, obtenha:

- a massa do astronauta na Lua;
- o peso do astronauta na Lua.

RESOLUÇÃO

- A massa de um corpo independe do local, sendo a mesma em qualquer ponto do Universo. Assim, na Lua, a massa do astronauta também será igual a M .
- O peso P do astronauta na Terra é dado por: $P = M g$

O peso P do astronauta na Lua será dado por: $P' = M g'$

Sendo $g' = \frac{1}{6} g$, segue que:

$$P' = M \frac{1}{6} g = \frac{1}{6} M g \Rightarrow P' = \frac{1}{6} P$$

Respostas: a) M ; b) $\frac{1}{6} P$

9 Uma esfera maciça A , de peso P , está ligada por um fio inextensível C , de massa desprezível, a outra esfera B , também maciça, de peso $P' = 2P$.

O conjunto é abandonado no vácuo, sem velocidade inicial, e executa um movimento de queda livre com o fio reto na vertical. A aceleração da gravidade tem intensidade g . Calcule:

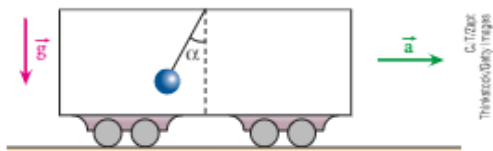
- os módulos das acelerações das esferas A e B ;
- a intensidade da força de tração no fio.

RESOLUÇÃO

- Como as esferas A e B estão em queda livre, sua aceleração é igual à da gravidade: g .
- A força resultante em cada esfera em queda livre é o seu próprio peso. Por isso, as duas esferas não interagem com o fio, que permanece frouxo sem estar tracionado (tração nula).

Respostas: a) g ; b) Tração nula.

10 Considere um veículo, como o representado a seguir, em movimento retilíneo sobre um plano horizontal. Pelo fato de estar acelerado para a direita, um pêndulo preso a seu teto desloca-se em relação à posição de equilíbrio, formando um ângulo α com a vertical.

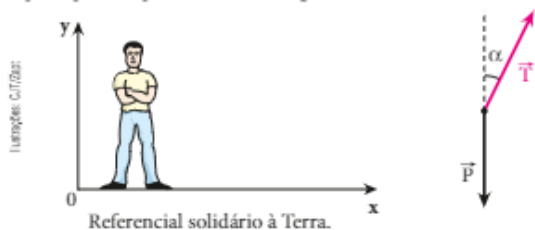


São conhecidos o ângulo α , o módulo da aceleração da gravidade (g) e a massa da esfera (m) atada ao fio ideal.

- a) Qual é o módulo da aceleração \vec{a} do veículo?
- b) O módulo de \vec{a} depende de m ?

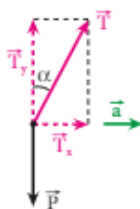
RESOLUÇÃO

a) Isolemos a esfera pendular e identifiquemos as forças que nela agem em relação a um referencial inercial, isto é, todo aquele para o qual vale o **Princípio da Inércia**:



Na esfera pendular, agem duas forças: seu peso (\vec{P}) e a força de tração devida ao fio (\vec{T}).

Façamos a decomposição de \vec{T} nas direções horizontal e vertical:



Temos:

$$T_x = T \text{ sen } \alpha \text{ (I) e } T_y = T \text{ cos } \alpha \text{ (II)}$$

Para o observador fixo na Terra, a esfera pendular não é acelerada verticalmente. Isso significa que T_y equilibra P , o que nos leva a escrever:

$$T_y = P \Rightarrow T_y = m g \text{ (III)}$$

Para o mesmo observador fixo na Terra, a esfera pendular possui movimento com aceleração dirigida para a direita, juntamente com o veículo. A resultante que acelera a esfera pendular em relação à Terra é T_x .

Aplicando a **2ª Lei de Newton**, temos: $T_x = m a$ (IV)

Comparando as expressões (I) e (IV), obtemos:

$$m a = T \text{ sen } \alpha \text{ (V)}$$

Comparando as expressões (III) e (II), temos:

$$m g = T \text{ cos } \alpha \text{ (VI)}$$

Dividindo (V) e (VI) membro a membro, obtemos:

$$\frac{m a}{m g} = \frac{T \text{ sen } \alpha}{T \text{ cos } \alpha} \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Portanto: $a = g \text{ tg } \alpha$

b) O módulo de \vec{a} não depende de m , que foi cancelada nos cálculos.

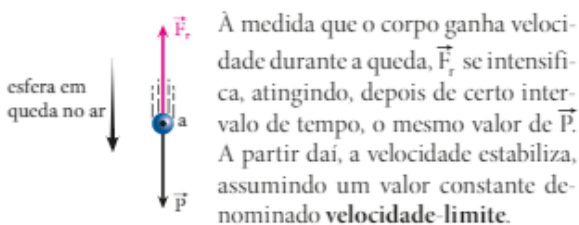
Respostas: a) $g \text{ tg } \alpha$; b) Não.

11 Um corpo de massa 4,0 kg cai, a partir do repouso, no campo gravitacional terrestre, suposto de intensidade constante, de módulo 10 m/s^2 . A força de resistência que o corpo recebe do ar durante a queda tem intensidade dada, em newtons, pela expressão $F_r = 10v^2$, em que v é o módulo de sua velocidade, em m/s. Admitindo que a altura de queda seja suficientemente grande, calcule a velocidade-limite atingida pelo corpo.

RESOLUÇÃO

Durante a queda, duas forças agem no corpo: o peso (\vec{P}) e a força de resistência do ar (\vec{F}_r).

A intensidade de \vec{F}_r cresce a partir de zero. A intensidade de \vec{P} , entretanto, é constante.



Condição de velocidade-limite:

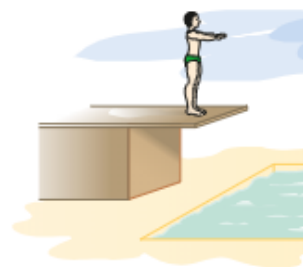
$$F_r = P \Rightarrow F_r = m g$$

$$10(v_{\text{lim}})^2 = 4,0 \cdot 10 \Rightarrow v_{\text{lim}} = 2,0 \text{ m/s}$$

Resposta: 2,0 m/s

12 Um garoto encontra-se em pé sobre o trampolim de uma piscina, conforme representa o esquema seguinte.

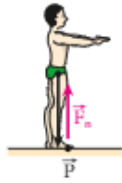
A deflexão do trampolim é desprezível, de forma que este pode ser considerado horizontal. Desprezando-se os efeitos do ar, caracterize todas as forças externas que agem no corpo do garoto, dizendo quais as outras que formam, com aquelas primeiras, pares ação-reação. A massa do garoto vale 60 kg e, no local, $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.



RESOLUÇÃO

Se o garoto está em repouso na extremidade do trampolim, a resultante das forças que agem em seu corpo é nula (o garoto está em **equilíbrio estático**).

Apenas duas forças verticais e de sentidos opostos agem no corpo do garoto, conforme representa o esquema a seguir.



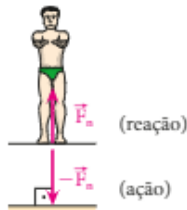
\vec{P} = ação gravitacional (exercida pela Terra);
 \vec{F}_n = reação normal do apoio (exercida pelo trampolim).

As forças \vec{P} e \vec{F}_n equilibram-se mutuamente, portanto, têm intensidades iguais:

$$|\vec{F}_n| = |\vec{P}| = m |\vec{g}| \Rightarrow |\vec{F}_n| = |\vec{P}| = 60 \cdot 10 \text{ (N)}$$

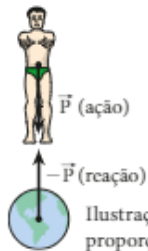
Logo: $|\vec{F}_n| = |\vec{P}| = 600 \text{ N}$

Observe os esquemas a seguir.



A ação correspondente à reação \vec{F}_n é a força de compressão $-\vec{F}_n$ que o garoto exerce no trampolim.

$$|\vec{F}_n| = |-\vec{F}_n| = 600 \text{ N}$$



A reação correspondente à ação \vec{P} é a força $-\vec{P}$, que o garoto exerce no centro de massa da Terra.

$$|\vec{P}| = |-\vec{P}| = 600 \text{ N}$$

Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

NOTA

As forças \vec{P} e \vec{F}_n têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, porém não constituem entre si um par ação-reação, uma vez que estão aplicadas no mesmo corpo (o do garoto).

Resposta: Ver resolução.

13 Dois garotos A e B, de massas respectivamente iguais a 40 kg e 60 kg, encontram-se sobre a superfície plana, horizontal e perfeitamente lisa de um grande lago congelado. Em dado instante, A empurra B, que sai com velocidade de 4,0 m/s. Supondo desprezível a influência do ar, determine:

- a) o módulo da velocidade de A após o empurrão;
- b) a distância que separa os garotos, decorridos 10 s do empurrão.

RESOLUÇÃO

a) Durante o contato (empurrão), A e B trocam entre si forças de ação e reação: A age em B e B reage em A.

O Princípio Fundamental da Dinâmica, aplicado ao garoto A, conduz a:

$$F_A = m_A a_A = m_A \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = m_A \frac{(v_A - v_{0A})}{\Delta t}$$

Como $v_{0A} = 0$ (A estava inicialmente parado), temos:

$$F_A = m_A \frac{v_A}{\Delta t}$$

O Princípio Fundamental da Dinâmica, aplicado ao garoto B, conduz a:

$$F_B = m_B a_B = m_B \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = m_B \frac{(v_B - v_{0B})}{\Delta t}$$

Como $v_{0B} = 0$ (B estava inicialmente parado), temos:

$$F_B = m_B \frac{v_B}{\Delta t}$$

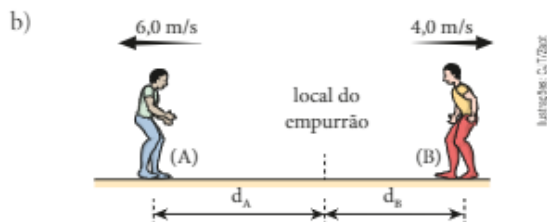
F_A e F_B são as intensidades das forças médias recebidas, respectivamente, por A e B no ato do empurrão (ação e reação).

Como as forças de ação e reação têm intensidades iguais, segue que:

$$F_A = F_B \Rightarrow m_A \frac{v_A}{\Delta t} = m_B \frac{v_B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

As velocidades adquiridas pelos garotos têm intensidades inversamente proporcionais às respectivas massas.

Sendo $v_B = 4,0 \text{ m/s}$, $m_A = 40 \text{ kg}$ e $m_B = 60 \text{ kg}$, calculamos v_A : $\frac{v_A}{4,0} = \frac{60}{40} \Rightarrow v_A = 6,0 \text{ m/s}$



A distância D que separa os garotos, decorridos 10 s do empurrão, é dada por: $D = d_A + d_B$ em que d_A e d_B são as distâncias percorridas por A e por B no referido intervalo de tempo.

Assim:

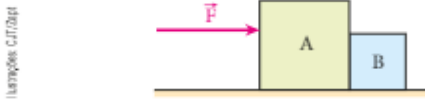
$$d_A = 6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow d_A = 60 \text{ m}$$

$$d_B = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow d_B = 40 \text{ m}$$

Logo: $D = 60 \text{ m} + 40 \text{ m} \Rightarrow D = 100 \text{ m}$

Respostas: a) 6,0 m/s; b) 100 m

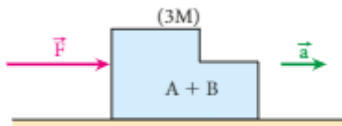
14 Os dois blocos indicados na figura encontram-se em contato, apoiados em um plano horizontal sem atrito. Com os blocos em repouso, aplica-se em A uma força constante, paralela ao plano de apoio e de intensidade F . Sabe-se que as massas de A e B valem, respectivamente, $2M$ e M .



Não considerando a influência do ar, determine:
 a) o módulo da aceleração adquirida pelo sistema;
 b) a intensidade da força de contato trocada pelos blocos.

RESOLUÇÃO

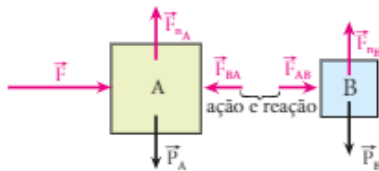
a) A resultante externa que acelera o conjunto A + B é \vec{F} :



Aplicando ao conjunto A + B (de massa total $3M$) o **Princípio Fundamental da Dinâmica**, temos:

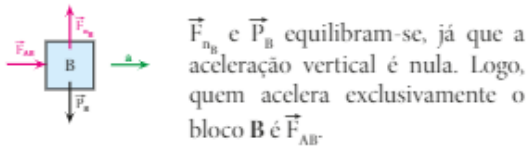
$$F = (m_A + m_B) a \Rightarrow F = 3M a \Rightarrow a = \frac{F}{3M}$$

b) Isolando os blocos e fazendo o esquema das forças que agem em cada um, verificamos o seguinte:



Na região de contato, os blocos trocam as forças \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{BA} , que constituem um par ação-reação.

A intensidade de \vec{F}_{AB} (ou de \vec{F}_{BA}) pode ser calculada aplicando-se a **2ª Lei de Newton** ao bloco B.



\vec{F}_{nB} e \vec{P}_B equilibram-se, já que a aceleração vertical é nula. Logo, quem acelera exclusivamente o bloco B é \vec{F}_{AB} .

$$F_{AB} = m_B a \Rightarrow F_{AB} = M \frac{F}{3M} \Rightarrow F_{AB} = F_{BA} = \frac{F}{3}$$

Respostas: a) $\frac{F}{3M}$; b) $\frac{F}{3}$

15 A figura seguinte representa dois blocos, A (massa M) e B (massa $2M$), interligados por um fio ideal e apoiados em uma mesa horizontal sem atrito:

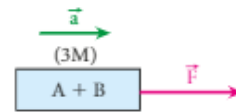


Aplica-se em A uma força paralela à mesa, de intensidade F e que acelera o conjunto. Desprezando a influência do ar, determine:

- a) o módulo da aceleração do sistema;
- b) a intensidade da força que traciona o fio.

RESOLUÇÃO

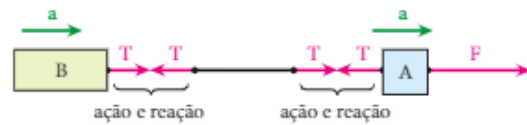
a) A resultante externa que acelera o conjunto A + B é \vec{F} :



O módulo da aceleração \vec{a} é calculado pelo **Princípio Fundamental da Dinâmica**:

$$F = (m_A + m_B) a \Rightarrow F = 3M a \Rightarrow a = \frac{F}{3M}$$

b) As forças verticais (peso e normal) equilibram-se em cada bloco; assim, isolando os blocos e o fio, obtemos o seguinte esquema de forças horizontais:



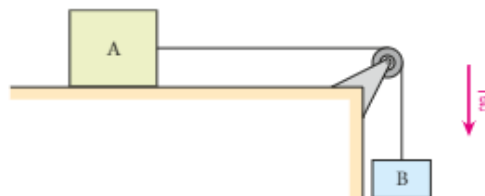
A força que traciona o fio tem a mesma intensidade daquela que acelera o bloco B.

Assim, aplicando a B a **2ª Lei de Newton**, temos:

$$T = m_B a \Rightarrow T = 2M \frac{F}{3M} \Rightarrow T = \frac{2}{3} F$$

Respostas: a) $\frac{F}{3M}$; b) $\frac{2}{3} F$

16 Na montagem representada na figura, o fio é inextensível e de massa desprezível; a polia pode girar sem atrito em torno de seu eixo, tendo inércia de rotação desprezível; as massas dos blocos A e B valem, respectivamente, m_A e m_B ; inexistente atrito entre o bloco A e o plano horizontal em que se apoia e a influência do ar é insignificante.

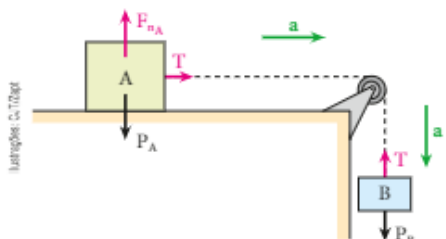


Em determinado instante, o sistema é abandonado à ação da gravidade. Assumindo para o módulo da aceleração da gravidade o valor g , determine:

- a) o módulo da aceleração do sistema;
- b) a intensidade da força que traciona o fio.

RESOLUÇÃO

Façamos, inicialmente, o esquema das forças que agem em cada bloco:



Aplicamos o **Princípio Fundamental da Dinâmica** a cada um deles:

Bloco B: $P_B - T = m_B a$ (I)

Bloco A: $T = m_A a$ (II)

- a) Adicionando (I) e (II), calculamos o módulo da aceleração do sistema:

$$P_B = (m_A + m_B)a \Rightarrow a = \frac{P_B}{m_A + m_B} \Rightarrow a = \frac{m_B}{m_A + m_B} g$$

NOTA

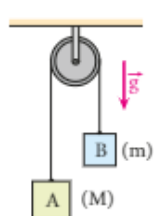
A força resultante que acelera o conjunto A + B é o peso de B.

- b) Substituindo o valor de a em (II), obtemos a intensidade da força que traciona o fio:

$$T = m_A a \Rightarrow T = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g$$

Respostas: a) $\frac{m_B}{m_A + m_B} g$; b) $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g$

17 O dispositivo representado no esquema a seguir é uma máquina de Atwood. A polia tem inércia de rotação desprezível e não se consideram os atritos. O fio é inextensível e de massa desprezível e, no local, a aceleração gravitacional tem módulo g . Tem-se, ainda, que as massas dos corpos A e B valem, respectivamente, M e m , com $M > m$.

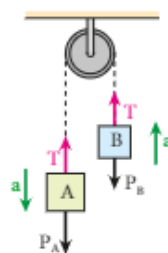


Supondo que em determinado instante a máquina seja destravada, determine:

- a) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco A e pelo bloco B;
- b) a intensidade da força que traciona o fio durante o movimento dos blocos.

RESOLUÇÃO

A figura a seguir mostra o esquema das forças que agem em cada corpo.



Como $M > m$, o corpo A é acelerado para baixo, enquanto B é acelerado para cima. Aplicando a A e a B a **2ª Lei de Newton**, obtemos:

Corpo A: $P_A - T = M a$ (I)

Corpo B: $T - P_B = m a$ (II)

- a) Adicionando (I) e (II), calculamos o módulo das acelerações dos blocos:

$$P_A - P_B = (M + m)a \Rightarrow (M - m)g = (M + m)a$$

Logo: $a = \frac{(M - m)}{M + m} g$

NOTA

A força resultante que acelera o conjunto A + B é dada pela diferença entre os pesos de A e B.

- b) De (II), segue que:

$$T - m g = m \frac{(M - m)}{M + m} g \Rightarrow T = \frac{2M m}{M + m} g$$

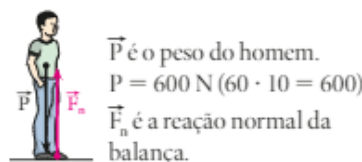
Respostas: a) $\frac{(M - m)}{M + m} g$; b) $\frac{2M m}{M + m} g$

18 Um homem de massa 60 kg acha-se de pé sobre uma balança graduada em newtons. Ele e a balança situam-se dentro da cabine de um elevador que tem, em relação à Terra, uma aceleração vertical de módulo $1,0 \text{ m/s}^2$. Adotando $|g| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a) a indicação da balança no caso de o elevador estar acelerado para cima;
- b) a indicação da balança no caso de o elevador estar acelerado para baixo.

RESOLUÇÃO

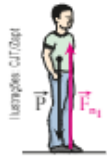
A figura a seguir representa a situação proposta, juntamente com o esquema das forças que agem no homem.



A força \vec{F}_n tem intensidade igual à indicação da balança. Isso ocorre pelo fato de o homem e a balança trocarem, na região de contato, forças de ação e reação. A intensidade de \vec{F}_n é o peso aparente do homem dentro do elevador.

a) No caso de o elevador estar acelerado para cima,

$$|\vec{F}_{n_1}| > |\vec{P}|.$$



Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

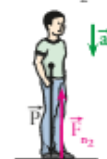
$$F_{n_1} - P = m a \Rightarrow F_{n_1} = m (g + a)$$

$$F_{n_1} = 60 (10 + 1,0) \text{ (N)} \Rightarrow F_{n_1} = 660 \text{ N}$$

O peso aparente é **maior** que o peso real (660 N > 600 N).

b) No caso de o elevador estar acelerado para baixo,

$$|\vec{F}_{n_2}| < |\vec{P}|:$$



Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

$$P - F_{n_2} = m a \Rightarrow F_{n_2} = m (g - a)$$

$$F_{n_2} = 60 (10 - 1,0) \text{ (N)} \Rightarrow F_{n_2} = 540 \text{ N}$$

O peso aparente é **menor** que o peso real (540 N < 600 N).

Respostas: a) 660 N; b) 540 N

NOTA

Podemos dizer que dentro de um elevador em movimento acelerado na vertical reina uma **gravidade aparente** (g_{ap}) diferente da gravidade externa (g).

I. Elevador com aceleração de módulo a , dirigida para cima (\uparrow), em movimento ascendente ou descendente.

Nesse caso, os corpos dentro do elevador aparentam um peso **maior** que o real.

$$g_{ap} = g + a$$

II. Elevador com aceleração de módulo a , dirigida para baixo (\downarrow), em movimento ascendente ou descendente.

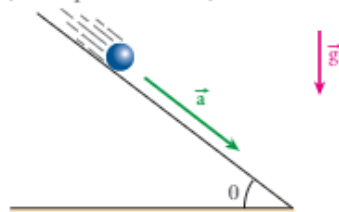
Nesse caso, os corpos dentro do elevador aparentam um peso **menor** que o real.

$$g_{ap} = g - a$$

Observe que, se $a = g$, teremos $g_{ap} = 0$ e os corpos, dentro do elevador, aparentarão peso nulo.

19 Uma partícula de massa m é abandonada no topo do plano inclinado da figura, de onde desce em movimento acelerado com aceleração \vec{a} .

O ângulo de inclinação do plano em relação à horizontal é θ e o módulo da aceleração da gravidade é g .



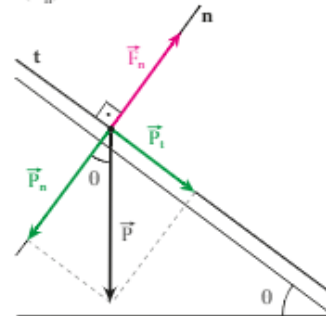
Desprezando os atritos e a influência do ar:

a) calcule o módulo de \vec{a} ;

b) trace os seguintes gráficos: módulo de \vec{a} em função de θ e módulo de \vec{a} em função de m .

RESOLUÇÃO

a) Nas condições citadas, apenas duas forças atuam na partícula: seu peso (\vec{P}) e a reação normal do plano inclinado (\vec{F}_n):



\vec{P}_n = componente normal do peso ($P_n = P \cos \theta$)

Como na direção n a aceleração da partícula é nula, deve ocorrer:

$$P_n = F_n$$

\vec{P}_t = componente tangencial do peso ($P_t = P \sin \theta$).

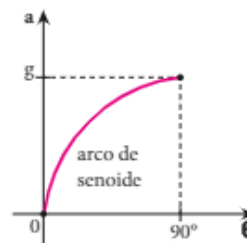
A resultante externa que acelera a partícula na direção t é \vec{P}_t .

Logo, aplicando o **Princípio Fundamental da Dinâmica**, temos: $P_t = m a$

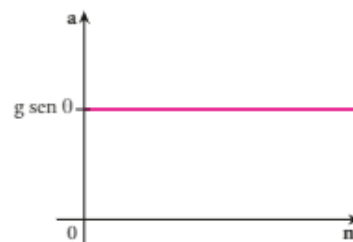
$$\text{Assim: } P \sin \theta = m a \Rightarrow m g \sin \theta = m a$$

$$a = g \sin \theta$$

b)



Como a independe de m , obtemos:



Respostas: a) $g \sin \theta$; b) Ver gráficos.

FAÇA VOCÊ MESMO

Máquina de Atwood

Propomos nesta seção a construção de uma *máquina de Atwood*, que tem este nome em homenagem ao seu criador, o físico inglês **George Atwood** (1745-1807). Ele elaborou esse mecanismo com a finalidade de aplicar as leis de Newton ao movimento dos blocos envolvidos, verificando a intensidade de sua aceleração e, eventualmente, determinando o módulo da aceleração da gravidade local.

Material necessário

- 1 polia de plástico leve, com eixo e suporte para fixação;
- 2 pequenas latas de conserva iguais. O tamanho dessas latas vai depender das dimensões da polia utilizada (veja ilustração ao lado);
- 1 fio leve e inextensível para ser utilizado na polia, em cujas extremidades possam ser amarradas as latas de conserva;
- areia em quantidade suficiente para preencher a metade de cada lata;
- 1 colher de sopa.

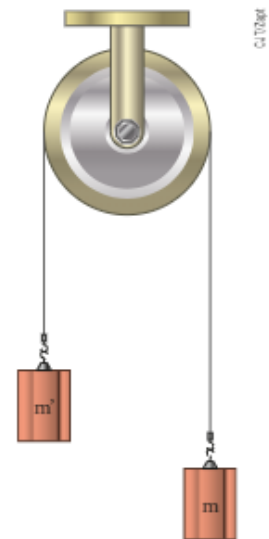
Procedimento

- Faça a montagem da máquina de Atwood como sugere a figura, de modo que as latas de conserva fiquem bem conectadas ao fio e o arranjo permaneça contido em um plano vertical. Trespessada por seu eixo, a polia deverá ser devidamente fixada.
- Preencha as duas latas com areia até a metade de suas capacidades. Feito isso, observe que as latas se mantêm em equilíbrio, independentemente da posição em que forem abandonadas. Isso significa que elas poderão ser largadas emparelhadas ou com uma abaixo da outra. Seja como for, permanecerão em repouso nas suas respectivas posições.
- Utilizando a colher, passe agora um pouco de areia de uma lata para a outra e observe que as latas, uma vez abandonadas, adquirem movimento acelerado, com a mais leve subindo e a mais pesada, descendo.
- Em seguida, passe toda a areia de uma lata para a outra. Nesse caso, uma lata ficará vazia e a outra, totalmente preenchida com areia. Verifique a intensidade da aceleração das latas e compare-a com a da situação anterior. Faça isso apenas visualmente, sem efetuar cálculo algum. Você notará que do primeiro para o segundo caso haverá um aumento perceptível na intensidade da aceleração.

Analisando o experimento

1. Por que a transferência de areia de uma lata para outra faz aumentar a intensidade da aceleração? Justifique com cálculos*.
2. O que ocorre com a intensidade da força de tração no fio à medida que se transfere areia de uma lata para outra? Aumenta, diminui ou permanece constante? Justifique com cálculos*.
3. Como se poderia obter a intensidade da aceleração da gravidade de um local utilizando-se uma máquina de Atwood? Elabore uma proposta experimental respaldada em cálculos matemáticos*.

*Em suas argumentações quantitativas, admita condições ideais, isto é, o fio inextensível, flexível e sem peso, a polia com inércia desprezível e sem atrito com o eixo, além da ausência de resistência do ar.



Representação de uma máquina de Atwood.



QUESTÕES PROPOSTAS

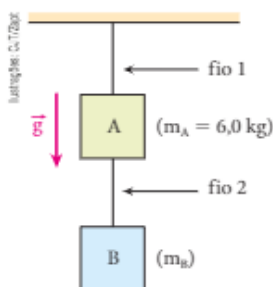


FAÇA NO CADERNO.

20. Na Terra, em um local em que a aceleração da gravidade é normal, uma sonda espacial pesa $5,0 \cdot 10^2$ kgf. Levada para um planeta X, seu peso passa a valer $1,0 \cdot 10^4$ N. Determine:

- a) a massa da sonda na Terra e no planeta X;
- b) o módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta X.

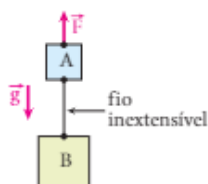
21. Na situação esquematizada na figura abaixo, os blocos A e B encontram-se em equilíbrio, presos a fios ideais iguais, que suportam uma tração máxima de 90 N.



Sabendo que $|\vec{g}| = 10$ m/s², determine:

- a) a maior massa m_B admissível ao bloco B, de modo que nenhum dos fios arrebente;
- b) a intensidade da força de tração no fio 2, supondo que o fio 1 se rompeu e que os blocos estão em queda livre na vertical.

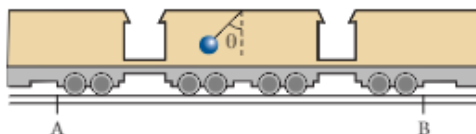
22. No esquema a seguir, os blocos A e B têm massas $m_A = 2,0$ kg e $m_B = 3,0$ kg. Desprezam-se o peso do fio e a influência do ar.



Sendo $|\vec{F}| = 80$ N e adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s², determine:

- a) o módulo da aceleração do sistema;
- b) a intensidade da força que tração o fio.

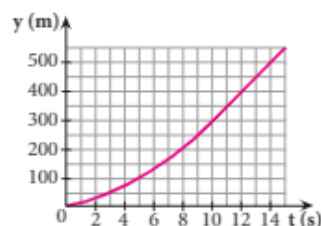
23. No teto de um vagão ferroviário, prende-se uma esfera de aço por meio de um fio leve e inextensível. Verifica-se que em um trecho retilíneo e horizontal da ferrovia o fio se mantém na posição indicada, formando com a vertical um ângulo $\theta = 45^\circ$. No local, adota-se $|\vec{g}| = 10$ m/s².



Sendo \vec{v} a velocidade vetorial do trem e \vec{a} sua aceleração, responda:

- a) Qual é a orientação de \vec{a} , de A para B ou de B para A?
- b) Qual é a intensidade de \vec{a} ?
- c) Qual é a orientação de \vec{v} , de A para B ou de B para A?

24. Um paraquedista parte do repouso de um helicóptero parado no ar a grande altitude, no instante $t_0 = 0$ s, e inicia sua queda com o paraquedas fechado. Não há ventos, de modo que a trajetória do paraquedista pode ser considerada retilínea e vertical. A distância y do paraquedista em relação ao helicóptero cresce com o passar do tempo t , conforme o gráfico.



No local, a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s² e a intensidade R da força de resistência do ar no corpo do paraquedista, cuja massa é de 75 kg, incluindo roupas e equipamentos, varia com o valor de sua velocidade v segundo a expressão $R = kv^2$ (SI), em que k é uma constante que depende principalmente da densidade do ar e da geometria do corpo do paraquedista. Observe no gráfico que o valor da velocidade cresce durante os primeiros 10 s e, em seguida, estabiliza-se, quando se atinge uma velocidade constante, denominada velocidade limite (v_L). Determine:

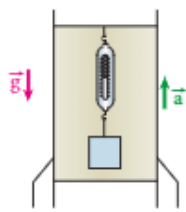
- a) o valor de v_L , em m/s;
- b) o valor de k , no SI;
- c) o módulo da aceleração do paraquedista quando o valor de sua velocidade for a metade de v_L .

25. Uma tira de borracha de peso desprezível e comprimento natural (sem deformação) L_0 é fixada em um suporte de modo a permanecer em posição vertical. Nela, são pendurados sucessivamente dois blocos, A e B, de pesos respectivamente iguais a $1,0$ N e $3,0$ N. Com A suspenso e em equilíbrio, verifica-se que a tira de borracha apresenta um comprimento de $8,0$ cm, e com B suspenso e em equilíbrio, nota-se, agora, um comprimento de $12,0$ cm. Admitindo-se que a tira de borracha obedeça à **Lei de Hooke**, determine:

- a) o valor de L_0 , em centímetros;
- b) a constante elástica da tira de borracha, em N/cm.

26. Um bloco de massa m_1 , inicialmente em repouso, recebe a ação exclusiva de uma força \vec{F} constante que o leva a percorrer uma distância d durante um intervalo de tempo T . Um outro bloco, de massa m_2 , também inicialmente em repouso, recebe a ação da mesma força \vec{F} constante, de modo a percorrer a mesma distância d durante um intervalo de tempo $2T$. Determine a relação $\frac{m_1}{m_2}$.

27. A figura abaixo representa o corte de um dos compartimentos de um foguete, que acelera verticalmente para cima nas proximidades da Terra.



No teto do compartimento, está fixado um dinamômetro ideal, que tem preso a si um bloco de massa 4,0 kg. Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e admitindo que a indicação do dinamômetro seja 60 N, determine o módulo da aceleração do foguete.

28. Um homem empurra um bloco sobre uma mesa horizontal perfeitamente sem atrito, aplicando-lhe uma força paralela à mesa, conforme ilustra a figura:

Faça um esquema representando todas as forças externas que agem no bloco, bem como as que, com elas, formam pares ação-reação.



29. Um astronauta, do qual desprezaremos as dimensões, encontra-se em repouso no ponto A da figura 1, em uma região do espaço livre de ações gravitacionais significativas. $Oxyz$ é um referencial inercial. Por meio de uma mochila espacial, dotada dos jatos (1), (2) e (3), de mesma potência e que expõem combustível queimado nos sentidos indicados na figura 2, o astronauta consegue mover-se em relação a $Oxyz$.

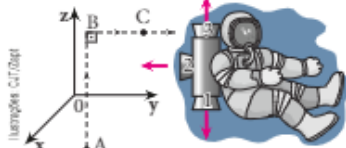


figura 1

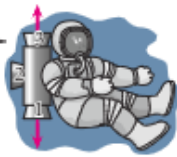
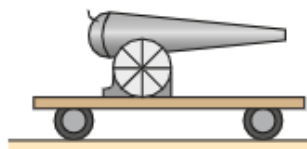


figura 2

Para percorrer a trajetória $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow$, o astronauta deverá acionar, durante intervalos de tempo iguais, os jatos na seguinte sequência:

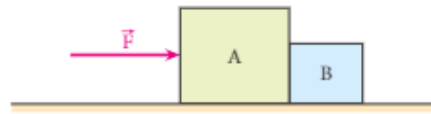
- a) (1) e (2) c) (3), (1) e (2) e) (1), (2) e (3)
b) (3) e (2) d) (1), (3) e (2)

30. O esquema a seguir representa um canhão rigidamente ligado a um carrinho, que pode deslizar sem atrito sobre o plano horizontal.



O sistema, inicialmente em repouso, dispara horizontalmente um projétil de 20 kg de massa, que sai com velocidade de $1,2 \cdot 10^2 \text{ m/s}$. Sabendo que a massa do conjunto canhão-carrinho perfaz $2,4 \cdot 10^3 \text{ kg}$ e desprezando a resistência do ar, calcule o módulo da velocidade de recuo do conjunto canhão-carrinho após o disparo.

31. Na figura abaixo, os blocos A e B têm massas $m_A = 6,0 \text{ kg}$ e $m_B = 2,0 \text{ kg}$ e, estando apenas encostados entre si, repousam sobre um plano horizontal perfeitamente liso.



A partir de um dado instante, exerce-se em A uma força horizontal \vec{F} , de intensidade igual a 16 N.

Desprezando a influência do ar, calcule:

- a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) a intensidade das forças que A e B trocam entre si na região de contato.

32. Na situação esquematizada na figura, desprezam-se os atritos e a influência do ar. As massas de A e B valem, respectivamente, 3,0 kg e 2,0 kg.



Sabendo-se que as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são paralelas ao plano horizontal de apoio e que $|\vec{F}_1| = 40 \text{ N}$ e $|\vec{F}_2| = 10 \text{ N}$, pode-se afirmar que a intensidade da força que B aplica em A vale:

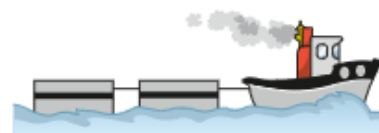
- a) 10 N d) 22 N
b) 12 N e) 26 N
c) 18 N

33. Na situação do esquema a seguir, não há atrito entre os blocos e o plano horizontal, a influência do ar é desprezível e as massas de A e de B valem, respectivamente, 2,0 kg e 8,0 kg.



Sabe-se que o fio leve e inextensível que une A com B suporta, sem romper-se, uma tração máxima de 32 N. Calcule a maior intensidade admissível à força \vec{F} , horizontal, para que o fio não se rompa.

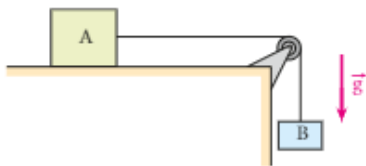
34. Um rebocador arrasta dois flutuadores idênticos, de 3,2 t de massa cada um, imprimindo-lhes uma aceleração de módulo $0,10 \text{ m/s}^2$ ao longo de uma linha reta. A força de tração no cabo que une a embarcação ao primeiro flutuador tem intensidade de 800 N.



A força de resistência, aplicada pela água em cada flutuador, tem intensidade f , e a força de tração no cabo que une os dois flutuadores tem intensidade T . Indique a opção correta:

- a) $f = 80 \text{ N}$; $T = 400 \text{ N}$.
- b) $f = 400 \text{ N}$; $T = 800 \text{ N}$.
- c) $f = 320 \text{ N}$; $T = 400 \text{ N}$.
- d) $f = 400 \text{ N}$; $T = 400 \text{ N}$.
- e) $f = 160 \text{ N}$; $T = 800 \text{ N}$.

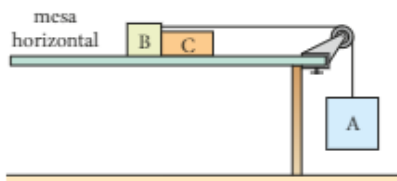
35. No arranjo experimental esquematizado a seguir, os blocos **A** e **B** têm massas respectivamente iguais a $4,0 \text{ kg}$ e $1,0 \text{ kg}$ (desprezam-se os atritos, a influência do ar e a inércia da polia).



Considerando o fio que interliga os blocos leve e inextensível e adotando nos cálculos $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a) o módulo da aceleração dos blocos;
- b) a intensidade da força de tração estabelecida no fio.

36. Na figura, os blocos **A**, **B** e **C** têm massas respectivamente iguais a $3M$, $2M$ e M ; o fio e a polia são ideais. Os atritos são desprezíveis e a aceleração da gravidade tem intensidade g .

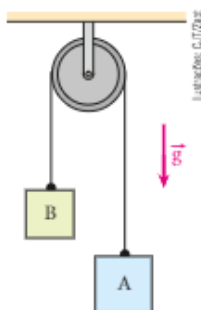


Admitindo os blocos em movimento sob a ação da gravidade, calcule as intensidades da força de tração no fio (T) e da força de contato, F , trocada por **B** e **C**.

37. O dispositivo esquematizado na figura é uma **máquina de Atwood**. No caso, não há atritos, o fio é inextensível e desprezam-se sua massa e a da polia.

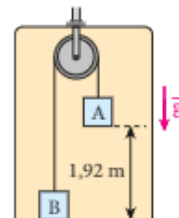
Supondo que os blocos **A** e **B** tenham massas respectivamente iguais a $3,0 \text{ kg}$ e $2,0 \text{ kg}$ e que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a) o módulo da aceleração dos blocos;
- b) a intensidade da força de tração estabelecida no fio;
- c) a intensidade da força de tração estabelecida na haste de sustentação da polia.



38. A figura a seguir representa os blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a $3,0 \text{ kg}$ e $1,0 \text{ kg}$, conectados entre si por um fio leve e inextensível que passa por uma polia ideal, fixa no teto de um elevador. Os blocos estão inicialmente em repouso, em relação ao elevador, nas posições indicadas.

Admitindo que o elevador tenha aceleração de intensidade $2,0 \text{ m/s}^2$, vertical e dirigida para cima, determine o intervalo de tempo necessário para o bloco **A** atingir o piso do elevador. Adote nos cálculos $|\vec{g}| = 10,0 \text{ m/s}^2$.



39. Em determinado parque de diversões, o elevador que despenca verticalmente em queda livre é a grande atração. Rafael, um garoto de massa igual a 70 kg , encara o desafio e, sem se intimidar com os comentários de seus colegas, embarca no brinquedo, que começa a subir a partir do repouso. Durante a ascensão vertical do elevador, são verificadas três etapas:

- I. movimento uniformemente acelerado com aceleração de módulo $1,0 \text{ m/s}^2$;
- II. movimento uniforme;
- III. movimento uniformemente retardado com aceleração de módulo $1,0 \text{ m/s}^2$.

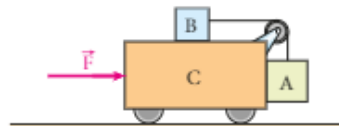
Depois de alguns segundos estacionado no ponto mais alto da torre, de onde Rafael acena triunfante para o grupo de amigos, o elevador é destravado, passando a cair com aceleração praticamente igual à da gravidade (10 m/s^2). Peça-se calcular o peso aparente de Rafael:

- a) nas etapas **I**, **II** e **III**;
- b) durante a queda livre.

40. Em um elevador, há uma balança graduada em newtons. Um homem de 60 kg de massa, em pé sobre a balança, lê 720 N quando o elevador sobe em movimento acelerado e 456 N quando o elevador desce em movimento acelerado, com a mesma aceleração da subida, em módulo. Determine:

- a) os módulos da aceleração da gravidade e do elevador;
- b) quanto registrará a balança se o elevador subir ou descer com velocidade constante.

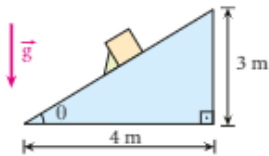
41. Na figura, o sistema está sujeito à ação da resultante externa \vec{F} , paralela ao plano horizontal sobre o qual o carrinho está apoiado. Todos os atritos são irrelevantes e a inércia do fio e da polia são desprezíveis.



As massas dos corpos **A**, **B** e **C** valem, respectivamente, $2,0 \text{ kg}$, $1,0 \text{ kg}$ e $5,0 \text{ kg}$ e, no local, o módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s^2 .

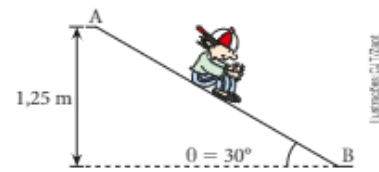
Supondo que A esteja apenas encostado em C, determine a intensidade de \vec{F} de modo que A e B não se movimentem em relação ao carrinho C.

42. No plano inclinado representado abaixo, o bloco encontra-se impedido de se movimentar em razão do calço no qual está apoiado. Os atritos são desprezíveis, a massa do bloco vale 5,0 kg e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Faça no seu caderno uma figura do bloco e esquematize as forças que agem nesse corpo.
- Calcule as intensidades das forças com as quais o bloco comprime o calço e o plano de apoio.

43. Um garoto de massa igual a 40,0 kg parte do repouso do ponto A do escorregador esquematizado abaixo e desce sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar.



Sabendo que no local a aceleração da gravidade tem intensidade $10,0 \text{ m/s}^2$, responda:

- Qual é o módulo da aceleração adquirida pelo garoto? O valor calculado depende de sua massa?
- Qual é o intervalo de tempo gasto pelo garoto no percurso de A até B?
- Com que velocidade ele atinge o ponto B?



DESCUBRA MAIS

- Qual é a melhor maneira de deslocar um copo de água completamente cheio sem que nenhuma gota derrame? Fundamente sua resposta em princípios físicos.
- Suponha que, ao perceber a iminente colisão frontal entre seu barco e uma rocha, um homem desligue imediatamente o motor de popa e puxe vigorosamente uma corda amarrada na proa da embarcação em sentido oposto ao do movimento, que ocorre com alta velocidade. O homem consegue frear o barco dessa maneira? Justifique sua resposta.
- Você lança uma pedra para cima e ela sobe e desce por um mesmo segmento de reta vertical, retornando, ao final, à sua mão. Levando-se em conta a resistência do ar, que intervalo de tempo é maior: o de subida ou o de descida?
- Nos porta-aviões, os caças dispõem de cerca de 80,0 m para realizar sua decolagem. É um comprimento muito pequeno que obriga cada aeronave, com massa próxima de 13300 kg, a ser arremessada por um dispositivo denominado catapulta. Esse sistema, constituído de trilhos e cabos de aço, imprime ao avião forças que, adicionadas às de impulsão provocadas pelas turbinas funcionando em alta rotação, produzem o empurrão resultante necessário ao levantamento de voo.



Avião decolando de uma base naval.

A arrancada do caça na curta pista do porta-aviões é tão violenta que o corpo do piloto sofre uma intensa compressão contra o encosto da poltrona, ficando sua face sensivelmente deformada durante o curto intervalo de tempo da operação. Supondo-se que o avião alce voo com velocidade próxima de $56,0 \text{ m/s}$ (aproximadamente 202 km/h), explique por que ocorre essa compressão do corpo do piloto contra o encosto da poltrona, bem como a deformação de sua face. Estime a intensidade média da aceleração da aeronave ao decolar e também a intensidade média da força resultante responsável por essa aceleração.

- Quando abandonamos uma pequena pedra nas proximidades do solo, ela cai verticalmente com aceleração de intensidade próxima de 10 m/s^2 . Durante essa queda, a pedra e a Terra atraem-se mutuamente, trocando forças gravitacionais de ação e reação, que têm intensidades iguais. O planeta experimenta alguma aceleração detectável em razão dessa interação? Justifique sua resposta.

A força de resistência do ar e o estudo da queda vertical de um corpo no ar

A força de resistência do ar

Por ser um meio gasoso, o ar permite a penetração de corpos através dele. Esses corpos, porém, colidem com as moléculas do ar durante o movimento, ficando sujeitos a uma força de oposição ao avanço, denominada **força de resistência do ar**. Essa força é tanto mais intensa quanto maior for a área da superfície externa do corpo exposta às colisões com as partículas do ar.

Um experimento simples que comprova esse fato pode ser realizado com uma folha de papel. Deixando-se a folha cair aberta, ela descreverá uma trajetória irregular. Se essa mesma folha cair do mesmo ponto, porém embolada, descreverá uma trajetória praticamente retilínea, gastando até o solo um intervalo de tempo menor que o gasto no caso anterior. Isso mostra que, na folha embolada, a ação do ar é menos expressiva, pois a área que colide com as moléculas torna-se menor.



Folha aberta: trajetória irregular e maior tempo de queda.

Folha embolada: trajetória praticamente retilínea e menor tempo de queda.

É fácil constatar que a força de resistência do ar é tanto mais intensa quanto maior for a velocidade do corpo em relação ao ar, o que se justifica pela intensificação dos efeitos das colisões das partículas de ar contra o corpo. Verifica-se que, na maioria dos casos, a proporção é aproximadamente quadrática, isto é, do tipo:

$$F_r = k v^2$$

em que F_r é a intensidade da força de resistência do ar; k é um coeficiente que depende da forma do corpo, da densidade do ar e da maior área de uma seção do corpo perpendicular à direção do movimento; v é a intensidade da velocidade.

O *design* de um carro define sua forma aerodinâmica, que influi no coeficiente k . Modelos que apresentam pequenos valores de k percebem menos a força de resistência do ar, que cresce em qualquer caso com a velocidade.



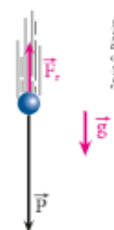
Em um carro em movimento, atua uma força de resistência exercida pelo ar que depende, entre outros fatores, da forma do veículo (aerodinâmica) e da velocidade.

O estudo da queda vertical, no ar, de um corpo de dimensões relativamente pequenas

Consideremos um corpo esférico abandonado do repouso de uma grande altitude em relação ao solo. Desprezando-se a ação de ventos, durante a queda apenas duas forças agirão sobre ele: o peso ou força da gravidade (\vec{P}) e a força de resistência do ar (\vec{F}_r), conforme representa a figura ao lado.

Supondo desprezíveis as variações do campo gravitacional durante a queda do corpo, seu peso permanecerá constante durante o movimento. Entretanto, o mesmo não ocorrerá com a força de resistência do ar, pois esta terá intensidade crescente à medida que o corpo for ganhando velocidade.

Esta etapa de movimento acelerado terá duração limitada, visto que, atingida certa velocidade, a força de resistência do ar assumirá intensidade igual à da força-peso.



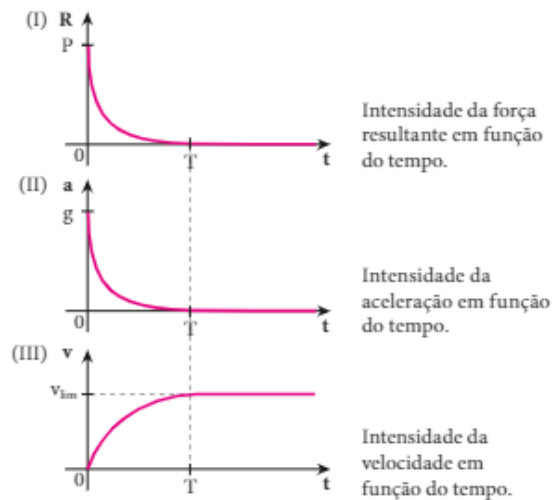
A partir daí, a força resultante será nula, de modo que o corpo prosseguirá sua queda em movimento retilíneo e uniforme, por inércia. A velocidade constante apresentada durante esse movimento inercial denomina-se **velocidade-limite**.

Um paraquedista descreve, inicialmente, um movimento acelerado na direção vertical, sob a ação da força da gravidade (peso) e da força vertical de resistência do ar. A partir do instante em que a força resistente aplicada pelo ar equilibra o peso, o movimento do esportista torna-se uniforme e a velocidade constante adquirida é a **velocidade-limite**.



Nos gráficos qualitativos (I), (II) e (III) ao lado, representamos as variações com o tempo (t) da intensidade da força resultante (R) sobre o corpo, da intensidade da aceleração (a) e da intensidade da velocidade (v). Nesses gráficos, g é o módulo da aceleração da gravidade, v_{lim} é o módulo da velocidade-limite atingida pelo corpo e T é o instante em que é atingida essa velocidade.

$$\text{Condição de } v_{lim}: |\vec{F}_r| = |\vec{P}|$$



Superaquecimento por fricção com o ar na entrada na atmosfera teria sido a causa da desintegração do ônibus espacial Columbia



O Columbia sendo lançado ao espaço. Cabo Canaveral, Flórida, Janeiro de 2003.

Nem só de sucessos vive a história das viagens espaciais estadunidenses.

Por duas vezes, ônibus espaciais de missões promovidas pelos Estados Unidos espatifaram-se, ceifando a vida de toda a tripulação. O primeiro foi o Challenger, em 28 de janeiro de 1986, que explodiu 73 s depois do lançamento, matando seus sete astronautas. Um dos foguetes propulsores apresentou defeito, provocando a explosão da espaçonave. Com isso, estabeleceu-se uma pausa de 32 meses nas viagens espaciais organizadas por esse país com ônibus espaciais reutilizáveis.

A segunda tragédia ocorreu em 1^a de fevereiro de 2003, com o ônibus espacial Columbia, o segundo veículo reutilizável da série *space shuttles* construída pelos Estados Unidos. Depois de uma missão de 16 dias, em que foram realizados 80 experimentos com sucesso, a nave se desintegrou ao reentrar na atmosfera terrestre, matando seus sete tripulantes.

A provável causa do acidente do Columbia foi o colapso da estrutura externa constituída por um revestimento cerâmico capaz de suportar temperaturas elevadíssimas. Com danos nesse revestimento, regiões próximas à asa direita superaqueceram devido à fricção com o ar na entrada na atmosfera, o que teria provocado a desintegração total do veículo.

O jornal *Folha de S. Paulo* (edição de 1º fev. 2003 *on-line*) assim descreveu o desastre do Columbia:

Ônibus espacial se desintegra sobre EUA; sete astronautas morrem

O ônibus espacial Columbia se desintegrou na manhã de sábado sobre os Estados Unidos enquanto preparava-se para pousar, confirmou a Nasa (agência espacial norte-americana).

A tripulação, formada por seis norte-americanos e um israelense, morreu. A Nasa hasteou a bandeira dos Estados Unidos a meio mastro no Centro Espacial Kennedy, no cabo Canaveral.

O ônibus caiu no Estado do Texas, após a agência perder o contato com os astronautas às 14 h (12 h em Brasília), 16 minutos antes do horário programado para sua aterrissagem no cabo Canaveral, na Flórida. Moradores da cidade de Palestine, no leste do Texas, disseram à rede de televisão CNN que escutaram uma "grande explosão".

O Columbia teria se desintegrado durante a entrada na atmosfera, a 63 quilômetros de altitude. Ele era o mais antigo ônibus espacial americano, lançado pela primeira vez em 12 de abril de 1981.

Durante sua decolagem, em janeiro, uma placa de isolamento térmico se despreendeu da fuselagem. No entanto, a agência afirmou que o incidente não comprometeria a missão.

No ano passado, fissuras encontradas em tubos de combustível fizeram com que ele e os outros três ônibus espaciais da Nasa passassem por uma revisão. Esta era a primeira missão do Columbia desde então.

Sean O'Keefe, administrador da Nasa, afirmou que duas equipes, uma federal e outra independente, investigarão a causa do acidente. Segundo ele, não há indicações de que o acidente tenha sido causado por algo ou alguém em terra.

Missão cumprida

Os sete astronautas participavam de uma missão científica e estavam há 16 dias na órbita terrestre.

A tripulação se dividiu em duas equipes, cada uma trabalhando 12 horas, para dar conta das 80 experiências programadas. A maioria, 59, foi realizada em um módulo laboratorial no porão de carga do ônibus.

A maior parte dos dados foi transmitida à Terra antes do fim da missão, que vinha sendo considerada um sucesso até o acidente.

"A tripulação era totalmente dedicada. Temos de saber o que aconteceu e não deixar que o sacrifício deles seja em vão", disse o administrador associado da Nasa, Bill Readdy.

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/folha/ciencia/ult306u8321.shtml>.

Acesso em: 10 dez. 2015.

Tripulação do Columbia antes do retorno da fatídica missão.



NASA/Doty / Imagoeconomica

Compreensão, pesquisa e debate

1. Como os pássaros voam?
2. Qual é a finalidade das asas e dos aerofólios existentes nos carros de Fórmula 1?
3. Qual é o valor aproximado da velocidade-limite atingida por um paraquedista em queda vertical no ar com seu paraquedas aberto?
4. Pesquise pelo menos dois outros cientistas ou estudiosos que pereceram em nome da ciência e cite as circunstâncias de suas mortes.
5. A saga dos ônibus espaciais reutilizáveis finalizou-se em 2012 com a última missão do *Atlantis*. No futuro próximo, como será feito o envio de missões tripuladas ao espaço?



ATRITO ENTRE SÓLIDOS

1. INTRODUÇÃO

Imagine que você receba a incumbência de escrever com um lápis comum sobre uma lâmina de vidro plana e lisa. Isso seria possível? Certamente não! Devido ao pequeno atrito existente entre o vidro e a grafite, esta não seria desgastada pelo vidro e a escrita não poderia ser notada. Escrever sobre uma superfície qualquer exige a intervenção de forças de atrito. Sem elas, a ponta do lápis, da caneta, ou mesmo a extremidade de um giz, não deixarão seus registros onde se pretende grafar o texto.



A utilização adequada de um lápis requer forças de atrito, tanto para que o objeto seja devidamente empunhado como para a produção da escrita sobre uma folha de papel.

Consideremos dois corpos em contato, comprimindo-se mutuamente. Quando um deles escorrega ou tende a escorregar em relação ao outro, há uma troca de forças, denominadas **forças de atrito**. Essas forças, que sempre surgem no sentido de se opor ao escorregamento ou à tendência de escorregamento, ocorrem devido a interações de origem eletromagnética entre os átomos das regiões de contato efetivo entre as duas superfícies.

Se não fossem as forças de atrito, seria impossível caminhar em uma rua, bem como não seria viável o movimento de um carro convencional sobre o asfal-

to. Na ausência de forças de atrito, um colhedor de cocos não conseguiria escalar o caule de um coqueiro para apanhar os frutos, uma lixa não desgastaria um pedaço de madeira e não poderíamos desfrutar do som emitido por um violino, já que esse som é obtido pelo esfregar das fibras ou dos fios do arco sobre as cordas do instrumento.

Embora as forças de atrito sejam decisivas para a ocorrência dos exemplos citados, em muitos casos elas são veículos de dissipação de energia, como energia cinética, que é transformada, em geral, em energia térmica. Se, por exemplo, você lançar sua caneta para que ela deslize sobre o chão da sala de aula, notará que, pela ação das forças de atrito, ela será freada até sua completa imobilização, perdendo dessa forma a energia cinética recebida no ato do lançamento.

Consideremos a situação em que um bloco **B** repousa sobre a superfície **S**, plana e horizontal.

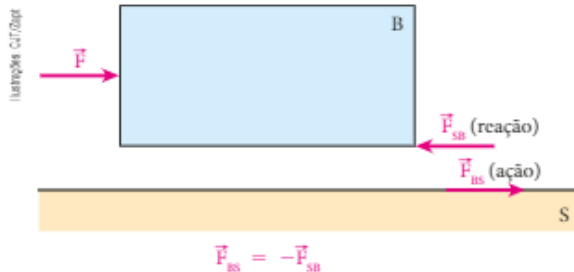


Admitamos que **B** seja empurrado horizontalmente para a direita por uma força \vec{F} , mas sem sair do lugar.



Ao ser empurrado, **B** aplica em **S** uma força \vec{F}_{BS} horizontal dirigida para a direita.

Como se explica, então, o repouso de **B**? Ocorre que esse bloco recebe de **S**, na região de contato, uma força \vec{F}_{SB} horizontal dirigida para a esquerda, que equilibra a força \vec{F} .



As forças \vec{F}_{BS} e \vec{F}_{SB} que **B** e **S** trocam na região de contato são forças de atrito e constituem um par **ação-reação** (3ª Lei de Newton).

Observemos que \vec{F}_{BS} e \vec{F}_{SB} têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, estando aplicadas em corpos diferentes.

Destaquemos, ainda, que as forças de atrito \vec{F}_{BS} e \vec{F}_{SB} só aparecem se $\vec{F} \neq \vec{0}$. De fato, se não houver solicitação de escorregamento, não haverá troca de forças de atrito entre as superfícies em contato.

Então, para o bloco **B** em repouso sobre a superfície **S**, temos:

$$\text{Se } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{BS} = \vec{F}_{SB} = \vec{0}$$

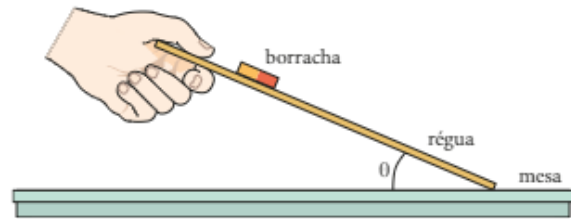
No caso de **B** já estar escorregando sobre a superfície **S**, as forças de atrito também estarão presentes, independentemente de \vec{F} estar atuando ou não.

Estudaremos neste capítulo o atrito de escorregamento entre sólidos, atribuindo-lhe duas denominações: **atrito estático**, enquanto não houver escorregamento entre as superfícies atritantes, e **atrito cinético**, para o caso de o escorregamento já haver se iniciado.

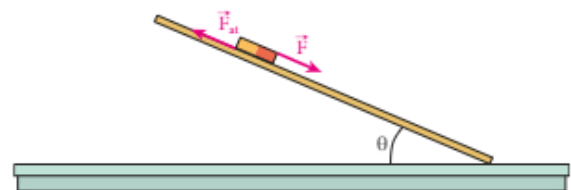
2. ATRITO ESTÁTICO

Considere uma mesa horizontal sobre a qual repousa uma régua de madeira. Imagine uma borracha escolar apoiada sobre a face mais larga da régua. Inicialmente a borracha não recebe forças de atrito, uma vez que não manifesta nenhuma tendência de escorregamento.

Suponha agora que a régua seja inclinada lentamente em relação à superfície da mesa, conforme sugere a figura a seguir.



No início, para pequenos valores do ângulo θ , a borracha permanece parada e a força de atrito que a mantém em equilíbrio é do tipo estático. Tal força tem intensidade crescente a partir de zero, constituindo-se na equilibrante da força que solicita a borracha a descer (componente tangencial do peso da borracha).



Enquanto a borracha está em equilíbrio, \vec{F} e \vec{F}_{at} têm intensidades crescentes com o ângulo θ , valendo a relação $\vec{F}_{at} = -\vec{F}$.

Continuando a inclinar a régua de modo que aumente o ângulo θ , chega-se a um ponto em que a borracha se apresenta na iminência de movimento, isto é, está prestes a descer. Nesse caso, a força de atrito estático que ainda mantém a borracha em equilíbrio terá atingido sua máxima intensidade.

Essa máxima força de atrito estático, que se manifesta quando o escorregamento é iminente, é denominada **força de atrito de destaque** ($\vec{F}_{at,d}$).

Resumindo, vimos que a força de atrito estático (\vec{F}_{at}) tem intensidade variável desde zero, quando não há solicitação de escorregamento, até um valor máximo ou de destaque, quando o corpo fica na iminência de escorregar.

$$\text{Assim, podemos dizer que: } 0 \leq F_{at} \leq F_{at,d}$$

A intensidade da força de atrito estático depende da intensidade da força que visa provocar o escorregamento, sendo sempre igual à desta última.

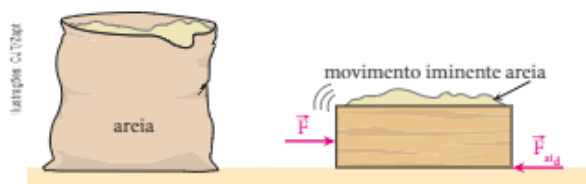
Cálculo da intensidade da força de atrito de destaque ($F_{at,d}$)

Vamos considerar agora uma caixa de papelão, como uma caixa de sapatos, destampada e apoiada sobre a superfície plana e horizontal de um piso de concreto.

Empurrando-se a caixa inicialmente vazia com uma força horizontal, ela será posta “facilmente” em movimento. Se colocarmos, porém, certa quantidade de areia dentro dela, a força horizontal necessária para iniciar o movimento será, certamente, mais intensa que aquela aplicada no caso anterior.

Se aumentarmos gradativamente a quantidade de areia na caixa, notaremos que, quanto mais areia introduzirmos, maior será a intensidade da força horizontal a ser aplicada para que o movimento seja iniciado.

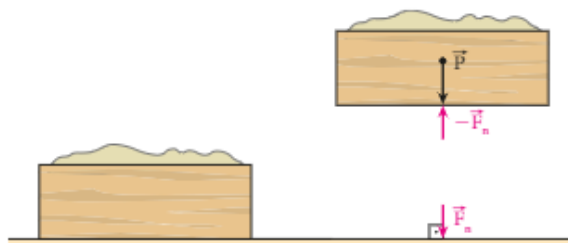
Isso mostra que, à medida que se preenche a caixa com areia, maior se torna a força de atrito de destaque entre ela e o plano de apoio.



Aumentando-se a quantidade de areia na caixa, aumenta-se a intensidade da força de atrito de destaque e, conseqüentemente, mais intensa deve ser a força exercida pelo operador para iniciar o movimento.

Você seria capaz de responder qual é a relação entre a quantidade de areia na caixa e o atrito de destaque?

Ocorre que a introdução de areia contribui para o aumento do peso do sistema e, por isso, este exerce sobre o plano de apoio uma força normal de compressão cada vez mais intensa.



Quanto mais areia é depositada na caixa, maior é o peso do sistema e mais intensa é a força normal de compressão (F_n) exercida sobre o piso.

Verifica-se que a intensidade da força de atrito de destaque (F_{atd}) é diretamente proporcional à intensidade da força normal (F_n) trocada pelas superfícies atritantes na região de contato.

Matematicamente temos o seguinte:

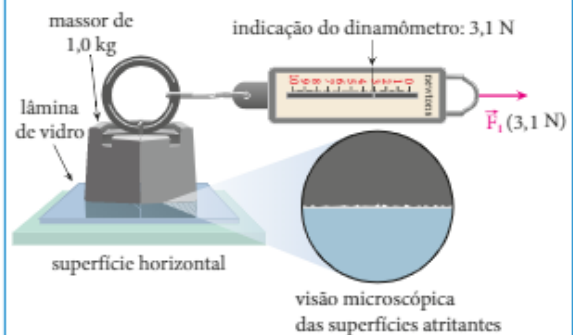
$$F_{atd} = \mu_e F_n$$

A constante de proporcionalidade μ_e é denominada **coeficiente de atrito estático**, e seu valor depende dos materiais atritantes e do grau de polimento deles.

Observe a seguir a representação de um experimento em que, nas duas situações, o escorregamento do massor de 1,0 kg é iminente.

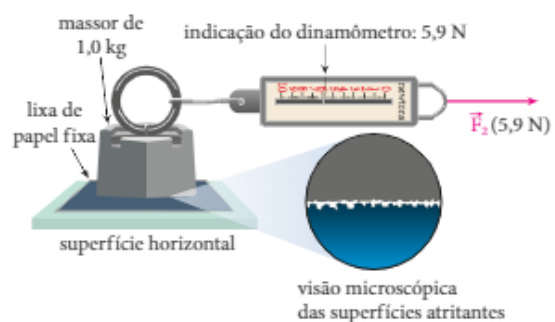
Situação 1

O bloco é colocado sobre uma lâmina de vidro (superfície bastante lisa), e o dinamômetro indica na situação de movimento iminente uma força de 3,1 N.



Situação 2

O bloco é colocado sobre uma lixa de papel (superfície bastante áspera), e o dinamômetro indica na situação de movimento iminente 5,9 N.



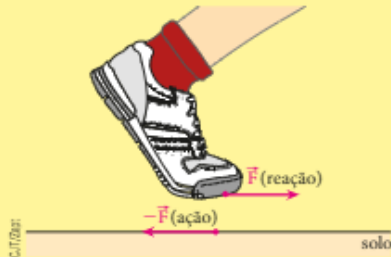
O experimento proposto tem a finalidade de determinar o coeficiente de atrito estático entre um bloco de ferro de massa-padrão 1,0 kg e superfícies horizontais de apoio de materiais diferentes.

Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, pode-se determinar para o primeiro caso $\mu_{e1} = 0,31$, e para o segundo, $\mu_{e2} = 0,59$. Faça esses cálculos.



Sem atrito, seria possível caminhar?

No caminhar, o pé de uma pessoa empurra o chão para trás e este reage no pé da pessoa, empurrando-o para a frente. Pé e solo trocam entre si forças de atrito do tipo **ação** e **reação** (mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos). Observe no esquema a seguir que uma força está aplicada no chão e a outra, no pé da pessoa.



Mulher caminhando.

FAÇA VOCÊ MESMO

Determinando experimentalmente o coeficiente de atrito estático

Experimento 1

Vamos descrever agora um experimento muito simples, com o objetivo de determinar o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies.

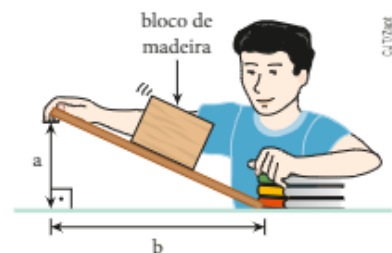
Material necessário

- Uma tábua plana de madeira sem irregularidades (ondulações, rachaduras etc.);
- Um bloco de madeira ou de outro material, sem irregularidades;
- Régua ou trena.

Procedimento

- I. Apoie o bloco sobre a tábua de madeira e incline lentamente a tábua em relação à horizontal, conforme indicado na figura ao lado. Perceba que será estabelecida uma situação em que o bloco se apresentará na iminência de deslizar. Nesta situação, fixe a tábua.
- II. Com a tábua fixada, meça com uma régua ou trena os comprimentos **a** e **b** indicados na figura. O coeficiente de atrito estático μ_c entre o bloco e a superfície de apoio será determinado por:

$$\mu_c = \frac{a}{b}$$



Analisando o experimento

1. Junto com um colega, faça a demonstração matemática da expressão apresentada no procedimento II.
2. Use os valores que você obteve e determine o coeficiente de atrito estático μ_c entre o bloco e a tábua.
3. Se você lixasse as superfícies atritantes do bloco e da tábua e repetisse o experimento, o que aconteceria com os valores de **a** e **b**?

Experimento 2

O objetivo deste experimento é determinar o coeficiente de atrito estático (μ_e) entre a sola de um calçado e um determinado piso.

Material necessário

- Uma mola qualquer que opere em regime elástico
- Uma régua escolar ou trena;
- Um calçado.

Procedimento

I. Meça o comprimento natural da mola, isto é, seu comprimento sem deformação. Representemos esse comprimento por x_0 .

II. Fixe uma das extremidades da mola de modo que ela disponha seu eixo na vertical. Pendure um pé de calçado na extremidade livre da mola, conforme indica a figura ao lado, aguarde o equilíbrio e meça o comprimento x_1 adquirido pela mola nessa situação.

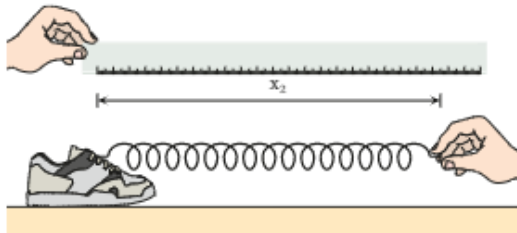
Sendo P a intensidade do peso do pé de calçado e F_1 a intensidade da força elástica exercida pela mola sobre ele, podemos escrever na situação de equilíbrio que: $P = F_1$

Aplicando a **Lei de Hooke**, temos:

$$P = K \Delta x_1 \Rightarrow P = K (x_1 - x_0) \quad (\text{I})$$

em que K é a constante elástica da mola.

III. Em seguida, apoie o pé de calçado sobre o piso, admitido horizontal, conectando a ele uma das extremidades da mola. Puxando a mola horizontalmente, conforme ilustra o esquema a seguir, meça o comprimento x_2 adquirido por ela quando o pé de calçado estiver na iminência de escorregar.



Sendo F_{at} a intensidade da força de atrito exercida pela superfície de apoio sobre o pé de calçado e F_2 a intensidade da força elástica aplicada pela mola sobre ele, temos na situação de equilíbrio: $F_{at} = F_2$

Aplicando novamente a **Lei de Hooke**, temos: $F_{at} = K \Delta x_2 \Rightarrow F_{at} = K (x_2 - x_0)$

No caso de escorregamento iminente, porém, a força de atrito estático adquire intensidade máxima (atrito de destaque), dada por $F_{at_d} = \mu_e F_n$.

Como a superfície de apoio é horizontal, tem-se ainda que: $F_{at} = \mu_e P \Rightarrow \mu_e P = K (x_2 - x_0) \quad (\text{II})$

Dividindo (II) por (I), segue que: $\frac{\mu_e P}{P} = \frac{K (x_2 - x_0)}{K (x_1 - x_0)} \Rightarrow \mu_e = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$

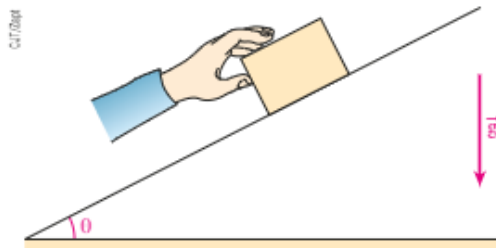
Analisando o experimento

1. Observe que o valor de μ_e independe do peso do pé de calçado e da constante elástica da mola. Depende apenas das distensões apresentadas pela mola no primeiro e no segundo procedimento. Use os valores que você obteve para determinar o coeficiente de atrito estático entre a sola do calçado e a superfície onde o experimento foi realizado.
2. Quanto mais próximo de zero for o valor de μ_e , mais escorregadio será o calçado quando utilizado no piso estudado. Imagine que você repetisse este experimento com o mesmo calçado em uma superfície diferente e obtivesse no procedimento III um comprimento x_2' de modo que $x_2' < x_2$. Em qual das situações o calçado é mais escorregadio?

... e a força de atrito inverte seu sentido

Vamos estudar a seguir uma situação teórica em que um pequeno bloco de massa m , apoiado sobre o plano inclinado de um ângulo θ em relação à horizontal, vai ser empurrado paralelamente ao plano sem, no entanto, se deslocar. O coeficiente de atrito estático entre as superfícies atritantes será admitido igual a μ_e e para a intensidade da aceleração da gravidade adotaremos o valor g .

O esquema abaixo ilustra a situação proposta.



As componentes do peso do bloco nas direções tangencial e normal ao plano inclinado têm intensidades respectivamente iguais a P_t e P_n , dadas por:

$$P_t = m g \sin \theta \quad \text{e} \quad P_n = m g \cos \theta$$

A força de atrito estático recebida pelo bloco em situações de escorregamento iminente (força de destaque), por sua vez, tem intensidade F_{at_d} calculada por:

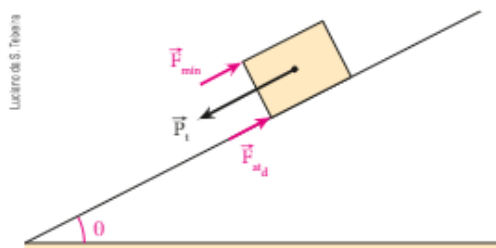
$$F_{at_d} = \mu_e F_n \Rightarrow F_{at_d} = \mu_e P_n$$

$$\text{Da qual: } F_{at_d} = \mu_e m g \cos \theta$$

Agora, vamos determinar as intensidades F_{\min} e F_{\max} da força \vec{F} aplicada pelo agente externo para deixar o bloco na iminência de escorregar, respectivamente, para baixo e para cima.

(I) A intensidade de \vec{F} é mínima

Nesse caso, o bloco fica na iminência de escorregar para baixo e a força de atrito estático (de destaque) atuante sobre ele é dirigida para cima, no sentido de impedir sua descida.



Condição de equilíbrio:

$$F_{\min} + F_{at_d} = P_t$$

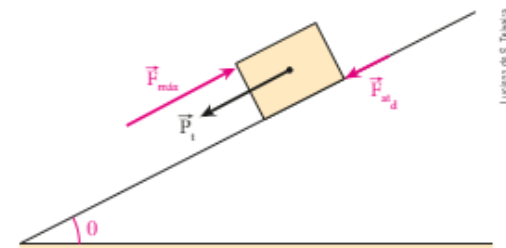
$$F_{\min} + \mu_e m g \cos \theta = m g \sin \theta$$

Portanto: $F_{\min} = m g (\sin \theta - \mu_e \cos \theta)$

(II) A intensidade de \vec{F} é máxima

Nesse caso, o bloco fica na iminência de escorregar para cima, e a força de atrito estático (de destaque) atuante sobre ele é dirigida para baixo, no sentido de impedir sua subida.

Observe que a força de atrito inverte seu sentido em relação à situação anterior.



Condição de equilíbrio:

$$F_{\max} = P_t + F_{at_d}$$

$$F_{\max} = m g \sin \theta + \mu_e m g \cos \theta$$

Portanto: $F_{\max} = m g (\sin \theta + \mu_e \cos \theta)$

É importante ressaltar que valores de \vec{F} compreendidos entre F_{\min} e F_{\max} , incluídos estes dois valores extremos, fazem o bloco permanecer em repouso, sem descer ou subir o plano inclinado.

3. ATRITO CINÉTICO

Admita que o bloco da figura abaixo esteja em repouso sobre um plano horizontal real. Suponha que sobre ele seja aplicada uma força \vec{F} , paralela ao plano de apoio. Com a atuação de \vec{F} , o bloco recebe do plano a força de atrito \vec{F}_{at} .



Qual é a condição a ser satisfeita para que o bloco seja colocado em movimento? A resposta é simples: o movimento será iniciado se a intensidade de \vec{F} superar a intensidade da força de atrito de destaque.

Supondo que essa condição tenha sido cumprida, observaremos uma situação dinâmica, com o bloco em movimento. Enquanto o bloco estava em repouso, o atrito era chamado de estático. Agora, porém, receberá a denominação de **atrito cinético** (ou **dinâmico**).



Se $F > F_{atd}$, o bloco entra em movimento e, nessa situação, o atrito recebido do plano de apoio é cinético.



O cofre da figura, inicialmente em repouso, entrará em movimento se a força aplicada pela pessoa vencer a força de atrito de destaque.

Cálculo da intensidade da força de atrito cinético (F_{atc})

Verifica-se que a intensidade da força de atrito cinético (F_{atc}) é diretamente proporcional à intensidade da força normal trocada pelas superfícies atritantes.

Matematicamente, temos o seguinte:

$$F_{atc} = \mu_c F_n$$

A constante de proporcionalidade μ_c é denominada **coeficiente de atrito cinético** (ou **dinâmico**), e seu valor também depende dos materiais atritantes e do grau de polimento deles.

Surge, então, outra pergunta: a força de atrito cinético tem a mesma intensidade que a força de atrito de destaque? A resposta é: essas forças **não** possuem a mesma intensidade, pois $\mu_c \neq \mu_e$. É de observação experimental que $\mu_c < \mu_e$, o que implica $F_{atc} < F_{atd}$.

De fato, podemos constatar que é mais fácil manter um armário escorregando sobre o chão do que iniciar seu movimento a partir do repouso.

Em muitos casos, porém, para simplificar os cálculos, a diferença entre μ_c e μ_e é ignorada, possibilitando-nos escrever que $F_{atc} = F_{atd} = \mu F_n$, em que μ é chamado apenas de coeficiente de atrito.

Veja, no quadro a seguir, os valores de coeficientes de atrito entre alguns materiais.

Materiais atritantes	μ_e	μ_c
Vidro com vidro	0,94	0,35
Borracha com asfalto seco	1,20	0,85
Borracha com asfalto molhado	0,80	0,60
Aço com alumínio	0,61	0,47
Madeira com madeira	0,58	0,40
Madeira encerada com neve	0,05	0,04
Teflon com aço	0,04	0,04

Os sulcos dos pneus dos carros têm por finalidade favorecer o escoamento da água que se interpõe entre a borracha e o asfalto. Isso evita as reduções bruscas do coeficiente de atrito que geralmente provocam o fenômeno da aquaplanagem, causador de derrapagens do veículo. Pneus "carecas", com sulcos pouco profundos, são responsáveis por muitos acidentes de trânsito, pois favorecem a aquaplanagem.

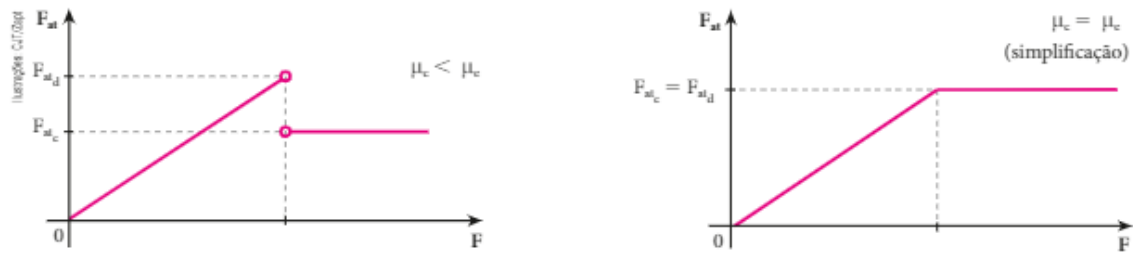


Parte da superfície de um pneu onde podem ser observados os sulcos.



Para a locomoção sobre barro ou neve, pode-se revestir os pneus com correntes. Dessa forma, é compensada a insuficiência de atrito.

Graficamente, a intensidade da força de atrito recebida por um corpo em função da intensidade da força que o solicita ao escorregamento, desde o repouso até escorregar, é dada conforme as seguintes representações:



Note, de acordo com os gráficos apresentados, que a força de atrito cinético permanece constante, pelo menos dentro de certos limites de velocidade.



Como obter maior eficiência nas arrancadas e freadas?

Em muitas competições de automobilismo, o piloto arranca fazendo as rodas de tração derraparem ou, como se diz na linguagem coloquial, “cantar os pneus”. Será que é assim que se obtém a máxima intensidade na aceleração de largada? Certamente que não! A aceleração máxima é obtida quando as rodas de tração ficam prestes a deslizar. É nessa situação que a principal força que impulsiona o carro tem intensidade máxima, já que se trata da força de atrito de destaque.



Largada com o veículo “cantando os pneus”: desperdício de potência e aceleração com intensidade menor que a máxima possível. Campeonato de tração da Ucrânia. Julho de 2015.

Em uma arrancada em que o piloto deixa as rodas derraparem, em razão de haver escorregamento entre os pneus e a pista, o atrito é do tipo dinâmico e este é em geral menor que o atrito de destaque. Dessa forma, fica diminuída a força propulsora sobre o veículo, o que determina menor aceleração.

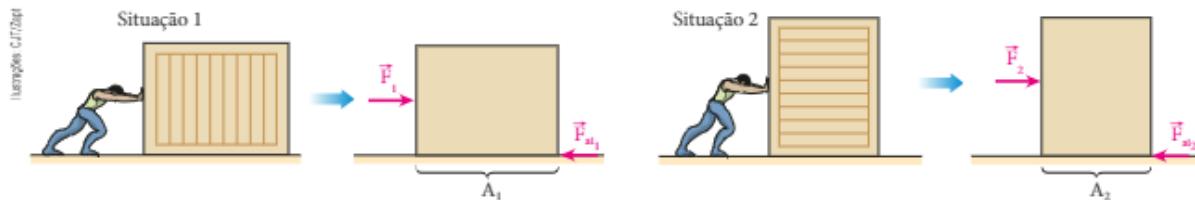
Também nas freadas não se deve deixar as rodas travarem, pois, na situação de um carro deslizando com os pneus bloqueados, a força de atrito responsável pela frenagem – atrito dinâmico – tem intensidade menor que a da força de atrito de destaque, o que obriga o veículo a percorrer uma distância maior até sua imobilização. O processo de frenagem ocorre com eficiência maior quando se mantém as rodas na iminência de travar, já que, nesse caso, o veículo fica sujeito à força máxima de retardamento: a força de atrito de destaque.

Isso explica a enorme aceitação pelo mercado consumidor do sistema de freios ABS – *Antiblock Braking System* –, pois ele impede o travamento das rodas do veículo durante as freadas. Em geral, diante de perigo iminente, motoristas tendem a pressionar o pedal do freio com muita força, o que quase sempre provoca o bloqueio das rodas. Com freios ABS, essa possibilidade fica praticamente eliminada, o que garante frenagens mais eficazes e seguras.

4. LEI DO ATRITO

Os experimentos revelam que: As forças de atrito de destaque e cinético são praticamente independentes da área de contato entre as superfícies atritantes.

Disso decorre, por exemplo, que uma mesma caixa de madeira empurrada sobre uma mesma superfície horizontal de concreto recebe, para uma mesma solitação, forças de atrito de intensidades iguais, independentemente de ela estar apoiada conforme a situação 1 ou a situação 2, ilustradas a seguir.



No caso da situação 1, a área de contato da caixa com o plano de apoio é A_1 ; no caso da situação 2, é A_2 , de modo que $A_1 > A_2$. Se $F_1 = F_2$, então, $F_{at1} = F_{at2}$, independentemente de $A_1 > A_2$.

Foi o artista e inventor italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) quem primeiro apresentou a formulação das leis do atrito. Quase dois séculos antes de Isaac Newton propor formalmente o conceito de força, ele já dizia: "O atrito exige o dobro do esforço se o peso for dobrado". E também: "O atrito provocado pelo mesmo peso determinará a mesma resistência no início do movimento, embora áreas ou comprimentos de contato sejam diferentes". Alguns séculos depois, o cientista francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806) realizou muitos experimentos sobre atrito e estabeleceu a diferença entre atrito estático e atrito cinético.

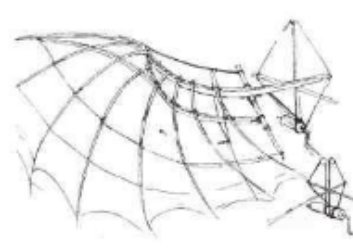
AMPLIANDO O OLHAR

Leonardo da Vinci

Italiano de Anchiano, Leonardo da Vinci (1452-1519), além de ter sido um dos maiores mestres da arte renascentista, notabilizando-se por obras como a *Mona Lisa* (Museu do Louvre – Paris), foi arquiteto, engenheiro militar e um visionário da ciência. Já nos séculos XV e XVI, ainda distante de formulações matemáticas que se sucederiam no campo da Física, ele projetava máquinas de guerra, objetos voadores, paraquedas e mecanismos para trocar cenários de teatros (altamente sofisticados até para os dias de hoje). No campo da Biologia, estudou anatomia humana, registrando suas descobertas em desenhos que servem de referência para a Medicina ainda nos tempos atuais. Foi um verdadeiro gênio, como poucos que a humanidade conheceu.



Retrato de Leonardo da Vinci. Autor desconhecido, século XIX. Coleção particular.



Reprodução dos desenhos originais do livro de notas de da Vinci: estudos para uma máquina voadora.

À esquerda: desenho da asa mecânica movida a mão; Veneranda Biblioteca Ambrosiana, Milão. À direita: diagrama de uma asa mecânica (manuscrito B); Biblioteca do Instituto da França, Paris.

QUESTÕES COMENTADAS



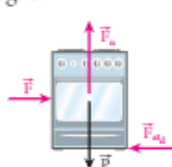
1 Na figura abaixo, um homem está empurrando um fogão de massa 40 kg, aplicando sobre ele uma força \vec{F} , paralela ao solo plano e horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o fogão e o solo é igual a 0,75 e, no local, adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que o fogão está na iminência de escorregar, calcule:



- a) a intensidade de \vec{F} ;
- b) a intensidade da força \vec{C} de contato que o fogão recebe do solo.

RESOLUÇÃO

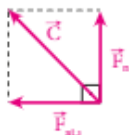
No esquema a seguir, representamos as forças que agem no fogão:



\vec{F} : força aplicada pelo homem;
 \vec{F}_n : força normal;
 \vec{P} : força da gravidade (peso);
 \vec{F}_{atd} : força de atrito de destaque (movimento iminente).

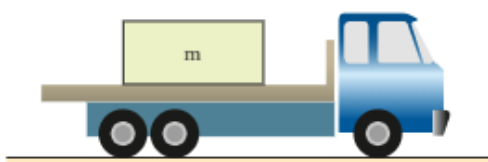
- a) **Equilíbrio na vertical:** $F_n = P$
 $F_n = m g \Rightarrow F_n = 40 \cdot 10 \text{ (N)} \Rightarrow F_n = 400 \text{ N}$
Equilíbrio na horizontal: $F = F_{atd}$
 $F = \mu_e F_n \Rightarrow F = 0,75 \cdot 400 \text{ (N)} \Rightarrow F = 300 \text{ N}$

- b) A força \vec{C} é a resultante da soma vetorial de \vec{F}_{atd} com \vec{F}_n . Aplicando o **Teorema de Pitágoras**, temos:
 $C^2 = (F_n)^2 + (F_{atd})^2$
 $C^2 = (400)^2 + (300)^2$
 $C = 500 \text{ N}$



Respostas: a) 300 N; b) 500 N

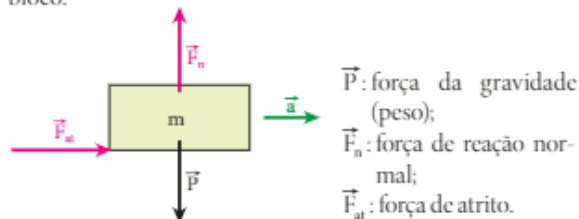
2 Na figura, representa-se um caminhão inicialmente em repouso sobre uma pista plana e horizontal. Na sua carroceria, apoia-se um bloco de massa m .



Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a carroceria e g o valor da aceleração da gravidade local, determine a máxima intensidade da aceleração que o caminhão pode adquirir sem que o bloco escorregue.

RESOLUÇÃO

Na figura abaixo, estão representadas as forças que agem no bloco:



\vec{P} : força da gravidade (peso);
 \vec{F}_n : força de reação normal;
 \vec{F}_{at} : força de atrito.

É importante notar que a força de atrito tem sentido oposto ao da tendência de escorregamento do bloco, porém o mesmo sentido do movimento do caminhão.

A força que acelera o bloco em relação à pista é \vec{F}_{at} . Logo, aplicando a **2ª Lei de Newton**: $F_{at} = m a$ (I)
 O bloco está em equilíbrio na vertical.

Logo: $F_n = P \Rightarrow F_n = m g$ (II)
 Como o bloco **não** deve escorregar, o atrito entre ele e a carroceria é **estático**. Assim: $F_{at} \leq F_{atd} \Rightarrow F_{at} \leq \mu F_n$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), segue que:
 $m a \leq \mu m g \Rightarrow a \leq \mu g \Rightarrow a_{\text{máx}} = \mu g$

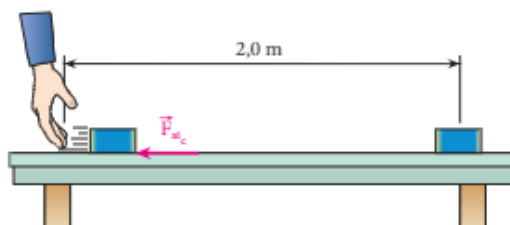
Observe que a aceleração calculada independe da massa do bloco.

Resposta: μg

3 Uma caixa de fósforos é lançada sobre uma mesa horizontal com velocidade de 2,0 m/s, parando depois de percorrer 2,0 m. No local do experimento, a influência do ar é desprezível. Adotando para o campo gravitacional módulo igual a 10 m/s², determine o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a mesa.

RESOLUÇÃO

A figura seguinte ilustra o evento descrito no enunciado:



Inicialmente, devemos calcular o módulo da aceleração de retardamento da caixa de fósforos. Para isso, aplicamos a **Equação de Torricelli**: $v^2 = v_0^2 + 2\alpha d$

Como $v = 0$, $v_0 = 2,0 \text{ m/s}$ e $d = 2,0 \text{ m}$, temos:

$$0 = (2,0)^2 + 2 \alpha \cdot 2,0 \Rightarrow \alpha = -1,0 \text{ m/s}^2$$

$$a = |\alpha| = 1,0 \text{ m/s}^2$$

A força resultante responsável pela freada da caixa é a força de atrito cinético.

Pela 2ª Lei de Newton, podemos escrever:

$$F_{atc} = m a \quad (I)$$

$$\text{Entretanto: } F_{atc} = \mu_c F_n = \mu_c m g \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), calculamos, finalmente, o coeficiente de atrito cinético μ_c :

$$\mu_c m g = m a \Rightarrow \mu_c = \frac{a}{g} = \frac{1,0 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \mu_c = 0,10$$

Resposta: 0,10

4 Um bloco de 2,0 kg de massa repousa sobre um plano horizontal quando lhe é aplicada uma força \vec{F} , paralela ao plano, conforme representa a figura abaixo:



Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano de apoio valem, respectivamente, 0,50 e 0,40 e, no local, a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 . Calcule:

- a) a intensidade da força de atrito recebida pelo bloco quando $|\vec{F}| = 9,0 \text{ N}$.
- b) o módulo da aceleração do bloco quando $|\vec{F}| = 16 \text{ N}$. Despreze o efeito do ar.

RESOLUÇÃO

Devemos, inicialmente, calcular a intensidade da força de atrito de destaque entre o bloco e o plano de apoio:

$$F_{atd} = \mu_e F_n \Rightarrow F_{atd} = \mu_e P = \mu_e m g$$

Sendo $\mu_e = 0,50$; $m = 2,0 \text{ kg}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, temos:

$$F_{atd} = 0,50 \cdot 2,0 \cdot 10 (\text{N}) \Rightarrow F_{atd} = 10 \text{ N}$$

- a) A força \vec{F} , apresentando intensidade 9,0 N, é insuficiente para vencer a força de atrito de destaque (10 N). Por isso, o bloco permanece em repouso e, nesse caso, a força de atrito que ele recebe equilibra a força \vec{F} , tendo intensidade 9,0 N.
- b) Com $|\vec{F}| = 16 \text{ N}$, o bloco adquire movimento, sendo acelerado para a direita. Nesse caso, o atrito é cinético e sua intensidade é dada por: $F_{atc} = \mu_c F_n = \mu_c m g$

$$F_{atc} = 0,40 \cdot 2,0 \cdot 10 (\text{N}) \Rightarrow F_{atc} = 8,0 \text{ N}$$



A 2ª Lei de Newton, aplicada ao bloco, permite escrever que:

$$F - F_{atc} = m a \Rightarrow 16 - 8,0 = 2,0 \cdot a \Rightarrow a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

Respostas: a) 9,0 N; b) 4,0 m/s^2

5 Nas duas situações esquematizadas abaixo, uma mesma caixa de peso 20 N deverá ser arrastada sobre o solo plano e horizontal em movimento retilíneo e uniforme. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície de apoio vale 0,50.



Desprezando a influência do ar, calcule as intensidades das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 que satisfazem à condição citada.

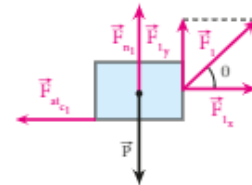
Dados: $\text{sen } \theta = 0,80$ e $\text{cos } \theta = 0,60$.

RESOLUÇÃO

Decompondo \vec{F}_1 nas direções horizontal e vertical, obtemos, respectivamente, as componentes \vec{F}_{1x} e \vec{F}_{1y} , de intensidades dadas por:

$$F_{1x} = F_1 \text{cos } \theta$$

$$F_{1y} = F_1 \text{sen } \theta$$



Equilíbrio na vertical:

$$F_{n1} + F_1 \text{sen } \theta = P$$

$$F_{n1} + 0,80 F_1 = 20$$

$$F_{n1} = 20 - 0,80 F_1$$

Equilíbrio na horizontal:

$$F_1 \text{cos } \theta = \mu_c F_{n1}$$

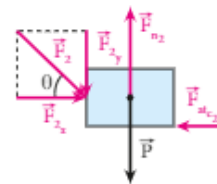
$$0,60 F_1 = 0,50 (20 - 0,80 F_1)$$

$$F_1 = 10 \text{ N}$$

Decompondo, agora, \vec{F}_2 nas direções horizontal e vertical, obtemos, respectivamente, as componentes \vec{F}_{2x} e \vec{F}_{2y} , de intensidades dadas por:

$$F_{2x} = F_2 \text{cos } \theta$$

$$F_{2y} = F_2 \text{sen } \theta$$



Equilíbrio na vertical:

$$F_{n2} = P + F_2 \text{sen } \theta$$

$$F_{n2} = 20 + 0,80 F_2$$

Equilíbrio na horizontal:

$$F_2 \text{cos } \theta = \mu_c F_{n2}$$

$$0,60 F_2 = 0,50 (20 + 0,80 F_2)$$

$$F_2 = 50 \text{ N}$$

Resposta: $|\vec{F}_1| = 10 \text{ N}$ e $|\vec{F}_2| = 50 \text{ N}$

QUESTÕES PROPOSTAS



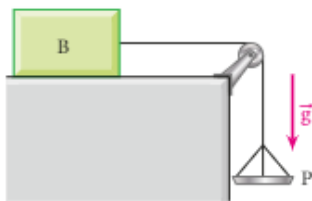
6. Sobre um piso horizontal, repousa uma caixa de massa $2,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$. Um homem a empurra, aplicando-lhe uma força paralela ao piso, conforme indica o esquema abaixo:



O coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso é $0,10$ e, no local, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine:

- a intensidade da força com que o homem deve empurrar a caixa para colocá-la na iminência de movimento;
- a intensidade da força de atrito que se exerce sobre a caixa quando o homem a empurra com 50 N .

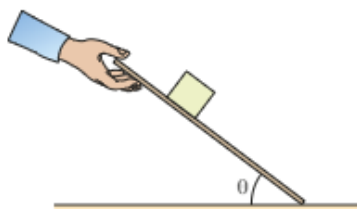
7. Na situação da figura, o bloco **B** e o prato **P** pesam, respectivamente, 80 N e $1,0 \text{ N}$. O coeficiente de atrito estático entre **B** e o plano horizontal de apoio vale $0,10$ e desprezam-se os pesos dos fios e o atrito no eixo da polia.



Dispõe-se de 20 blocos iguais, de 100 g de massa cada um, que podem ser colocados sobre o prato **P**. No local, $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

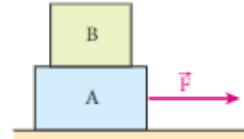
- Colocando-se dois blocos sobre **P**, qual é a intensidade da força de atrito exercida em **B**?
- Qual é o número de blocos que deve ser colocado sobre **P**, para que **B** fique na iminência de se movimentar?

8. Sobre um plano inclinado, de ângulo θ variável, apoia-se uma caixa de pequenas dimensões, conforme sugere o esquema a seguir.



Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a caixa e o plano de apoio vale $1,0$, qual é o máximo valor de θ para que a caixa ainda permaneça em repouso?

9. Na situação da figura, os blocos **A** e **B** têm massas $m_A = 4,0 \text{ kg}$ e $m_B = 6,0 \text{ kg}$. A aceleração da gravidade no local tem módulo 10 m/s^2 , o atrito entre **A** e o plano horizontal de apoio é desprezível e o coeficiente de atrito estático entre **B** e **A** vale $\mu_e = 0,50$.



Desprezando-se o efeito do ar, qual é a máxima intensidade da força \vec{F} , paralela ao plano, de modo que **B** não se movimente em relação a **A**?

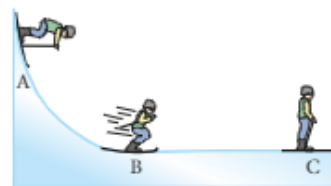
10. Na situação esquematizada abaixo, um bloco de peso igual a 40 N está inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre a base do bloco e a superfície da mesa valem, respectivamente, $0,30$ e $0,25$. Admita que seja aplicada no bloco uma força horizontal \vec{F} .



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, copie o quadro abaixo em seu caderno e indique os valores das intensidades da força de atrito e da aceleração do bloco correspondentes às magnitudes definidas para a força \vec{F} .

F (N)	F_{at} (N)	a (m/s^2)
10		
12		
30		

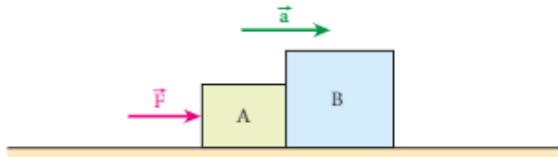
11. Na figura, o esquiador parte do repouso do ponto **A**, passa por **B** com velocidade de 20 m/s e para no ponto **C**:



O trecho **BC** é plano, reto e horizontal e oferece aos esquis um coeficiente de atrito cinético de valor $0,20$. Admitindo desprezível a influência do ar e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a intensidade da aceleração de retardamento do esquiador no trecho **BC**;
- a distância percorrida por ele de **B** até **C** e o intervalo de tempo gasto nesse percurso.

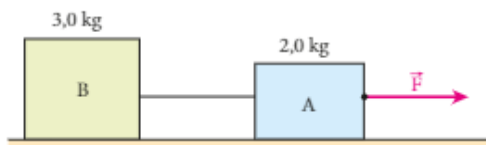
12. Os blocos A e B da figura seguinte têm massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 3,0 kg e estão sendo acelerados horizontalmente sob a ação de uma força \vec{F} de intensidade de 50 N, paralela ao plano do movimento.



Sabendo que o coeficiente de atrito de escorregamento entre os blocos e o plano de apoio vale 0,60, que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que o efeito do ar é desprezível, calcule:

- o módulo da aceleração do sistema;
- a intensidade da força de interação trocada entre os blocos na região de contato.

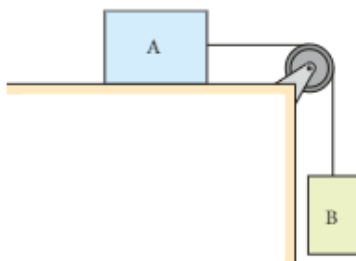
13. Sobre o plano horizontal da figura, apoiam-se os blocos A e B, interligados por um fio inextensível e de massa desprezível. O coeficiente de atrito estático entre os blocos e o plano vale 0,60 e o cinético, 0,50. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $|g| = 10 \text{ m/s}^2$.



Sabendo que a força \vec{F} é horizontal e que sua intensidade vale 50 N, calcule:

- o módulo da aceleração do sistema;
- a intensidade da força de tração no fio.

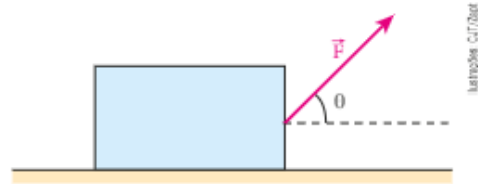
14. O corpo A, de 5,0 kg de massa, está apoiado em um plano horizontal, preso a uma corda que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis e que sustenta em sua extremidade o corpo B, de 3,0 kg de massa. Nessas condições, os corpos A e B apresentam movimento uniforme.



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando a influência do ar, determine:

- o coeficiente de atrito cinético entre o corpo A e o plano de apoio;
- a intensidade da aceleração do sistema se colocarmos sobre o corpo B uma massa de 2,0 kg.

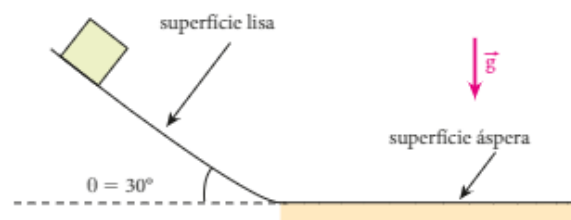
15. Considere o esquema seguinte, em que se representa um bloco de 1,0 kg de massa apoiado sobre um plano horizontal. O coeficiente de atrito de arrastamento entre a base do bloco e a superfície de apoio vale 0,25 e a aceleração da gravidade, no local, tem módulo 10 m/s^2 .



A força \vec{F} , cuja intensidade é de 10 N, forma com a direção horizontal um ângulo θ constante, tal que $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$. Desprezando a influência do ar, aponte a alternativa que traz o valor correto da aceleração do bloco:

- $7,0 \text{ m/s}^2$
- $5,5 \text{ m/s}^2$
- $4,0 \text{ m/s}^2$
- $2,5 \text{ m/s}^2$
- $1,5 \text{ m/s}^2$

16. Um corpo de massa 10 kg parte do repouso do alto de um plano inclinado de um ângulo $\theta = 30^\circ$, conforme representa a figura, escorregando sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar até atingir um plano horizontal áspero, de coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0,20$.



Sabendo que o corpo gasta 2,0 s para descer o plano inclinado e que $|g| = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a duração total do movimento;
- as distâncias percorridas pelo corpo no plano inclinado e no plano horizontal.

17. Duas alpinistas, A e B, de massas respectivamente iguais a 40 kg e 60 kg, mantêm-se unidas por meio de uma corda esticada enquanto sobem, enfileiradas, por uma encosta coberta de neve, inclinada de 30° em relação à horizontal, rumo ao almejado cume da montanha.

De repente, a alpinista que caminhava atrás (A) despencou em uma enorme fenda vertical escondida sob a neve, puxando em sua direção, por meio da corda, a alpinista que caminhava à frente (B). Após um breve intervalo de tempo escorregando praticamente sem atrito, B cravou uma pequena picareta no piso gelado e, com isso, conseguiu frear a ela e sua parceira até o repouso, depois de deslizar sob a ação da salvadora força resistente ao longo de um percurso retilíneo de 2,0 m.

No instante em que a picareta foi introduzida na neve, a intensidade da velocidade do conjunto era de 2,0 m/s.

Desprezando-se a massa da corda, admitida flexível e inextensível, e considerando-se como dados $g = 10 \text{ m/s}^2$,

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine:

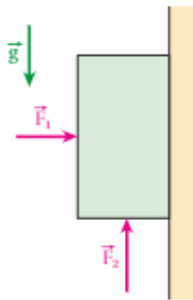
- a intensidade da força de tração na corda durante o breve intervalo de tempo decorrido entre a queda de A e a introdução da picareta de B no solo nevado;
- a intensidade da força de atrito que a picareta de B recebe da neve, admitida constante, durante o providencial movimento retardado das duas alpinistas.

18. Na situação esquematizada a seguir, uma caixa de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ em forma de paralelepípedo está em repouso com uma de suas faces em contato com uma parede vertical sob a ação de duas forças \vec{F}_1 (horizontal) e \vec{F}_2 (vertical).

As intensidades dessas forças, em newtons, são variáveis com o tempo, expresso em segundos, conforme as expressões:

$$F_1 = F_0 + 2,0 t \text{ e } F_2 = F_0 + 3,0 t$$

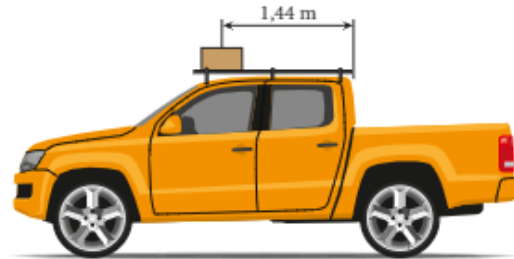
Sabe-se que no instante $t_0 = 0 \text{ s}$, a caixa está na iminência de escorregar para baixo. Se o coeficiente de atrito estático entre as superfícies em contato, da caixa e da parede, é igual a 0,60 e $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, qual é o sentido e a intensidade da força de atrito que a parede exerce na caixa em $t_1 = 3,0 \text{ s}$?



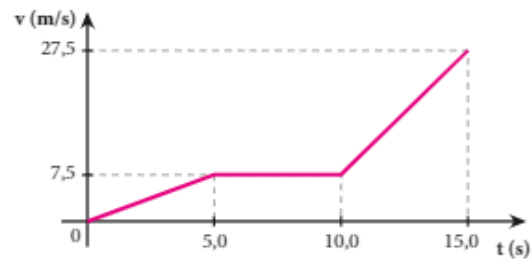
19. "Fato que não é tão raro é o de um motorista desatento que esquece um pequeno objeto no teto do carro e arranca com o veículo..."

Pois bem, suponha que isso tenha acontecido!

Um homem deixou uma pequena caixa simplesmente apoiada no teto horizontal de sua camionete, conforme indica a figura, entrou no veículo e acelerou a partir do repouso, no instante $t_0 = 0 \text{ s}$, em uma pista reta, plana e horizontal.



A velocidade escalar da camionete em função do tempo obedeceu ao gráfico abaixo.



Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre a caixa e o teto do veículo valem, respectivamente, 0,30 e 0,20. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partir dos dados apresentados, determine:

- a intensidade da máxima aceleração da camionete de modo que a caixa não deslize em relação ao teto do veículo;
- o instante t em que a caixa cai do teto da camionete.



DESCUBRA MAIS

- 1 Considere a situação ideal de um plano inclinado perfeitamente liso instalado em um ambiente sem ar. Se uma esfera homogênea for abandonada do alto desse plano inclinado, sem velocidade inicial, ela descerá rolando ou deslizando sem rolar? A aceleração do centro da esfera teria intensidade diferente se houvesse atrito entre ela e o plano inclinado?
- 2 Por que a presença de lubrificantes geralmente atenua a intensidade das forças de atrito trocadas entre duas superfícies sólidas?
- 3 Por que as lagartixas podem subir paredes, deslocando-se na vertical, sem cair?



RESULTANTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA

1. COMPONENTES DA FORÇA RESULTANTE

Vida de piloto de Fórmula 1 não é nada fácil! Afinal, ao longo de uma corrida são inúmeros os solavancos ou chacoalhadas que submetem o intrépido competidor a condições extremas, que exigem muito preparo físico.

Nas arrancadas, o corpo do piloto tende a ficar em repouso, por inércia, e para que seja acelerado juntamente com o carro deve receber do encosto do banco, predominantemente, uma força no mesmo sentido do movimento. Já nas freadas, seu corpo tende a manter a velocidade anterior a este ato, também por inércia, e para que ocorra a frenagem adequada os cintos de segurança devem entrar em ação, aplicando as forças necessárias ao movimento retardado, em sentido oposto ao da velocidade. Em uma curva para a direita, o corpo do piloto tende a seguir em frente, por inércia, e, para que ele acompanhe a trajetória do carro, os cintos de segurança e a parte lateral esquerda do *cockpit* (termo em inglês para a cabine, o espaço do veículo onde fica o piloto) devem exercer uma força total dirigida para o centro da curva, sem a qual o piloto “sairia pela tangente”. Finalmente, em uma curva para a esquerda, o corpo do piloto também tende a seguir em frente, por inércia, e, para que ele acompanhe a trajetória do carro, os cintos de segurança e a parte lateral direita do *cockpit* devem exercer uma força total dirigida para o centro da curva, sem a qual, mais uma vez, o piloto “sairia pela tangente”.

A Lei da Inércia é mesmo implacável!

Em resumo, em relação a um observador em repouso no solo que está assistindo a uma corrida de Fórmula 1, a força resultante no corpo de um piloto deve admitir nas arrancadas uma componente no sentido do movimento, nas freadas uma componente em sentido oposto ao do movimento e nos trechos curvos do circuito uma componente dirigida para o centro de curvatura da trajetória.



Observe nesta fotografia que o *cockpit* de um carro de Fórmula 1 é bastante apertado, oferecendo apenas o espaço necessário para alojar o corpo do piloto.

Neste capítulo, faremos uma análise mais conceitual da influência da força resultante sobre uma partícula. Buscaremos explicar como essa força afeta a velocidade vetorial em casos de arrancadas, freadas e trajetórias curvas.

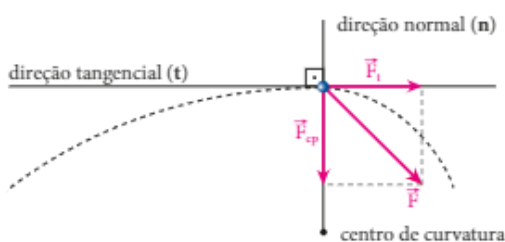
Para tanto, devemos recordar que a força resultante é o resultado de uma adição vetorial, ou seja, é a soma vetorial de todas as forças que atuam na partícula.

Consideremos a figura a seguir, na qual está representada uma partícula em dado instante de seu movimento curvilíneo e variado. Nesse instante, \vec{F} é a resultante de todas as forças que atuam na partícula.



A resultante \vec{F} pode ser decomposta em duas direções perpendiculares entre si: uma tangencial, representada por \vec{F}_t , e outra normal à trajetória, indicada por \vec{F}_{cp} . Essa decomposição é usualmente feita quando conveniente.

Decompondo \vec{F} , obtemos a configuração a seguir:



Para \vec{F}_t e \vec{F}_{cp} atribuímos as denominações **componente tangencial** e **componente centrípeta**, respectivamente. O termo “centrípeta” advém do fato de a componente \vec{F}_{cp} estar, a cada instante, dirigida para o centro de curvatura da trajetória.

Como as componentes \vec{F}_t e \vec{F}_{cp} são perpendiculares entre si, podemos relacionar suas intensidades com a intensidade de \vec{F} , aplicando o **Teorema de Pitágoras**:

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_t|^2 + |\vec{F}_{cp}|^2$$

A componente centrípeta da força resultante, por ter a direção do raio de curvatura da trajetória em cada ponto, é também denominada **radial** ou **normal**.

2. A COMPONENTE TANGENCIAL (\vec{F}_t)

Intensidade

Na figura ao lado, seja m a massa da partícula e \vec{a}_t a aceleração produzida por \vec{F}_t :

Aplicando a **2ª Lei de Newton**, podemos escrever a igualdade: $\vec{F}_t = m \vec{a}_t$

Conforme sabemos, o módulo de \vec{a}_t é igual ao módulo da aceleração escalar α : $|\vec{a}_t| = |\alpha|$

Assim, a intensidade da componente tangencial da força resultante pode ser expressa por:

$$|\vec{F}_t| = m |\alpha|$$

Orientação

A direção de \vec{F}_t é sempre a da reta **tangente** à trajetória em cada instante. Por isso, é a mesma da velocidade vetorial, que também é tangente à trajetória em cada instante.

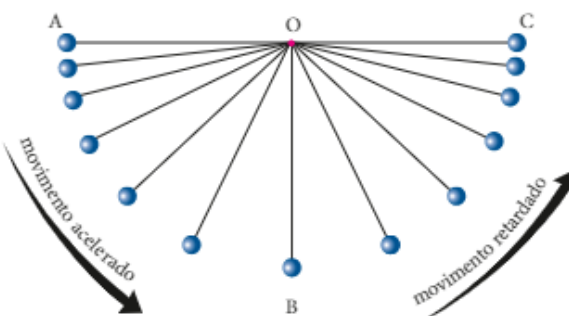
O sentido de \vec{F}_t , por sua vez, depende do fato de o movimento ser acelerado ou retardado. No caso de **movimento acelerado**, \vec{F}_t tem o **mesmo sentido** da velocidade vetorial \vec{v} .



No caso de **movimento retardado**, \vec{F}_t tem **sentido contrário** ao da velocidade vetorial \vec{v} .



Admitamos, por exemplo, o pêndulo da figura seguinte, cujo fio é fixo no ponto O. Supondo desprezível a influência do ar, a esfera pendular, abandonada no ponto A, entra em movimento, passa pelo ponto B, no qual sua velocidade tem intensidade máxima, e vai parar no ponto C.



Entre os pontos A e B, o movimento é acelerado (a componente tangencial da força resultante tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade vetorial). Já entre os pontos B e C, o movimento é retardado (a componente tangencial da força resultante tem mesma direção, porém sentido oposto ao da velocidade vetorial).

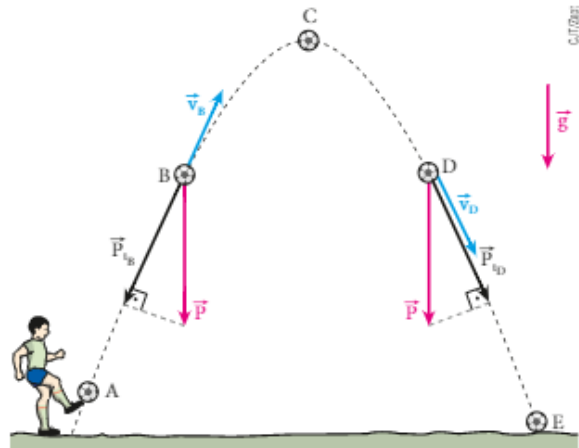
Função

A componente tangencial da força resultante (\vec{F}_t) tem por função **variar a intensidade da velocidade vetorial** (\vec{v}) da partícula móvel. Isso se explica pelo fato de \vec{F}_t e \vec{v} terem mesma direção.

Nos movimentos variados (acelerados ou retardados), \vec{v} varia em intensidade e o que provoca essa variação é a componente \vec{F}_t , que, nesses casos, é não nula. Já nos movimentos uniformes, \vec{v} não varia em intensidade, isto é, o módulo de \vec{v} é constante, o que implica, em tais situações, que a componente \vec{F}_t é nula.

Consideremos a figura ao lado, em que aparece um jogador de futebol chutando uma bola, à qual ele imprime uma velocidade inicial oblíqua em relação ao gramado. Desprezando os efeitos do ar, a bola fica sob a ação exclusiva do campo gravitacional, e, por isso, a força resultante que sobre ela atua ao longo de toda a trajetória parabólica é seu peso \vec{P} .

Entre A e C (ponto mais alto), o movimento é retardado: a intensidade da velocidade vetorial da bola decresce. A causa disso é a componente tangencial de \vec{P} , que, na subida da bola, tem sentido oposto ao de \vec{v} . Entre C e E, o movimento é acelerado: a intensidade da velocidade vetorial da bola cresce. A causa disso é também a componente tangencial de \vec{P} , que, na descida da bola, tem o mesmo sentido de \vec{v} .



Trem-bala: mais veloz que um carro de Fórmula 1?

Os trens-bala utilizados na Europa e no Japão trafegam ao longo das ferrovias com velocidades de até 500 km/h. Na fase de arrancada, que sucede à partida de uma estação, a força resultante sobre eles deve admitir uma componente tangencial no sentido do movimento, o que provoca o aumento da velocidade vetorial.



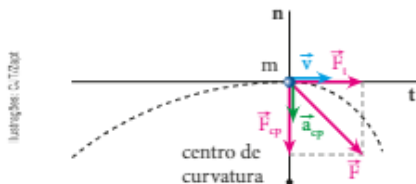
Trem de alta velocidade. Anthéor, França. Setembro de 2014.

O Brasil, por sua vez, propõe para um futuro próximo um sistema de trens-bala ligando os centros mais populosos do país, São Paulo e Rio de Janeiro, com conexões nos dois maiores aeroportos brasileiros, Cumbica e Galeão. O projeto, em desenvolvimento, almeja que a viagem entre São Paulo e Rio, de aproximadamente 518 km, seja feita em menos de duas horas, a uma velocidade escalar média superior a 250 km/h. O nascedouro dessa linha será construído na região de Campinas (SP). É importante observar que os trens-bala são propulsionados por energia elétrica e que os fatores que contribuem de forma importante para torná-los tão velozes são o traçado das trajetórias – bastante retilíneas, por utilizarem túneis, pontes e viadutos – e seu formato aerodinâmico, capaz de “cortar” o ar com facilidade.

3. A COMPONENTE CENTRÍPETA (\vec{F}_{cp})

Intensidade

Na figura seguinte, representamos uma partícula de massa m , considerada em um instante em que sua velocidade vetorial é \vec{v} .



A trajetória descrita por essa partícula é uma curva que, para a posição destacada no esquema, tem raio de curvatura R . Seja, ainda, \vec{a}_{cp} a aceleração centrípeta comunicada por \vec{F}_{cp} .

Aplicando a 2ª Lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{F}_{cp} = m \vec{a}_{cp}$$

Como vimos no Capítulo 4, o módulo de \vec{a}_{cp} é dado pelo quociente do quadrado do módulo de \vec{v} por

$$R, \text{ isto é: } a_{cp} = \frac{v^2}{R}.$$

Assim, a intensidade da componente centrípeta da força resultante fica determinada por: $|\vec{F}_{cp}| = \frac{mv^2}{R}$

Para m e v constantes, $|\vec{F}_{cp}|$ é inversamente proporcional a R . Isso significa que, quanto mais “fechada” for a curva (menor raio de curvatura), maior será a intensidade da força centrípeta requerida pelo móvel.

Para m e R constantes, $|\vec{F}_{cp}|$ é diretamente proporcional ao quadrado de v . Assim, para uma mesma curva (raio constante), quanto maior for a velocidade v , maior será a intensidade da força centrípeta requerida pelo móvel.

Sendo ω a velocidade angular, e lembrando que $v = \omega R$, expressemos $|\vec{F}_{cp}|$ em função de m , ω e R :

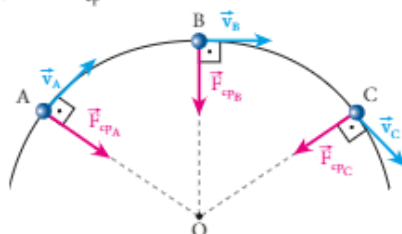
$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{m v^2}{R} = \frac{m (\omega R)^2}{R} = \frac{m \omega^2 R^2}{R}$$

Portanto: $|\vec{F}_{cp}| = m \omega^2 R$

Orientação

Conforme definimos, a componente centrípeta \vec{F}_{cp} tem, a cada instante, direção normal à trajetória e sentido para o centro de curvatura.

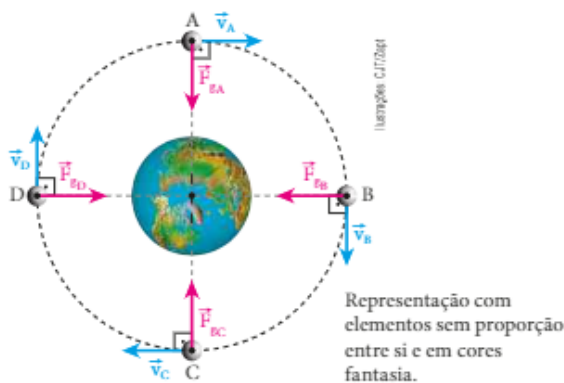
Note que \vec{F}_{cp} é perpendicular à velocidade vetorial em cada ponto da trajetória. A figura abaixo ilustra a orientação de \vec{F}_{cp} .



Função

A componente centrípeta (\vec{F}_{cp}) da força resultante tem por função **variar a direção da velocidade vetorial** (\vec{v}) da partícula móvel. Isso se explica pelo fato de \vec{F}_{cp} e \vec{v} serem perpendiculares entre si. Nos movimentos curvilíneos, \vec{v} varia quanto à direção ao longo da trajetória, e o que provoca essa variação é a componente \vec{F}_{cp} , que, nesses casos, é não nula. Já nos movimentos retilíneos, \vec{v} não varia quanto à direção: nessas situações, a componente \vec{F}_{cp} é nula.

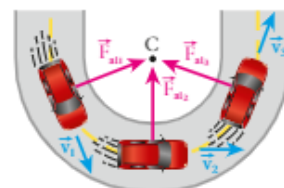
Consideremos, por exemplo, a Lua em seu movimento orbital ao redor da Terra.



Para um referencial ligado ao centro da Terra, a Lua descreve um movimento praticamente circular, em que sua velocidade vetorial varia quanto à direção ao longo da trajetória. O que provoca essa variação na direção da velocidade vetorial da Lua, mantendo-a em sua órbita? É a força de atração gravitacional (\vec{F}_g) exercida pela Terra, que, estando sempre dirigida para o centro da trajetória, desempenha a função de resultante centrípeta no movimento circular.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{cp}$$

Observe outro exemplo: a figura ao lado representa a vista aérea de uma pista plana e horizontal, em que existe uma curva circular.



Um carro, ao percorrer o trecho curvo em movimento uniforme, tem sua velocidade vetorial variando quanto à direção de ponto para ponto. Desprezando a influência do ar, tem-se que a força responsável por esse fato é a força de atrito, que o carro recebe do asfalto por intermédio de seus pneus. A força de atrito (\vec{F}_{at}), estando dirigida em cada instante para o centro da trajetória, é a resultante centrípeta que mantém o carro em movimento circular e uniforme.

$$\vec{F}_{at} = \vec{F}_{cp}$$

O que ocorreria se, a partir de certo ponto da curva, a pista deixasse de oferecer atrito? Sem a força de atrito (resultante centrípeta), o carro “escaparia pela tangente” à trajetória, já que um corpo, por si só, é incapaz de variar sua velocidade vetorial (**Princípio da Inércia**).

Queremos, com isso, enfatizar que, **sem força centrípeta, corpo nenhum pode manter-se em trajetória curvilínea**.

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

Velocidade e estabilidade no automobilismo

No automobilismo, sobretudo na Fórmula 1, os décimos, os centésimos e até os milésimos de segundo são decisivos.

Uma ótima máquina e muita sorte são aspectos que não podem ser dissociados de um campeão, mas apenas isso não basta! É preciso também muito arrojo e técnica ao dirigir. Utilizar um autódromo e usufruir de um carro extraindo de ambos toda a sua potencialidade é privilégio de poucos.

Um dos pontos fundamentais para a boa dirigibilidade é o **traçado de curva**, que consiste em fazer uma curva buscando uma trajetória que harmonize velocidade e estabilidade.



A imagem deixa claro o procedimento dos pilotos ao fazer a curva: eles buscam a trajetória de raio máximo, o que possibilita mais estabilidade e maior velocidade.

Suponhamos que um piloto deva fazer uma curva circular contida em um plano horizontal como a que esquematizamos na figura ao lado. Admitamos que o movimento seja uniforme. Recomenda-se, então, o traçado em que o carro tangencie as zebbras A, B e C, isto é, aquele que tem o **maior raio possível**.

O motivo dessa recomendação é fundamentado no fato de que, para uma mesma massa (m) e uma mesma velocidade escalar (v), a intensidade da resultante centrípeta (\vec{F}_{cp}) é inversamente proporcional ao raio (R):

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{R}$$

Quanto maior for o raio da trajetória, menor será a intensidade da resultante centrípeta exigida pelo carro e, conseqüentemente, menor será a solicitação dos

pneus e da estrutura do veículo. Dessa forma, o piloto poderá percorrer a curva em maior velocidade e com maior estabilidade.

Curva circular em pista sobrelevada sem atrito

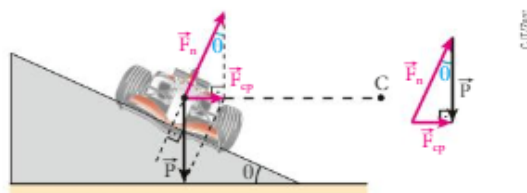
Algumas modalidades de corrida são realizadas em pistas circulares ou ovais dotadas de **sobrelevação** (inclinação do piso em relação ao plano horizontal), que contribui para reduzir a necessidade de atrito entre os pneus do veículo e o solo.



Pilotos de Fórmula Indy em curva com sobrelevação. Iowa, EUA. Julho de 2015.

Consideremos um carro de massa m percorrendo uma curva circular de raio R , sobrelevada de um ângulo θ em relação ao plano horizontal. Suponhamos que a aceleração da gravidade tenha módulo g e que o movimento seja uniforme, com velocidade de intensidade v .

Admitindo que o atrito não seja solicitado lateralmente, apenas duas forças, no plano da figura a seguir, agirão no carro: a força da gravidade (peso) \vec{P} e a reação normal da pista \vec{F}_n .



Nesse caso, para que o veículo se mantenha em trajetória circular, a resultante entre \vec{P} e \vec{F}_n deverá ser centrípeta, e a intensidade da velocidade v em função de g , R e θ ficará determinada por:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_{cp}}{P} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{mv^2}{Rmg}$$

Portanto: $v = \sqrt{g R \operatorname{tg} \theta}$

Destacamos ainda que, para g e R constantes, quanto maior for θ , maiores serão $\operatorname{tg} \theta$ e v .

FAÇA VOCÊ MESMO

Looping com lata cheia de água

É possível fazer uma pequena lata de água presa a um barbante resistente girar em um plano vertical, em trajetória circular, sem que a água despenque do recipiente? Observe que o trecho provável do transbordamento é a parte superior da circunferência descrita pelo conjunto, por onde a lata passa de boca para baixo. Vamos experimentar?

Material necessário

- 1 lata de conservas, como essas de ervilhas, milho ou doces em compota;
- 1 barbante de aproximadamente 2 m de comprimento, bem grosso, de modo a suportar os *loopings* da lata;
- um dispositivo para furar a lata. Pode ser prego grosso, por exemplo, que exigirá também um martelo.

ATENÇÃO!

Cuidado ao manusear o prego e o martelo.

Procedimento

- I. Tomando muito cuidado para não se machucar, faça dois furos nas proximidades da borda da lata em posições diametralmente opostas. Passe o barbante por esses furos e estabeleça uma amarração bem forte, de modo que o barbante sirva como uma alça resistente, capaz de manter o recipiente em movimento sem possibilidade de escape.



Ilustração: Jão Argento

- II. Em um ambiente onde não haja risco de machucar pessoas ou danificar objetos, preencha o recipiente com água e balance-o por meio do barbante em um plano vertical como se o conjunto constituísse um pêndulo.

Se você for aumentando gradativamente a amplitude das oscilações, chegará a uma situação em que será possível fazer o conjunto girar no plano vertical sem que a água caia do recipiente, mesmo com ele passando pelos pontos mais altos da trajetória de boca para baixo.

Perceba que, quanto maior for a velocidade imprimida ao dispositivo, mais tracionado se apresentará o barbante e mais intensas ficarão as forças de contato trocadas entre a água e as paredes do recipiente. Por outro lado, tome cuidado para não se molhar, já que, no caso em que for reduzida gradativamente a velocidade, se chegará a uma situação em que a lata e a água sairão da trajetória circular, podendo ficar fora de controle.



Analisando o experimento

1. Pode-se calcular a intensidade da velocidade mínima do recipiente no ponto mais alto da trajetória circular, sem que a água saia da lata. Para isso, basta que sejam conhecidos a intensidade da aceleração da gravidade (g) e o raio dos *loopings* (R). Faça esse cálculo. Observe que nessa situação a força de contato vertical entre a água e a lata é nula.
2. Se você realizar o experimento com um barbante mais longo, que possibilite giros verticais com raio maior, a velocidade mínima do recipiente no ponto de altura máxima terá intensidade maior, igual ou menor que no caso anterior? Tire a conclusão experimentalmente.

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

Avião em curva circular contida em plano horizontal

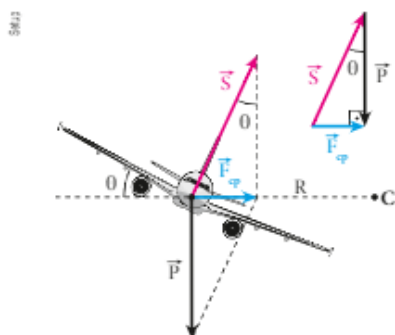
Sabemos que aviões não utilizam rodas em voo. Esse fato motiva a seguinte pergunta: Sem interação direta com o solo, como as aeronaves realizam curvas, alterando a direção de sua velocidade vetorial e, conseqüentemente, sua trajetória?

Isso ocorre por meio da deflexão de *flaps*, o que provoca inclinação das asas, como representa a imagem ao lado.

Dessa forma, o avião fica sujeito a uma componente da força resultante que desempenha a função de força centrípeta, o que viabiliza a realização da curva.

É importante ter sempre em mente o **Princípio da Inércia (1ª Lei de Newton)**: para que seja alterada a direção da velocidade vetorial, faz-se necessária uma força externa, perpendicular à trajetória em cada instante: a força centrípeta.

No esquema a seguir, está representado um avião, visto de frente, realizando uma curva circular de raio R contida em um plano horizontal. Estão indicadas duas forças atuantes na aeronave, fundamentais nessa análise: a força da gravidade (peso) \vec{P} , vertical e dirigida para baixo, e a força de sustentação aerodinâmica exercida pelo ar \vec{S} , perpendicular ao eixo das asas do avião.



Admitindo-se que o movimento seja uniforme com velocidade de intensidade v , pode-se inferir que a força resultante de \vec{P} e \vec{S} é centrípeta. Assim, a soma vetorial $\vec{P} + \vec{S} = \vec{F}_{cp}$ está dirigida para o centro C da trajetória.

Sendo θ o ângulo formado entre o eixo das asas da aeronave e a direção horizontal, g o módulo da aceleração da gravidade e m a massa, é possível determinar uma expressão correspondente à intensidade da velocidade do avião:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_{cp}}{P} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{mv^2}{Rmg}$$

Portanto: $v = \sqrt{g R \operatorname{tg} \theta}$

É importante notar que a expressão obtida para o cálculo de v não depende da massa m do avião.

Imagine que uma aeronave tenha percorrido uma curva com velocidade \vec{v}_1 . O que deveria ocorrer para que a mesma trajetória fosse percorrida com velocidade \vec{v}_2 , de intensidade maior do que \vec{v}_1 ?

Observe que como não se pode variar g nem R , o aumento de v está relacionado ao aumento de $\operatorname{tg} \theta$, o que implicaria o avião percorrer a curva com as asas mais inclinadas, ou seja, formando com a horizontal um ângulo θ maior que no caso anterior.

Nesse caso, maiores velocidades demandam maiores ângulos de inclinação das asas em relação à direção horizontal. Converse com os colegas e o professor sobre a conclusão apresentada acima.



Airbus A380 em voo, inclinado em relação à horizontal.

4. AS COMPONENTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA NOS PRINCIPAIS MOVIMENTOS

Comentaremos a seguir a presença ou não das componentes tangencial e centrípeta da força resultante em diferentes tipos de movimento.

Movimento retilíneo e uniforme	Movimento retilíneo e variado
<p>Considere um avião voando em linha reta com velocidade escalar constante em relação ao solo.</p> <p>Pelo fato de o movimento ser uniforme, temos:</p> $ \vec{v} = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$ <p>Pelo fato de o movimento ser retilíneo, temos:</p> $\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$ <p>A resultante total é nula.</p>	<p>Considere um pequeno pedaço de giz em queda livre até o solo.</p> <p>Pelo fato de o movimento ser variado, temos:</p> $ \vec{v} \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$ <p>Pelo fato de o movimento ser retilíneo, temos:</p> $\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$ <p>A resultante total é tangencial.</p>
Movimento circular e uniforme	Movimento curvilíneo e variado
<p>Considere uma bicicleta percorrendo uma pista circular com velocidade escalar constante.</p> <p>Pelo fato de o movimento ser uniforme, temos:</p> $ \vec{v} = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$ <p>Pelo fato de o movimento ser circular, temos:</p> $\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$ <p>A resultante total é centrípeta.</p>	<p>Considere uma bola de basquete depois de ser arremessada à cesta.</p> <p>Pelo fato de o movimento ser variado, temos:</p> $ \vec{v} \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$ <p>Pelo fato de o movimento ser curvilíneo, temos:</p> $\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$ <p>A resultante total admite duas componentes: a tangencial e a centrípeta.</p>



Como descrever as componentes da força resultante no movimento de um esquiador na neve?

Os dois esquiadores que aparecem na fotografia ao lado descrevem trajetórias sinuosas ao percorrerem a encosta não muito íngreme de uma montanha. Eles realizam movimentos ora acelerados, ora retardados. Nos trechos de movimento curvilíneo e acelerado, a força resultante admite uma componente centrípeta e uma componente tangencial de sentido igual ao da velocidade, enquanto nos trechos de movimento curvilíneo e retardado a força resultante admite uma componente centrípeta e uma componente tangencial de sentido oposto ao da velocidade.



Pessoas esquiando na neve.

FAÇA VOCÊ MESMO **Gira-gira**

Apresentamos nesta seção dois experimentos bastante simples, que podem ser realizados com materiais acessíveis, com o fim de avaliarmos algumas características da componente centrípeta da força resultante.

Material necessário

- 1 pedaço de barbante resistente ou fio de náilon (linha de pescar) com aproximadamente 2 m de comprimento;
- 1 borracha escolar, relativamente grande;
- 1 lata de refrigerante vazia, como as de 350 mL;
- 1 pequena sacola de plástico resistente;
- algumas bolinhas de gude ou outros objetos equivalentes para a finalidade do experimento (porcas de parafusos, por exemplo);
- 1 prego relativamente grosso;
- 1 martelo.

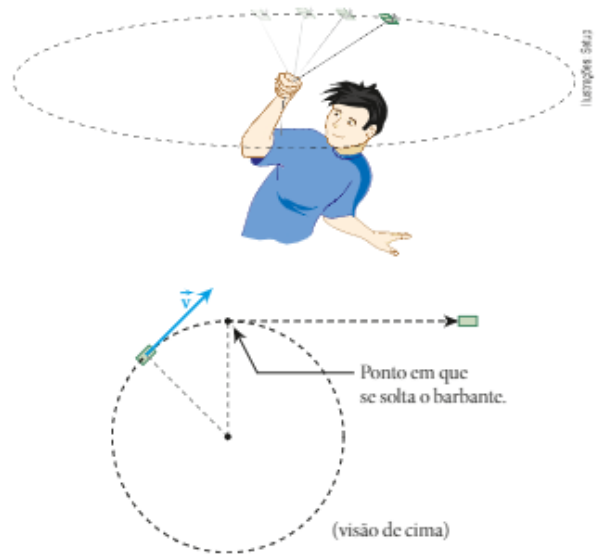
ATENÇÃO!

Cuidado ao manusear o prego e o martelo.

Experimento 1

Procedimento

- I. Atravesse o centro da borracha com o prego, tomando cuidado para não se machucar. Passe o barbante pelo orifício da borracha e dê alguns nós em sua extremidade de modo que a borracha fique fortemente fixada ao barbante.
- II. Em um ambiente onde não haja risco de machucar pessoas ou danificar objetos, segurando firmemente a extremidade livre do barbante, faça a borracha realizar um movimento circular em um plano horizontal acima da sua cabeça, como mostra a figura ao lado. Procure produzir um movimento uniforme, em que a borracha tenha velocidade com intensidade praticamente constante.
- III. Em um determinado momento, com a borracha passando em frente ao seu rosto, largue o barbante e observe a trajetória descrita pelo objeto imediatamente após esse ato. Você deverá notar que a borracha escapará pela tangente à circunferência que ela descrevia antes da soltura do barbante, como ilustra o esquema ao lado.



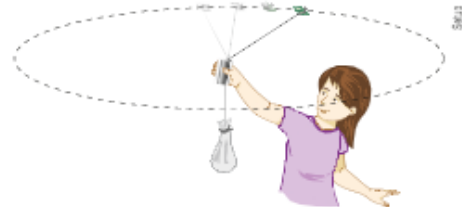
Analisando o experimento

1. Quais são as forças que agem na borracha durante seu movimento circular e uniforme no plano horizontal?
2. Que força desempenha o papel de resultante centrípeta nesse movimento?
3. Por que a borracha escapou pela tangente à circunferência imediatamente após a soltura do barbante?
4. Ignorando-se os efeitos do ar, que força (ou forças) atua (atuam) na borracha em seu deslocamento até o chão?
5. Em relação a você, qual é a forma da trajetória descrita pela borracha logo após a soltura do barbante?

Experimento 2

Procedimento

- I. Utilizando o prego e o martelo e tomando o devido cuidado para não se ferir, faça um furo circular relativamente grande no fundo da lata de refrigerante de modo que esse furo fique alinhado com o bocal da lata. Esse alinhamento deverá ocorrer segundo uma reta paralela às paredes laterais da lata. Cuide para não deixar rebarbas no furo feito no fundo da lata, já que isso poderá cortar o barbante durante o experimento.
- II. Passe o barbante pelo furo e pelo bocal da lata. Em uma extremidade desse fio deverá estar fixada a borracha e, na outra, você irá amarrar fortemente a sacola plástica contendo certo número de bolinhas de gude.
- III. Faça a borracha girar em um plano horizontal um pouco acima da sua cabeça de modo que ela realize um movimento circular e uniforme. Estabeleça para a borracha uma velocidade de intensidade adequada tal que a sacola com o seu conteúdo permaneça em equilíbrio presa no segmento vertical do barbante. Observe a figura ao lado.



Analisando o experimento

1. Desconsiderando os atritos certamente existentes entre o barbante e a lata, bem como a influência do ar, estabeleça uma comparação entre a intensidade do peso da sacola plástica com seu conteúdo e a intensidade da força centrípeta que mantém a borracha em movimento circular e uniforme no plano horizontal. Admita, para simplificar a resposta, que o segmento de barbante que prende a borracha se mantenha na horizontal.
2. Supondo que a sacola esteja em equilíbrio suspensa pelo segmento vertical do barbante, o que ocorre se você aumentar a intensidade da velocidade da borracha? E se você diminuir a intensidade dessa velocidade?
3. Seja v a intensidade da velocidade da borracha na situação em que a sacola plástica com o seu conteúdo permanece em equilíbrio presa ao segmento vertical do fio. Se você adicionar mais algumas bolinhas de gude na sacola, o equilíbrio do sistema será restabelecido operando-se a borracha com velocidade de intensidade maior ou menor que v ? Verifique experimentalmente.

5. FORÇA CENTRÍFUGA

Uma atração muito concorrida nos parques de diversões é o chapéu mexicano, como o que aparece na fotografia.

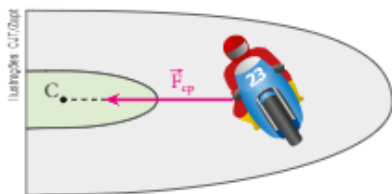


Pessoas se divertindo em um parque de diversões, no brinquedo conhecido como chapéu mexicano.

A rotação do dispositivo faz com que as pessoas descrevam trajetórias circulares de raios tanto maiores quanto maior for a velocidade angular do sistema. Para um referencial solidário ao banco ocupado por uma pessoa, esta se encontra em equilíbrio, o que

torna nula a resultante das forças em seu corpo. Isso requer uma força de inércia, denominada **força centrífuga**, definida apenas em relação ao referencial acelerado do banco. Do ponto de vista da pessoa, é a força centrífuga que puxa seu corpo para fora da trajetória, fazendo-o distanciar-se do eixo de rotação do brinquedo. A força centrífuga somada vetorialmente com as demais forças (peso, força de tração aplicada pelo cabo de sustentação do banco, resistência do ar etc.) torna nula a força resultante no corpo da pessoa, o que justifica seu equilíbrio no referencial do banco. É importante salientar, porém, que a força centrífuga não é definida em relação ao solo (referencial inercial); só é "sentida" no referencial acelerado associado ao banco.

Consideremos um conjunto moto-piloto descrevendo uma curva circular em movimento uniforme. Nesse caso, em relação a um referencial ligado ao solo (referencial inercial), a resultante das forças no corpo do piloto é radial e dirigida para o centro da curva, sendo denominada **centrípeta** (\vec{F}_{cp}).



Em relação a um referencial no solo, a resultante das forças no corpo do piloto é **centrípeta**.

Considerando m a massa do piloto, v a intensidade da velocidade e R o raio de curvatura da trajetória, temos:

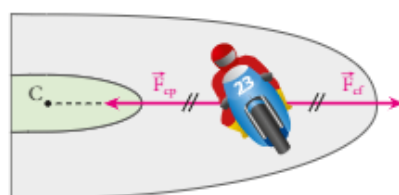
$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{m v^2}{R}$$

Em relação a um referencial ligado à moto (referencial acelerado), entretanto, o piloto está em repouso e, por isso, a resultante das forças que agem em seu corpo deve ser nula. Isso significa que, em relação a esse referencial, deve ser considerada uma força que equilibra a resultante centrípeta. A equilibrante da força centrípeta é, portanto, uma força também radial, porém dirigida para fora da trajetória, sendo denominada **centrífuga** (\vec{F}_{cf}).

Destaquemos que a intensidade da força centrífuga é igual à da força centrípeta:

$$|\vec{F}_{cf}| = |\vec{F}_{cp}| \Rightarrow |\vec{F}_{cf}| = \frac{m v^2}{R}$$

A força centrífuga é uma **força de inércia** que é introduzida para justificar o equilíbrio de um corpo em relação a um referencial acelerado quando esse corpo descreve trajetórias curvilíneas em relação a um referencial inercial. Trata-se de uma força fictícia, já que não é consequência de nenhuma interação: é um artifício criado para que as duas primeiras leis de Newton possam ser usadas em referenciais em que elas não valem.

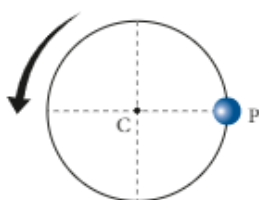


Em relação a um referencial na moto, a resultante das forças no corpo do piloto é nula; a força centrífuga equilibra a força centrípeta.

QUESTÕES COMENTADAS 💬

1 A figura a seguir representa uma partícula em movimento circular no instante em que ela passa por um ponto **P** de sua trajetória. Sabendo que o movimento acontece no sentido anti-horário, reproduza a figura, desenhando o vetor que representa a força resultante sobre a partícula nos seguintes casos:

- a) quando o movimento é acelerado;
- b) quando o movimento é retardado.

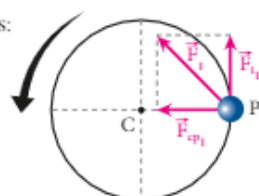


RESOLUÇÃO

- a) No caso de o movimento ser acelerado, a força resultante deve admitir uma componente tangencial (\vec{F}_t) de mesmo sentido que o movimento. Pelo fato de o movimento ser circular, a força resultante deve admitir uma componente centrípeta (\vec{F}_{cp}). A resultante total, nesse caso, é \vec{F}_1 , dada por:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp}$$

Graficamente, temos:

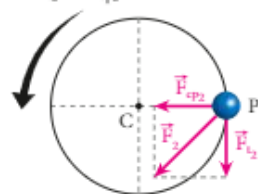


- b) No caso de o movimento ser retardado, a força resultante deve admitir uma componente tangencial (\vec{F}_t) de sentido contrário ao do movimento. Pelo fato de o movimento ser circular, a força resultante deve admitir uma componente centrípeta (\vec{F}_{cp}).

A resultante total, nesse caso, é \vec{F}_2 , dada por:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp}$$

Graficamente, temos:



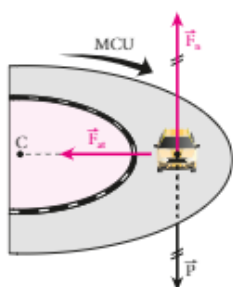
Respostas: Ver resolução.

2 Um carro percorre uma pista circular de raio R , contida em um plano horizontal. O coeficiente de atrito estático entre seus pneus e o asfalto vale μ e, no local, a aceleração da gravidade tem módulo g . Despreze a influência do ar.

- Determine a expressão da velocidade linear máxima com a qual o carro deve deslocar-se ao longo da pista, com a condição de não derrapar.
- A velocidade obtida no item anterior depende da massa do carro?

RESOLUÇÃO

- Na figura a seguir, estão representadas as forças que agem no carro.



A reação normal da pista (\vec{F}_n) equilibra o peso do carro (\vec{P}):
 $F_n = P \Rightarrow F_n = m g$ (I)
 Já a força de atrito (\vec{F}_{at}) é a resultante centrípeta que mantém o carro em movimento circular e uniforme (MCU):
 $F_{at} = F_{cp} \Rightarrow F_{at} = \frac{m v^2}{R}$ (II)

Como não há derrapagem, o atrito entre os pneus do carro e o solo é do tipo estático. Assim:

$$F_{at} \leq F_{atd} \Rightarrow F_{at} \leq \mu F_n \quad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$\frac{m v^2}{R} \leq \mu m g \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu g R}$$

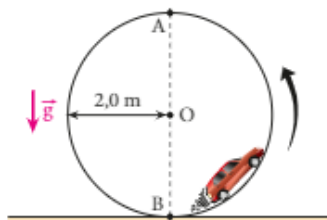
Logo: $v_{\max} = \sqrt{\mu g R}$

Observe que, se o coeficiente de atrito estático entre os pneus do carro e o asfalto for reduzido, também ficará reduzido o valor de v_{\max} . O resultado obtido mostra ainda que, quanto menor for o valor de R , menor será o valor de v_{\max} . Reduzindo-se R à quarta parte, por exemplo, o valor de v_{\max} será reduzido à metade.

- A velocidade calculada **independe** da massa do carro.

Respostas: a) $\sqrt{\mu g R}$; b) Não.

3 Na figura a seguir, um carrinho de massa 1,0 kg descreve movimento circular e uniforme ao longo de um trilho envergado em forma de circunferência de 2,0 m de raio.



A velocidade escalar do carrinho vale 8,0 m/s, sua trajetória pertence a um plano vertical e adota-se $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que os pontos A e B sejam, respectivamente, o mais alto e o mais baixo do trilho, determine a intensidade da força que o trilho exerce no carrinho:

- no ponto A;
- no ponto B.

RESOLUÇÃO

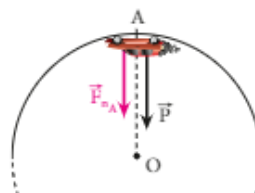
Como o carrinho executa movimento circular e uniforme, em cada ponto da trajetória a resultante das forças que nele agem deve ser centrípeta. Calculemos a intensidade constante dessa resultante:

$$F_{cp} = \frac{m v^2}{R} \Rightarrow F_{cp} = \frac{1,0(8,0)^2}{2,0} \text{ (N)} \Rightarrow F_{cp} = 32 \text{ N}$$

O peso do carrinho é calculado a seguir.

$$P = m g = 1,0 \cdot 10 \text{ (N)} \Rightarrow P = 10 \text{ N}$$

- No ponto A, o esquema das forças que agem no carrinho é dado a seguir.



\vec{F}_{nA} é a força que o trilho exerce no carrinho em A.

A resultante de \vec{F}_{nA} e \vec{P} deve ser centrípeta, isto é:

$$\vec{F}_{cpA} = \vec{F}_{nA} + \vec{P}$$

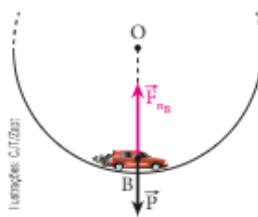
Em módulo, temos: $F_{cpA} = F_{nA} + P$

Calculemos F_{nA} :

$$F_{nA} = F_{cpA} - P \Rightarrow F_{nA} = 32 \text{ N} - 10 \text{ N}$$

Logo: $F_{nA} = 22 \text{ N}$

- No ponto B, o esquema das forças que agem no carrinho é dado a seguir.



\vec{F}_{nB} é a força que o trilho exerce no carrinho em B.

A resultante de \vec{F}_{nB} e \vec{P} deve ser centrípeta, isto é:

$$\vec{F}_{cpB} = \vec{F}_{nB} + \vec{P}$$

Em módulo, temos: $F_{cpB} = F_{nB} - P$

Calculemos F_{nB} :

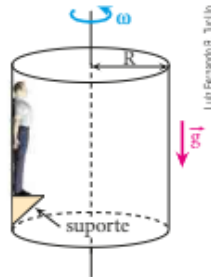
$$F_{nB} = F_{cpB} + P \Rightarrow F_{nB} = 32 \text{ N} + 10 \text{ N}$$

Logo: $F_{nB} = 42 \text{ N}$

Respostas: a) 22 N; b) 42 N

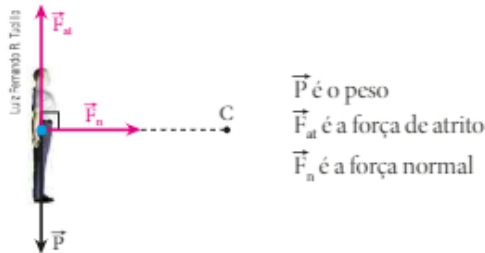
4 Em alguns parques de diversões, há um brinquedo chamado rotor, que consiste em uma câmara em forma de cilindro circular, de eixo vertical, dentro da qual é introduzida uma pessoa. De início, a pessoa apoia-se sobre um suporte, que é retirado automaticamente quando o rotor gira com uma velocidade adequada.

Admita que o coeficiente de atrito estático entre o corpo da pessoa e a parede interna do rotor valha μ . Suponha que o módulo da aceleração da gravidade seja g e que o rotor tenha raio R . Determine a expressão correspondente à mínima velocidade angular do rotor, de modo que, com o suporte retirado, a pessoa não escorregue em relação à parede.



RESOLUÇÃO

No esquema a seguir, representamos as forças que agem no corpo da pessoa.



Como a pessoa deve permanecer em equilíbrio na vertical, a força de atrito tem intensidade igual à de seu peso.

$$F_{at} = P \Rightarrow F_{at} = m g \quad (I)$$

A força normal exercida pela parede do rotor no corpo da pessoa é a resultante centrípeta do seu movimento circular e uniforme.

$$F_n = F_{cp} \Rightarrow F_n = m \omega^2 R \quad (II)$$

Para que não haja escorregamento da pessoa em relação à parede do rotor, a força de atrito atuante sobre ela deve ser do tipo estático, logo:

$$F_{at} \leq F_{ate} \Rightarrow F_{at} \leq \mu F_n \quad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos: $m g \leq \mu m \omega^2 R$

Portanto, $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$

A mínima velocidade angular de rotação do rotor que ainda permite à pessoa não escorregar fica dada por:

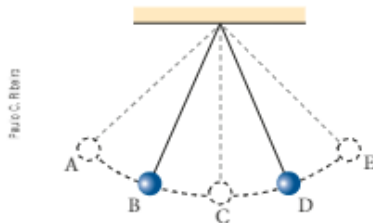
$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

É importante observar que ω_{\min} independe da massa m da pessoa. A redução eventual do coeficiente de atrito μ implicará um aumento de ω_{\min} . Admitindo-se g e μ constantes, rotores com raios maiores que R permitirão operações com ω_{\min} menores.

Resposta: $\sqrt{\frac{g}{\mu R}}$

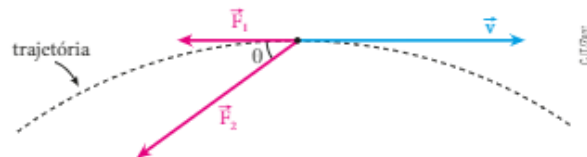
QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

5. Na figura abaixo está representado um pêndulo em oscilação em um plano vertical. O fio é inextensível e de massa desprezível e o ar não influencia significativamente o movimento do sistema. Na posição C, o fio apresenta-se na vertical. Nas posições A e E, ocorre inversão no sentido do movimento.



Reproduza em seu caderno o esquema do pêndulo desenhando nas posições A, B, C, D e E as setas representativas das forças resultantes $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C, \vec{F}_D$ e \vec{F}_E na esfera pendular.

6. Na figura a seguir está representada uma partícula de massa m em determinado instante de seu movimento curvilíneo. Nesse instante, a velocidade vetorial é \vec{v} , a aceleração escalar tem módulo α e apenas duas forças agem na partícula: \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

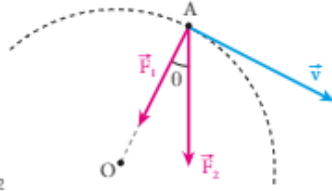


No instante citado, é correto afirmar que:

- a) o movimento é acelerado e $F_1 = m \alpha$.
- b) o movimento é retardado e $F_1 = m \alpha$.
- c) o movimento é acelerado e $F_1 + F_2 \cos \theta = m \alpha$.
- d) o movimento é retardado e $F_1 + F_2 \cos \theta = m \alpha$.
- e) o movimento é retardado e $F_1 + F_2 \sin \theta = m \alpha$.

7. A partícula indicada na figura descreve uma trajetória circular de raio R e centro O . Ao passar pelo ponto A , verifica-se que sobre ela agem apenas duas forças: \vec{F}_1 e \vec{F}_2 . Sendo m a massa da partícula e \vec{v} a sua velocidade vetorial em A , é correto afirmar que:

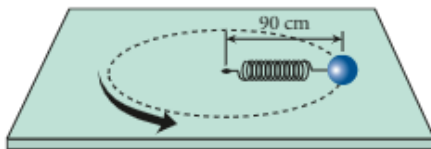
- a) $F_1 = \frac{m v^2}{R}$.
 b) $F_2 = \frac{m v^2}{R}$.
 c) $F_1 + F_2 = \frac{m v^2}{R}$.
 d) $F_1 + F_2 \cos \theta = \frac{m v^2}{R}$.
 e) $F_1 + F_2 \cos \theta + F' = \frac{m v^2}{R}$, em que \vec{F}' é a força centrífuga.



8. Um avião de massa 4,0 toneladas descreve uma curva circular de raio $R = 200$ m com velocidade escalar constante igual a 216 km/h. Qual é a intensidade da resultante das forças que agem na aeronave?

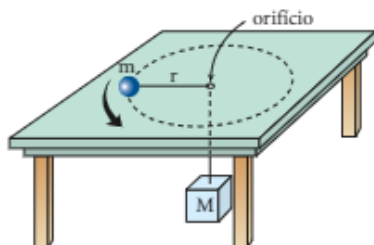
9. Considere um carro de massa $1,0 \cdot 10^3$ kg percorrendo, com velocidade escalar constante, uma curva circular de 125 m de raio, contida em um plano horizontal. Sabendo que a força de atrito responsável pela manutenção do carro na curva tem intensidade 5,0 kN, determine o valor da velocidade do carro. Responda em km/h.

10. Na situação esquematizada na figura a seguir, a mesa é plana, horizontal e perfeitamente polida. A mola tem massa desprezível, constante elástica igual a $2,0 \cdot 10^2$ N/m e comprimento natural (sem deformação) de 80 cm.



Se a esfera (massa de 2,0 kg) descreve movimento circular e uniforme, qual é o módulo de sua velocidade tangencial?

11. Na figura abaixo, uma esfera de massa $m = 2,0$ kg descreve sobre a mesa plana, lisa e horizontal um movimento circular. A esfera está ligada por um fio ideal a um bloco de massa $M = 10$ kg, que permanece em repouso quando a velocidade da esfera tem intensidade $v = 10$ m/s.



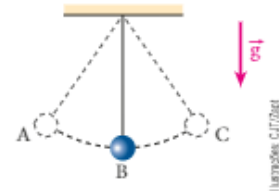
Sendo $g = 10$ m/s², calcule o raio da trajetória da esfera, observando a condição de o bloco permanecer em repouso.

12. Uma partícula de massa 3,0 kg parte do repouso no instante $t_0 = 0$ s, adquirindo movimento circular uniformemente acelerado. Sua aceleração escalar é de 4,0 m/s² e o raio da circunferência suporte do movimento vale 3,0 m. Para o instante $t_1 = 1,0$ s, calcule a intensidade da força resultante sobre a partícula.

13. O pêndulo da figura oscila em condições ideais, invertendo sucessivamente o sentido de seu movimento nos pontos A e C.

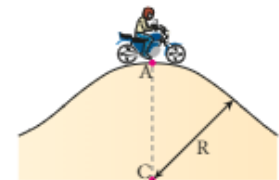
A esfera tem massa 1,0 kg e o comprimento do fio, leve e inextensível, mede 2,0 m. Sabendo que no ponto B (mais baixo da trajetória) a esfera tem velocidade de módulo 2,0 m/s e que o módulo de \vec{g} é 10 m/s², determine:

- a) a intensidade da força resultante sobre a esfera quando ela passa pelo ponto B;
 b) a intensidade da força que traciona o fio quando a esfera passa pelo ponto B.



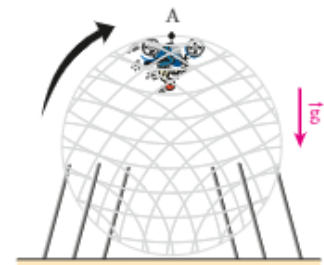
14. Uma moto percorre um morro, conforme ilustra a figura abaixo. Visto em corte, esse morro pode ser comparado a um arco de circunferência de raio R , contido em um plano vertical.

Ao passar no ponto A, o mais alto do morro, a moto recebe da pista uma força de reação normal 25% menor que aquela que receberia se estivesse em repouso nesse ponto. Se no local a aceleração da gravidade vale g , qual será o módulo da velocidade da moto no ponto A?



15. A ilustração abaixo representa um globo da morte, dentro do qual um motociclista realiza evoluções circulares contidas em um plano vertical. O raio da circunferência descrita pelo conjunto moto-piloto é praticamente igual ao do globo e vale R .

O ponto A é o mais alto da trajetória e por lá o conjunto moto-piloto, que tem massa M , passa com a mínima velocidade admissível para não perder o contato com a superfície esférica.

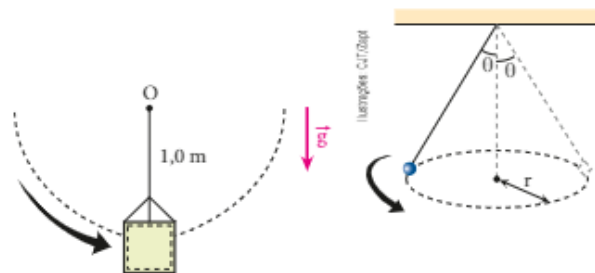


Supondo que a aceleração da gravidade tenha módulo g , analise as proposições a seguir:

- (01) No ponto A, a força vertical trocada pelo conjunto moto-piloto e o globo é nula.
 (02) No ponto A, a força resultante no conjunto moto-piloto tem intensidade Mg .
 (04) No ponto A, o peso do conjunto moto-piloto desempenha a função de resultante centrípeta.
 (08) No ponto A, a velocidade do conjunto moto-piloto tem módulo \sqrt{gR} .
 (16) Se a massa do conjunto moto-piloto fosse $2M$, sua velocidade no ponto A teria módulo $\sqrt{2gR}$.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

16. A figura ao lado representa uma lata de paredes internas lisas, dentro da qual se encaixa perfeitamente um bloco de concreto, cuja massa vale $2,0 \text{ kg}$.



A lata está presa a um fio ideal, fixo em O e de $1,0 \text{ m}$ de comprimento. O conjunto realiza *loopings* circulares em um plano vertical. Em cada *looping*, a lata passa pelo ponto mais alto com velocidade de $5,0 \text{ m/s}$ e adota-se, no local, $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando as dimensões da lata e do bloco, determine a intensidade da força vertical que o bloco troca com o fundo da lata no ponto mais alto dos *loopings*.

17. No esquema a seguir, representa-se um pêndulo cônico operando em condições ideais. A esfera pendular descreve movimento circular e uniforme, em um plano horizontal, de modo que o afastamento angular do fio em relação à vertical é θ . Sendo g o módulo do campo gravitacional do local e r o raio da circunferência descrita pela esfera pendular:

- a) calcule o período de revolução do pêndulo;
 b) discuta, justificando, se o período calculado no item anterior seria modificado se o pêndulo fosse levado para um outro local, de aceleração da gravidade igual a $\frac{g}{4}$.



DESCUBRA MAIS

- 1 As plantas "percebem" a gravidade da Terra. O crescimento de suas raízes e de seus caules é significativamente influenciado pelo campo gravitacional do planeta, o que caracteriza um tipo de **geotropismo**. Um pé de milho, por exemplo, plantado no solo, desenvolve-se de modo que seu caule se mantenha praticamente vertical durante todo o processo, na direção do vetor \vec{g} do local. Suponha que um pé de milho seja plantado em um vaso fixo à borda de um carrossel que gira, o qual tem eixo vertical. Admita que esse carrossel tenha funcionamento ininterrupto por tempo indeterminado. Considerando-se apenas os efeitos ligados ao geotropismo, em que direção crescerá o caule dessa planta? Pesquise.
- 2 No dia 30 de março de 2006, o primeiro astronauta brasileiro, Marcos César Pontes, foi lançado ao espaço a bordo da nave russa Soyuz TMA-8. Sua missão foi permanecer cerca de oito dias na Estação Espacial Internacional (EEI) e realizar alguns experimentos científicos. Durante sua estada na EEI, Pontes observou a germinação de grãos de feijão em ambiente de microgravidade. Houve alguma direção preferencial em que essas sementes lançaram suas raízes?
- 3 A Terra fotografada do espaço assemelha-se a uma esfera perfeita. No entanto, estudos elaborados pelo matemático e astrônomo alemão Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), aliados a avaliações mais recentes, dão conta de que a Terra tem forma de **geóide**, que corresponde aproximadamente à de um elipsoide de revolução. De maneira mais simples, costuma-se dizer que a Terra é ligeiramente "achatada nos polos e dilatada na faixa equatorial". A que se deve essa forma geodésica do planeta? Pesquise.

INTERSABERES

Como é viver em ambientes de microgravidade?

Que o digam os astronautas que continuamente ocupam a Estação Espacial Internacional (EEI ou ISS, sigla em inglês)! Seus corpos ficam em constante queda livre ao redor da Terra, o que dá a sensação de gravidade zero ou algo muito próximo disso. É a microgravidade.

Embora nos pontos da órbita a ação gravitacional terrestre seja expressiva e responsável por qualquer movimento orbital, dentro da nave em movimento praticamente circular e uniforme em torno do planeta, corpos e objetos em geral apresentam-se imponderáveis, ou seja, aparentam ter peso nulo.

À primeira vista, pode parecer divertido movimentar-se dentro do veículo espacial aproveitando-se dos efeitos da levitação, com confortáveis deslocamentos inerciais sequentes a pequenos empurrões. Ferramentas, porções líquidas, objetos de higiene e até comida, tudo flutua, revelando um ambiente bem diferente do qual encontramos aqui em solo, onde tudo é inexoravelmente puxado para baixo pela força da gravidade.



O astronauta japonês Koichi Wakata se diverte, na Estação Espacial Internacional, com os efeitos da microgravidade. Junho de 2009.

A longo prazo, porém, a microgravidade pode trazer sérios problemas ao organismo, como atrofia muscular, descalcificação dos ossos, problemas circulatórios e digestivos, edemas, dentre outros, todos eles, hoje, objeto de estudos e pesquisas no campo da chamada medicina espacial. (Afinal, um dia os humanos deverão deixar a Terra em busca de outros *habitats*, como retrata o ambicioso filme de ficção *Interstellar*, lançado em 2014 e dirigido por Christopher Nolan.)

Com isso, tripulantes dessas espaçonaves, ao permanecerem cerca de seis meses (ou mais) no espaço, são obrigados a se exercitar horas a fio em academias existentes a bordo para minimizar tantos efeitos danosos ao corpo.



Astronauta fazendo atividade física na Estação Espacial Internacional. Novembro de 2013.

Leia a seguir um texto do professor Caleb Scharf, da Universidade de Columbia, publicado pela revista *Scientific American Brasil*.

Registros do primeiro experimento de gravidade artificial

[...] O corpo humano evoluiu em uma região curvada do espaço-tempo onde objetos experimentam uma aceleração quase uniforme de $9,81 \text{ m/s}^2$. O sangue e fluidos ficam pressurizados de acordo com essa aceleração, e as veias e artérias são pressionadas por músculos, de modo a não ficarem inconvenientemente acumuladas em nossos pés. Globos oculares são tensionados para manter uma forma oticamente adequada. E nosso microbioma é adaptado a um ambiente com movimentos definidos de subir e descer – especialmente quando o assunto é digestão.

Se um de nós for colocado em gravidade zero ou em microgravidade, as coisas ficam difíceis. Nosso sistema cardiovascular fica rapidamente confuso, e assim os fluidos se acumulam em locais onde normalmente não se acumulariam – daí a aparência de rostos inchados que viajantes espaciais podem desenvolver. [...]

Então não é surpreendente que estejamos há tanto tempo tentando mitigar esses efeitos. Uma maneira de fazer isso é tentar criar gravidade artificial sempre que estivermos longe de um belo planeta massivo.

Um exemplo bem antigo dessas ideias data de 1896, quando o extraordinário cientista russo, Konstantin Tsiolkovsky, descreveu o uso de estruturas em rotação no espaço para explorar 'forças' centrífugas para simular a aceleração gravitacional. [...]

O icônico filme **2001: Uma Odisseia no Espaço**, lançado em 1968, apresentou uma das melhores visualizações de como um *habitat* espacial rotatório poderia funcionar de fato [...].

O primeiro experimento real com gravidade artificial foi realizado em setembro de 1966, quando a missão Gemini 11, da Nasa, tripulada por Pete Conrad e Richard Gordon, se encontrou na baixa órbita terrestre com o Agena Target Vehicle (um estágio de foguete pesando 3 175 kg).

Uma de suas atividades era a fixação de um cabo de náilon com 30 metros de comprimento entre a cápsula Gemini e o Agena. A ideia era que, primeiro, ao estacionar a Gemini 'acima' do Agena, o cabo permanecesse esticado pela diferença do arrasto gravitacional nessa distância (isso não funcionou muito bem); segundo, que as duas naves pudessem se movimentar como um par de boleadeiras, uma ao redor da outra – seguradas pelo cabo e gerando gravidade artificial na direção do 'chão' da cápsula Gemini. [...] Apesar das oscilações no cabo e de outros problemas com os veículos, tudo ficou temporariamente calmo depois de aproximadamente 20 minutos e, durante alguns momentos, uma diminuta gravidade artificial foi observada na cápsula Gemini. Quanta gravidade? Cerca de 0,0005 G com 0,15 revoluções por minuto. Algum tempo depois, o cabo foi liberado. [...] A aceleração produzida em um *habitat* giratório também apresenta outros desafios, porque seus ocupantes não permanecem estacionários.

Quando você está de pé sobre o 'piso' de um ambiente giratório, sua cabeça está sempre mais perto do eixo de giro, o que significa que seu crânio se move mais lentamente que seus pés. O que acontece quando você se abaixa para pegar algo, ou para amarrar seus sapatos? [...] o que acontece quando você tenta caminhar? Nesses momentos, seu corpo tem que superar esse diferencial de velocidade e seu ouvido interno – com seus pequenos detectores de movimento cheios de fluidos – sente coisas muito estranhas acontecendo. [...]

A conclusão é que precisamos manter o ambiente giratório grande em relação ao tamanho de um corpo humano (100 metros de raio seria bom), para minimizar as diferenças absolutas de velocidade entre cabeça e pés, e para manter o número de revoluções por minuto relativamente baixo (provavelmente menor que 3 ou 4). [...]

Assim como os astronautas da Gemini 11 descobriram na prática, produzir um sistema de gravidade artificial não é apenas um desafio de engenharia, mas também um desafio para refinar as coisas de modo a acomodar adequadamente o que humanos (ou qualquer outro organismo) conseguem suportar. [...]



Astronauta Richard Gordon realizando operação em voo espacial. Setembro de 1966.

SCHARF, Caleb A. *Scientific American Brasil*. 6 abr. 2015.

Disponível em: <www2.uol.com.br/sciam/noticias/primeiro_experimento_de_gravidade_artificial.html>. Acesso em: 1 out. 2015.

Compreensão, pesquisa e debate

1. Nos antigos filmes de ficção científica, tripulantes de espaçonaves caminhavam confortavelmente sobre o piso do veículo, como se estivessem sobre solo terrestre onde a aceleração da gravidade é cerca de $9,8 \text{ m/s}^2$. Isso significa que os efeitos da microgravidade, ou mesmo de ausência de gravidade, eram ignorados pelos cineastas, talvez em prol do enredo, por falta de tecnologia ou mesmo pela inexistência de uma abordagem consistente a respeito. Que maneiras você poderia sugerir para dotar o interior de uma espaçonave de uma gravidade artificial parecida com a das vizinhanças da Terra? Discuta o assunto com seus colegas e professores.
2. Os astrônomos preveem que daqui a cinco bilhões de anos o Sol terá esgotado seu combustível nuclear – o hidrogênio –, responsável pelo contínuo processo de fusão nuclear. Até lá, porém, a estrela deverá passar por um processo de agonia, transformando-se primeiramente em uma gigante vermelha, quando “engolirá” os planetas ao seu redor, inclusive a Terra, e por último em um cadáver estelar denominado anã branca. Isso significa que os humanos deverão buscar uma nova alternativa para abrigar a vida: um novo *habitat*. O que você sabe a esse respeito? Que características principais deveria ter um possível novo planeta para viabilizar as formas de vida conhecidas? Discuta o assunto com seus colegas e professores.
3. Fala-se de futuras viagens ao planeta Marte com a possibilidade de instalação de bases para a migração de seres humanos. A chegada do homem a Marte estaria prevista para 2031. Que dificuldades você vê em relação à adaptação de seres humanos em Marte? Discuta o assunto com seus colegas e professores.

CAPÍTULO

8

GRAVITAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

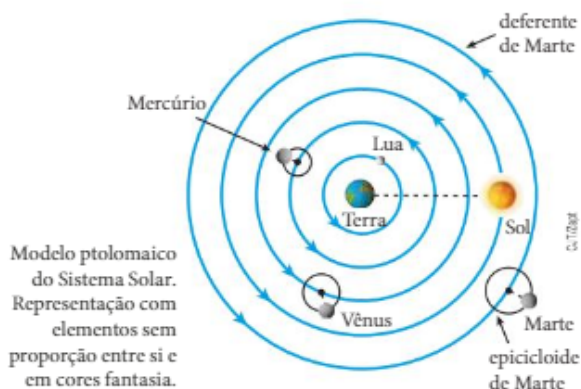
Você sabe o que é Gravitação? Leia a informação destacada a seguir.

Gravitação é o estudo das forças de atração entre massas (forças de campo gravitacional) e dos movimentos de corpos submetidos a essas forças.

Muitas teorias se sucederam até que chegássemos à concepção atual do Sistema Solar. De início, o misticismo e a religião dissociavam do caráter científico as ideias sobre o Universo.

Foram os antigos gregos os fundadores da ciência modernamente conhecida por Astronomia. No século II d.C., Cláudio Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo, propôs um modelo planetário em que a Terra era o centro do Sistema Solar, de modo que todos os astros conhecidos, até mesmo o Sol e a Lua, deveriam gravitar ao seu redor. Esse modelo – **geocêntrico**, pois tinha a Terra como centro – foi aceito por mais de quinze séculos, sobretudo por ser coerente com a filosofia e os valores correntes.

No modelo ptolomaico do Sistema Solar, cada planeta realizava dois movimentos circulares concomitantemente. Marte, por exemplo, descrevia um epiciclo, cujo centro realizava uma deferente ao redor da Terra. Isso, porém, não acontecia com a Lua e com o Sol, que descreviam apenas a deferente.



No século XVI, o monge polonês **Nicolau Copérnico** (1473-1543), estudioso de Medicina, Matemática e Astronomia, apresentou uma concepção revolucionária para o Sistema Solar. Segundo ele, o Sol, e não a Terra, seria o centro em torno do qual deveriam gravitar em órbitas circulares a Terra e todos os planetas conhecidos. Embora mais simples que o de Ptolomeu, o modelo de Copérnico – **heliocêntrico**, pois admitia o Sol como centro do sistema – encontrou grandes obstáculos para sua aceitação, já que se contrapunha aos preceitos da Igreja.



Retrato de Nicolau Copérnico
Pintor desconhecido,
Universidade de Cracóvia.

A obra mais importante de Nicolau Copérnico, *Das revoluções dos mundos celestes*, foi escrita originalmente em latim (*De revolutionibus orbium coelestium*), conforme a tradição da época, e constitui um dos mais importantes marcos da evolução dos conceitos referentes à situação da Terra diante do panorama universal. Copérnico recebeu o primeiro exemplar de seu livro no dia de sua morte (25 de maio de 1543), em Frauenburg, na Polônia. Nessa obra, ele propunha a **Teoria Heliocêntrica**, além de explicar os fundamentos do movimento de rotação da Terra, responsável pela sucessão dos dias e das noites. Por contestar o dogma de que o ser humano, obra-prima da criação divina, deveria ocupar, juntamente com a Terra, o centro do Universo, esse livro foi imediatamente incluído no *Index librorum prohibitorum* ("Índice dos livros proibidos" ou "Lista dos livros proibidos"), relação – criada na época da Inquisição – das leituras proibidas pela Igreja.

Um importante adepto do pensamento copernicano foi o físico e astrônomo italiano Galileu Galilei. Devido às necessidades de suas observações astronômicas, Galileu construiu diversas lunetas. Com elas, ele descobriu os satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, as manchas solares e detalhes da Lua. Além disso, elaborou mapas celestes de rara precisão para a época.



Modelo de luneta utilizada por Galileu. Museu de História da Ciência, Florença, Itália.

A crescente controvérsia entre as proposições de Ptolomeu e Copérnico levou os astrônomos a estudos mais profundos. Foi o astrônomo alemão **Johannes Kepler** (1571-1630) quem conseguiu descrever de modo preciso os movimentos planetários. Atualmente, o modelo aceito para o Sistema Solar é basicamente o de Copérnico, feitas as correções sugeridas por Kepler e por cientistas que o sucederam.

Johannes Kepler foi autor de uma obra extensa que inclui vários opúsculos e livros, como *Epitome astronomiae copernicanae* e *Harmonice mundi*, em que

ratifica e amplia as teorias de Copérnico, descrevendo de maneira precisa os movimentos dos planetas em torno do Sol. Para elaborar seus trabalhos, Kepler fundamentou-se em suas observações do planeta Marte, em correspondências com Galileu Galilei e, sobretudo, em medidas e dados astronômicos obtidos por seu mestre dinamarquês, Tycho Brahe (1546-1601), com quem trabalhou durante algum tempo.

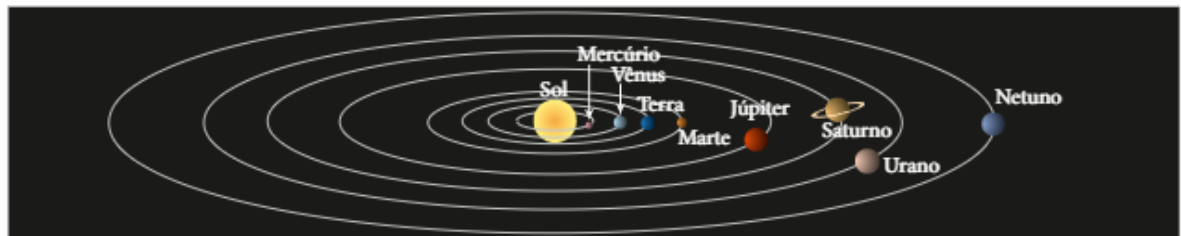
Sabe-se que oito planetas gravitam em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas. Na ordem crescente de distância ao Sol, são eles: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.



Retrato de Johannes Kepler pintado por um artista desconhecido, por volta de 1620. Catedral de Estrasburgo.

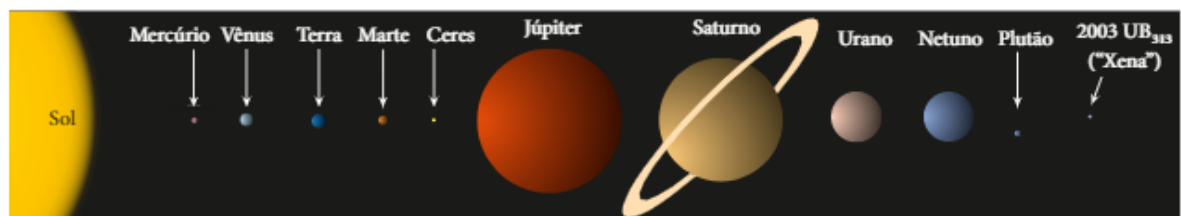
NOTA

Na época de Kepler (por volta de 1600), eram conhecidos apenas seis planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, todos observáveis a olho nu. A presença de Urano, Netuno e Plutão (planeta anão) só foi constatada com a evolução de equipamentos de observação, como lunetas e telescópios.



Representação das órbitas dos planetas em torno do Sol (elementos sem proporção entre si e em cores fantasia). Observe que as trajetórias descritas pelos planetas estão contidas praticamente em um mesmo plano. A órbita de Mercúrio é a mais elíptica, sendo as demais praticamente circulares.

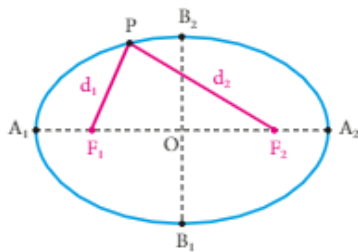
Depois das deliberações da União Astronômica Internacional (UAI), em 2006, esta é a situação atual do Sistema Solar:



Representação da atual situação do Sistema Solar (elementos sem proporção entre si e em cores fantasia). Nesta configuração, Ceres passou a ser considerado um planeta anão, em vez de asteroide; Plutão passou a ser considerado planeta anão e Caronte continua sendo sua lua; "Xena" subiu de asteroide para planeta anão.

Antes de seguirmos nosso estudo, é importante que você saiba o que é uma elipse.

Observe a figura a seguir:



Elipse é o conjunto de pontos de um plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2 , respectivamente, a dois pontos fixos, denominados focos, F_1 e F_2 , também pertencentes a esse plano, permanece constante.

Qualquer que seja o ponto P considerado na elipse, tem-se a soma $d_1 + d_2$ constante.

Na figura representada ao lado, temos:

- F_1 e F_2 são os focos da elipse;
- $\overline{OA_1}$ e $\overline{OA_2}$ são os semieixos maiores; ($\overline{OA_1}$ e $\overline{OA_2}$ têm o mesmo comprimento);
- $\overline{OB_1}$ e $\overline{OB_2}$ são os semieixos menores; ($\overline{OB_1}$ e $\overline{OB_2}$ têm o mesmo comprimento).

Façamos $OA_1 + OA_2 = E$ (medida de comprimento do eixo maior da elipse) e $OF_1 + OF_2 = f$ (distância entre os focos da elipse). Chama-se **excentricidade da elipse** a grandeza adimensional e dada por:

$$e = \frac{f}{E} \quad (0 \leq e < 1)$$

Se $f = 0$, F_1 e F_2 serão coincidentes e a elipse assumirá a forma particular de uma circunferência com o centro localizado em $F_1 \equiv F_2$.

Se f tender a E , porém, a excentricidade e se aproximará de 1 e a elipse ficará parecida com um segmento de reta.

Plutão-Caronte

Descoberto em 1930, Plutão foi considerado até 2006 o nono planeta do Sistema Solar. Sua distância média ao Sol é de 39,6 UA (uma unidade astronômica – UA – é a distância média entre a Terra e o Sol e equivale aproximadamente a 149 milhões de quilômetros) e seu período de revolução equivale a 248 anos terrestres. A órbita de Plutão é uma elipse de grande excentricidade, inclinada cerca de 17° em relação ao plano das demais órbitas planetárias. Em 2006, porém, a União Astronômica Internacional (UAI), depois de estabelecer novos parâmetros para a definição do que deve ser chamado de planeta, deliberou por rebaixar Plutão à condição de planeta anão, já que muitas de suas características não correspondem às atuais exigências. Plutão na verdade compõe com Caronte – outro corpo celeste, descoberto em 1978, praticamente do mesmo tamanho de Plutão – um sistema duplo em que os dois astros gravitam com períodos iguais ao redor de um centro imaginário que gira em torno do Sol. Caronte, no entanto, é considerado uma lua de Plutão.

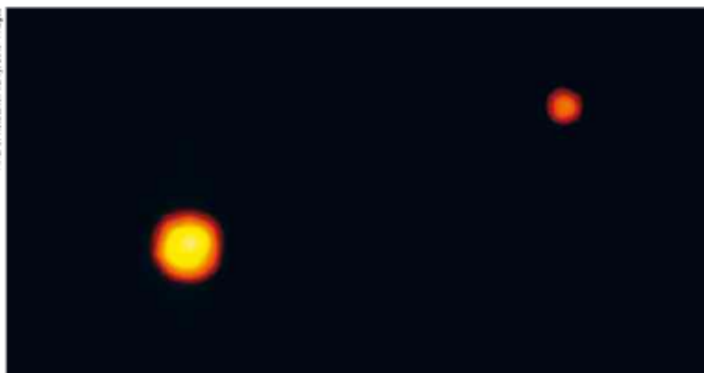


Imagem do sistema Plutão-Caronte obtida em 1994 pelo telescópio Hubble.

2. AS LEIS DE KEPLER

Foi por intermédio de Kepler que a Astronomia se desvinculou da Teologia para se ligar definitivamente à Física. Dono de uma personalidade indagadora e obstinada, esse professor de Matemática e Astronomia, conhecedor das teorias de Copérnico, herdou um grande acervo de informações e medidas. Esses ingredientes ajudaram-no a verificar que existem notórias regularidades nos movimentos planetários, e assim ele pôde formular, mesmo sem demonstrar matematicamente, três generalizações, conhecidas como **Leis de Kepler**.



Ainda hoje, mesmo dispondo do supertelelescópio Hubble, visto aqui em representação artística (com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia), e de outros artefatos de exploração espacial, não temos teorias definitivas sobre o Universo.

1ª Lei de Kepler: Lei das órbitas

Em relação a um referencial no Sol, os planetas movimentam-se descrevendo **órbitas elípticas**, ocupando o Sol um dos focos da elipse.

Observe a figura a seguir.

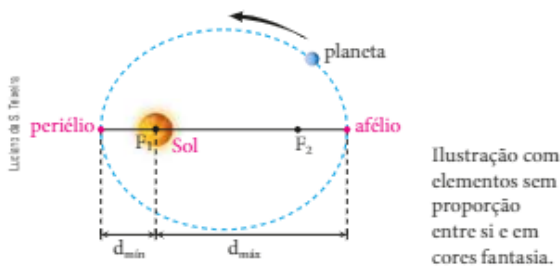


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

O ponto da órbita mais próximo do Sol é denominado **periélio**; o mais afastado, **afélio**. Considerando d_{\min} e d_{\max} as distâncias do periélio e do afélio ao centro do Sol, respectivamente, definimos **raio médio da órbita (R)** do planeta como a média aritmética entre d_{\min} e d_{\max} :

$$R = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}$$

Entre os planetas do Sistema Solar, Mercúrio é o que descreve órbita de maior excentricidade. Os demais planetas, incluindo a Terra, realizam órbitas praticamente circulares, como pode ser observado a seguir, em que apresentamos a excentricidade da órbita de cada planeta.

Excentricidade da órbita dos planetas do Sistema Solar

Planeta	Excentricidade (e)
Mercúrio	0,2060
Vênus	0,0068
Terra	0,0167
Marte	0,0934
Júpiter	0,0485
Saturno	0,0556
Urano	0,0472
Netuno	0,0086

Fonte: HALLIDAY, David, et al. *Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica*. Vol. 2. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

O fato de existirem órbitas praticamente circulares não invalida, contudo, a **1ª Lei de Kepler**, já que a circunferência é um caso particular de elipse que tem os focos coincidentes.

Uma evidência de que a órbita da Terra é praticamente circular é que, quando observamos o Sol, ele nos aparenta ter o mesmo "tamanho" em qualquer época do ano. Se a órbita terrestre fosse uma elipse de grande excentricidade, visualizaríamos o Sol muito grande quando o planeta percorresse a região do periélio e muito pequeno quando o planeta percorresse a região do afélio. Além disso, na passagem da Terra pela região do periélio, sentiríamos um calor insuportável e a Terra ficaria sujeita a marés devastadoras. Na passagem de nosso planeta pela região do afélio, porém, seríamos submetidos a fenômenos opostos: sentiríamos um frio glacial e as marés seriam amenas, provocadas quase exclusivamente pela influência da Lua.

2ª Lei de Kepler: Lei das áreas

As áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são **diretamente proporcionais** aos respectivos intervalos de tempo gastos.

Sendo A a área e Δt o correspondente intervalo de tempo, podemos escrever que: $A = v_a \Delta t$.

A constante de proporcionalidade v_a denomina-se **velocidade areolar** e caracteriza a rapidez com que o vetor-posição do planeta, que tem origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta, varre as respectivas áreas.

Também podemos enunciar a **Lei das áreas** da seguinte maneira:

O vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol varre **áreas iguais em intervalos de tempo iguais**.

Considere a figura a seguir, que ilustra um planeta em quatro instantes consecutivos de seu movimento orbital em torno do Sol. Nela, estão representados os vetores-posição $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ e \vec{r}_D associados aos instantes t_A, t_B, t_C e t_D , respectivamente.

Representamos por A_1 e A_2 as áreas varridas pelo vetor-posição do planeta nos intervalos $\Delta t_1 = t_B - t_A$ e $\Delta t_2 = t_D - t_C$.

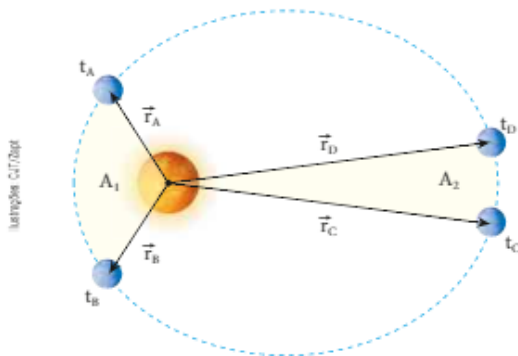


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Conforme propõe a **2ª Lei de Kepler**, temos:

$$\text{Se } \Delta t_1 = \Delta t_2, \text{ então } A_1 = A_2$$

É importante reforçar que a velocidade areolar para um dado planeta do Sistema Solar é **constante**. Isso não significa, porém, que o movimento do planeta ao longo de sua órbita seja uniforme.

Admitamos que, na figura a seguir, as áreas A_1 e A_2 sejam varridas em intervalos de tempo iguais. Com base na **Lei das áreas**, concluímos que $A_1 = A_2$ e que, em razão da excentricidade da órbita, o espaço percorrido pelo planeta na região do periélio (deslocamento escalar) é maior que o espaço percorrido pelo planeta na região do afélio ($\Delta s_1 > \Delta s_2$).

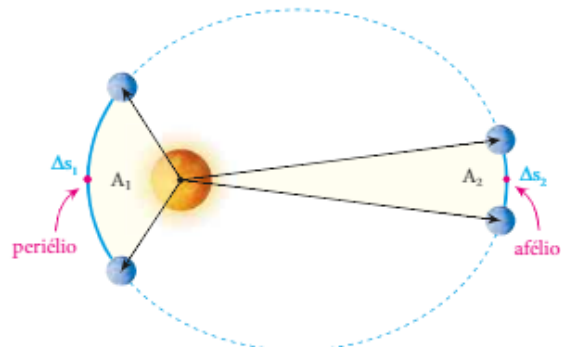


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

$$\text{Se } A_1 = A_2, \text{ então } \Delta s_1 > \Delta s_2$$

Ora, se na região do periélio, num intervalo de tempo de mesma duração, o planeta percorre um espaço maior que o percorrido na região do afélio, podemos dizer que sua velocidade escalar média de translação é maior na região do periélio que na do afélio.

No periélio, o planeta tem velocidade de translação com intensidade **máxima**, enquanto no afélio ele tem velocidade de translação com intensidade **mínima**. Isso nos mostra que o movimento de um planeta que descreve órbita elíptica em torno do Sol **não é uniforme**. Do afélio para o periélio o movimento é **acelerado**, e do periélio para o afélio o movimento é **retardado**.

A explicação para esse mecanismo está na **força de atração gravitacional** que o Sol exerce no planeta.

Observe na figura a seguir que, do afélio para o periélio, a força gravitacional admite uma componente tangencial no sentido da velocidade, ocorrendo o contrário do periélio para o afélio.

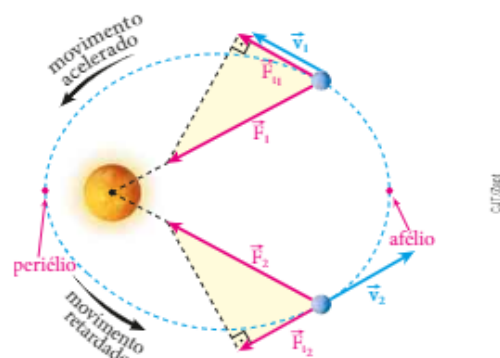


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

O movimento será **uniforme** no caso particular de planetas descrevendo órbitas circulares.

3ª Lei de Kepler: Lei dos períodos

Para qualquer planeta do Sistema Solar, é **constante** o quociente do cubo do raio médio da órbita, R^3 , pelo quadrado do período de revolução (ou translação), T^2 , em torno do Sol.

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

A constante K_p denomina-se **constante de Kepler** e seu valor depende apenas da massa do Sol e das unidades de medida.

Na tabela abaixo, estão relacionados os oito planetas do Sistema Solar com seus respectivos raios médios de órbita (R) e períodos de revolução (T), em valores aproximados.

Cálculo de K_p (valor aproximado)

Planeta	Raio médio da órbita (UA)	Período de revolução (dias)	$K_p = \frac{R^3}{T^2}$ (UA ³ /dias ²)
Mercúrio	0,386	88,02	$7,42 \cdot 10^{-6}$
Vênus	0,720	224,63	$7,39 \cdot 10^{-6}$
Terra	1,000	365,25	$7,49 \cdot 10^{-6}$
Marte	1,520	686,67	$7,44 \cdot 10^{-6}$
Júpiter	5,170	4346,47	$7,31 \cdot 10^{-6}$
Saturno	9,530	10774,87	$7,45 \cdot 10^{-6}$
Urano	19,130	30681,00	$7,43 \cdot 10^{-6}$
Netuno	30,000	60226,25	$7,43 \cdot 10^{-6}$

Fonte: HALLIDAY, David, et al. *Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica*. Vol. 2. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

Note que o período de revolução aumenta à medida que aumenta o raio médio da órbita descrita pelo planeta em torno do Sol. Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol e, por isso, é o que tem o menor ano (aproximadamente 88 dias terrestres). Netuno é o planeta mais afastado do Sol e, por isso, é o que tem maior ano (aproximadamente 165 anos terrestres).

3. UNIVERSALIDADE DAS LEIS DE KEPLER

As três leis de Kepler apresentadas até aqui são **universais**, isto é, valem para o Sistema Solar a que pertencemos e também para qualquer outro sistema do Universo em que exista uma grande massa central em torno da qual gravitem massas menores. O planeta Júpiter e seus dezesseis satélites, por exemplo, constituem um sistema desse tipo. Isso ocorre também com Marte e seus satélites, Deimos e Fobos.

Em torno da Terra gravitam a Lua e centenas de satélites artificiais, além de muita sucata espacial. Nessa situação, podemos aplicar as três leis de Kepler, com a Terra fazendo o papel de "Sol" e os citados corpos o papel de "planetas".

Satélite colocado em órbita da Terra pelo ônibus espacial Atlantis. Dezembro de 2009.



Foto: Reuters/Corbis

Universo particular

Em sua famosa canção *Wave*, dos tempos da bossa nova, Tom Jobim fala de amor "E das estrelas que esquecemos de contar..."

De poetas a astrônomos e astrofísicos, o céu fascina, inspira e desafia. Afinal, quantas estrelas compõem o Universo?

Até os tempos de Galileu – que foi um dos primeiros astrônomos a utilizar uma luneta como instrumento para contemplar o céu –, as observações celestes eram feitas a olho nu, com o auxílio de tirantes, sextantes e esferas armilares. Hoje, cálculos determinam que, em uma região sem poluição e sem concorrência de outras fontes de luz, como cidades, é possível em uma noite de céu limpo visualizar cerca de 6000 estrelas. São também perceptíveis a olho nu



Foto: Getty Images

Estima-se que seja possível visualizar a olho nu quatro galáxias e algo como 6000 estrelas.

quatro galáxias, que são aglomerados de estrelas: a Via Láctea, à qual pertence o Sistema Solar, Andrômeda, nossa vizinha mais próxima, e as Nuvens (Grande e Pequena) de Magalhães.

Com o desenvolvimento dos telescópios, contudo, esse número foi extremamente alargado, supondo-se atualmente que só na Via Láctea, considerada uma galáxia de médio porte, existam entre 200 bilhões e 500 bilhões de estrelas.

Na década de 1990, o telescópio espacial Hubble foi dirigido para os confins do Universo, revelando que nele existem cerca de 1 trilhão de galáxias. Se considerarmos que cada galáxia contém, em média, 100 bilhões de estrelas, multiplicando-se esses números, chegaremos à fantástica estimativa de que há 100 sextilhões de estrelas no Universo. Isso significa grafarmos o algarismo 1 seguido de 23 zeros...

Considerando-se que o corpo humano é formado por algo em torno de 10 trilhões de células e que o número de habitantes da Terra ronda os 7 bilhões, o número total de células da humanidade seria da ordem de grandeza do número de estrelas do Universo. Há, porém, controvérsias quanto a esse número. Em publicação recente, a renomada revista científica *Nature* informou que o número de estrelas do Universo pode ser ainda maior...

Outro dado impactante, também publicado pela revista *Nature*, revela que abrigamos um verdadeiro "universo particular" de microrganismos em nosso corpo. Isso corresponde a cerca de dez vezes a quantidade de células do nosso organismo. É a primeira vez que cientistas conseguem mapear o chamado "microbioma" humano. Somos um verdadeiro "ecossistema"! Portanto, 100 trilhões seriam os micróbios que habitam cada ser humano. O estudo foi assinado por pesquisadores de oitenta instituições.

Cerca de 11 000 espécies de microrganismos foram identificadas no estudo. Ele ajudará a explicar, por exemplo, por que alguns indivíduos têm maior propensão a infecções do que outros e também permitirá o desenvolvimento de medicamentos mais eficientes e menos agressivos.

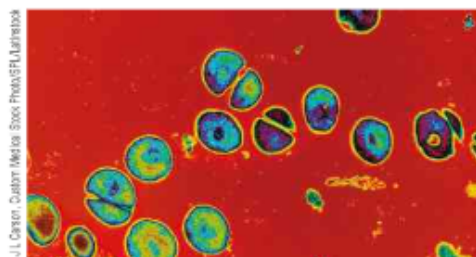
Observe a imagem de alguns microrganismos.



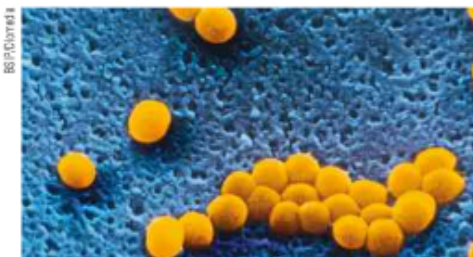
Eletromicrografia (cores artificiais) de um tipo de bactéria formadora da placa dentária, que se não for removida pode causar cárie. Ampliação: cerca de 3 500 vezes.



Eletromicrografia (cores artificiais) de *Aspergillus sp*: fungo que pode causar doenças alérgicas, infecções e doenças conhecidas como aspergilose. Ampliação: cerca de 3 400 vezes.



Eletromicrografia (cores artificiais) de *Staphylococcus sp*: tipo de bactéria que pode causar doenças que vão desde pequenas infecções de pele a doenças como pneumonia. Ampliação: cerca de 22 000 vezes.



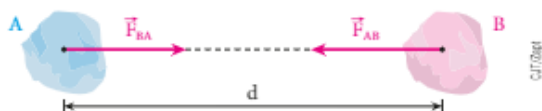
Eletromicrografia (cores artificiais) de *Staphylococcus aureus*: tipo de bactéria que pode causar lesões na pele, intoxicação alimentar ou infecções viscerais e etc. Ampliação: cerca de 4 600 vezes.

4. LEI DE NEWTON DA ATRAÇÃO DAS MASSAS

No ano de 1665, uma epidemia de peste assolou a Inglaterra. Buscando refugiar-se, Isaac Newton interrompeu suas atividades na Universidade de Cambridge, que foi fechada na ocasião, e retornou a Woolsthorpe, localidade em que seus familiares mantinham uma pequena propriedade rural. Foi nessa ocasião, na tranquilidade do campo, que Newton viveu, aos 23 anos, uma das fases mais fecundas de sua vida como homem de ciência. Apoiado nos trabalhos de seus antecessores (Copérnico, Galileu e Kepler), enunciou uma lei de âmbito universal, que trouxe nova luz ao conhecimento da época. A **Lei de Newton da Atração das Massas** é um dos mais notáveis trabalhos de seu autor, constituindo-se em um dos instrumentos que deu sustentação matemática às teorias da mecânica clássica.

A Lei de Newton da Atração das Massas, ou **Lei da Gravitação**, teve uma repercussão tão grande a partir do século XVIII que levou o poeta inglês Alexander Pope (1688-1744) a grafar na lápide do túmulo de Newton um epitáfio de grande reconhecimento ao trabalho do cientista: “*Nature and nature’s laws lay hid in the night; God said ‘Let Newton be’ and all was light*” (A natureza e as leis da natureza estavam imersas na noite; Deus disse “Que Newton seja” e tudo se iluminou).

Considere a figura seguinte, em que os corpos **A** e **B**, de massas m_A e m_B , respectivamente, têm seus centros de gravidade separados por uma distância d .



Newton verificou que os dois corpos se atraem mutuamente, trocando forças de **ação** e **reação**. O corpo **A** age no corpo **B** com uma força \vec{F}_{AB} , enquanto **B** reage em **A** com uma força \vec{F}_{BA} , de mesma intensidade que \vec{F}_{AB} .

Disso se conclui que:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \text{ (vetorialmente)}$$

$$F_{AB} = F_{BA} \text{ (em módulo)}$$

As forças trocadas por **A** e **B** têm a mesma natureza daquela responsável pela manutenção da Lua em sua órbita em torno da Terra e também daquela responsável pela queda de corpos nas vizinhanças de um astro: são forças atrativas de **origem gravitacional**.

As intensidades de \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{BA} são diretamente proporcionais ao produto das massas m_A e m_B , mas inversamente proporcionais ao quadrado da distância d .

Representando por F a intensidade de \vec{F}_{AB} ou de \vec{F}_{BA} , podemos escrever que:

$$F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$$

A constante G é denominada **Constante da Gravitação** e seu valor numérico, num mesmo sistema de unidades, **independe do meio** em que os corpos se encontram.

Foi o físico e químico inglês Henry Cavendish (1731-1810) quem, em 1798, obteve a primeira medida precisa para a Constante da Gravitação. Utilizando uma balança de torção, ele mediu a intensidade da força atrativa entre dois pares de corpos de massas conhecidas e, com base nos dados obtidos, calculou o valor de G .

Atualmente, o valor aceito para G é:

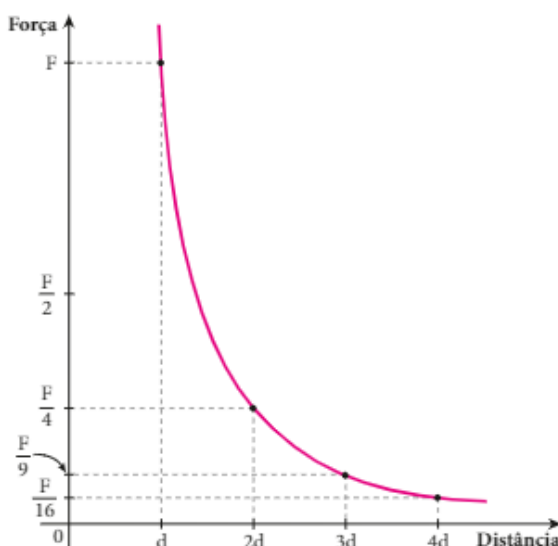
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

Vamos agora estudar como varia a intensidade (F) da força de atração gravitacional entre dois corpos de massas M e m em função da distância d entre seus centros de gravidade.

Levando em consideração que F é inversamente proporcional ao quadrado de d , temos o quadro:

Distância	d	$2d$	$3d$	$4d$
Força	F	$\frac{F}{4}$	$\frac{F}{9}$	$\frac{F}{16}$

A variação de F em função de d pode ser observada no gráfico a seguir.

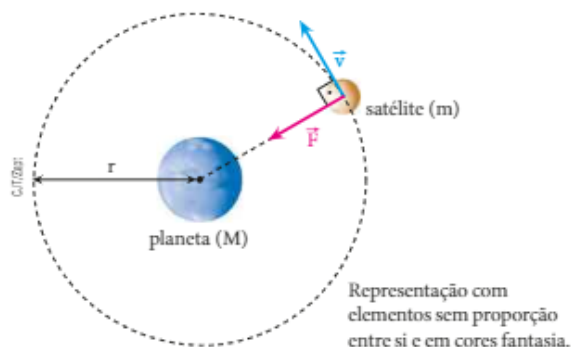


Dois corpos quaisquer sempre interagem gravitacionalmente, atraindo-se. Entretanto, pelo fato de o valor de G ser muito pequeno ($6,67 \cdot 10^{-11}$ SI), a intensidade da força atrativa só se torna apreciável se pelo menos uma das massas for consideravelmente grande. É por isso que duas pessoas se atraem gravitacionalmente, mas com forças de intensidade tão pequena que seus efeitos passam despercebidos. A força de atração gravitacional adquire intensidade considerável quando um dos corpos é, por exemplo, um planeta e, além disso, a distância envolvida é relativamente pequena.

5. SATÉLITES

Estudo do movimento de um satélite em órbita circular

Considere a figura a seguir, em que um satélite genérico de massa m gravita em órbita circular em torno de um planeta de massa M . Representemos por r o raio da órbita e por G a Constante da Gravitação.



Como prevê, por exemplo, a **2ª Lei de Kepler**, se a órbita descrita pelo satélite é circular, seu movimento é **uniforme**. Isso também pode ser justificado pelo fato de \vec{F} ser perpendicular a \vec{v} .

Determinação da velocidade orbital (v)

A força gravitacional que o satélite recebe do planeta é a **resultante centrípeta** em seu movimento circular e uniforme.

$$F = F_{cp}$$

$$\text{Sabemos que: } F = G \frac{M m}{r^2} \text{ e } F_{cp} = \frac{m v^2}{r}$$

$$\text{Assim: } G \frac{M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$\text{Portanto: } v = \sqrt{\frac{G M}{r}}$$

Observe que v **independe** da massa do satélite, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada de r .

Determinação do período de revolução (T)

Como o satélite realiza movimento circular e uniforme, temos:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

Sendo $v = \sqrt{\frac{G M}{r}}$, tem-se:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G M}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M}}$$

$$\text{Logo: } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M}}$$

Note que T também independe da massa do satélite, sendo proporcional à raiz quadrada do cubo de r . Se outro satélite, com massa diferente do primeiro, descrevesse a mesma órbita, esta seria percorrida com o mesmo período de revolução.

Ao formular a **Lei da Atração das Massas**, Newton pôde demonstrar matematicamente a **3ª Lei de Kepler**. Seguindo um raciocínio semelhante ao que desenvolvemos para obter a equação do período de revolução, ele confirmou que, para qualquer corpo em órbita de uma grande massa central, o quociente $\frac{r^3}{T^2}$ é **constante**.

A constante, denominada constante de Kepler no caso do Sistema Solar, nada mais é que o quociente $\frac{G M}{4\pi^2}$ e, de fato, só depende da massa central (M).

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} \text{ é constante}$$

Isso fica claro no caso de órbitas circulares:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{G M}$$

$$\text{Portanto: } \frac{r^3}{T^2} = \frac{G M}{4\pi^2}$$

Determinação da velocidade areolar

Quando o satélite realiza uma volta completa em sua órbita, seu vetor-posição em relação ao centro do planeta varre uma área $A = \pi r^2$ durante um intervalo de tempo $\Delta t = T$.

Da **2ª Lei de Kepler**, sabemos que:

$$A = v_a \Delta t \Rightarrow v_a = \frac{A}{\Delta t}$$

Sabendo que $A = \pi r^2$ e $\Delta t = T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$, temos:

$$v_a = \frac{A}{\Delta t} \Rightarrow v_a = \frac{\pi r^2}{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

Portanto:
$$v_a = \frac{1}{2}\sqrt{GM r}$$

Da mesma forma que v e T , a velocidade areolar v_a independe da massa do satélite, mas depende do raio da órbita (r) e da massa do planeta (M) que, no caso, faz o papel de "Sol".

Satélites estacionários

Recebem esse nome pelo fato de se apresentarem "parados" em relação a um referencial vinculado à superfície do planeta, isto é, fixo sobre este.

Os satélites estacionários têm órbitas circulares contidas no plano equatorial. No caso de estarem em órbita em torno da Terra, seu período de revolução é de 24 horas, igual ao período de rotação do planeta, e o raio de sua órbita é de 6,7 raios terrestres, aproximadamente.

A aplicação mais importante para esses satélites está nas telecomunicações. Vivemos hoje a era da comunicação. Esse novo tempo é possibilitado pela tecnologia, que coloca à nossa disposição a telefonia, a televisão e a internet. O tráfego de dados eletrônicos é feito em grande parte "via satélite".



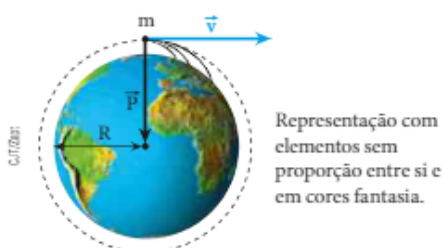
Imagem artística de satélite estacionário (transmissão e recepção de sinais de telecomunicações). Elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Ondas eletromagnéticas contendo informações são transmitidas para satélites estacionários que as devolvem para a Terra, dirigindo-as aos locais de recepção.

Lançamento horizontal com entrada em órbita

Suponha que determinado corpo seja lançado sucessivas vezes, horizontalmente, de um mesmo ponto muito próximo da superfície terrestre, com velocidade de intensidade cada vez maior. Despreze a influência do ar.

Chegará uma situação em que o corpo não mais voltará a estabelecer contato com o solo. Ele **entrará em órbita**, permanecendo indefinidamente "a cair" sob a ação da gravidade.



Representação com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Considerando o corpo em órbita rasante (raio de órbita praticamente igual ao raio terrestre), calculemos a intensidade da velocidade de lançamento.

O peso do corpo faz o papel de resultante centrípeta. Temos o seguinte:

$$P = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv^2}{R}$$

Logo:
$$v = \sqrt{gR}$$

Sendo $g \cong 10 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade nas proximidades da Terra e $R \cong 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ o raio do planeta, obtemos o seguinte resultado:

$$v = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \text{ (m/s)}$$

Portanto, $v = 8,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ou seja, $v = 8,0 \text{ km/s}$

Em km/h, a velocidade calculada fica expressa por:

$$v = 8,0 \cdot 10^3 \cdot 3,6 \text{ (km/h)} \Rightarrow v = 28\,800 \text{ km/h}$$

Observe que essa velocidade independe da massa do corpo.

Esse mesmo raciocínio foi apresentado originalmente por Isaac Newton, que, mesmo diante da precariedade tecnológica da época, já teorizava sobre como colocar um satélite artificial em órbita ao redor da Terra.

A Estação Espacial Internacional (EEI)

O fim da Guerra Fria provocou sensíveis distensões nas relações entre Estados Unidos e Rússia, os quais passaram a adotar políticas de cooperação mútua e parcerias tecnológicas. O sonho estadunidense de construir uma base espacial maior e mais moderna que a soviética Mir, colocada em órbita em 1986 e notabilizada por abrigar astronautas por longos períodos de tempo, de um ano ou mais, ganhou contornos concretos, já que o ideal envolveu e agregou também outros povos.

Associaram-se às duas nações outros catorze países – o Canadá, o Japão, o Brasil (único país emergente a integrar o consórcio) e onze países da Europa –, cada qual com direito de utilização proporcional aos investimentos financeiros aplicados e às contribuições tecnológicas propostas. O grupo elaborou, então, um ambicioso projeto, orçado em cerca de 100 bilhões de dólares, prevenindo a construção de uma gigantesca base a ser montada em etapas, denominada Estação Espacial Internacional (EEI). Em novembro de 1998 foram lançados os primeiros módulos, iniciando-se assim uma sucessão de acoplagens e conexões em pleno espaço. A conclusão final ocorreu oficialmente em 8 de junho de 2011, com a missão STS-135, mas ainda há detalhes a implementar.

Depois de pronta, a EEI tem 450 toneladas e abrange uma área equivalente a quase dois campos de futebol, com 110 m de comprimento por 80 m de largura. Ela pode ser vista da Terra, até mesmo durante o dia, constituindo-se no corpo mais brilhante no céu depois do Sol e da Lua. Sua órbita, que tem altura média de 407 km em relação à superfície terrestre, é completada a cada 1 h 30 min a uma velocidade próxima de 28 000 km/h, o que possibilita à EEI percorrer a distância entre o Rio de Janeiro e Paris em apenas 20 min.

Em plena operação, a EEI serve de ponto de partida para outras missões de exploração do cosmo. Em razão de sua inclinação de 51,6 graus em relação ao Equador, é um posto privilegiado de observação da Terra, já que praticamente a totalidade do planeta (85% de sua área superficial) pode ser visualizada e monitorada. Fenômenos meteorológicos são mais bem avaliados. Cientistas dos países signatários do ousado empreendimento poderão realizar experimentos em ambiente de microgravidade, verificando o comportamento de substâncias e organismos vivos – até do próprio ser humano – submetidos a essas condições, o que vai permitir o desenvolvimento de novos materiais, procedimentos técnicos, terapias e medicamentos. Além disso, tecnologias mais avançadas para diversas áreas, como robótica, computação e telecomunicações, serão criadas.



Imagem artística da EEI gerada por computador. A estação é um superlaboratório, que comporta até sete astronautas de cada vez.

QUESTÕES COMENTADAS



1 Considere um planeta hipotético gravitando em órbita circular em torno do Sol. Admita que o raio da órbita desse planeta seja o quádruplo do raio da órbita da Terra. Nessas condições, qual é o período de translação, expresso em anos terrestres, do citado planeta?

RESOLUÇÃO

Sejam: r_T o raio da órbita da Terra ($r_T = R$); r_H : o raio da órbita do planeta hipotético ($r_H = 4R$); T_T o período de translação da Terra (ano da Terra); T_H o período de translação do planeta hipotético (ano do planeta).

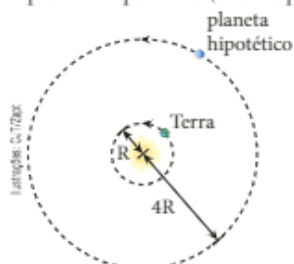


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

De acordo com a **3ª Lei de Kepler**, temos:

$$\frac{r^3}{T^2} = K_p$$

Aplicando essa lei para os dois planetas:

• Planeta hipotético:

$$\frac{(r_H)^3}{(T_H)^2} = K_p \quad (I)$$

• Terra: $\frac{(r_T)^3}{(T_T)^2} = K_p \quad (II)$

Comparando as igualdades (I) e (II), obtemos o seguinte:

$$\frac{(r_H)^3}{(T_H)^2} = \frac{(r_T)^3}{(T_T)^2} \Rightarrow (T_H)^2 = \left(\frac{r_H}{r_T}\right)^3 (T_T)^2$$

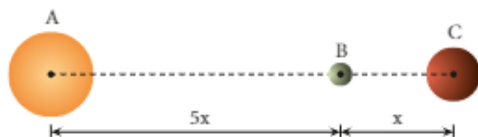
Como estabelecemos que $r_H = 4R$ e $r_T = R$, temos:

$$(T_H)^2 = \left(\frac{4R}{R}\right)^3 (T_T)^2 \Rightarrow (T_H)^2 = 64(T_T)^2$$

Portanto: $T_H = 8T_T$

Resposta: O período do planeta hipotético é oito vezes o ano terrestre.

2 Considere uma estrela **A** e dois planetas **B** e **C** alinhados em determinado instante, conforme indica a figura.

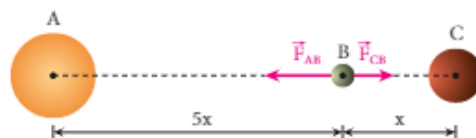


A massa de **A** vale $200M$ e as massas de **B** e **C**, M e $2M$, respectivamente.

Sendo dadas a distância x e a Constante da Gravitação (G), determine, no instante da figura, a expressão que representa a intensidade da força resultante das ações gravitacionais de **A** e **C** sobre **B**.

RESOLUÇÃO

O planeta **B** é atraído gravitacionalmente pela estrela **A** e pelo planeta **C**, recebendo, respectivamente, as forças \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{CB} , representadas no esquema a seguir.



As intensidades de \vec{F}_{AB} e de \vec{F}_{CB} ficam determinadas pela **Lei de Newton da Atração das Massas**.

$$F_{AB} = G \frac{200M \cdot M}{(5x)^2} \Rightarrow F_{AB} = 8G \frac{M^2}{x^2}$$

$$F_{CB} = G \frac{2M \cdot M}{x^2} \Rightarrow F_{CB} = 2G \frac{M^2}{x^2}$$

A intensidade (F) da força resultante das ações gravitacionais de **A** e **C** sobre **B** é calculada por:

$$F = F_{AB} - F_{CB} \Rightarrow F = 8G \frac{M^2}{x^2} - 2G \frac{M^2}{x^2}$$

Portanto: $F = 6G \frac{M^2}{x^2}$

A força resultante calculada é dirigida para a estrela **A**.

Resposta: $6G \frac{M^2}{x^2}$

3 Um satélite estacionário de massa $m = 3,5 \cdot 10^2$ kg está descrevendo uma órbita circular de centro coincidente com o centro da Terra, admitida esférica, com raio $R = 6,4 \cdot 10^6$ m. Considerando a massa do planeta ($M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg), a Constante da Gravitação ($G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²) e $\pi = 3,14$, determine:

- a altura em relação ao solo terrestre, em km, na qual se encontra o satélite;
- a intensidade de sua velocidade de translação ao longo da órbita, em km/s.

RESOLUÇÃO

a) A força de atração gravitacional exercida pela Terra sobre o satélite desempenha a função de **resultante centrípeta** no movimento circular e uniforme descrito por ele.

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \frac{Mm}{d^2} = m\omega^2 d$$

Sendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$, temos:

$$\frac{GM}{d^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2} d^3$$

Logo: $d = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$

Sabendo que $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ e considerando $\pi = 3,14$, calculemos d , o raio da órbita do satélite:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \cdot (8,64 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot (3,14)^2}} \quad (\text{m})$$

Logo: $d \cong 42,3 \cdot 10^6 \text{ m}$

A altura h do satélite em relação ao solo terrestre fica, então, determinada por:

$$h = d - R \Rightarrow h \cong 42,3 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^6$$

Portanto: $h \cong 36 \cdot 10^3 \text{ km}$

b) Chamando de v a intensidade da velocidade de translação do satélite ao longo da órbita, temos:

$$v = \frac{2\pi d}{T}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot 42,3 \cdot 10^3}{86400} \quad (\text{km/s})$$

Logo: $v \cong 3,1 \text{ km/s}$

Tanto h como v independem da massa m do satélite.

Respostas: a) Aproximadamente $36 \cdot 10^3 \text{ km}$;
b) Aproximadamente $3,1 \text{ km/s}$.



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

4. Indique a alternativa que completa corretamente a sentença a seguir.

“A 2ª Lei de Kepler (Lei das áreas) permite concluir que...”

- as áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são diretamente proporcionais aos quadrados dos respectivos intervalos de tempo gastos;
- a intensidade da velocidade de um planeta ao longo de sua órbita em torno do Sol é máxima no periélio;
- a intensidade da velocidade de um planeta ao longo de sua órbita em torno do Sol é máxima no afélio;
- o intervalo de tempo gasto pelo planeta em sua translação do afélio para o periélio é maior que o intervalo de tempo gasto por ele na translação do periélio para o afélio;
- o movimento de translação de um planeta em torno do Sol é uniforme, já que sua velocidade areolar é constante.

5. Admita que o período de revolução da Lua em torno da Terra seja de 27 dias e que o raio da sua órbita valha $60R$, sendo R o raio da Terra. Considere um satélite geoestacionário, desses utilizados em telecomunicações. Em relação ao referido satélite, responda:

- Qual é o período de revolução?
- Qual é o raio de órbita?

6. Leia o texto e observe a imagem a seguir.

Zero G

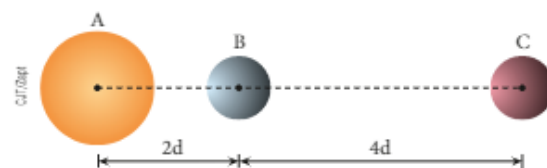
Nos Estados Unidos, é possível simular, dentro de um avião, a sensação de imponderabilidade – ausência aparente de peso – como aquela vivenciada por astronautas da ISS em movimento orbital em torno da Terra. Para isso, foi adaptada uma aeronave que realiza uma subida vertiginosa e, ao atingir determinada altura, é projetada em uma trajetória praticamente parabólica, semelhante à de um pequeno objeto lançado obliquamente sob a ação exclusiva da gravidade. Durante a descida, que dura alguns poucos segundos, privilegiados (ou ousados) passageiros flutuam dentro do avião como se, subitamente, o campo gravitacional tivesse sido “desligado”.



Pessoas flutuando em interior de aeronave. Experiência de gravidade zero. Março de 2013.

Explique essa “levitação” dos passageiros no interior da aeronave.

7. Em determinado instante, três corpos celestes, A, B e C, têm seus centros de massa alinhados e distanciados, conforme mostra o esquema abaixo:



Sabendo que as massas de A, B e C valem, respectivamente, $5M$, $2M$ e M , determine a relação entre a intensidade das forças gravitacionais que B recebe de A e de C.

8. Leia o texto a seguir.

“Nasa quer construir base próxima à Lua

Embora a construção da ISS (Estação Espacial Internacional) ainda esteja longe de acabar, a Nasa está fazendo de tudo para deixar claro que seu programa tripulado não para por aí. Durante o Congresso Espacial

Mundial, em Houston, EUA, a agência espacial americana apresentou o próximo item em sua lista de prioridades astronáuticas – uma nova base no espaço. [...]

A base, apelidada de *L1 Gateway*, ficaria mais de 800 vezes mais distante da Terra que a ISS. Sua localização seria no primeiro dos cinco pontos de Lagrange do sistema Terra-Lua (daí o 'L1' do nome). O ponto de Lagrange, nesse caso, é um local do espaço em que a gravidade da Terra e da Lua se compensam, fazendo com que um objeto ali localizado fique mais ou menos no mesmo lugar (com relação à Terra e à Lua) o tempo todo. [...]"

NOGUEIRA, Salvador. *Folha de S.Paulo*, 15 out. 2002.

Considere que a massa da Terra seja cerca de 81 vezes a massa da Lua. Sendo D a distância entre os centros de massa desses dois corpos celestes, a distância d entre o local designado para a base *L1 Gateway* e o centro da Terra deve corresponder a que porcentagem de D ?

9. Pretende-se colocar um satélite em órbita circular em torno da Terra, a 270 km acima da superfície terrestre. Conhecendo a Constante da Gravitação ($G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$), a massa da Terra ($M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) e o raio do planeta ($R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$), determine:

- a intensidade da velocidade linear do satélite ao longo da órbita;
- o período de revolução do satélite. (Adote $\pi = 3,14$.)

10. Considere o raio médio da órbita de Plutão (planeta anão) cem vezes o raio médio da órbita de Mercúrio e 40 vezes o raio médio da órbita da Terra. Sabendo que a duração aproximada do ano de Mercúrio é de três meses terrestres e que a velocidade orbital da Terra tem intensidade igual a 30 km/s, determine:

- a duração do ano de Plutão expressa em anos terrestres;
- a intensidade da velocidade orbital de Plutão.

6. ESTUDO DO CAMPO GRAVITACIONAL DE UM ASTRO

Linhas de força do campo gravitacional

De acordo com os preceitos da Física Clássica, toda massa tem capacidade de criar em torno de si um campo de forças, denominado **campo gravitacional**. Uma estrela, por exemplo, tem ao seu redor um campo gravitacional, o mesmo ocorrendo com um simples asteroide.

A intensidade do campo gravitacional em determinado ponto aumenta com a massa geradora do campo e diminui com a distância até essa massa, como verificaremos adiante em nosso estudo.

O campo gravitacional é **atrativo**, já que partículas submetidas exclusivamente aos seus efeitos são "puxadas" para junto da massa geradora.

Linhas de força de um campo gravitacional são linhas que representam, em cada ponto, a orientação da força que atua em uma partícula (massas de prova) submetida exclusivamente aos efeitos desse campo.

Se o astro considerado for esférico e homogêneo, as linhas de força do seu campo gravitacional terão a direção do raio da esfera em cada ponto (linhas radiais), sendo orientadas para o centro do astro, como representa a figura a seguir.



A grandeza física que caracteriza um campo gravitacional é o **vetor campo gravitacional** ou **vetor aceleração da gravidade** (\vec{g}), que é a aceleração adquirida por uma partícula deixada exclusivamente aos efeitos do campo.

A aceleração da gravidade tem a mesma direção e o mesmo sentido das linhas de força, isto é, é radial ao astro e dirigida para o seu centro.

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade em um ponto externo ao astro

Vamos admitir um astro esférico e homogêneo de raio R e massa M . Nesse caso, podemos considerar toda a sua massa concentrada em seu centro geométrico.

Um pequeno corpo de massa m , situado a uma altura h em relação à sua superfície, receberá uma força de atração gravitacional \vec{F} , conforme representa a figura ao lado.



Sendo G a Constante da Gravitacão, podemos expressar a intensidade de \vec{F} pela **Lei de Newton da Atração das Massas**:

$$F = G \frac{M m}{d^2} \Rightarrow F = G \frac{M m}{(R + h)^2} \quad (I)$$

Representando, porém, por g a intensidade da aceleração da gravidade no ponto em que o corpo se encontra, também podemos expressar a intensidade de \vec{F} por:

$$F = m g \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$m g = G \frac{M m}{(R + h)^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{(R + h)^2}$$

Esse resultado evidencia que **g independe da massa de prova (m)**, dependendo apenas da massa geradora do campo (M) e da distância $d = R + h$.

Como exemplo, observe, no quadro a seguir, a variação da intensidade da aceleração da gravidade na Terra em função da altitude.

Altitude (m)	g (m/s ²)	Altitude (m)	g (m/s ²)
0	9,806	32 000	9,71
1 000	9,803	100 000	9,60
4 000	9,794	500 000	8,53
8 000	9,782	1 000 000	7,41
16 000	9,757	3 800 000	0,00271

Observe que o valor de g a 3 800 000 m de altitude, 0,00271 m/s², corresponde à intensidade do campo gravitacional terrestre nas proximidades da órbita da Lua.

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade na superfície do astro

Considere a expressão:

$$g = G \frac{M}{(R + h)^2}$$

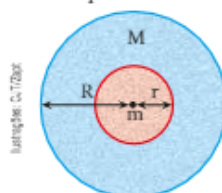
Desprezando os efeitos ligados à rotação e observando que sobre a crosta do astro, $h = 0$, a intensidade da aceleração da gravidade na superfície (g_0) é dada por:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

Na superfície do Sol, g_0 vale 274,568 m/s², e na superfície da Lua, 1,667 m/s².

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade em um ponto interno ao astro

A intensidade da aceleração da gravidade em um ponto interno ao astro (de raio R), distante r de seu centro, tal que $r < R$, é calculada admitindo-se que esse ponto pertença a uma superfície esférica de raio r . Essa superfície envolve uma massa m , evidentemente, menor que a massa M do astro.



Sobre a superfície de raio r , temos:

$$g = G \frac{m}{r^2} \quad (I)$$

Suponha que o astro tenha massa específica (massa por unidade de volume) uniforme e igual a μ . Sendo V o volume da esfera de raio r , temos: $\mu = \frac{m}{V}$; em que: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

$$\text{Logo: } \mu = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi r^3} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \pi \mu r^3 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

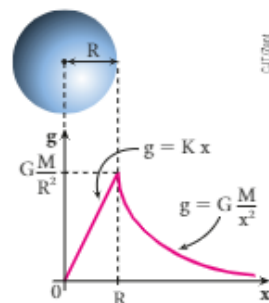
$$g = \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \mu r^3 \Rightarrow g = \frac{4}{3} \pi \mu G r$$

Fazendo $\frac{4}{3} \pi \mu G = K$, em que K é uma constante para o astro em questão, chega-se a: $g = K r$

Concluimos então que, para pontos internos ao astro, o valor de g é **diretamente proporcional** à distância do ponto considerado ao centro do astro.

Gráfico de g em função de x

A intensidade da aceleração da gravidade varia em função da distância x ao centro do astro, conforme mostra o gráfico ao lado.



EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

Por que estrelas e planetas são praticamente esféricos?

Imagine uma situação na qual você utilize um pouco de massa de modelar, que geralmente é embalada em forma de bastões cilíndricos, para fazer uma bola maciça. Como você deverá proceder para deixar o aglomerado de massa com formato que pareça o máximo possível com uma esfera?

Certamente, você irá comprimir o material em todas as direções, sempre exercendo esforços radiais no sentido do centro do objeto em forma de esfera que pretende compor. Serão essas forças de pressão que tornarão a pelota “redondinha”, com formato razoavelmente esférico.

Com estrelas e planetas, ocorre efeito semelhante. A diferença é que as forças que tornam esses corpos praticamente esféricos têm origem gravitacional. Os astros de grande porte – estrelas, planetas, satélites etc. – são muito massivos e criam ao seu redor campos gravitacionais intensos, capazes de reter qualquer incremento de massa. A massa incorporada é puxada em direção ao centro gravitacional, o que dá a esses astros sua forma esférica peculiar, de menor energia.



Observe na imagem ao lado um eclipse total ou anular do Sol, situação em que a Lua se coloca entre o Sol e a Terra, obstruindo a visualização plena da estrela. O halo luminoso em torno do círculo negro é a coroa solar que se estende muito além da superfície do Sol. A forma esférica manifestada pela Lua é fruto da ação de forças gravitacionais do próprio astro que atraem toda a sua massa radialmente no sentido de compactá-la no centro de gravidade.

Eclipse total do Sol. Longyearbyen, Noruega. Março de 2015.

Corpos celestes menores, como cometas e asteroides, não apresentam formato esférico por não terem massa suficiente para produzir campos gravitacionais expressivos. Suas formas dependem do material rochoso que os constitui, da temperatura em que foram formados, além de outros fatores.

O asteroide Ida, por exemplo, é um dos maiores do Sistema Solar. Sua forma não esférica se deve principalmente à sua pequena massa, se comparada à dos grandes corpos celestes. O campo gravitacional desse asteroide é insuficiente para moldar um formato esférico.



Asteroide Ida e sua “lua” em miniatura observados pela sonda Galileu.

Buracos negros

O termo **Universo** é a chave que remete nossa imaginação a uma imensidão sem fim, em que pontos e regiões brilhantes se sobressaem, contrastando com um fundo negro ilimitado que alguns chamam de infinito. Os pontos brilhantes que adornam o céu escuro são, na maioria, estrelas, que apresentam um ciclo natural semelhante ao dos seres vivos, de nascimento, vida e morte.

Nuvens de gases e poeira cósmica, constituídas principalmente por hidrogênio, começam a se aglomerar movidas por forças de atração gravitacional. É nesse momento que tem início o surgimento de uma nova estrela, cujo núcleo vai adquirindo temperaturas muito elevadas, da ordem de milhões de graus Celsius. Essa elevação da temperatura desencadeia o processo de fusão nuclear que transforma o hidrogênio em hélio. Dessa forma, quantidades fantásticas de energia radiante são lançadas no espaço, propagando-se com a velocidade da luz ($c = 300\,000\text{ km/s}$).

A cada minuto, a Terra recebe do Sol, a estrela mais próxima, uma quantidade de energia equivalente, em média, a 1,92 caloria por centímetro quadrado de área perpendicular aos raios solares. Só para ter uma ideia da energia liberada pelo Sol, seriam necessárias todas as reservas de petróleo, gás natural e carvão da Terra para fornecer um milionésimo do que o Sol produz em 1 segundo.

Essa energia radiante, entretanto, é emanada pelas estrelas durante um intervalo de tempo limitado. Quando o combustível nuclear – o hidrogênio – se esgota, elas passam a se compactar, desabando sobre si mesmas, pela ação de forças de origem gravitacional, e concentrando suas enormes massas em volumes extremamente pequenos, se comparados aos volumes originais.

Dependendo de sua massa, uma estrela poderá transformar-se em um **buraco negro** – um corpo hipercompactado, que tem sua gigantesca quantidade de matéria aglomerada em um volume muito reduzido.

O Sol tem uma massa muito pequena para se transformar em um buraco negro. Sua agonia como estrela, prevista para daqui a 5 bilhões de anos, deverá conduzi-lo à condição de anã branca, que é outro tipo de cadáver estelar. Os buracos negros mais comuns têm massa equivalente à de dez sóis.

Recordemos que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de um astro (g), desprezada sua rotação, é dada em função de sua massa (M) e de seu raio (R) por $g = G \frac{M}{R^2}$, em que G é a Constante da Gravitação.

Como no caso dos buracos negros M é muito grande e R é muito pequeno, g resulta muito grande, o que produz em torno desses corpos campos gravitacionais extremamente intensos, que influem significativamente em todas as massas das proximidades, até mesmo na luz, que é sensivelmente desviada por sua atração.

Quando lançamos uma pedra verticalmente para cima, a partir da superfície de um astro, ela atinge determinada altura máxima e, depois de certo intervalo de tempo, retorna praticamente ao ponto de partida. Se repetirmos o lançamento imprimindo à pedra uma velocidade inicial maior, ela se elevará a uma altura maior, mas ainda voltará ao solo, atraída gravitacionalmente pelo astro. Se lançarmos a pedra sucessivamente com velocidades cada vez maiores, chegaremos a situações em que ela “escapará da gravidade do astro”, não mais retornando à sua superfície.

A velocidade de escape na Lua, por exemplo, é de 2,4 km/s; na Terra, de 11,2 km/s, e no Sol, de 620 km/s. Nos buracos negros, a velocidade de escape supera a barreira dos 300 000 km/s; por isso, nem mesmo a luz consegue escapar da sua atração. É por esse motivo que esses corpos celestes são invisíveis, tendo sua presença registrada apenas pela expressiva influência gravitacional manifestada nos arredores.

Se o Sol tivesse volume igual ao da Terra, a velocidade de escape desse astro fictício seria de 6 500 km/s. Para que a Terra se transformasse em um buraco negro, sua massa deveria ser compactada até volumes menores que o de uma bola de gude.

Apesar de serem um tema muito discutido nos dias de hoje, os buracos negros já vêm sendo estudados desde o século XVIII: o astrônomo inglês John **Michell** (1724-1793) analisou a possibilidade da existência desses corpos, o mesmo ocorrendo com o matemático francês Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827).

Atualmente, todas as teorias astronômicas utilizam essa concepção, dotando o Universo desses polos invisíveis, verdadeiros sorvedouros de matéria, que desafiam a imaginação e levam o ser humano a se questionar em busca de explicações. As galáxias são repletas de buracos negros.

Galáxia Messier 101: É espiral como a Via Lactea, mas cerca de 70% maior. Esta imagem, que combina dados ópticos de telescópios com informações de arquivos de missões da NASA, é resultado da colaboração entre astrônomos.



QUESTÕES COMENTADAS



11 Sabe-se que a massa da Terra é cerca de 81 vezes a massa da Lua e que o raio da Terra é aproximadamente 3,7 vezes o da Lua. Desprezando os efeitos ligados à rotação, calcule o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Lua (g_L) em função do módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra (g_T).

RESOLUÇÃO

Podemos calcular g_L por: $g_L = G \frac{M_L}{(R_L)^2}$ (I)

Podemos calcular g_T por: $g_T = G \frac{M_T}{(R_T)^2}$ (II)

Dividindo membro a membro (I) por (II), obtemos:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{G \frac{M_L}{R_L^2}}{G \frac{M_T}{R_T^2}} \Rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_L} \right)^2$$

Sendo $M_T = 81M_L$ e $R_T = 3,7R_L$, obtemos:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{1}{81} (3,7)^2 \Rightarrow g_L \cong \frac{1}{6} g_T$$

Na superfície lunar, o módulo da aceleração da gravidade é aproximadamente um sexto daquele determinado na superfície terrestre.

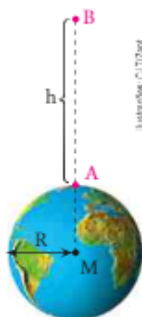
Resposta: Aproximadamente $\frac{1}{6} g_T$

12 Admita que, na superfície terrestre, desprezados os efeitos ligados à rotação do planeta, a aceleração da gravidade tenha intensidade g_0 .

Sendo R o raio da Terra, a que altitude a aceleração da gravidade terá intensidade

$$\frac{g_0}{16}?$$

Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.



RESOLUÇÃO

No ponto A: $g_0 = G \frac{M}{R^2}$ (I)

No ponto B: $\frac{g_0}{16} = G \frac{M}{(R+h)^2}$ (II)

Substituindo (I) em (II) temos o seguinte:

$$\frac{1}{16} G \frac{M}{R^2} = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

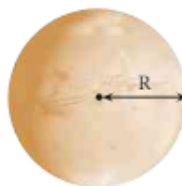
$$\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 = 16 \Rightarrow R+h = 4R \Rightarrow h = 3R$$

Resposta: $3R$

13 Um planeta perfeitamente esférico A tem raio R_A e densidade absoluta μ_A , enquanto outro planeta B, também perfeitamente esférico, tem raio $5R_A$ e densidade absoluta $2\mu_A$. Sendo g_A o módulo da aceleração da gravidade na superfície de A e g_B o módulo da aceleração da gravidade na superfície de B, calcule a relação g_B/g_A . Despreze os efeitos ligados às rotações de A e B.

RESOLUÇÃO

Considere um planeta esférico genérico de massa M, raio R, volume V e densidade absoluta μ .



A densidade absoluta do planeta é dada por:
 $\mu = \frac{M}{V}$

Sendo $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (volume da esfera), temos:

$$\mu = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3} \pi \mu R^3 \quad (I)$$

O módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta é calculado por:

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$g = G \frac{\frac{4}{3} \pi \mu R^3}{R^2} \Rightarrow g = \frac{4}{3} \pi G \mu R \quad (III)$$

Para o planeta B, temos:

$$g_B = \frac{4}{3} \pi G 2\mu_A 5R_A \quad (III)$$

Para o planeta A, temos:

$$g_A = \frac{4}{3} \pi G \mu_A R_A \quad (IV)$$

Dividindo (III) por (IV), obtemos:

$$\frac{g_B}{g_A} = \frac{\frac{4}{3} \pi G 2\mu_A 5R_A}{\frac{4}{3} \pi G \mu_A R_A}$$

$$\frac{g_B}{g_A} = 10$$

Resposta: $\frac{g_B}{g_A} = 10$



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

14. Em ordem crescente de distância ao Sol, Marte é o quarto planeta do Sistema Solar. Esse astro se notabiliza pelo codinome – o Planeta Vermelho –, justificado pelo tom ocre que manifesta quando observado da Terra. Isso se deve, principalmente, à abundância de óxido de ferro em sua superfície e às severas tempestades de areia, provocadas por fortes ventos que podem chegar a 300 km/h. Dessa forma, a fina atmosfera marciana, constituída, sobretudo, por dióxido de carbono, nitrogênio e argônio, fica impregnada de partículas sólidas em suspensão, o que corrobora com essa característica avermelhada.

Sabendo que a massa da Terra é cerca de dez vezes a de Marte e o raio terrestre corresponde aproximadamente ao dobro do marciano, e considerando ainda que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície da Terra seja de $10,0 \text{ m/s}^2$, responda às questões a seguir. (Desconsidere o movimento de rotação dos planetas.)



The red planet mars

Marte, o Planeta Vermelho.

a) Qual é a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de Marte?

b) Se na Terra um pequeno objeto lançado verticalmente para cima atinge uma altura máxima de 2,0 m, que altura máxima atingiria o mesmo objeto se fosse lançado verticalmente para cima em Marte, em idênticas condições? Despreze o efeito atmosférico sobre os movimentos.

15. Admita que, na superfície terrestre, desprezados os efeitos ligados à rotação do planeta, a aceleração da gravidade tenha intensidade 10 m/s^2 . Sendo o raio da Terra aproximadamente igual a 6400 km, a que altitude a aceleração da gravidade terá intensidade $0,40 \text{ m/s}^2$?

16. Dois planetas esféricos, P_1 e P_2 , têm raios respectivamente iguais a R e $5R$. Desprezados os efeitos ligados às rotações, verifica-se que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de P_1 é g_0 e na superfície de P_2 é $10g_0$. Qual é a relação entre as densidades absolutas de P_1 e P_2 ?

17. Um asteroide adentra o campo gravitacional terrestre e, sob sua ação exclusiva, passa a se mover de encontro à Terra, em cuja superfície a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s^2 . Calcule o módulo da aceleração do asteroide quando ele estiver a uma altitude de nove raios terrestres.



DESCUBRA MAIS

- 1 O experimento realizado por Henry Cavendish em 1798 utilizando uma balança de torção para determinar a Constante da Gravitação (G) presente na **Lei de Newton da Atração das Massas** $\left(F = G \frac{Mm}{d^2} \right)$, com $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ é considerado um dos dez mais importantes da Física. Pesquise sobre esse experimento.
- 2 Há vários satélites estacionários, de diversas nacionalidades, até mesmo brasileira, em órbita ao redor da Terra servindo às telecomunicações. Todos eles percorrem uma mesma órbita, aproximadamente circular, em um mesmo sentido. Como se justifica o fato de não ocorrerem colisões entre esses satélites?
- 3 Na Terra, além do campo gravitacional terrestre, somos influenciados também por campos gravitacionais de outros astros, como o do Sol e o da Lua. A participação mais ou menos intensa desses campos na formação de um campo gravitacional resultante é determinante para a ocorrência de muitos fenômenos na Terra, como as marés. Dê uma explicação mais substanciada para esse fenômeno.
- 4 Uma possibilidade que aterroriza a todos é a de que um asteroide colida com a Terra, o que provocaria um cataclismo de proporções inimagináveis. Pesquise sobre esse assunto para saber o que tem sido feito pela comunidade científica para impedir esse tipo de ocorrência.

INTERSABERES

Teorias que se sucedem

Será que as teorias sobre Física preconizadas até o momento são definitivas? Mesmo os grandes princípios, linhas mestras dessa fascinante ciência, seriam imunes a retoques? A resposta a essas perguntas é: não. A Física pode ser comparada com um grande edifício em permanente construção e reformas. É algo que se reinventa. Novas concepções substituem a cada dia explicações antigas que se tornam obsoletas à medida que a tecnologia evolui. A mente indagadora, própria de pesquisadores e cientistas, aliada a laboratórios e equipamentos cada vez mais sofisticados, traz à luz detalhes que norteiam novos conhecimentos e caminhos.

Newton formulou sua teoria da gravidade imaginando interações instantâneas entre astros, que deveriam trocar forças do tipo ação e reação quando em presença uns dos outros. Essas forças seriam responsáveis por suas trajetórias no céu. Einstein, por sua vez, reformulou tal noção, introduzindo o modelo de um espaço-tempo deformado pela presença de grandes massas. Já a Mecânica Quântica propõe que ações gravitacionais devam se propagar à velocidade da luz por meio de partículas mediadoras denominadas *grávitons*.

Stephen Hawking, considerado um dos maiores físicos teóricos da atualidade, é um estudioso da gravidade e suas proposições constituem novos elementos que visam alargar as fronteiras sobre o conhecimento do Universo. Ele nasceu em 1942 na Inglaterra, doutorou-se em Cosmologia e ocupou a cátedra que pertenceu a Isaac Newton na Universidade de Cambridge.

Para saber mais informações a respeito dessas teorias, leia o trecho a seguir, em que Simon Singh, autor do consagrado livro *O último Teorema de Fermat*, analisa a evolução do conceito de gravidade de Newton a Einstein.

Stephen Hawking, vivenciando, em 2007, sensação de gravidade zero quando seu corpo foi solto pelos tripulantes de um avião em trajetória definida exclusivamente pela aceleração da gravidade. Mesmo sendo tetraplégico, levitou com a mesma leveza de uma pessoa dotada de plena motricidade.



[...] A teoria da gravidade de Newton ainda é amplamente utilizada hoje para calcular tudo, da trajetória de uma bola de tênis às forças que atuam sobre uma ponte suspensa; do balançar de um pêndulo à trajetória de um míssil. A fórmula de Newton continua a ser altamente precisa quando aplicada a fenômenos que ocorrem dentro do reino da baixa gravidade terrestre, onde as forças são comparativamente fracas. Contudo, a teoria da gravidade de Einstein era melhor, em última análise, porque podia ser aplicada igualmente à gravidade fraca do ambiente da Terra e aos ambientes de gravidade intensa que envolvem as estrelas. Embora a teoria de Einstein fosse superior à de Newton, o criador da relatividade geral foi rápido em reconhecer o gigante do século XVII sobre cujos ombros ele tinha se erguido: "Ele encontrou o único caminho que era possível, em sua época, para um homem do mais elevado intelecto e poder criativo". [...]

A compreensão da gravidade é crítica para a Astronomia e a Cosmologia porque a gravidade é a força que guia os movimentos e as interações de todos os corpos celestes. A gravidade determina se um asteroide vai colidir com a Terra ou girar inofensivamente; determina como duas estrelas orbitam uma em torno da outra em um sistema estelar binário; e explica por que uma estrela especialmente maciça pode afinal colapsar sob seu próprio peso e formar um buraco negro.

Einstein estava ansioso para ver como a sua nova teoria da gravidade afetaria nossa compreensão do Universo, e assim, em fevereiro de 1917, ele escreveu um trabalho científico intitulado *Considerações cosmológicas da teoria da relatividade geral*. A palavra-chave no título era "cosmológica". Einstein não estava mais interessado no desvio da órbita do planeta Mercúrio ou no modo como o nosso Sol entorta a luz das estrelas. Ele focalizava agora o papel da gravidade em uma grande escala cósmica.

Einstein queria entender as propriedades e interações de todo o Universo. Quando Copérnico, Kepler e Galileu formularam sua visão do Universo, eles focalizaram suas atenções sobre o Sistema Solar, mas Einstein estava verdadeiramente interessado em todo o Universo, até onde qualquer telescópio podia ver e ainda mais além.
[...]

SINGH, Simon. *Big-bang*. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O texto a seguir põe em xeque as leis de Newton, a teoria da relatividade e o próprio valor da velocidade da luz no vácuo ($c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s) por meio da busca de respostas para o seguinte questionamento: Como explicar a desaceleração verificada nas espaçonaves Pioneer 10 e 11 em sua passagem na região entre Júpiter e Saturno? Aí está a alma da Ciência: a indagação; o questionamento... E a Física avança fundamentada em concepções e teorias que se sucedem.

Uma força a desvendar

Diversas teorias tentam explicar o que puxou os freios das Pioneer 10 e 11

Um dos mistérios mais intrigantes da Física é a “anomalia Pioneer”, a desaceleração de duas sondas espaciais por uma força desconhecida. A Nasa lançou a Pioneer 10 e a 11 em 1972 e 1973, respectivamente, e as duas enviaram imagens extraordinárias de Júpiter e Saturno. Entretanto, enquanto as espaçonaves continuavam sua viagem a velocidade próxima a 43 mil km/h, o astrônomo John Anderson, do Laboratório de Propulsão a Jato em Pasadena, Califórnia, observou anomalias nos dados de telemetria que datavam de 1980. Com análises contínuas, os pesquisadores determinaram que as aeronaves desaceleravam a um ritmo constante: a cada ano reduziavam 12,8 mil km em relação à sua posição prevista. O estranho comportamento já rendeu várias teorias, mas a escassez de dados dificultou uma definição. Agora, uma proposta para analisar a telemetria a partir dos primeiros anos poderia literalmente apontar para a explicação correta.

A teoria mais óbvia era de que algo nas próprias espaçonaves criava uma força de frenagem — vazamento de gás ou radiação de calor, talvez. Ao longo dos anos, porém, os pesquisadores passaram a considerar essa hipótese cada vez mais improvável, e alguns físicos começaram a explorar possíveis falhas nas leis de Newton e na teoria da relatividade. Outros sugeriram que a matéria escura seria a responsável, pois exerceria força gravitacional ou de arrasto. Uma terceira teoria adota a ideia de que existe uma ligeira aceleração na velocidade da luz, que poderia resultar na ilusão de que as sondas estão desacelerando: se a luz viaja mais rápido, os sinais de telemetria chegariam mais rapidamente e as naves pareceriam estar mais próximas.

HELLEMANS, Alexander. *Scientific American Brasil*, ano 4, n. 43, dez. 2005.



Representação artística (com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia) da Pioneer 10 passando pelo planeta Júpiter.

Compreensão, pesquisa e debate

1. Dos muitos modelos apresentados para explicar a gravidade, o newtoniano, que você estudou neste capítulo, é um dos mais simples, porém satisfatório para elucidar muitos fenômenos. A queda dos corpos e a gravitação da Lua em torno da Terra, por exemplo, são justificadas a contento pelas teorias de Newton. Que limitações você associa a essas teorias? Discuta com os colegas e o professor.
2. Os buracos negros, cadáveres estelares existentes no Universo que provocam em torno de si influências gravitacionais de estupenda magnitude, são mais bem explicados por qual das teorias sobre gravidade?

CAPÍTULO

9

MOVIMENTOS EM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME (BALÍSTICA)

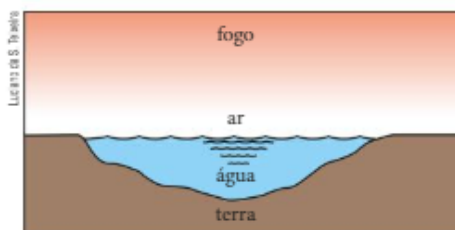
1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos os movimentos de corpos que, após serem abandonados ou lançados, se submetem exclusivamente à força **peso**. Será, portanto, negligenciada a influência do ar nesses movimentos.

Descreveremos os movimentos de corpos em queda vertical a partir do repouso, de corpos lançados verticalmente, de corpos lançados obliquamente em relação à horizontal e de corpos lançados horizontalmente.

Por mais ou menos vinte séculos (do século IV a.C. até o século XVI), as explicações para esses movimentos basearam-se em ideias de filósofos gregos, destacadamente Aristóteles (século IV a.C.). É preciso alertar que esses pensadores elaboravam suas teorias sem realizar experimentos quantitativos que pudessem confirmá-las ou rejeitá-las. Obviamente não tinham, naquela época, os conceitos de campo gravitacional e de inércia, entre muitos outros.

Aristóteles e seus seguidores eram adeptos de uma teoria segundo a qual todos os corpos terrestres eram constituídos de quantidades definidas de quatro “elementos”: a terra, a água, o ar e o fogo.



Os quatro “elementos” encontravam-se nesta ordem: a terra mais embaixo e o fogo mais em cima.

Além disso, todo corpo, ao ser solto, buscava seu “lugar natural”, determinado pelo “elemento” que predominava nele. Assim, uma pedra abandonada no ar buscava o solo porque era constituída predominantemente de terra. Do mesmo modo, uma bolha gasosa, produzida dentro da água, subia em busca de seu “lugar natural”: o ar. As labaredas elevavam-se no ar, também em busca de seu “lugar natural”: o fogo.

Todos esses movimentos **verticais** eram chamados de movimentos “naturais”, pois não precisavam, segundo aqueles pensadores, de força (hoje, força resultante) para ocorrer. Era uma busca espontânea do “lugar natural”.

Com relação à queda de um corpo – uma pedra abandonada, por exemplo –, os aristotélicos pregavam que ela ocorria de modo tanto mais rápido quanto mais pesado fosse o corpo.

Assim, se duas pedras de pesos diferentes fossem abandonadas simultaneamente de uma mesma altura, a mais pesada buscaria com maior rapidez seu “lugar natural” e, por isso, chegaria ao solo antes da mais leve.

Além dos movimentos verticais de corpos terrestres abandonados (movimentos “naturais”), os movimentos dos corpos celestes também não precisavam de força (entenda força resultante) para se manter. Acreditavam que esses movimentos sempre aconteciam, também naturalmente, em caminhos perfeitamente circulares, com velocidades de valores constantes.

Entretanto, um corpo terrestre necessitava, para realizar um movimento **não vertical**, de uma força (força resultante) não só para que esse tipo de movimento se iniciasse, mas também para que se mantivesse.

Movimentos não verticais de corpos terrestres eram, para os aristotélicos, movimentos “violentos” (ou “impetuosos”), que requeriam uma força (*impetus*) para justificar sua manutenção.

Veja, na figura, como os aristotélicos acreditavam que era o formato da trajetória de uma bala de canhão lançada obliquamente:



No lançamento, a bala recebia do canhão uma força (*impetus*) que não apenas iniciava um movimento “violento”, mas continuava atuando na bala (!), mantendo-a em um movimento em linha reta. Durante esse movimento, o *impetus* ia sendo degenerado pela resistência do ar e, por isso, o movimento “violento” enfraquecia.

Antes do início da queda (vertical) da bala, que era um movimento “natural”, havia uma fase de transição em que o movimento “violento” agonizava e dava lugar ao movimento “natural”.



Todas essas concepções aristotélicas a respeito dos movimentos só começaram a desabar em meados do século XVI, graças aos trabalhos de vários cientistas, destacadamente Galileu.

2. ACELERAÇÃO DE UM CORPO EM MOVIMENTO LIVRE

Considere corpos lançados ou abandonados nas proximidades da Terra, no instante $t_0 = 0$, e despreze qualquer influência que o ar possa ter em seus movimentos. Isso equivale a supor ausente a atmosfera terrestre (vácuo).

Desse modo, após o instante em que os corpos se livram dos agentes que os lançaram ou abandonaram, a única força que atua neles é o peso \vec{P} . Dizemos, então, que o movimento da partícula é um **movimento livre**.

Aplicando o **Princípio Fundamental da Dinâmica** a qualquer um desses corpos, após $t_0 = 0$, temos:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Mas \vec{F} é o peso do corpo, que é igual a $m \vec{g}$.

$$\text{Assim: } m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Concluimos, então, que:

A aceleração vetorial de uma partícula sob a ação exclusiva de seu peso é igual ao vetor campo gravitacional \vec{g} :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Observe que a aceleração vetorial da partícula não depende de sua massa, fato que será comentado na seção 5 deste capítulo.

3. CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

Como sabemos, a Terra é fonte de um campo gravitacional. Esse campo é descrito pelo vetor campo gravitacional \vec{g} , que varia de ponto para ponto do campo. Essa variação de \vec{g} pode ocorrer em sua intensidade, em sua direção e em seu sentido. A figura a seguir mostra o vetor campo gravitacional nos pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 .

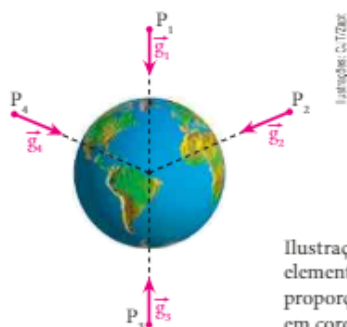


Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Entretanto, se tomarmos uma região de dimensões desprezíveis em comparação com o raio da Terra, podemos considerar que, em todos os seus pontos, o vetor \vec{g} será o mesmo, ou seja, ele terá a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido. Nesse caso, o campo gravitacional será **uniforme**. É o que ocorre, por exemplo, em todos os pontos de uma sala de aula, de um edifício ou mesmo da cidade onde moramos.

4. MOVIMENTO VERTICAL EM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

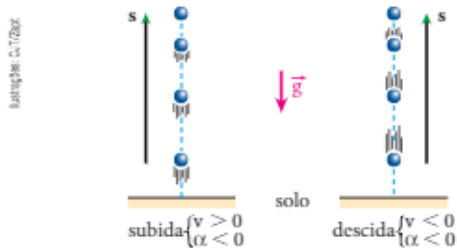
Considere um corpo abandonado ou lançado verticalmente para cima ou para baixo. Em qualquer um desses casos, como vimos, a aceleração vetorial (\vec{a}) é constante e igual a \vec{g} . Representemos por g o **módulo** dessa aceleração.

Como, nesses casos, os movimentos são retilíneos, a aceleração vetorial (\vec{a}) e a aceleração escalar (α) têm módulos iguais: $|\alpha| = g$ (constante $\neq 0$). Assim:

Em um campo gravitacional uniforme, o movimento vertical de um corpo sob a ação exclusiva de seu peso é **uniformemente variado**, pois sua aceleração escalar é constante e diferente de zero. O módulo dessa aceleração é dado por: $|\alpha| = g$

Lembre-se, entretanto, de que a aceleração escalar (α) está sempre acompanhada de um sinal algébrico nas equações do movimento. Esse sinal (positivo ou negativo) depende **apenas** da orientação adotada para a trajetória (para cima ou para baixo).

Considere, por exemplo, uma partícula lançada verticalmente para cima. Como você já sabe, ela sobe em movimento retardado até parar, descendo, em seguida, em movimento acelerado. Suponha que a trajetória esteja orientada para cima.



Durante a subida, o movimento é retardado e, por esse motivo, a velocidade e a aceleração escalares devem ter sinais contrários em qualquer instante do movimento. Como o movimento de subida tem o mesmo sentido da trajetória, a velocidade escalar é positiva. Assim, a aceleração escalar deve ser negativa.

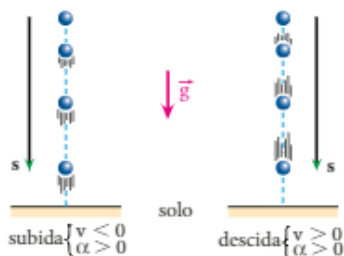
O movimento de descida, por sua vez, é acelerado. Consequentemente, a velocidade e a aceleração escalares devem ter sinais iguais. Como esse movimento tem sentido oposto ao da trajetória, a velocidade escalar é negativa. Nesse caso, a aceleração escalar também deve ser negativa. Assim:

Se a trajetória estiver orientada para **cima**, a aceleração escalar será **negativa**, não importando se o movimento é ascendente ou descendente.

Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, temos: $\alpha = -g$

No ponto mais alto atingido pela partícula, sua velocidade é nula, mas o mesmo não acontece com sua aceleração, que também tem módulo igual a g nesse ponto.

Suponha agora a trajetória orientada para baixo.



Na subida, a velocidade escalar é negativa. Assim, como o movimento é retardado, a aceleração escalar é positiva. Na descida, a velocidade escalar é positiva, e, como o movimento é acelerado, também é positiva a aceleração escalar. Assim:

Se a trajetória estiver orientada para **baixo**, a aceleração escalar será **positiva**, não importando se o movimento é ascendente ou descendente.

Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, temos: $\alpha = +g$

Para determinar o sinal da aceleração escalar de maneira bem mais prática, podemos usar o valor algébrico de \vec{g} em relação à orientação da trajetória: quando o sentido de \vec{g} é o mesmo da orientação da trajetória, usamos $\alpha = +g$ nas equações do movimento. Caso contrário, usamos $\alpha = -g$.

Que valor de g vamos usar nessas equações?

Considerando apenas uma casa decimal, o valor de g nas vizinhanças da superfície da Terra é igual a $9,8 \text{ m/s}^2$. Para simplificar cálculos, entretanto, costuma-se arredondar esse valor para 10 m/s^2 .



Fotografia estroboscópica do movimento acelerado de uma bola em queda livre, a partir do repouso.

5. PROPRIEDADES DO MOVIMENTO VERTICAL

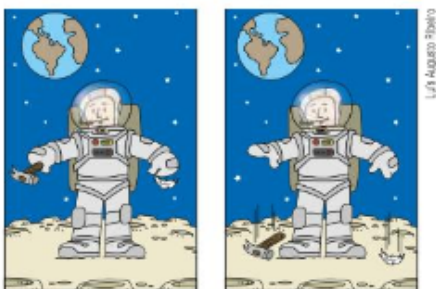
O movimento vertical que estamos estudando conta com algumas propriedades importantes. Antes de conhecê-las, lembre-se de que esse movimento está sendo analisado supondo sempre o campo gravitacional uniforme e considerando o móvel sob a ação exclusiva de seu peso, ou seja, em movimento livre.

1ª Propriedade

Corpos abandonados num mesmo local e de uma mesma altura em relação ao solo demoram o mesmo intervalo de tempo para chegar ao solo, não importando suas massas.

Isso decorre do fato de suas acelerações serem iguais, quaisquer que sejam suas massas. Assim, se não fosse a presença do ar, uma pena e um martelo cairiam com a mesma aceleração. Isso normalmente causa estranheza, pelo fato de estarmos habituados a presenciar quedas de corpos com influência do ar. Essa influência é mais significativa para a pena que para o martelo, por isso ela demora mais para cair.

Na Lua, em 2 de agosto de 1971, o astronauta David Scott soltou, da mesma altura e em um mesmo instante, um martelo e uma pena de falcão. Por causa da ausência de atmosfera, o martelo e a pena realizaram quedas livres, mantendo-se lado a lado até atingirem o solo lunar.



Na Lua, as quedas são realmente livres, pois lá não existe atmosfera. Assim, um martelo e uma pena, abandonados simultaneamente de uma mesma altura, caem com a mesma aceleração, chegando ao solo no mesmo instante e com a mesma velocidade final, como representado na ilustração.

Observe agora o experimento realizado na superfície da Terra:



Na Terra, as quedas não são livres. Por isso, quando uma bola de borracha e uma folha de papel são abandonadas de uma mesma altura, a bola chega ao chão bem antes que a folha de papel: a resistência do ar afeta muito mais o movimento do papel que o da bola.



Repetindo o experimento com a folha de papel bem amassada, a bola e o papel chegam ao chão quase no mesmo instante, pois a resistência do ar no papel amassado ficou consideravelmente reduzida.

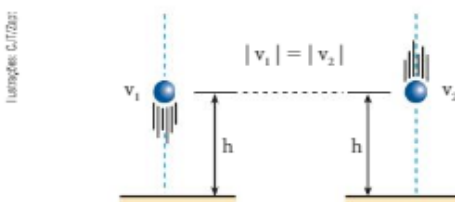
Antes de estudar as duas propriedades a seguir, analise a questão 13 do Capítulo 2, na primeira unidade deste volume, pois elas são propriedades de **qualquer** movimento uniformemente variado que tenha as duas etapas: a ida e a volta.

2ª Propriedade

Quando um corpo é lançado verticalmente para cima, a velocidade com que ele passa por um ponto qualquer da trajetória, na subida, tem o mesmo módulo da velocidade com que ele passa pelo mesmo ponto, na descida.

Essa propriedade pode ser demonstrada a partir da **equação de Torricelli**, considerando v_1 a velocidade inicial e v_2 a final: $(v_2)^2 = (v_1)^2 + 2\alpha \Delta s$

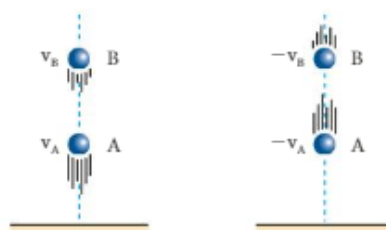
Como $\Delta s = 0$, $(v_2)^2 = (v_1)^2 \Rightarrow |v_2| = |v_1|$



Assim, se um objeto fosse lançado verticalmente para cima a partir do solo, ele chegaria de volta à posição inicial com velocidade de módulo igual ao da velocidade de lançamento (desprezada a influência do ar).

3ª Propriedade

O intervalo de tempo decorrido entre as passagens por dois pontos A e B da trajetória é o mesmo na subida e na descida.



Na subida de A até B, temos: $\alpha = \frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t_{AB}}$

Logo: $\alpha = \frac{v_B - v_A}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{\alpha}$ (I)

Na descida de B até A, temos: $\alpha = \frac{\Delta v_{BA}}{\Delta t_{BA}}$

Logo: $\alpha = \frac{-v_A - (-v_B)}{\Delta t_{BA}} \Rightarrow \Delta t_{BA} = \frac{v_B - v_A}{\alpha}$ (II)

Comparando as expressões (I) e (II): o intervalo de tempo para a partícula subir de A até B é igual ao intervalo de tempo para ela descer de B até A, ou seja:

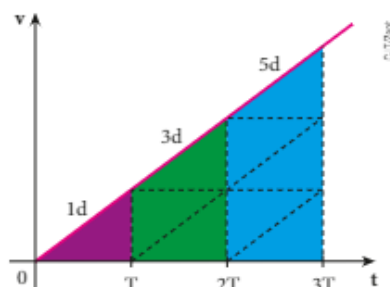
$$\Delta t_{AB} = \Delta t_{BA}$$

Dessa propriedade, concluímos também que, quando um corpo é atirado para cima, o intervalo de tempo decorrido até ele atingir a altura máxima é o mesmo que decorre, em seguida, para voltar ao ponto de lançamento.

Propriedade especial para corpos que caem a partir do repouso

Um corpo caindo livremente a partir do **repouso** percorre, em iguais intervalos de tempo, distâncias pro-

porcionais aos números ímpares, isto é, 1d, 3d, 5d e assim por diante. Isso pode ser facilmente provado lembrando que a distância percorrida pode ser obtida pela "área" no gráfico da velocidade escalar em função do tempo.



Você também pode provar essa propriedade usando o seguinte fato: durante um determinado intervalo de tempo t , o corpo cai: $\Delta s = \frac{g}{2} t^2$.

AMPLIANDO O OLHAR

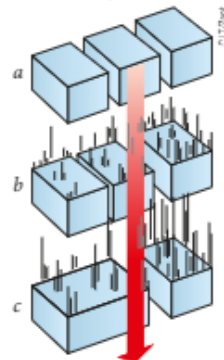
Uma experiência imaginária de Galileu

Galileu Galilei, o grande físico italiano do século XVII, não tinha como provar por teoria ou mostrar experimentalmente que a aceleração de corpos de massas diferentes, em queda livre, é rigorosamente a mesma. Por isso, concebeu mentalmente o experimento descrito a seguir.

Galileu imaginou três corpos **idênticos**, cada um com massa m , abandonados da mesma altura (a). Não há, nesse caso, nenhum motivo para que suas acelerações sejam diferentes. Caem, portanto, lado a lado.

Em seguida, ele imaginou que dois desses corpos, durante a queda, se ligassem um ao outro, como se fossem duas pessoas que, caindo emparelhadas, se dessem as mãos (b). Como esses corpos já caíam lado a lado, o fato de se interligarem não deveria alterar as características de suas quedas.

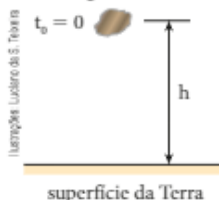
Finalmente, ele pensou que os dois corpos ligados se comportariam exatamente como um único corpo de massa $2m$ (c). Assim, concluiu que um corpo de massa $2m$ e um de massa m devem cair com a mesma aceleração.



QUESTÕES COMENTADAS



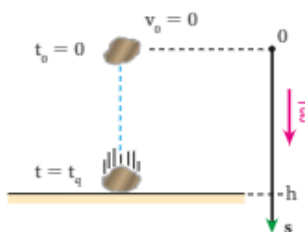
1 No instante $t_0 = 0$, uma pedra é abandonada (velocidade inicial nula) de um ponto situado nas proximidades da superfície da Terra a uma altura h . Desprezando a influência do ar e sendo g o módulo do vetor campo gravitacional, determine:



- a) o intervalo de tempo decorrido desde o abandono da pedra até seu impacto com o solo, ou seja, o tempo de queda (t_q);
- b) o módulo da velocidade com que a pedra atinge o solo, isto é, sua velocidade de impacto (v_i).

RESOLUÇÃO

Adotando a origem dos espaços na posição de abandono da pedra e orientando a trajetória para baixo, temos $\alpha = g$.



Em $t_0 = 0$:
 $s_0 = 0$ e $v = v_0 = 0$
 Em $t = t_q$:
 $s = h$ e $v = v_i$

- a) A função horária do espaço é adequada para resolver este item, pois ela relaciona espaço com tempo:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow h = 0 + 0t_q + \frac{g}{2} t_q^2$$

Logo: $t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Observe que o tempo de queda não depende da massa do corpo abandonado, o que está de acordo com a **1ª propriedade** do estudo do movimento vertical.

- b) De acordo com a **equação de Torricelli**, temos:

$$v^2 = (v_0)^2 + 2\alpha(s - s_0) \Rightarrow (v_i)^2 = 0^2 + 2g(h - 0)$$

Logo: $v_i = \sqrt{2gh}$

Observe que a velocidade v_i com que a pedra chega ao chão também não depende de sua massa.

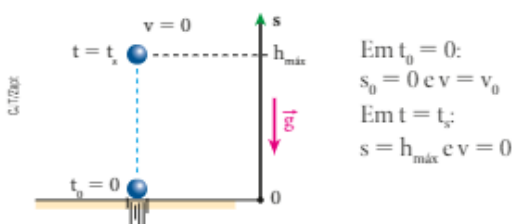
Respostas: a) $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; b) $\sqrt{2gh}$

2 Um corpo é arremessado verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, com velocidade v_0 em $t_0 = 0$. Desprezando a influência do ar e sendo g o módulo da aceleração da gravidade, determine:

- o intervalo de tempo decorrido desde $t_0 = 0$ até a pedra atingir sua altura máxima, isto é, o tempo de subida (t_s);
- o intervalo de tempo durante o qual a pedra volta do ponto de altura máxima até a superfície da Terra, ou seja, o tempo de queda (t_q);
- a altura máxima (h_{\max}) atingida pela pedra em relação ao ponto de lançamento.

RESOLUÇÃO

Nesse caso, adotando a origem dos espaços no ponto de lançamento e orientando a trajetória para cima, temos $\alpha = -g$.



- a) Usando a função horária da velocidade escalar, temos:

$$v = v_0 + \alpha t \Rightarrow 0 = v_0 - g t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0}{g}$$

- b) O tempo de queda (t_q) é igual ao tempo de subida.

Assim: $t_q = \frac{v_0}{g}$

- c) Usando a **equação de Torricelli**, temos:

$$v^2 = (v_0)^2 + 2\alpha(s - s_0)$$

$$0^2 = (v_0)^2 + 2(-g)(h_{\max} - 0) \Rightarrow h_{\max} = \frac{(v_0)^2}{2g}$$

Observe que o tempo de subida, o tempo de queda e a altura máxima são independentes da massa do corpo.

Respostas: a) $\frac{v_0}{g}$; b) $\frac{v_0}{g}$; c) $\frac{(v_0)^2}{2g}$

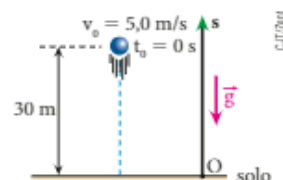
3 Um balão sobe verticalmente com velocidade escalar constante de módulo 5,0 m/s. Quando sua altura em relação ao solo é de 30 m, um garoto abandona do balão um pequeno pacote, que fica sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre, cuja intensidade é de 10 m/s².

Determine:

- a altura máxima que o pacote alcança em relação ao solo;
- o intervalo de tempo gasto pelo pacote para chegar ao solo, a contar do instante em que foi abandonado;
- o módulo da velocidade escalar de impacto do pacote contra o solo.

RESOLUÇÃO

- a) Quando o garoto abandona o pacote, este está subindo verticalmente a 5,0 m/s em relação ao solo. Por isso, em relação ao solo, o pacote ainda sobe um pouco, antes de descer.



Adotando a origem dos espaços no solo e orientando a trajetória para cima, temos, para o pacote:

$$s_0 = 30 \text{ m}, v_0 = 5,0 \text{ m/s e } \alpha = -g = -10 \text{ m/s}^2$$

Usando a **equação de Torricelli**, temos:

$$v^2 = (v_0)^2 + 2\alpha(s - s_0) \Rightarrow v^2 = 25 - 20(s - 30) \quad (I)$$

Quando o pacote atinge a altura máxima, temos:

$$v = 0 \text{ e } s = h_{\max}$$

Substituindo em (I), temos:

$$0 = 25 - 20(h_{\max} - 30) \Rightarrow h_{\max} = 31,25 \text{ m}$$

- b) Usando a função horária do espaço, temos:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow s = 30 + 5t - 5t^2 \quad (II)$$

Ao chegar ao solo: $s = 0$ e $t = t_c$

Substituindo em (II), temos:

$$0 = 30 + 5t_c - (5t_c)^2 \Rightarrow t_c = 3,0 \text{ s}$$

- c) Usando a função horária da velocidade, temos:

$$v = v_0 + \alpha t \Rightarrow v = 5 - 10t \quad (III)$$

Ao chegar ao solo: $v = v_c$ e $t = t_c = 3,0 \text{ s}$

Substituindo em (III), obtemos:

$$v_c = 5 - 10 \cdot 3 \Rightarrow v_c = -25 \text{ m/s} \Rightarrow |v_c| = 25 \text{ m/s}$$

Respostas: a) 31,25 m; b) 3,0 s; c) 25 m/s



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

4. Um corpo cai de uma altura igual a 245 m em relação ao solo. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e supondo ausente a atmosfera, determine:

- o tempo de duração da queda;
- o módulo da velocidade do corpo imediatamente antes de se chocar com o solo.

5. Uma esfera de chumbo é lançada verticalmente para cima e retorna ao ponto de partida 8,0 s após o lançamento. Considerando desprezíveis as influências do ar e usando g igual a 10 m/s^2 , calcule:

- o módulo da velocidade de lançamento;
- a altura máxima atingida pela esfera em relação ao ponto de partida.

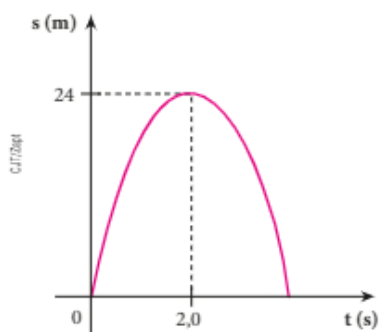
6. Uma partícula é abandonada a partir do repouso, de um ponto situado a 270 m acima do solo. Divida essa altura em três partes de modo que sejam percorridas em intervalos de tempo iguais.

7. Uma bolinha de chumbo é lançada verticalmente para cima, realizando uma ascensão praticamente livre, de duração maior que 2 s.

Considerando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, responda às questões:

- Qual é a distância percorrida pela bolinha durante o último segundo da subida?
- A resposta do item *a* depende do módulo da velocidade de lançamento?

8. Da superfície de um astro, uma pedra foi lançada verticalmente para cima. Sua posição em relação à superfície variou com o tempo, de acordo com o gráfico seguinte, que é praticamente um arco de parábola:



Calcule:

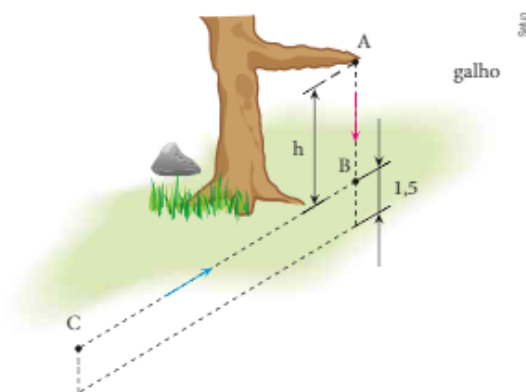
- o módulo v_0 da velocidade de lançamento da pedra;
- a intensidade g do campo gravitacional na superfície desse astro.

9. De um helicóptero descendo verticalmente a 6 m/s é abandonada uma esfera de aço, que demora 2 s para chegar ao solo. Considerando livre a queda da esfera, calcule a altura de onde ela foi abandonada ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

10. Em uma de suas aventuras, o cavaleiro Tião estava em uma planície, sentado no galho de uma árvore, a 4,7 m do chão.

Precisando partir, assobiou para seu cavalo Dragão, que pastava ali por perto.

Dragão, com velocidade constante de 10 m/s , galopou em linha reta até Tião que, depois de ter-se largado do galho, caiu sobre a sela do cavalo, elevada de 1,5 m do chão.



Determine a distância, medida na horizontal, entre o cavaleiro e a sela no momento em que ele se soltou do galho. Use g igual a 10 m/s^2 .

11. Do teto de um elevador de 2,45 m de altura interna, subindo em movimento uniforme, desprende-se um parafuso. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que o parafuso se desprende até o instante em que atinge o piso do elevador;
- o deslocamento do elevador durante o intervalo de tempo a que se refere o item anterior, supondo que sua velocidade escalar seja igual a 2 m/s .

12. De um telhado caem gotas de chuva separadas por intervalos de tempo iguais entre si. No instante em que a quinta gota se desprende, a primeira toca o solo. Qual é a distância que separa as duas últimas gotas consecutivas, nesse instante, se a altura do telhado é de 16 m? Não considere a resistência do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

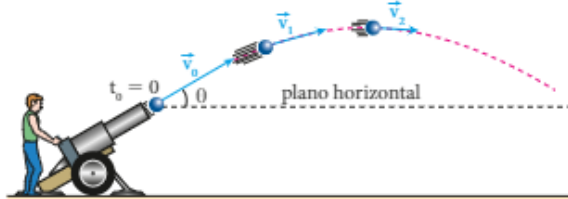
6. MOVIMENTO PARABÓLICO NAS PROXIMIDADES DA TERRA

Observe a imagem a seguir, que mostra partículas incandescentes lançadas obliquamente durante uma erupção vulcânica.



Vulcão em erupção lançando partículas obliquamente.

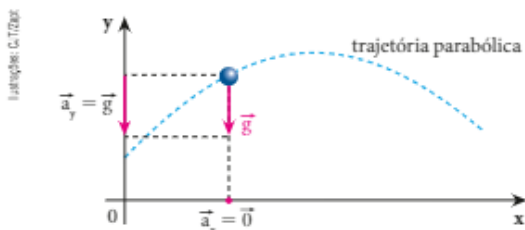
Considere um projétil lançado obliquamente com uma velocidade inicial \vec{v}_0 , inclinada de um ângulo θ em relação a um plano horizontal, e ignore influências do ar.



Como ocorre em todo movimento, a velocidade vetorial é tangente à trajetória a todo instante, tendo o mesmo sentido do movimento, como está representado na figura anterior. Note que a velocidade no ponto mais alto atingido pelo projétil é horizontal e, portanto, **não nula**.

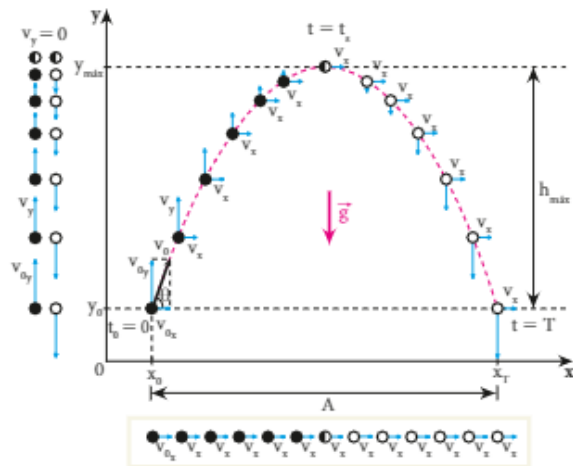
Decomposição do movimento parabólico em direções horizontal e vertical

Considere um sistema de eixos ortogonais Oxy , no mesmo plano de um movimento parabólico de aceleração vetorial constante e igual a \vec{g} . Projete essa aceleração sobre os eixos.



Dessa projeção, concluímos que a aceleração vetorial segundo Oy (eixo vertical) é constante e igual a \vec{g} , ao passo que a aceleração vetorial segundo Ox (eixo horizontal) é constantemente nula.

Se projetarmos sobre os eixos Ox e Oy as posições da partícula em movimento parabólico, obteremos, evidentemente, dois movimentos retilíneos.



Assim, no movimento projetado em Oy , a aceleração \vec{a}_y é tangencial e constante. Pelo fato de essa aceleração ser constante e não nula, concluímos que a aceleração escalar segundo Oy também é constante e diferente de zero: $|\alpha_y| = |\vec{a}_y| = g$

O movimento do projétil segundo o eixo vertical Oy é **retilíneo e uniformemente variado**, com aceleração escalar de módulo igual ao módulo da aceleração da gravidade:

$$|\alpha_y| = g$$

Já a aceleração escalar segundo Ox é constante e igual a zero: $\alpha_x = 0$ (constante).

O movimento do projétil segundo o eixo horizontal Ox é **retilíneo e uniforme**.

É importante notar, nessa figura, que o movimento segundo Oy equivale a um lançamento vertical para cima com velocidade inicial v_{0y} e aceleração escalar $\alpha_y = -g$, uma vez que o eixo Oy está orientado para cima.

Observe, ainda, que:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$$

Analisando a figura anterior, vamos equacionar os movimentos segundo os eixos $0x$ e $0y$.

Lembrando que o movimento é **uniforme** segundo $0x$, podemos escrever: $s = s_0 + vt$, em que $s = x$; $s_0 = x_0$; $v = v_x$.

Assim, obtemos: $x = x_0 + v_x t$

(função horária do espaço segundo $0x$); em que $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta$.

No eixo $0y$, por sua vez, o movimento é **uniformemente variado**, o que nos permite escrever:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2; v = v_0 + \alpha t;$$

$$v^2 = (v_0)^2 + 2\alpha \Delta s$$

em que $s = y$; $s_0 = y_0$; $v_0 = v_{0y}$; $v = v_y$; e $\alpha = \alpha_y = -g$.

Assim, obtemos: $y = y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$

(função horária do espaço segundo $0y$.)

$v_y = v_{0y} - g t$ (função horária da velocidade

escalar segundo $0y$.)

$v_y^2 = (v_{0y})^2 - 2g\Delta y$ (equação de Torricelli

segundo $0y$); em que $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$.

Cálculo dos tempos de subida (t_s), de descida (t_d) e total (T)

Vamos retomar a figura do lançamento do projétil da página 173 e calcular o intervalo de tempo decorrido do instante de lançamento até o instante em que o projétil atinge a altura máxima (tempo de subida: t_s).

Para isso, lembre-se de que no ponto mais alto v_y vale zero. Assim, usando a função horária da velocidade escalar segundo $0y$, temos: $0 = v_{0y} - g t_s$

Logo: $t_s = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin \theta}{g}$

O intervalo de tempo decorrido do instante em que o projétil atinge o ponto de altura máxima até o instante em que retorna ao mesmo nível horizontal do lançamento (tempo de descida: t_d) é igual ao tempo de subida:

$$t_d = \frac{v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

Chamamos **tempo total** (T) o intervalo de tempo decorrido entre o instante de lançamento e o instante de retorno ao nível horizontal de lançamento:

$$T = t_s + t_d \Rightarrow T = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

Observe que, em um lançamento vertical ($\theta = 90^\circ$ e $\sin 90^\circ = 1$), as expressões de t_s e t_d passam a ser $t_s = \frac{v_0}{g}$ e $t_d = \frac{v_0}{g}$, ou seja, as mesmas obtidas na questão 2 deste capítulo. Assim, o lançamento vertical pode ser visto como um caso particular de lançamento oblíquo em que θ é igual a 90° .

Cálculo da altura máxima ($h_{\text{máx}}$)

Ainda com relação à figura da página 173, concluímos que a **altura máxima** ($h_{\text{máx}}$) em relação ao plano horizontal de lançamento pode ser determinada lembrando que $h_{\text{máx}}$ é o valor de Δy , quando v_y se anula.

Pela **equação de Torricelli** segundo $0y$, obtemos:

$$0^2 = (v_{0y})^2 - 2g h_{\text{máx}}$$

Portanto: $h_{\text{máx}} = \frac{(v_{0y})^2}{2g} = \frac{(v_0)^2 \cdot \sin^2 \theta}{2g}$

Observe novamente que, em um lançamento vertical, $\theta = 90^\circ$, o que nos leva à $h_{\text{máx}} = \frac{(v_0)^2}{2g}$, como aconteceu na questão 2 deste capítulo.

Cálculo do alcance horizontal (A)

Chamamos de **alcance horizontal** ou simplesmente **alcance** a grandeza A (ver figura na página 173) correspondente ao deslocamento horizontal do projétil, desde o instante da partida até o instante em que retorna ao nível horizontal do lançamento.

Observe que A é o valor de Δx no instante correspondente ao tempo total (T). Por meio da função horária do espaço segundo $0x$, obtemos:

$$x = x_0 + v_x t \text{ ou } \Delta x = v_x t$$

Fazendo $t = T = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$, temos $\Delta x = A$:

$$A = v_x \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g} = v_0 \cdot \cos \theta \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

$$A = \frac{(v_0)^2}{g} 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \text{ ou } A = \frac{(v_0)^2}{g} \sin 2\theta$$

FAÇA VOCÊ MESMO

Estudando o alcance horizontal em um movimento parabólico

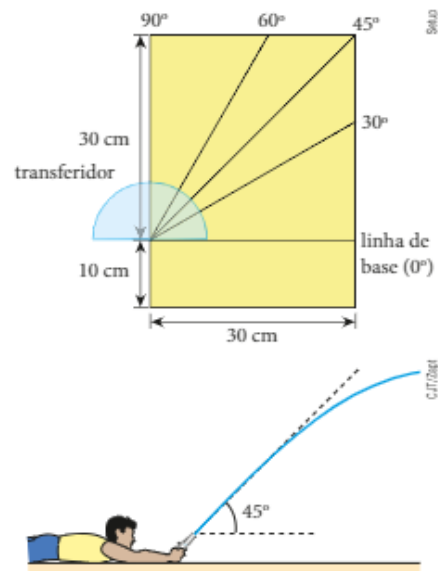
Uma mangueira de água pode servir para verificar muitas propriedades do movimento parabólico em campo gravitacional uniforme.

Material necessário

- 1 mangueira de água dotada de um esguicho de fluxo ajustável;
- 1 placa retangular de madeira compensada com dimensões de 30 cm × 40 cm;
- 1 transferidor;
- 1 régua;
- 1 pincel atômico ou caneta hidrográfica.

Procedimento

- Acople a mangueira à torneira e ajuste o fornecimento de água de modo que realmente seja obtida uma vazão constante e intensa. Conecte a boca da mangueira ao esguicho e regule-o para produzir um jato d'água com espriamento mínimo. Sugerimos que essa atividade seja realizada em uma grande área gramada, plana e horizontal, distante de pessoas, animais e objetos que não possam ser molhados.
- Utilizando o pincel atômico (ou a caneta hidrográfica) e a régua, risque na placa de madeira uma linha paralela a um dos lados de 30 cm, a 10 cm deste lado. Essa linha será a linha de base para a marcação de ângulos e corresponderá ao ângulo de 0° . Em seguida, utilizando o transferidor, o pincel atômico e também a régua, risque as linhas correspondentes aos ângulos de 30° e 60° . Risque também a linha demarcatória do ângulo de 45° , que dispensa o transferidor, já que coincide com a diagonal do quadrado de lados iguais a 30 cm caracterizado na placa de madeira. A linha de 90° será perpendicular à linha de base, já traçada. Veja a ilustração ao lado.
- Abra a torneira e deite-se de bruços sobre o gramado, como indica o esquema ao lado. Coloque, então, a placa de madeira ao lado do esguicho, perpendicularmente ao solo, tal que sua linha de base fique voltada para o chão. Em seguida, vá inclinando o esguicho de maneiras diferentes, de modo a lançar a água com diferentes ângulos. Verifique primeiro que, se você aumentar o ângulo de lançamento, aumentará a altura máxima atingida pelo jato d'água.



Analisando o experimento

Observe que o alcance horizontal máximo é obtido quando o lançamento é feito com um ângulo de 45° . Verifique esse fato utilizando a mangueira de água. Faça também lançamentos com 30° e 60° . Afira a posição do esguicho de acordo com as marcações de ângulos que você tem na placa de madeira. Repare que, para esses dois ângulos, o alcance horizontal é o mesmo, embora com 30° se obtenha uma altura máxima menor do que com 60° . Realize as atividades a seguir.

- Atletas de diversas modalidades esportivas, como lançamento de disco, martelo e dardo, devem visar sempre o máximo alcance horizontal. Eles são treinados sob a orientação de realizarem os "disparos" com um determinado ângulo de "tiro", medido em relação à horizontal. Que ângulo de "tiro" é esse que produz o máximo alcance horizontal?
- Os ângulos de 30° e 60° são os únicos para os quais se obtém o mesmo alcance horizontal em um lançamento balístico? Junto com um colega, faça demonstrações teóricas. Se necessário, peça ajuda ao professor.

Condição de máximo alcance horizontal

Suponhamos que um projétil deva ser lançado de modo a se obter o maior alcance horizontal (**A**) possível, com v_0 e g fixados. Qual deve ser o ângulo de lançamento?

Temos que: $A = \frac{(v_0)^2}{g} \sin 2\theta$

Para o alcance **A** ser máximo, é necessário que $\sin 2\theta$ seja máximo, isto é, igual a 1. Assim:

$$\sin 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Então, podemos escrever:

Para valores determinados da velocidade inicial e da aceleração da gravidade, o máximo alcance horizontal é obtido com um ângulo de lançamento igual a 45° .

Na fotografia ao lado vemos um canhão de um antigo forte, posicionado bem acima do nível do mar e destinado a abater embarcações de invasores, lançando balas de ferro contra elas.



Canhão na cidade de Budva, em Montenegro.

Em uma situação como essa, em que o nível horizontal de lançamento **não** é o mesmo nível horizontal em que se encontra o alvo, convém definir o alcance horizontal de modo diferente do que fizemos até aqui.

O que importa agora é a distância que a bala pode percorrer, medida na horizontal, desde o ponto de lançamento até chegar ao mar. O ângulo de lançamento para que essa distância seja máxima **não** é mais igual a 45° , mesmo desprezando influências do ar. Sua determinação, no entanto, será omitida neste estudo.

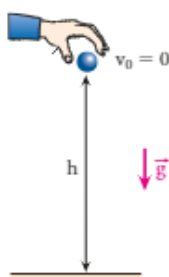
Queda livre e lançamento horizontal

Para um corpo em queda livre a partir do repouso, temos, em módulo:

$$v_0 = 0$$

e

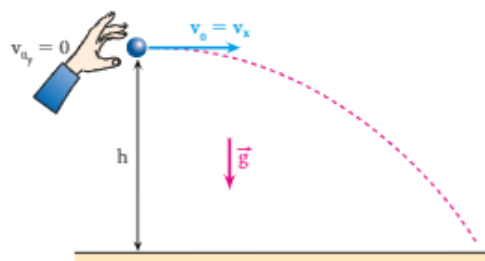
$$a = g$$



Esquema de queda livre.

Para um corpo lançado horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 , desprezadas as influências do ar, temos, em módulo:

$$v_x = v_0 \quad v_{0y} = 0 \quad a_y = g$$



Esquema de lançamento horizontal.

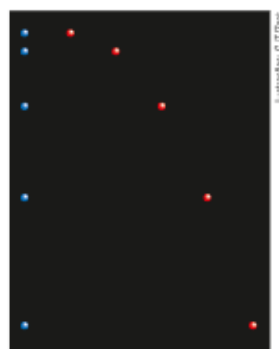
Portanto, **na vertical**, os dois movimentos citados têm as mesmas características. Por isso, o tempo de queda de um corpo lançado horizontalmente e de um corpo abandonado em queda livre, da mesma altura **h**, é igual, **independentemente da velocidade inicial horizontal** do primeiro.

Tanto para o lançamento horizontal como para a queda livre, temos, em relação a um eixo vertical $0y$ orientado para baixo: $\Delta y = \frac{g}{2} t^2$

O tempo de queda t_q corresponde ao instante em que Δy é igual a **h**:

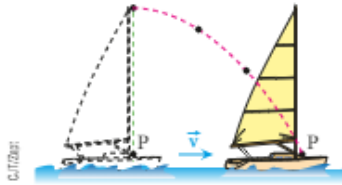
$$h = \frac{g}{2} (t_q)^2 \Rightarrow t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Na ilustração a seguir, que simula uma fotografia estroboscópica fielmente, vemos duas bolas: uma azul em queda livre a partir do repouso e uma vermelha lançada horizontalmente da mesma altura.



Podemos observar que, na vertical, os movimentos são idênticos. Além disso, podemos confirmar que o movimento da bola vermelha é uniforme na horizontal.

A próxima ilustração representa um barco em movimento retilíneo e uniforme, com velocidade de intensidade v . Uma bola de chumbo se desprende do topo do mastro, partindo de um ponto pertencente à mesma reta vertical que passa pelo ponto P do barco.



Sendo desprezível a resistência do ar ao movimento da bola, sua velocidade na horizontal é constante e igual a \vec{v} . Por isso, ela cai no barco, atingindo-o no ponto P . Em relação ao solo, a trajetória da bola é um arco de parábola, mas, em relação ao barco, é um segmento de reta vertical.

Não fosse a influência do ar em seus movimentos, sucessivas bombas abandonadas de um avião voando horizontalmente em movimento retilíneo e uniforme estariam em uma mesma vertical, abaixo do avião, porque suas velocidades na horizontal seriam iguais à do avião.

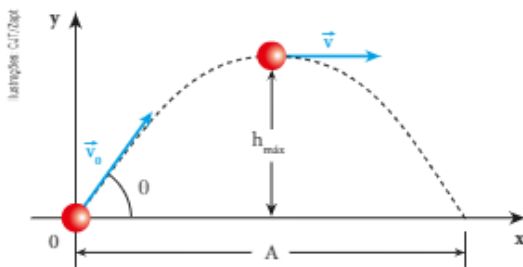


Aeronave B-26 da força aérea dos EUA durante ataque a instalações nazistas na França. Maio de 1944.

Considerando-as pontos materiais, suas trajetórias em relação ao avião seriam segmentos de reta verticais e, em relação ao solo, seriam arcos de parábola.

QUESTÕES COMENTADAS

13 Um corpo é lançado obliquamente com velocidade \vec{v}_0 de módulo 50 m/s, sob um ângulo de lançamento θ ($\sin \theta = 0,6$; $\cos \theta = 0,8$), conforme indica a figura:



Calcule, considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando a influência do ar:

- a intensidade da velocidade \vec{v} do corpo ao passar pelo vértice do arco de parábola;
- o tempo de subida;
- a altura máxima (h_{max});
- o alcance horizontal (A).

RESOLUÇÃO

a) A velocidade no ponto mais alto da trajetória é igual à componente horizontal da velocidade inicial: $v = v_{0x}$

$$v = v_0 \cdot \cos \theta = 50 \cdot 0,8 \Rightarrow v = 40 \text{ m/s}$$

b) O tempo de subida é dado por:

$$t_s = \frac{v_0 \cdot \sin \theta}{g} = \frac{50 \cdot 0,6}{10} \Rightarrow t_s = 3 \text{ s}$$

c) A altura máxima é dada por:

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta}{2g} = \frac{50^2 \cdot 0,6^2}{20} \Rightarrow h_{\text{max}} = 45 \text{ m}$$

d) O alcance horizontal é calculado pela expressão:

$$A = \frac{(v_0)^2}{g} \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$A = \frac{50^2}{10} \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 \Rightarrow A = 240 \text{ m}$$

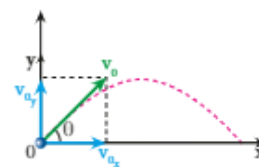
Respostas: a) 40 m/s; b) 3 s; c) 45 m; d) 240 m

14 No instante $t_0 = 0 \text{ s}$, um projétil é atirado para cima com ângulo de 45° em relação à horizontal, com velocidade de módulo $80\sqrt{2} \text{ m/s}$. Desprezando a influência do ar e considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- o(s) instante(s) em que o projétil se encontra a 140 metros acima do plano horizontal de lançamento;
- o módulo da velocidade do projétil no instante $t = 2 \text{ s}$.

RESOLUÇÃO

Adotemos o sistema de eixos representado na figura a seguir:



Temos:

$$v_0 = 80\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta = 80\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_{0x} = 80 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta = 80\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_{0y} = 80 \text{ m/s}$$

a) No eixo y , podemos escrever:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow y = 80t - 5t^2$$

Queremos saber quando y vale 140 m:

$$140 = 80t - 5t^2 \Rightarrow t^2 - 16t + 28 = 0$$

Assim, obtemos: $t_1 = 2$ s (durante a subida)

e $t_2 = 14$ s (durante a descida)

b) Em qualquer instante do movimento, a velocidade segundo o eixo x é igual a v_{0x} :

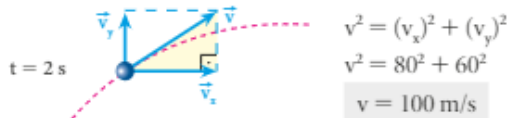
$$v_x = v_{0x} = 80 \text{ m/s}$$

Segundo o eixo y , a velocidade varia com o tempo, de acordo com a função: $v_y = v_{0y} - gt$

$$v_y = 80 - 10t$$

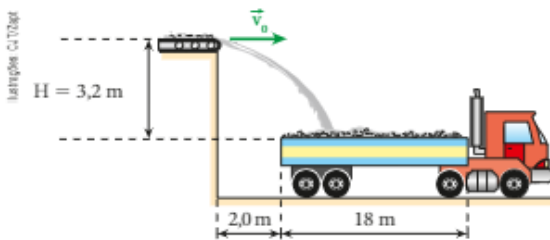
Para $t = 2$ s: $v_y = 80 - 10 \cdot 2 \Rightarrow v_y = 60$ m/s

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:



Respostas: a) 2 s (durante a subida) e 14 s (durante a descida); b) 100 m/s

15 Uma esteira transportadora lança minério horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 . Considere desprezível a influência do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



a) Determine o intervalo das intensidades de \vec{v}_0 para que o minério caia dentro da carroceria do caminhão.

b) Se o desnível H fosse maior, o intervalo citado no item anterior aumentaria, diminuiria ou permaneceria o mesmo?

RESOLUÇÃO

a) O tempo de queda do minério é dado por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}} \Rightarrow t_q = 0,8 \text{ s}$$

A distância d percorrida pelo minério, na horizontal, durante a queda, é igual a $v_0 t_q$:

$$d = v_0 t_q = v_0 \cdot 0,8$$

Devemos ter: $2,0 \text{ m} < d < 20 \text{ m}$

Logo: $2,0 < v_0 \cdot 0,8 < 20$

Dividindo por 0,8 todos os termos da última expressão, obtemos:

$$2,5 \text{ m/s} < v_0 < 25 \text{ m/s}$$

b) Temos que: $2,0 \text{ m} < d < 20 \text{ m}$, em que $d = v_0 t_q = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Logo: $2,0 < v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} < 20$

Multiplicando todos os termos por $\sqrt{\frac{g}{2H}}$, obtemos:

$$2,0 \sqrt{\frac{g}{2H}} < v_0 < 20 \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

Então, a "largura" do intervalo é igual a $18 \sqrt{\frac{g}{2H}}$.

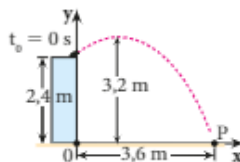
Portanto, se H fosse maior, o intervalo diminuiria.

Respostas: a) Entre 2,5 m/s e 25 m/s;
 b) O intervalo diminuiria.

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

16. Um canhão dispara projéteis com velocidade de módulo 300 m/s, estando situado em amplo terreno plano e horizontal. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando influências do ar no movimento dos projéteis, determine a região desse terreno onde, certamente, eles não cairão.

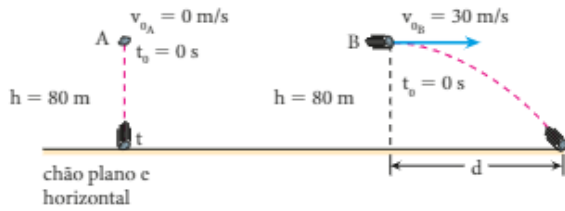
17. Um sapo, colocado em cima de um muro, salta no instante $t_0 = 0$ s e chega ao ponto P do solo, como representa a figura ao lado.



Desprezando a influência do ar e considerando g igual a 10 m/s^2 , calcule:

- a) o módulo da componente vertical da velocidade inicial do sapo;
- b) o instante t em que ele atinge o solo;
- c) o módulo da componente horizontal da velocidade do sapo.

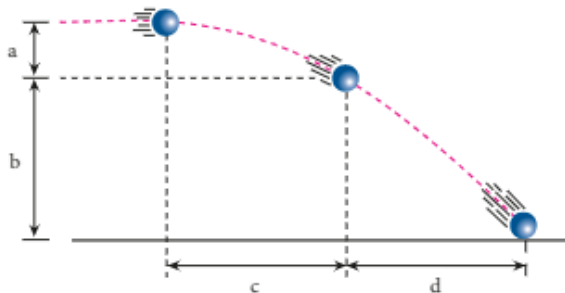
18. No instante $t_0 = 0$ s, uma pedra A, de massa M , foi abandonada a partir do repouso, de uma altura $h = 80$ m. Nesse mesmo instante, uma pedra B, de massa $2M$, foi lançada horizontalmente com velocidade $v_{0B} = 30$ m/s, a partir da mesma altura $h = 80$ m.



Desprezando influências do ar e considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$:

- calcule o instante t em que a pedra A chega ao chão;
- calcule a distância d percorrida pela pedra B, na horizontal, até chegar ao chão;
- calcule o módulo da velocidade da pedra A imediatamente antes de tocar o chão;
- determine os módulos das componentes horizontal (v_x) e vertical (v_y) da velocidade da pedra B imediatamente antes de ela tocar o chão.

19. A figura representa a fotografia estroboscópica de uma bola lançada horizontalmente nas proximidades da Terra: Sendo $a = 1 \text{ m}$ e $c = 4 \text{ m}$, calcule b e d .



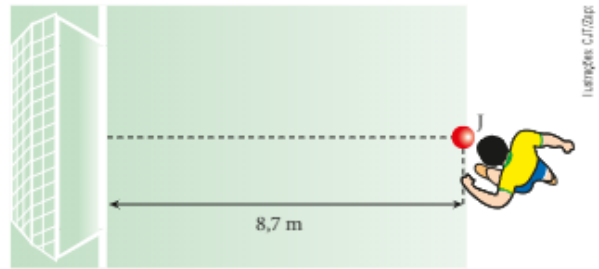
20. Um avião que voa em linha reta, paralelamente ao solo, suposto plano e horizontal, tem velocidade constante de módulo 80 m/s . Em determinado instante, uma escotilha é aberta e larga-se uma bomba, que desce ao solo. Despreze a resistência do ar.

Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e assumindo para a altura do avião o valor $2,0 \cdot 10^3 \text{ m}$, determine:

- a distância percorrida pela bomba, na horizontal, desde o instante em que foi solta até o instante em que chegou ao solo;
- a distância entre o avião e a bomba no instante em que esta toca o solo;
- as formas das trajetórias da bomba em relação ao avião e em relação ao solo.

21. Um jogador de futebol, após driblar o goleiro, encontra-se no ponto J indicado na figura e chuta em direção ao meio do gol, como sugere a linha tracejada, com a meta completamente desguarnecida.

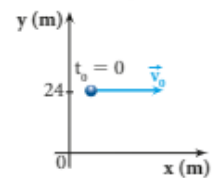
Use: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\text{sen } 30^\circ = 0,50$; $\text{cos } 30^\circ = 0,87$.



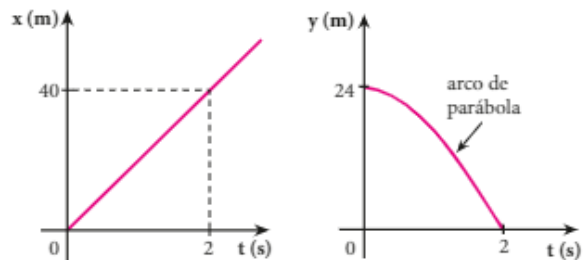
Sabendo que a bola, ao ser chutada, sai com velocidade de 20 m/s , formando 30° com o gramado, e que a altura da trave é de $2,44 \text{ m}$, diga, justificando com cálculos, se o gol aconteceu ou não. Despreze a influência do ar.

22. De uma nave estacionária, a 24 m de altura em relação ao solo plano e horizontal de um planeta K, uma esfera metálica é lançada horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 .

Sabe-se que a atmosfera do planeta praticamente não influi no movimento da esfera. As coordenadas x e y da esfera são lidas no sistema de referência representado na figura ao lado.



Além disso, essas coordenadas variam com o tempo t conforme os gráficos:



- Calcule os módulos da velocidade inicial da esfera e da aceleração da gravidade na superfície do planeta K.
- Trace, em seu caderno, um sistema cartesiano $0xy$ e represente a trajetória descrita pela esfera desde seu lançamento até a chegada ao solo.

23. No instante t_1 , uma pessoa parada na plataforma de uma estação ferroviária joga uma maçã verticalmente para cima, com velocidade inicial de módulo igual a 10 m/s , agarrando-a em seguida, no instante t_2 , na mesma altura da qual foi lançada.

Enquanto a maçã realizou esse movimento de sobe e desce, um trem passou pela estação em movimento retilíneo e uniforme, a 30 m/s . Considerando g igual a 10 m/s^2 e desprezando influências do ar, determine, em relação a um passageiro sentado no trem, o módulo do deslocamento vetorial da maçã entre os instantes t_1 e t_2 .



TRABALHO E POTÊNCIA

1. ENERGIA E TRABALHO

... E a luz de mais um dia estimula a fotossíntese, provocando uma verdadeira revolução bioquímica nos vegetais, o que lhes permite cumprir seu ciclo virtuoso de crescimento, viço e morte. Os animais, incluindo o ser humano, nutrem-se de acordo com sua posição na cadeia alimentar, o que lhes faculta crescer, andar, correr, reproduzir e lutar pela própria subsistência.

Mas que elixir é esse que movimenta a máquina da vida, tornando a Terra um planeta tão singular? Trata-se do mesmo substrato primordial, responsável por fazer operar todas as máquinas, dos automóveis aos caminhões, dos tratores aos guindastes, dos aviões às naves espaciais. Essa substância imponderável que possibilita o funcionamento de todos os organismos – vivos ou não – recebe o nome de **energia**.

Foto: Zupari/Pixar/Imagens



A energia solar, constituída essencialmente de luz e calor, é o item preponderante na matriz energética terrestre. Pôr do sol no rio Paraguai, na Estação Ecológica de Taiaaná (MT). Novembro de 2010.

As usinas hidrelétricas são acionadas pela energia da água represada em grandes reservatórios; as instalações termelétricas queimam derivados de petróleo, carvão ou outros materiais; as usinas nucleares baseiam-se na fissão de núcleos de urânio, do qual são extraídas quantidades fantásticas de energia. Todo esse intercâmbio energético visa iluminar cidades, acionar fábricas e fazer funcionar geladeiras, fornos de micro-ondas, computadores, bem como todos os dispositivos que tornam a vida humana mais segura e confortável.

A energia comporta-se como um camaleão fugaz que surge e ressurgue sob os mais variados matizes e mantos. Verifica-se em todas as estruturas – das micro às ma-

cro – uma verdadeira simbiose em que uma determinada quantidade de energia se pulveriza em doses menores sempre, porém, de totalização idêntica à porção original. A energia térmica obtida na combustão da gasolina no motor de um carro, por exemplo, transforma-se parcialmente em energia de movimento do veículo, mais energia térmica e acústica, geradas de várias formas, inclusive pelo atrito entre as peças.

Isaac **Newton** (1642-1727) não conjecturou em suas teorias o conceito de energia. Para ele, toda a Mecânica era estruturada na noção de força. Foi o matemático, cientista e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von **Leibniz** (1646-1716) quem esboçou as primeiras ideias sobre energia, afirmando que o ímpeto de movimento manifestado por alguns corpos se devia a uma espécie de “força viva” intrínseca ao corpo, que ele chamou de *vis viva*, expressão extraída do latim. O físico e médico suíço Daniel **Bernoulli** (1700-1782) aprimorou a noção de energia ao publicar seus estudos sobre escoamento de fluidos. Ele notou que, em situações de pressão constante, um aumento na velocidade de certos líquidos ocorria sempre à custa da diminuição na altura da tubulação em relação a um nível de referência determinado. Mas dois cientistas estabeleceram os contornos definitivos para o conceito de energia e sua conservação: o alemão Julius Robert von **Mayer** (1814-1878) e o inglês James Prescott **Joule** (1818-1889), como estudaremos no Capítulo 11.

Definir amplamente energia de modo axiomático ou verbal é tarefa muito difícil. Por isso pretendemos introduzir essa noção de forma gradual, contando com o bom senso, a intuição e a vivência do leitor em cada contexto.

A palavra energia tem origem grega – *ergos* – e significa **trabalho**. O conceito de trabalho que desenvolveremos neste capítulo difere da noção de ocupação, ofício ou profissão. Realizar trabalho em Física implica a **transferência de energia** de um sistema para outro e, para que isso ocorra, são necessários uma **força** e um **deslocamento** adequados.

O Sol – nossa grande “fornalha”

De onde vem a energia que alimenta a Terra e que supre as necessidades de todos os seres vivos, além de toda sorte de máquinas e equipamentos das mais diversas tecnologias? Vem direta ou indiretamente do **Sol** (do latim, *solis*), estrela-mãe de nosso sistema planetário, que irradia luz, calor e outras formas de energia eletromagnética em todas as direções, despejando sobre o nosso planeta, em média, 1 366 joules por segundo, por metro quadrado de superfície irradiada. Esse número é conhecido como **Constante solar**.

Nos vegetais, a energia solar sintetiza, pelo processo da fotossíntese, a formação de glicose, nutriente vital. Esses vegetais vão servir de alimento para diversos outros organismos, inclusive alguns mamíferos, prestando-se como base de uma cadeia alimentar que se estende até o ser humano. Da cana-de-açúcar, do milho, da mamona e de outros insumos de origem vegetal derivam-se vários tipos de combustíveis, como o etanol e o biodiesel. De vegetais e outros substratos decompostos ao longo de milhões de anos advém o petróleo e o carvão mineral, itens ainda primordiais na matriz energética do planeta. A energia dos ventos (eólica) também provém primariamente da energia solar, que trabalha para movimentar as diversas camadas atmosféricas. O mesmo ocorre com a energia das marés (maremotriz) e a energia hídrica, proveniente de hidrelétricas. É importante lembrar que a água líquida existente na Terra está condicionada à privilegiada posição do planeta em relação ao Sol e ao regime de chuvas, totalmente dependente de manifestações solares.

Em comparação com o Sol, a Terra é um pequeno grão de poeira cósmica. A distância da estrela ao nosso planeta varia de 147,1 milhões de quilômetros, no perélio, a 152,1 milhões de quilômetros, no afélio. A energia radiante solar gasta cerca de 8 min e 18 s para atingir a Terra, transpondo algo como 150 milhões de quilômetros, o que equivale a **uma unidade astronômica – UA**, à velocidade da luz: $3,0 \cdot 10^8$ m/s. A massa da estrela é 332 830 vezes a da Terra e o raio médio, 108,97 vezes o do nosso planeta. Seriam necessárias cerca de 109 Terras para cobrir o disco solar ou, o que é mais impressionante, caberiam aproximadamente 1,3 milhão de Terras dentro do Sol.

Já no século XIX, os astrônomos sabiam que a energia solar não poderia ser gerada por combustão, uma vez que, por essa via, o Sol se manteria brilhante por apenas 10 mil anos. Tampouco a Teoria do Colapso Gravitacional, proposta pelo físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand von **Helmholtz** (1821-1894), explicou satisfatoriamente a energia emanada do Sol. Segundo essa teoria, o Sol poderia brilhar por somente 20 milhões de anos, o que contrariava evidências geológicas que indicam ainda hoje que a Terra, e também o Sol, têm idade estimada em 4,5 bilhões de anos.

Em 1937, Hans Albrecht **Bethe** (1906-2005) propôs uma nova explicação, aceita atualmente, para a procedência da energia solar: ela provém de reações termonucleares, de **fusão nuclear**, em que quatro prótons, pertencentes a quatro núcleos de hidrogênio, se aglutinam para formar uma partícula α , núcleo do átomo de hélio. Dessa forma, o Sol, constituído por 73,46% de hidrogênio e 24,85% de hélio – portanto, quase a totalidade da estrela – teria “combustível” suficiente para mais 6,5 bilhões de anos, aproximadamente. Na transformação dos quatro prótons em uma partícula α , há uma “perda” de massa de 0,7%. Essa redução de matéria, fruto do contínuo processo de fusão nuclear, é transformada em energia de acordo com a equação de Albert **Einstein**, $E = mc^2$.

A esfera solar, constituída basicamente por gases e plasma, tem três partes bem distintas: o **núcleo**, onde se processam as reações de fusão nuclear, e cujas temperaturas são da ordem de 13 600 000 K; a **região radioativa**, intermediária; e a **região convectiva**. Nesta parte, a energia produzida no núcleo é levada à superfície pela movimentação de massas quentes que se deslocam por diferença de densidades. A região convectiva é coberta por uma tênue camada, denominada **fotosfera**, que é a “capa” externa que caracteriza as imagens do Sol captadas de observatórios astronômicos.



Nesta ilustração (em cores fantasias), produzida por computador, você pode comparar as dimensões da Terra com as do Sol.

As camadas acima da fotosfera constituem a **atmosfera solar**. A primeira, imediatamente superior, é a **chromosfera**, com temperaturas variando de 6 000 K a 30 000 K. A camada mais externa chama-se **coroa solar**. Esta é extremamente rarefeita e se estende para além do Sistema Solar. As razões da elevação da temperatura desde a fotosfera até as camadas sobrejacentes é fato ainda não devidamente explicado pelos cientistas, constituindo-se em um grande enigma para os astrofísicos que estudam o Sol.



DA S. SCH-ITER/GALAPAGOS

O Sol desfruta de um equilíbrio hidrodinâmico em que forças opostas trabalham concomitantemente: uma é a força gravitacional, dirigida para o núcleo, que tende a prensar toda a massa da estrela em sua região central, onde se registram pressões da ordem de 340 bilhões de vezes a pressão atmosférica da Terra ao nível do mar, e a outra é uma força de pressão que empurra as massas quentes produzidas no núcleo para a região superficial (convecção).

Nesta fotografia, obtida por ocasião de um eclipse total do Sol ocorrido em 1999, pode-se observar o disco lunar cobrindo, perfeitamente, o disco solar. Nota-se claramente, além do círculo escuro, a presença da coroa solar.

Devido à estrutura gasosa do Sol, o movimento de rotação da estrela imprime diferentes velocidades angulares em pontos superficiais da região equatorial e da região polar. Próximo ao equador do Sol, o período de rotação é de 25 dias terrestres, aproximadamente, enquanto que nas vizinhanças dos polos, é cerca de 34 dias. Isso provoca ciclicamente, a cada 11 anos em média, inversão no campo magnético da estrela, o que acarreta na Terra as chamadas tempestades solares, que são interferências magnéticas significativas e maior incidência de partículas procedentes da coroa solar.



REUTERS/MEIS VIK/GETTY IMAGES

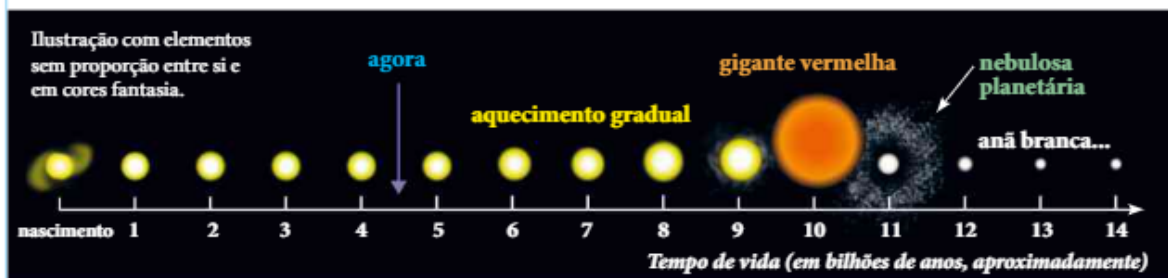
Aurora boreal em Lapland, no norte da Finlândia.

As tempestades solares podem afetar satélites artificiais terrestres e as telecomunicações em geral, com possibilidade de transtornos nas transmissões de rádio, TV e telefonia celular. Esse *blackout* pode trazer problemas na operação de aeroportos, estações ferroviárias e sistemas que dependem de GPS (sigla em inglês para *Global Positioning System*). As tempestades solares também proporcionam efeitos belíssimos, como a intensificação de auroras boreais e austrais. Nesses casos, o céu é aclarado por rajadas multicoloridas (predominantemente verdes e vermelhas) devido à interação de partículas solares em alta velocidade com o campo magnético do planeta, mais intenso nas regiões polares.

Mas o Sol esgotará seu combustível nuclear... A grande "fornalha" colapsará, transformando-se primeiro em uma gigante vermelha e por fim em uma anã branca. Os primeiros sintomas desse colapso serão notados na Terra por um grande aumento de temperatura que fará evaporarem todas as águas da superfície do planeta. Por fim, todos os planetas do Sistema Solar serão "engolidos" pelo Sol.

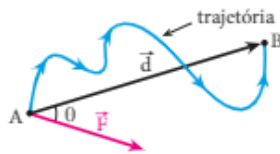
Com isso, todo o tipo de vida por aqui se extinguirá! A boa notícia, porém, é que isso ainda demandará muito tempo, cerca de cinco bilhões de anos...

Observe no esquema a seguir o ciclo de vida do Sol.



2. TRABALHO DE UMA FORÇA CONSTANTE

Consideremos a figura a seguir, em que uma partícula é deslocada de **A** até **B**, ao longo da trajetória indicada.



Várias forças, não representadas, estão atuando na partícula, incluindo \vec{F} , que é constante, isto é, tem intensidade, direção e sentido invariáveis.

Seja \vec{d} o deslocamento vetorial da partícula de **A** até **B** e θ o ângulo formado por \vec{F} e \vec{d} .

O trabalho (τ) da força \vec{F} no deslocamento de **A** a **B** é a grandeza escalar dada por:

$$\tau = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta$$

ou

$$\tau = F d \cos \theta$$

NOTAS

- O produto $|\vec{d}| \cos \theta$ é a projeção de \vec{d} na direção de \vec{F} . Assim, podemos dizer que o trabalho de uma força constante é calculado pelo produto da intensidade da força pela projeção do deslocamento na direção da força.
- O produto $|\vec{F}| \cos \theta$, por sua vez, é a projeção de \vec{F} na direção de \vec{d} . Assim, podemos dizer que o trabalho de uma força constante é calculado pelo produto do módulo do deslocamento pela projeção da força na direção do deslocamento.
- Se \vec{F} ou \vec{d} forem nulos, teremos $\tau = 0$.
- O deslocamento vetorial \vec{d} tem origem no ponto de partida e extremidade no ponto de chegada da partícula.

No Sistema Internacional (SI), o trabalho é medido em **joule (J)**, em homenagem a James Prescott **Joule**.

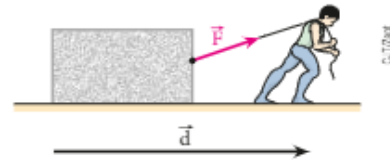
3. SINAIS DO TRABALHO

O trabalho é uma grandeza algébrica, isto é, admite valores positivos e negativos. O que impõe o sinal do trabalho é o $\cos \theta$, já que $|\vec{F}|$ e $|\vec{d}|$ são quantidades sem sinal.

Trabalho motor

Para $0 \leq \theta < 90^\circ$, temos $\cos \theta > 0$ e, por isso, $\tau > 0$. Nesse caso, o trabalho é denominado **motor**.

O trabalho de uma força é motor quando esta é “favorável” ao deslocamento.



No exemplo acima, a força \vec{F} que o homem exerce na caixa por meio da corda realiza trabalho motor (positivo). Isso ocorre pelo fato de \vec{F} ser “favorável” ao deslocamento \vec{d} .

Trabalho resistente

Para $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, temos $\cos \theta < 0$ e, por isso, $\tau < 0$. Nesse caso, o trabalho é denominado **resistente**.

O trabalho de uma força é resistente quando esta é “desfavorável” ao deslocamento.



No exemplo acima, o trabalho da força exercida pelo homem **II** sobre o carro é resistente (negativo). Isso ocorre pelo fato de a referida força ser “desfavorável” ao deslocamento do carro (para a esquerda).



Nesta fotografia, um guindaste ergue um contêiner verticalmente. O trabalho das forças exercidas pelos cabos de aço no contêiner é motor (positivo), enquanto o trabalho do peso do contêiner é resistente (negativo).

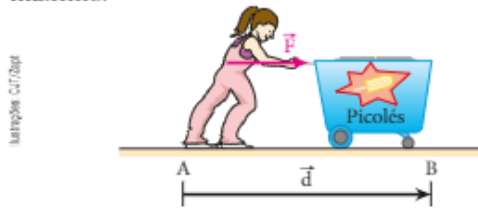
4. CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

\vec{F} e \vec{d} têm mesma direção e mesmo sentido

Neste caso, $\theta = 0^\circ$ e $\cos \theta = 1$. Assim, o trabalho é calculado por: $\tau = F d \cos \theta$

$$\text{Logo: } \tau = F d \cdot 1 \Rightarrow \tau = F d$$

Este é o caso em que a força realiza seu trabalho máximo.

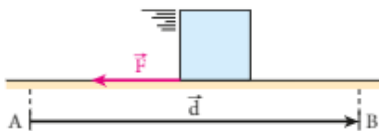


No exemplo acima, a força \vec{F} (constante) que a vendedora de sorvetes exerce em seu carrinho tem a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento vetorial \vec{d} de A até B. O trabalho de \vec{F} pode ser calculado por $\tau = F d$.

\vec{F} e \vec{d} têm mesma direção e sentidos opostos

Neste caso, $\theta = 180^\circ$ e $\cos \theta = -1$. Assim, o trabalho é calculado por: $\tau = F d \cos \theta$

Logo: $\tau = F d \cdot (-1) \Rightarrow \tau = -F d$



No exemplo acima, o bloco desloca-se de A para B ao longo de um plano horizontal áspero. Nesse deslocamento (\vec{d}), o bloco sofre a ação da força de atrito \vec{F} (admitida constante), cujo trabalho pode ser calculado por $\tau = -F d$.

\vec{F} e \vec{d} são perpendiculares entre si

Neste caso, $\theta = 90^\circ$ e $\cos \theta = 0$. Assim, o trabalho é calculado por: $\tau = F d \cos \theta$

Logo: $\tau = F d \cdot 0 \Rightarrow \tau = 0$

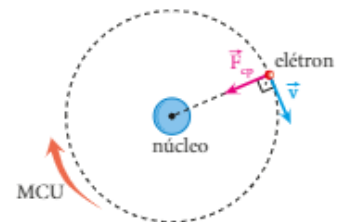
Sempre que a força e o deslocamento forem perpendiculares entre si, a força **não** realizará trabalho.

Outro caso interessante é o da força centrípeta. Conforme vimos no Capítulo 7, a força centrípeta é, a cada instante, perpendicular à velocidade vetorial. Por isso, para intervalos de tempo elementares (extremamente pequenos), a força centrípeta é perpendicular aos respectivos deslocamentos elementares sofridos pela partícula, o que nos permite afirmar que:

A força centrípeta **nunca** realiza trabalho; seu trabalho é sempre nulo.

$$\tau_{(\vec{F}_{cp})} = 0$$

Esta figura, com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia, traz a representação clássica do átomo de hidrogênio, em que apenas um elétron realiza movimento circular e uniforme em torno do núcleo.



A resultante centrípeta que mantém o elétron em sua órbita é a força de atração eletrostática recebida do núcleo. Essa resultante não realiza trabalho, pois, a cada intervalo elementar de tempo, ela é perpendicular à direção do respectivo deslocamento.



Uma nova montanha-russa?

A composição que aparece na imagem a seguir não é um novo modelo de montanha-russa. É o monotrilho de São Paulo, nova alternativa que promete revolucionar o transporte público da capital paulista. A previsão é que o sistema entre em plena operação até 2020, transportando diariamente cerca de um milhão de passageiros.

O monotrilho é fabricado em alumínio e isso o torna 30% mais leve que versões similares feitas de aço. Essa maior leveza permite deslocamentos mais suaves e velozes. O comboio é totalmente elétrico, o que colabora para a obtenção de índices praticamente nulos de poluição.

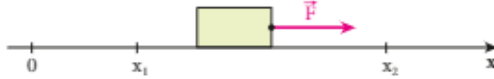
Uma novidade é que o veículo opera sem condutor. Seu controle é feito remotamente por um sistema de computadores existente em uma central. Para deslocamentos horizontais, tem-se que a força da gravidade (peso) e a força vertical recebida da estrutura de sustentação (força normal) não realizam trabalho. Isso ocorre porque essas forças são perpendiculares ao deslocamento.



Teste com monotrilho de São Paulo. Dezembro de 2015.

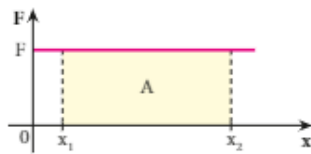
5. CÁLCULO GRÁFICO DO TRABALHO

No esquema a seguir temos um bloco percorrendo o eixo 0x. Ele se desloca sob a ação exclusiva da força \vec{F} , paralela ao eixo.



Façamos o gráfico do valor algébrico de \vec{F} em função de x. O **valor algébrico de \vec{F}** é o valor dessa força com relação ao eixo 0x. Esse valor é **positivo** quando \vec{F} atua no sentido do eixo e **negativo** quando \vec{F} atua em sentido oposto ao do eixo.

Considerando que \vec{F} é constante, obtemos:



Tomemos a área A, destacada no diagrama. Teria essa área algum significado especial? Sim: ela fornece uma medida do valor algébrico do trabalho da força \vec{F} ao longo do deslocamento do bloco, do ponto de abscissa x_1 ao ponto de abscissa x_2 .

De fato, isso pode ser verificado fazendo-se:

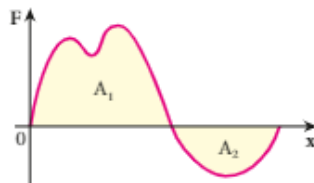
$$A = F(x_2 - x_1)$$

Veja que $x_2 - x_1 = d$, em que d é o módulo do deslocamento vetorial do bloco. Logo: $A = Fd$

Recordando que o produto Fd corresponde ao trabalho de \vec{F} , obtemos:

$$A = \tau$$

Embora a última propriedade tenha sido apresentada com base em uma situação simples e particular, sua validade estende-se também ao caso de forças paralelas ao deslocamento, porém de valor algébrico variável.



F é o valor algébrico da força responsável pelo trabalho. Entretanto, para esses casos, sua verificação requer um tratamento matemático mais elaborado.

$$A_1 + A_2 = \tau \text{ (soma algébrica)}$$

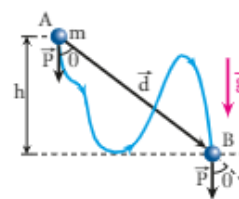
Em termos gerais, podemos enunciar que:

Dado um diagrama do valor algébrico da força atuante em uma partícula em função de sua posição, a "área" compreendida entre o gráfico e o eixo das posições expressa o valor algébrico do trabalho da força.

No entanto, a força considerada deve ser paralela ao deslocamento da partícula.

6. TRABALHO DA FORÇA PESO

Consideremos a partícula da figura abaixo, inicialmente situada no ponto A. Sob a ação de diversas forças, incluindo-se seu peso \vec{P} , ela sofre o deslocamento \vec{d} , atingindo o ponto B. De A até B, a partícula percorre a trajetória indicada:

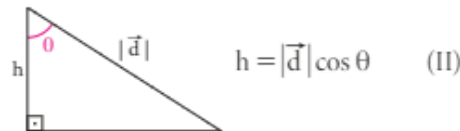


θ é o ângulo entre \vec{P} e \vec{d} ;
 m é a massa da partícula;
 g é a intensidade da aceleração da gravidade;
 h é o desnível (diferença de alturas) entre A e B.

Admitindo que, de A até B, \vec{g} seja constante, temos, como consequência, \vec{P} constante. Diante disso, o trabalho de \vec{P} pode ser calculado por:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| |\vec{d}| \cos \theta \quad (I)$$

Observando a geometria da figura, notamos:



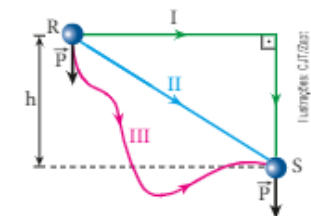
Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| h \Rightarrow \tau_{\vec{P}} = Ph = mgh$$

Como $\tau_{\vec{P}}$ só depende de P e h , concluímos que:

O trabalho da força peso é **independente** da trajetória descrita pela partícula.

Isso significa que, no caso da figura ao lado, qualquer que seja a trajetória descrita pela partícula ao se deslocar do ponto R ao ponto S, o trabalho de seu peso será o mesmo.



Em qualquer das trajetórias, I, II ou III, o trabalho de \vec{P} vale: $\tau_{\vec{P}} = Ph = mgh$.

Suponhamos agora que a partícula faça o deslocamento oposto, isto é, saia de **B** e atinja **A**.

O trabalho de \vec{P} fica determinado ao se fazer:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| |\vec{d}| \cos(180^\circ - \theta)$$

Observando que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (ângulos suplementares têm cossenos opostos), temos:

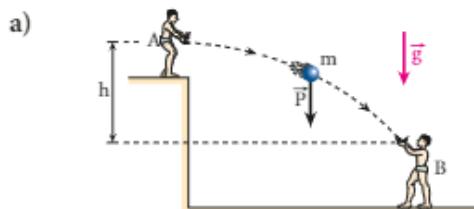
$$\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}| |\vec{d}| \cos \theta$$

Como $h = |\vec{d}| \cos \theta$, obtém-se: $\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}|h$

Logo: $\tau_{\vec{P}} = -P h = -m g h$

Generalizando: $\tau_{\vec{P}} = \pm P h = \pm m g h$

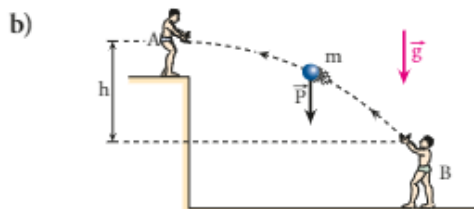
Exemplos:



O garoto **A** joga a bola para o garoto **B**. Na descida, o trabalho do peso da bola é **motor (positivo)**:

$$\tau_{\vec{P}} = + m g h$$

O trabalho do peso é **positivo** na descida.



O garoto **B** joga a bola para o garoto **A**. Na subida, o trabalho do peso da bola é **resistente (negativo)**:

$$\tau_{\vec{P}} = - m g h$$

O trabalho do peso é **negativo** na subida.

Na fotografia a seguir, um pêndulo oscila em um plano vertical sem ser influenciado significativamente pelo ar. Seja **m** a massa pendular, **g** a intensidade da aceleração da gravidade e **h** o desnível entre as posições mais alta e mais baixa ocupadas pelo corpo pendente da haste de peso desprezível. O trabalho da força peso é dado por **m g h** na descida e por **- m g h** na subida do sistema.

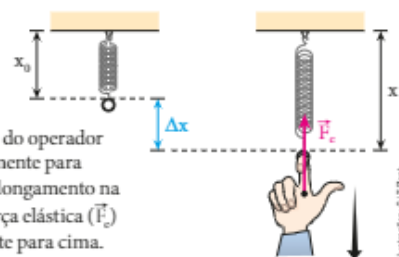


Entre as posições de inversão do sentido do movimento, o trabalho da força peso é nulo, já que essas duas posições estão no mesmo nível horizontal.

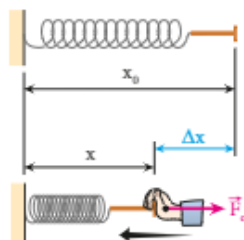
7. TRABALHO DA FORÇA ELÁSTICA

Admitamos uma mola sendo deformada em regime elástico pela mão de um operador. Nesse caso, a mola e a mão trocam, na região de contato, forças de ação e reação.

Chamemos de **força elástica** (\vec{F}_e) a força aplicada pela mola na mão do operador. Essa força sempre "aponta" para a posição em que estaria a extremidade livre da mola, caso esta não estivesse deformada. Por isso, é denominada **força de restituição**.



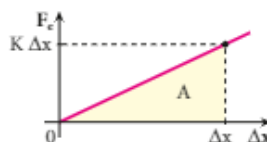
À medida que a mão do operador é deslocada verticalmente para baixo, provocando alongamento na mola, ela recebe a força elástica (\vec{F}_e) dirigida verticalmente para cima.



À medida que a mão do operador é deslocada horizontalmente para a esquerda, provocando compressão na mola, ela recebe a força elástica (\vec{F}_e) dirigida horizontalmente para a direita.

A intensidade de \vec{F}_e pode ser calculada pela **Lei de Hooke**, vista no Capítulo 5: $F_e = K \Delta x$ em que **K** é a constante elástica da mola, e Δx é a deformação da mola (alongamento ou compressão).

Calculemos o trabalho de \vec{F}_e , traçando, inicialmente, o gráfico da intensidade F_e em função de Δx (o módulo do trabalho de \vec{F}_e é dado pela "área" **A**, destacada no diagrama).



$$|\tau_{\vec{F}_e}| = A$$

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = \frac{K \Delta x \cdot \Delta x}{2}$$

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Levando em conta que $\tau_{\vec{F}_e}$ pode ser **motor** (+) ou **resistente** (−), escrevemos:

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = \pm \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

O trabalho da força elástica é **motor** (+) na fase em que a mola está **retornando ao seu comprimento natural** e é **resistente** (−) na fase em que ela é **deformada** (alongada ou comprimida).

O trabalho da força elástica **independe** da trajetória de seu ponto de aplicação.

Analisemos, a título de exemplo, o caso de um garoto que vai lançar uma pedra utilizando um estilingue.



Menino brincando com um estilingue.

Na fase de tracionamento, em que as tiras de borracha do dispositivo são esticadas, as forças elásticas realizam sobre a mão do garoto um trabalho **resistente** (negativo). No ato do lançamento, entretanto, essas forças realizam sobre a pedra um trabalho **motor** (positivo).

Uma força é denominada **conservativa** quando seu trabalho, entre duas posições, independe da trajetória descrita por seu ponto de aplicação.

Diante disso, temos que a força peso e a força elástica são conservativas. Entretanto, nem toda força satisfaz à definição anterior. A força de atrito, a força de resistência do ar e a força de resistência viscosa exercida pelos líquidos, por exemplo, têm trabalhos dependentes da trajetória, o que as torna não conservativas.

8. O TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA

Consideremos uma partícula de massa m que, em dado instante, tem, em relação a um determinado

referencial, velocidade escalar v . Pelo fato de estar em movimento, dizemos que a partícula está energizada, ou seja, dizemos que ela está dotada de uma forma de energia denominada **cinética**.

A **energia cinética** (E_c) é a modalidade de energia associada aos movimentos, sendo quantificada pela expressão: $E_c = \frac{mv^2}{2}$

O enunciado do Teorema da Energia cinética é:

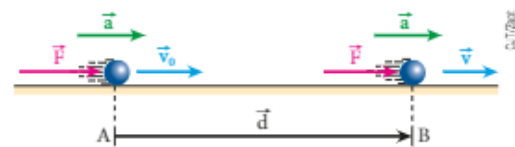
O trabalho total, das forças internas e externas, realizado sobre um corpo é igual à variação de sua energia cinética.

$$\tau_{\text{total}} = \Delta E_c = E_{c_{\text{final}}} - E_{c_{\text{inicial}}}$$

Demonstração (particular):

Na figura a seguir, temos uma pequena esfera maciça sujeita à ação da **força resultante** constante \vec{F} , paralela ao deslocamento. Sejam \vec{a} a aceleração comunicada por \vec{F} , \vec{v}_0 a velocidade da esfera no ponto A e \vec{v} sua velocidade no ponto B.

Seja, ainda, \vec{d} o deslocamento da esfera de A até B.



O trabalho de \vec{F} no deslocamento de A até B (τ_{total}) é dado por: $\tau_{\text{total}} = F d$ (I)

Do **Princípio Fundamental da Dinâmica**, podemos escrever: $F = m a$ (II)

Nas condições descritas, a esfera realiza um movimento uniformemente variado.

Aplicando a **Equação de Torricelli**, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 a d \Rightarrow d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), segue:

$$\tau_{\text{total}} = m a \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a} = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

Sabendo que $\frac{m v^2}{2} = E_{c_{\text{final}}}$ e $\frac{m v_0^2}{2} = E_{c_{\text{inicial}}}$, temos:

$$\tau_{\text{total}} = \Delta E_c = E_{c_{\text{final}}} - E_{c_{\text{inicial}}}$$

Embora tenhamos demonstrado o Teorema da Energia Cinética com base em uma situação simples e particular, sua aplicação é geral, estendendo-se ao

cálculo do trabalho total de forças constantes ou variáveis, conservativas ou não. O trabalho expresso pelo Teorema da Energia Cinética inclui também os trabalhos de forças internas, como as forças exercidas pela musculatura de uma pessoa que caminha ou aquelas decorrentes do funcionamento dos mecanismos de um carro.

Por exemplo, o trabalho total realizado sobre ciclistas em movimento em pistas horizontais é dado pela soma (algébrica) do trabalho motor (útil) realizado pelas forças musculares (forças internas) com o trabalho resistente das forças exercidas pelo ar e das forças de atrito nos eixos da bicicleta. É fundamental observar que, na hipótese de não haver derapagens, as forças de atrito trocadas entre as rodas das bicicletas e o solo **não realizam trabalho**, já que essas forças são do tipo estático e não produzem deslocamento em seu ponto de aplicação (em cada instante, o ponto de contato do pneu com a pista apresenta velocidade nula).



Thibaut/Daily images

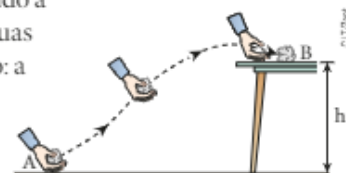
Ciclistas em movimento sobre pista horizontal: o trabalho motor provém das forças musculares.

Considerando que trabalho é igual à variação de energia cinética, trabalho e energia são grandezas físicas de iguais dimensões, isto é, que podem ser medidas nas mesmas unidades. Assim, a unidade de energia no Sistema Internacional (SI) também é o **joule (J)**.

9. TRABALHO NO ERGUIMENTO DE UM CORPO

No esquema abaixo, um corpo de massa m , inicialmente em repouso no ponto **A** do solo, é erguido por um operador, sendo deixado também em repouso no ponto **B** de uma mesa de altura h . No local, a intensidade da aceleração da gravidade é g .

Na subida, desprezando a influência do ar, só duas forças agem no corpo: a exercida pelo operador e a da gravidade (peso).



Pretendemos calcular o trabalho (τ_{oper}) da força exercida pelo operador durante o erguimento do corpo.

$$\tau_{total} = \tau_{oper} + \tau_{peso} \quad (I)$$

Mas, pelo **Teorema da Energia Cinética**:

$$\tau_{total} = E_{c_B} - E_{c_A} \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$\tau_{oper} + \tau_{peso} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

Na subida, o trabalho do peso é resistente (negativo), sendo dado por: $\tau_{peso} = -mgh$

Temos, ainda: $E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2}$ e $E_{c_A} = \frac{mv_A^2}{2}$

Substituindo em (III), obtemos:

$$\tau_{oper} - mgh = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Entretanto, $v_A = v_B = 0$, pois o corpo partiu do repouso em **A** e foi deixado em repouso em **B**. Logo:

$$\tau_{oper} - mgh = 0 \Rightarrow \tau_{oper} = mgh$$



Realizamos trabalho ao subir escadas?

O Corpo de Bombeiros dispõe de um equipamento fundamental para combater incêndios em edifícios altos: é a **Escada Magirus**. Acoplada a um caminhão, essa escada permite que soldados levem mangueiras e outros instrumentos até a altura de onde provêm as chamas. Supondo que na subida a variação de energia cinética seja nula, podemos dizer que o trabalho das forças musculares de um bombeiro (forças internas) é dado pelo produto mgh , em que m é a massa erguida, g é a intensidade da aceleração da gravidade e h é a elevação vertical do centro de massa do sistema em relação ao nível inicial.

Corpo de Bombeiros combatendo incêndio no Museu da Língua Portuguesa. São Paulo, dezembro de 2015.



Foto: Sheila Florença

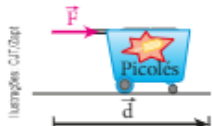
QUESTÕES COMENTADAS



1 Um homem empurra um carrinho ao longo de uma estrada plana, comunicando a ele uma força constante, paralela ao deslocamento, e de intensidade $3,0 \cdot 10^2$ N. Determine o trabalho realizado pela força aplicada pelo homem sobre o carrinho, considerando um deslocamento de 15 m.

RESOLUÇÃO

A situação descrita está representada a seguir:



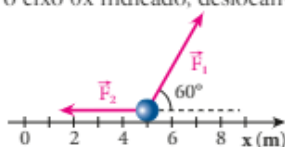
Sendo \vec{F} e \vec{d} de mesma direção e mesmo sentido, o trabalho de \vec{F} fica dado por: $\tau_F = Fd$

Como $F = 3,0 \cdot 10^2$ N e $d = 15$ m, temos o seguinte:

$$\tau_F = 3,0 \cdot 10^2 \cdot 15 \text{ (J)} \Rightarrow \tau_F = 4,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Resposta: $4,5 \cdot 10^3$ J

2 Uma partícula percorre o eixo 0x indicado, deslocando-se da posição $x_1 = 2$ m para a posição $x_2 = 8$ m. Sobre ela, agem duas forças constantes, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de intensidades respectivamente iguais a 80 N e 10 N.



Calcule os trabalhos de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 no deslocamento de x_1 a x_2 .

RESOLUÇÃO

O trabalho de \vec{F}_1 é **motor** (positivo), sendo calculado por:

$$\tau_{F_1} = F_1 d \cos \theta_1$$

Com $F_1 = 80$ N, $d = x_2 - x_1 = 6$ m e $\theta_1 = 60^\circ$, temos:

$$\tau_{F_1} = 80 \cdot 6 \cdot \cos(60^\circ) \text{ (J)} \Rightarrow \tau_{F_1} = 240 \text{ J}$$

O trabalho de \vec{F}_2 é **resistente** (negativo), sendo calculado por: $\tau_{F_2} = F_2 d \cos \theta_2$

Tendo-se $F_2 = 10$ N, $d = 6$ m e $\theta_2 = 180^\circ$, temos:

$$\tau_{F_2} = 10 \cdot 6 \cdot \cos(180^\circ) \text{ (J)} \Rightarrow \tau_{F_2} = -60 \text{ J}$$

Respostas: 240 J e -60 J

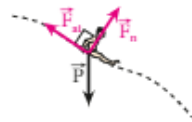
3 Um garoto de massa 40 kg partiu do repouso no ponto A do tobogã da figura a seguir, atingindo o ponto B com velocidade de 10 m/s.

Admitindo $|g| = 10$ m/s² e desprezando o efeito do ar, calcule o trabalho das forças de atrito que agiram no corpo do garoto de A até B.



RESOLUÇÃO

Durante a descida, três forças agem no corpo do garoto:



- \vec{P} : força da gravidade (peso);
- \vec{F}_n : reação normal do tobogã;
- \vec{F}_{at} : força de atrito.

O trabalho total, de todas as forças, é dado por:

$$\tau_{total} = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_n} + \tau_{\vec{F}_{at}}$$

A parcela $\tau_{\vec{F}_n}$ é nula, pois \vec{F}_n é, a cada instante, perpendicular à trajetória. Assim: $\tau_{total} = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}}$ (I)

Conforme o **Teorema da Energia Cinética**, temos que:

$$\tau_{total} = E_{cB} - E_{cA} \Rightarrow \tau_{total} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2}$$

Como $v_A = 0$ m/s (o garoto partiu do repouso), temos:

$$\tau_{total} = \frac{m (v_B)^2}{2} \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), obtém-se:

$$\tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m (v_B)^2}{2} \Rightarrow m g h + \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m (v_B)^2}{2}$$

$$\text{Logo: } \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m (v_B)^2}{2} - m g h$$

Sendo $m = 40$ kg, $v_B = 10$ m/s e $g = 10$ m/s², calculemos $\tau_{\vec{F}_{at}}$:

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{40 \cdot (10)^2}{2} - 40 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (J)}$$

$$\text{Logo: } \tau_{\vec{F}_{at}} = -2,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Resposta: $-2,0 \cdot 10^3$ J

4 Um pequeno objeto de massa 2,0 kg, abandonado de um ponto situado a 15 m de altura em relação ao solo, cai verticalmente sob a ação da força peso e da força de resistência do ar.

Sabendo que sua velocidade ao atingir o solo vale 15 m/s, calcule o trabalho da força de resistência do ar.

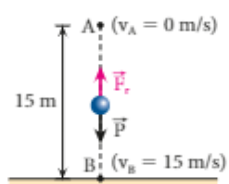
Dado: $g = 10$ m/s²

RESOLUÇÃO

Aplicando o **Teorema da Energia Cinética**, temos: $\tau_{total} = E_{cB} - E_{cA}$

$$\tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_r} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2}$$

$$m g h + \tau_{\vec{F}_r} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2}$$



Sendo $m = 2,0$ kg, $g = 10$ m/s², $h = 15$ m, $v_A = 0$ m/s e $v_B = 15$ m/s, calculemos o trabalho da força de resistência do ar ($\tau_{\vec{F}_r}$):

$$2,0 \cdot 10 \cdot 15 + \tau_{\vec{F}_r} = \frac{2,0 \cdot (15)^2}{2} \Rightarrow 300 + \tau_{\vec{F}_r} = 225$$

$$\text{Logo: } \tau_{\vec{F}_r} = -75 \text{ J}$$

O resultado negativo refere-se a um trabalho **resistente**.

Resposta: -75 J

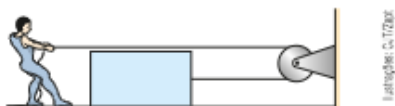


QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

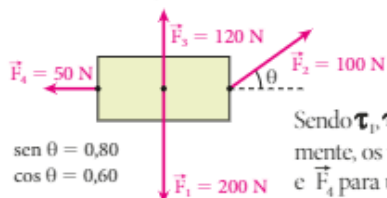
5. Na figura, o homem puxa a corda com uma força constante, horizontal e de intensidade $1,0 \cdot 10^2$ N, fazendo com que o bloco sofra, com velocidade constante, um deslocamento de 10 m ao longo do plano horizontal.



Desprezando a influência do ar e considerando o fio e a polia ideais, determine trabalho:

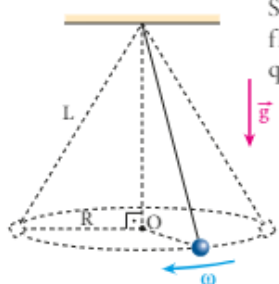
- realizado pela força que o homem exerce na corda;
- da força de atrito que o bloco recebe do plano horizontal de apoio.

6. O bloco da figura acha-se inicialmente em repouso, livre da ação de forças externas. Em dado instante, aplica-se sobre ele o sistema de forças indicado, constituído por \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 , de modo que \vec{F}_1 e \vec{F}_3 sejam perpendiculares a \vec{F}_4 :



Sendo τ_1 , τ_2 , τ_3 e τ_4 , respectivamente, os trabalhos de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 para um deslocamento de 5,0 m, calcule τ_1 , τ_2 , τ_3 e τ_4 .

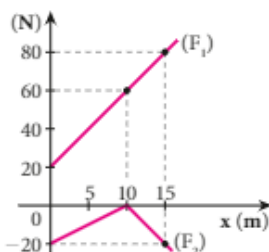
7. Na situação representada na figura, uma pequena esfera de massa $m = 2,4$ kg realiza movimento circular e uniforme com velocidade angular ω em torno do ponto O. A circunferência descrita pela esfera tem raio $R = 30$ cm e está contida em um plano horizontal. O barbante que prende a esfera é leve e inextensível e seu comprimento é $L = 50$ cm.



Sabendo que no local a influência do ar é desprezível e que $g = 10$ m/s², determine:

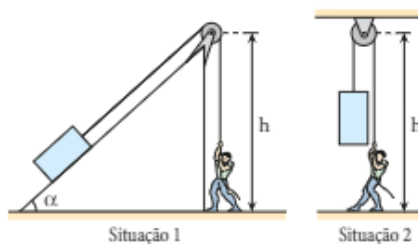
- a intensidade da força de tração no barbante;
- o valor de ω ;
- o trabalho da força que o barbante exerce sobre a esfera em uma volta.

8. O gráfico ao lado representa a variação do valor algébrico das duas únicas forças que agem em um corpo que se desloca sobre um eixo Ox. As forças referidas têm a mesma direção do eixo. Calcule:



- o trabalho da força \vec{F}_1 , enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;
- o trabalho da força \vec{F}_2 , enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;
- o trabalho da força resultante, para arrastar o corpo nos primeiros 15 m.

9. Nas duas situações representadas abaixo, uma mesma carga de peso P é elevada a uma mesma altura h:



Nos dois casos, o bloco parte do repouso, parando ao atingir a altura h. Desprezando todas as forças passivas, analise as proposições seguintes:

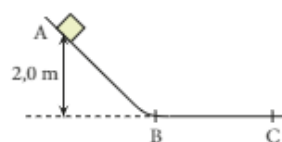
- Na situação I, a força média exercida pelo homem é menos intensa que na situação 2.
- Na situação I, o trabalho realizado pela força do homem é menor que na situação 2.
- Em ambas as situações, o trabalho do peso da carga é calculado por $-Ph$.
- Na situação I, o trabalho realizado pela força do homem é calculado por Ph .

Entre as proposições:

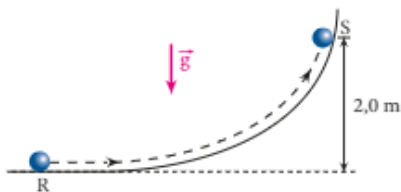
- Todas são corretas.
- Todas são incorretas.
- Somente II e III são corretas.
- Somente I, III e IV são corretas.
- Somente III é correta.

10. Na figura, AB é um plano inclinado sem atrito e BC é um plano horizontal áspero. Um pequeno bloco parte do repouso no ponto A e para no ponto C.

Sabendo que o coeficiente do atrito cinético entre o bloco e o plano BC vale 0,40 e que a influência do ar é desprezível, calcule a distância percorrida pelo bloco nesse plano.



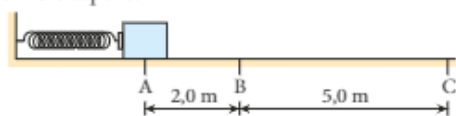
11. Uma esfera de massa 1,0 kg, lançada com velocidade 10 m/s no ponto R da calha vertical, encurvada conforme a figura, atingiu o ponto S, por onde passou com velocidade de 4,0 m/s.



Lançamento Curvo

Sabendo que no local do experimento $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o trabalho das forças de atrito que agiram na esfera em seu deslocamento de R até S.

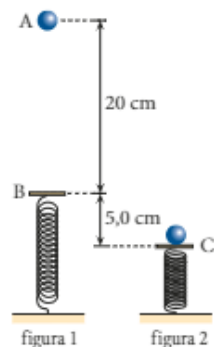
12. Na situação esquematizada na figura, a mola tem massa desprezível, constante elástica igual a $1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ e está inicialmente travada na posição indicada, contraída de 50 cm. O bloco, cuja massa é igual a 1,0 kg, está em repouso no ponto A, simplesmente encostado na mola. O trecho AB do plano horizontal é perfeitamente polido e o trecho BC é áspero.



Em determinado instante, a mola é destravada e o bloco é impulsionado, atingindo o ponto B com velocidade de intensidade v_B . No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo que o bloco para ao atingir o ponto C, calcule:

- o valor de v_B ;
- o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio no trecho BC.

13. Na situação representada nas figuras 1 e 2, a mola tem massa desprezível e está fixa no solo com o seu eixo na vertical. Um corpo de pequenas dimensões e massa igual a 2,0 kg é abandonado da posição A e, depois de colidir com o aparador da mola na posição B, aderindo a ele, desce e para instantaneamente na posição C.



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando o efeito do ar e a energia mecânica dissipada no ato da colisão, calcule:

- o trabalho do peso do corpo no percurso AC;
- o trabalho da força aplicada pela mola sobre o corpo no percurso BC;
- a constante elástica da mola.

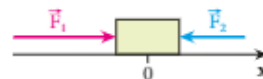
14. Um dublê deverá gravar uma cena de um filme de ação na qual tiros serão disparados contra ele, que estará mergulhando nas águas de um lago profundo, descrevendo uma trajetória horizontal. Os projéteis serão expelidos com velocidade de intensidade v_0 e realizarão movimentos verticais

a partir de uma altura H em relação à superfície líquida. No local, a aceleração da gravidade tem módulo g e a influência do ar é desprezível. Admitindo-se que dentro da água a força total de resistência que cada projétil recebe durante a penetração tem intensidade constante e igual ao triplo de seu peso, determine, em função de H, v_0 e g, a profundidade segura p em que o dublê deverá se deslocar para não ser atingido por nenhum projétil.

15. Cintos de segurança e air bags salvam vidas ao reduzirem as forças exercidas sobre o motorista e os passageiros em uma colisão. Os carros são projetados com uma "zona de enrugamento" na metade frontal do veículo. Se ocorrer um choque violento, o compartimento onde ficam os passageiros percorre uma distância de aproximadamente 1,0 m enquanto a frente do veículo é amassada.

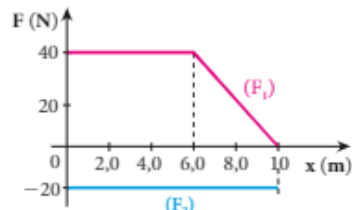
Um ocupante restrito pelo cinto de segurança e pelo air bag freia junto com o carro. Em contraste, um ocupante que não usa tais dispositivos restringentes continua movendo-se para a frente, com o mesmo módulo de velocidade (**Princípio da Inércia**), até colidir violentamente com o painel e/ou para-brisa. Como estas são estruturas resistentes, o infeliz ocupante é freado em uma distância sumária, de apenas 5,0 mm. Para um dado valor de velocidade inicial do carro, indiquemos por F_1 a intensidade da força que freia a pessoa quando ela não está usando o cinto de segurança e o carro não dispuser de air bag e por F_2 a intensidade da força que freia a pessoa no carro no caso em que ela dispõe dos dois dispositivos de segurança. Qual é o valor da relação $\frac{F_1}{F_2}$?

16. O bloco da figura tem 2,8 kg de massa e parte do repouso, na origem do eixo 0x.



Sobre ele, agem exclusivamente as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 representadas, cujos valores algébricos variam em função de x, conforme o gráfico.

Sabendo que \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são suprimidas na posição $x = 10 \text{ m}$, determine a máxima velocidade escalar atingida pelo bloco.



17. Uma partícula de massa $m = 10 \text{ kg}$ acha-se em repouso na origem do eixo 0x, quando passa a agir sobre ela uma força resultante \vec{F} , paralela ao eixo. De $x = 0$ a $x = 4,0 \text{ m}$, a intensidade de \vec{F} é constante, de modo que $F = 120 \text{ N}$. De $x = 4,0 \text{ m}$ em diante, \vec{F} adquire intensidade que obedece à função: $F = 360 - 60x \text{ (SI)}$

- Trace o gráfico da intensidade de \vec{F} em função de x.
- Determine a velocidade escalar da partícula no ponto de abscissa $x = 7,0 \text{ m}$.

10. POTÊNCIA

Na maioria das situações práticas, não basta dizer apenas que certo dispositivo é capaz de cumprir determinada função. Às vezes é importante definir em quanto tempo ele executa essa função.

Tomemos, por exemplo, o caso de um guindaste. Suponhamos que ele erga uma viga de 1 tonelada a uma altura de 10 metros. Uma pergunta importante que deve ser feita nessa situação é: em quanto tempo o guindaste ergue a viga?

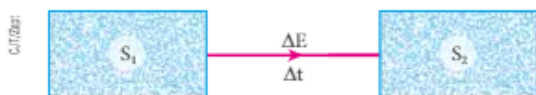
Do ponto de vista geral, a **potência** de um sistema consiste na rapidez com que ele realiza suas atribuições. A potência é tanto maior quanto menor é o intervalo de tempo utilizado na execução de uma mesma tarefa.

Dependendo do sistema em estudo, a potência recebe especificações diferentes. Falamos, por exemplo, de potência elétrica nos geradores, de potência térmica nos aquecedores e de potência mecânica quando estudamos a viabilidade de uma cachoeira para a instalação de um sistema de conversão hidrelétrico.

Quanto maior for a velocidade de rotação das facas de um liquidificador, menor será o intervalo de tempo que ele levará para triturar uma mesma quantidade de certo tipo de alimento. Assim, aumentando a velocidade de rotação das facas, estaremos aumentando a potência do sistema.

Potência média

Vamos considerar, agora, um sistema mecânico S_1 que, durante um intervalo de tempo Δt , transfere para um sistema mecânico S_2 uma quantidade de energia ΔE .



Nesse processo, define-se **potência média** (Pot_m) como o quociente da energia transferida (ΔE) pelo intervalo de tempo (Δt) em que essa transferência ocorreu:

$$Pot_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Essa energia transferida equivale a um trabalho τ . Assim, a potência mecânica média também pode ser dada por:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t}$$

A unidade de potência é obtida pelo quociente da unidade de trabalho (ou energia) pela unidade de tempo:

$$\text{unid (Pot)} = \frac{\text{unid } (\tau)}{\text{unid (t)}}$$

No Sistema Internacional (SI): unid (τ) = joule (J); unid (t) = segundo (s)

$$\text{Logo: unid (Pot)} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{watt (W)}$$

Um múltiplo muito usado do watt é o **quilowatt** (kW): $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$

Outro múltiplo também usado frequentemente é o **megawatt** (MW): $1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$

Embora não pertencentes ao Sistema Internacional (SI), são também muito empregadas as seguintes unidades de potência:

- cavalo-vapor (cv): $1 \text{ cv} \cong 735,5 \text{ W}$
- horse-power (HP): $1 \text{ HP} \cong 745,7 \text{ W}$

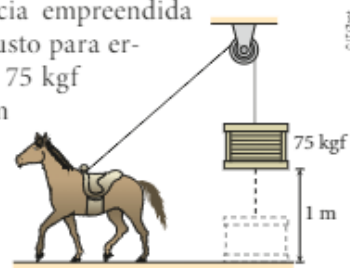
James Watt (1736-1819) foi um engenheiro escocês de fundamental importância no desenvolvimento e aprimoramento de máquinas térmicas, que constituíram a essência tecnológica de um dos períodos mais notáveis da história: a Revolução Industrial.



Retrato de James Watt, pintado por Carl Frederik von Breda em 1792. Science Museum, Londres.

Os mecanismos mais importantes projetados por ele eram acionados por vapor de água em alta pressão, obtido a partir da ebulição do líquido em caldeiras. Outros engenhos, porém, utilizavam tração animal, rodas-d'água e moinhos de vento.

Um **cavalo-vapor** (cv), como foi definido por Watt, era a potência empreendida por um cavalo robusto para erguer uma carga de 75 kgf a uma altura de um metro durante um segundo.



$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{m g h}{\Delta t} = \frac{75 \cdot 9,807 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}}$$

$$\text{Logo: } Pot_m \cong 735,5 \text{ W}$$

Potência instantânea

Definimos a potência média em um intervalo de tempo Δt . Se fizermos esse intervalo de tempo tender a zero, teremos, no limite, a **potência instantânea**, que pode ser expressa matematicamente por:

$$\text{Pot} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Pot}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tau}{\Delta t}$$

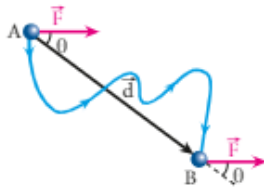
NOTA

Em uma situação em que a potência é constante, o valor instantâneo iguala-se ao médio.

Relação entre potência instantânea e velocidade

Em vários problemas de Mecânica, há interesse em se relacionar a potência com a velocidade. Conhecendo, por exemplo, a intensidade da velocidade de um veículo, podemos determinar a potência útil fornecida por seu motor.

Estudemos a situação, em que uma partícula é deslocada de **A** para **B** ao longo da trajetória indicada, sob a ação da força \vec{F} (constante), dentre outras forças:



Sejam \vec{d} o deslocamento vetorial de **A** até **B** e θ o ângulo entre \vec{F} e \vec{d} . O trabalho de \vec{F} de **A** até **B** pode ser calculado por: $\tau = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta$ (I)

A potência média de \vec{F} nesse deslocamento é:

$$\text{Pot}_m = \frac{\tau}{\Delta t} \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), segue:

$$\text{Pot}_m = \frac{|\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta}{\Delta t}$$

O quociente $\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$, entretanto, é o módulo da velocidade vetorial média (\vec{v}_m) da partícula.

$$\text{Assim: } \text{Pot}_m = |\vec{F}| |\vec{v}_m| \cos \theta$$

A potência instantânea de \vec{F} é obtida passando-se o último resultado ao limite, para o intervalo de tempo tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$\text{Pot} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Pot}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\vec{F}| |\vec{v}_m| \cos \theta)$$

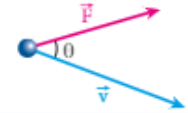
Diante desse limite, os valores médios transformam-se em instantâneos e obtemos:

$$\text{Pot} = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Em notação mais simples: $\text{Pot} = F v \cos \theta$

NOTA

Observe na expressão acima que θ é o ângulo formado entre \vec{F} e \vec{v} :



Caso particular importante: $\theta = 0^\circ$

Nesse caso, \vec{F} e \vec{v} têm a mesma orientação, isto é, mesma direção e sentido.

Se $\theta = 0^\circ$, então $\cos \theta = 1$.

Portanto: $\text{Pot} = F v$

Na fotografia a seguir, observamos um ônibus espacial sendo impulsionado no ato do lançamento por dois foguetes. A força propulsora (\vec{F}) recebida pelo sistema tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade (\vec{v}) e, por isso, sua potência fica determinada pelo produto $\text{Pot} = F v$.

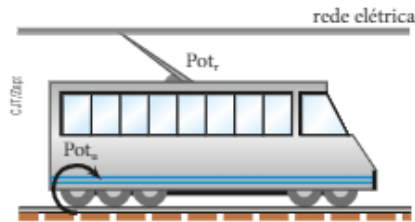


Lançamento de ônibus espacial.

11. RENDIMENTO

A noção de rendimento é largamente utilizada em diversos segmentos da atividade humana, sobretudo nas áreas técnicas. Fala-se, por exemplo, que o rendimento de um carro não está bom. Até nos esportes é comum mencionar que um determinado atleta não está rendendo como de costume.

Tome como exemplo a figura abaixo, em que uma locomotiva elétrica se acha em movimento para a direita.



Suponhamos que ela receba da rede uma potência Pot_r . Será que toda a potência recebida é utilizada no movimento? Claro que não! Uma parte é dissipada, perdendo-se por efeito de atritos: aquecimento e ruídos, dentre outros.

Sendo Pot_u a potência útil (utilizada no movimento) e Pot_d a potência dissipada, temos:

$$Pot_u = Pot_r - Pot_d$$

O rendimento (η) da locomotiva, por sua vez, é calculado pelo quociente da potência útil (Pot_u) pela potência recebida (Pot_r).

$$\eta = \frac{Pot_u}{Pot_r}$$

Esse exemplo pode ser estendido a outros casos. Em termos gerais, diz-se que:

O **rendimento** (η) de um sistema físico qualquer é dado pelo quociente da potência útil (Pot_u) pela potência recebida (Pot_r).

O rendimento é adimensional (não tem unidades) por ser definido pelo quociente de duas grandezas medidas nas mesmas unidades. É expresso geralmente em porcentagem, bastando, para isso, multiplicar seu valor por 100%.

O rendimento de um sistema físico real é sempre inferior a 1 ou a 100%, pois, em razão das dissipações sempre existentes, a potência útil é sempre menor que a recebida.

$$\text{De fato: } \eta = \frac{Pot_u}{Pot_r} \Rightarrow \eta = \frac{Pot_r - Pot_d}{Pot_r}$$

$$\text{Portanto: } \eta = 1 - \frac{Pot_d}{Pot_r}$$

A ocorrência de $\eta = 1$ ou 100% implica $Pot_d = 0$, o que é inviável em termos reais. Dizemos que o rendimento de um sistema é baixo quando a potência útil é bem menor que a recebida e que o rendimento de um sistema é alto quando a potência útil é pouco menor que a recebida.



Gerar energia elétrica com menos impacto ambiental?

Uma modalidade de energia que vem sendo utilizada cada vez em maior escala é a **eólica**, proveniente das correntes de ar (ventos). O aproveitamento desse tipo de energia, considerada energia limpa por não causar poluição, pode ser observado em regiões áridas ou desérticas, como no oeste dos Estados Unidos, nos estados da Califórnia, de Nevada e do Arizona, além de alguns estados do Nordeste brasileiro.

O vento age nas pás dos rotores, fazendo-as girar. Esse movimento é transmitido aos eixos de geradores, que disponibilizam em seus terminais tensão elétrica. A potência útil disponível em cada ventoinha é sempre menor que a potência recebida do vento, já que sempre ocorrem dissipações. Isso indica que o rendimento de cada sistema captador é menor que 100%.

Maiores complexos eólicos da América Latina, localizado nos municípios Caetitê, Guanambi e Igaporã, na Bahia. Dezembro de 2014.



Árvores laboriosas: trabalho no erguimento de água e os rios voadores da Amazônia

Quem disse que existem apenas rios líquidos escoando ao longo de calhas bem definidas, esculpadas pela água durante anos a fio, e que esses rios serpenteiam rumo a rios maiores ou mesmo em direção ao mar?

Pois bem, a Floresta Amazônica despeja na atmosfera através de suas muitas árvores – estimadas em cerca de 600 bilhões de unidades, sabidamente, um verdadeiro manto verde equatorial – uma quantidade enorme de vapor de água, que supera em massa o que o Rio Amazonas verte diariamente em sua foz no Oceano Atlântico (cerca de 17 bilhões de toneladas de água). Calcula-se que cada árvore de grande porte transfira sozinha do subsolo para o ar aproximadamente 1 000 L de água a cada 24 horas.



Carapanauba, Manaus (AM). Setembro de 2014. As árvores puxam água existente no subsolo permitindo que ela evapore através de suas folhas. Trata-se de um incrível mecanismo da biosfera responsável por dotar de umidade a atmosfera terrestre.

Existe sobre nós, por conseguinte, um imenso rio voador!

E essa enorme massa de H₂O viaja transversalmente pelo céu do Brasil, do noroeste para o sudeste, irrigando o solo e possibilitando condições favoráveis e controladas de vida.

Trata-se de um processo sofisticado e eficaz, diferente do verificado nos gêiseres, que se constituem de dutos que fazem conexão com o subsolo. Nesse caso, o vapor de água em alta pressão produzido pelo magma superaquecido, devido à súbita decompressão, explode em jatos líquidos para a atmosfera.

A floresta lança sobre um quadrilátero imaginário com vértices aproximadamente em São Paulo, Buenos Aires, Cordilheira dos Andes e Cuiabá um grande rio aéreo que faz chover regularmente em toda essa região. É importante notar que esse quadrilátero situa-se em uma latitude – a implacável latitude 30° Sul – na

qual ocorrem desertos em outras partes do mundo, como o *Atacama*, no Chile, o *Kalahari*, na África, e o *Outback*, na Austrália. Sendo irrigada pelas chuvas amazônicas, essa área da América do Sul escapa sorrateira da cruel estatística dos desertos, sendo atualmente a responsável por 70% do PIB (Produto Interno Bruto) do continente. Somos, pois, uma exceção e isso é uma verdadeira dádiva, não é mesmo?

Essa poderosíssima usina ambiental, equivalente a 50 mil Itaipus, depende, porém, de sutilezas para continuar funcionando e a principal delas é a preservação da floresta. Agressões, como queimadas e desmatamentos, podem ser fatais, impactando imediatamente essa fantástica engrenagem e conduzindo o Centro-Oeste, o Sudeste e o Sul brasileiros a situações de escassez de chuvas – secas – e desabastecimento de água, como temos vivenciado nos dias atuais.

Com um olhar para os malefícios da abertura indiscriminada de áreas agrícolas na Amazônia, cabe, portanto, uma maior reflexão da sociedade no que se refere a legislações ambientais, especialmente em pontos que deliberam sobre queimadas e desmatamentos.

Sem as florestas, o meio ambiente caminhará para um colapso e o homem, cujo conforto e estabilidade dependem sobremaneira da harmonia e sustentabilidade ambientais, sucumbirá, padecendo com severas crises de oferta de insumos básicos, a começar por falta de água.



Represa do Jaguari, São José dos Campos (SP). Outubro de 2014. Imagens como esta têm permeado os noticiários brasileiros nos últimos tempos. Seca na Região Sudeste? Quem diria? A natureza reclama e a contrapartida exigida para uma possível reversão desse quadro é restaurar as florestas – reflorestar.

Fonte de pesquisa: Documento *O Futuro Climático da Amazônia* – Relatório de Avaliação Científica, do cientista ambiental Professor Antônio Donato Nobre (PhD), Articulación Regional Amazónica (ARA).

Disponível em: <www.ipam.org.br/biblioteca/livro/O-Futuro-Climatico-da-Amazonia/758>. Acesso em: 27 nov. 2015.

QUESTÕES COMENTADAS



18 O Teste Margaria de corrida em escada é um meio rápido de medida da potência anaeróbica de uma pessoa. Consiste em fazê-la subir uma escada de dois em dois degraus, cada um com 18 cm de altura, partindo com velocidade escalar constante de uma distância de alguns metros da escada. Quando pisa no 8º degrau, a pessoa aciona um cronômetro, que se desliga quando pisa no 12º degrau. Se o intervalo de tempo registrado para uma pessoa de 70 kg foi de 2,8 s e considerando-se a aceleração da gravidade com módulo igual a 10 m/s^2 , qual é a potência média determinada por esse método?

RESOLUÇÃO

No intervalo de tempo considerado, a pessoa subiu quatro degraus.



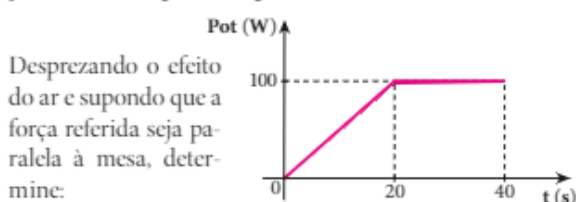
$H = 4h \Rightarrow H = 4 \cdot 18 \text{ (cm)} \Rightarrow H = 72 \text{ cm} = 0,72 \text{ m}$
 O trabalho τ das forças musculares da pessoa, ao subir a escada com velocidade constante, é calculado por: $\tau = mgh$
 Sendo $m = 70 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $H = 0,72 \text{ m}$, temos:
 $\tau = 70 \cdot 10 \cdot 0,72 \text{ (J)} \Rightarrow \tau = 504 \text{ J}$

A potência média despendida na subida da escada fica dada por: $\text{Pot}_m = \frac{\tau}{\Delta t}$

$$\text{Pot}_m = \frac{504}{2,8} \text{ (W)} \Rightarrow \text{Pot}_m = 180 \text{ W}$$

Resposta: 180 W

19 Um bloco de 15 kg de massa repousa sobre uma mesa horizontal e sem atrito. No instante $t_0 = 0 \text{ s}$, passa a agir sobre ele uma força cuja potência é dada em função do tempo, conforme o gráfico seguinte:

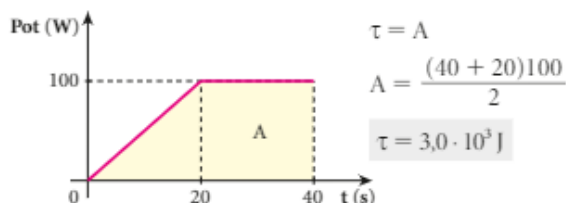


Desprezando o efeito do ar e supondo que a força referida seja paralela à mesa, determine:

- a) o trabalho da força sobre o bloco de $t_0 = 0 \text{ s}$ até $t_1 = 40 \text{ s}$;
 b) o módulo da velocidade do bloco no instante $t_1 = 40 \text{ s}$.

RESOLUÇÃO

- a) O trabalho é calculado pela "área" A destacada abaixo:



- b) A força em questão é a resultante sobre o bloco, o que nos permite aplicar o **Teorema da Energia Cinética**:

$$\tau = E_{c40} - E_{c0} \Rightarrow \tau = \frac{m(v_{40})^2}{2} - \frac{m(v_0)^2}{2}$$

Sendo $m = 15 \text{ kg}$, $v_0 = 0$ e $\tau = 3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$, calculemos v_{40} :

$$3,0 \cdot 10^3 = \frac{15(v_{40})^2}{2} \Rightarrow v_{40} = 20 \text{ m/s}$$

Respostas: a) $3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$; b) 20 m/s

20 O rendimento de determinada máquina é de 80%. Sabendo que ela recebe uma potência de 10,0 kW, calcule:

- a) a potência útil oferecida;
 b) a potência dissipada.

RESOLUÇÃO

- a) O rendimento (η) pode ser expresso por: $\eta = \frac{\text{Pot}_u}{\text{Pot}_r}$

Sendo $\eta = 80\% = 0,80$ e $\text{Pot}_r = 10,0 \text{ kW}$, temos:

$$\text{Pot}_u = \eta \text{Pot}_r \Rightarrow \text{Pot}_u = 0,80 \cdot 10,0 \text{ kW}$$

Portanto: $\text{Pot}_u = 8,0 \text{ kW}$

- b) $\text{Pot}_u = \text{Pot}_r - \text{Pot}_d \Rightarrow \text{Pot}_d = \text{Pot}_r - \text{Pot}_u$

$$\text{Logo: } \text{Pot}_d = 10,0 \text{ kW} - 8,0 \text{ kW} \Rightarrow \text{Pot}_d = 2,0 \text{ kW}$$

Respostas: a) 8,0 kW; b) 2,0 kW



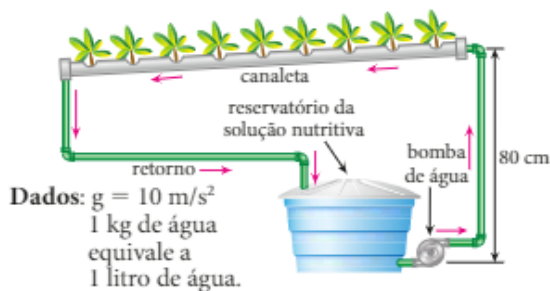
QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

21. A hidroponia consiste em um método de plantio fora do solo em que as plantas recebem seus nutrientes de uma solução, que flui em canaletas, e é absorvida pelas raízes. Por meio de uma bomba hidráulica, em determinada hora hidropônica, a solução é elevada até uma altura de

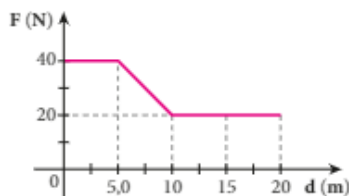
80 cm, sendo vertida na canaleta onde estão presas as mudas. Devido a uma ligeira inclinação da canaleta, a solução se move para o outro extremo, lá sendo recolhida e direcionada ao reservatório do qual a bomba reimpulsiona o líquido, como mostra a figura a seguir.



Suponha que nessa horta hidropônica foi empregada uma bomba com potência de 20 W. Se toda a potência dessa bomba pudesse ser empregada para elevar a água até a canaleta, a cada um segundo (1,0 s) que volume de água fluiria no sistema?

22. O gráfico a seguir mostra a variação da intensidade de uma das forças que agem em uma partícula em função de sua posição sobre uma reta orientada. A força é paralela à reta.

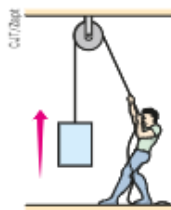
Sabendo que a partícula tem movimento uniforme com velocidade de 4,0 m/s, calcule, para os 20 m de deslocamento descritos no gráfico:



- a) o trabalho da força;
- b) sua potência média.

23. A usina hidrelétrica de Itaipu é uma obra conjunta do Brasil e do Paraguai que envolve números gigantescos. A potência média teórica chega a 12600 MW quando 18 unidades geradoras operam conjuntamente, cada qual com uma vazão próxima de 700 m³ por segundo. Suponha que a água da represa adentre as tubulações que conduzem o líquido às turbinas com velocidade praticamente nula e admita que os geradores aproveitem praticamente 100% da energia hídrica disponível. Adotando para a aceleração da gravidade o valor 10 m/s² e sabendo que a densidade da água é igual a 1,0 · 10³ kg/m³, determine o desnível entre as bocas das tubulações e suas bases, onde estão instaladas as turbinas das unidades geradoras.

24. No arranjo da figura, o homem faz com que a carga de peso igual a 300 N seja elevada com velocidade constante de 0,50 m/s.



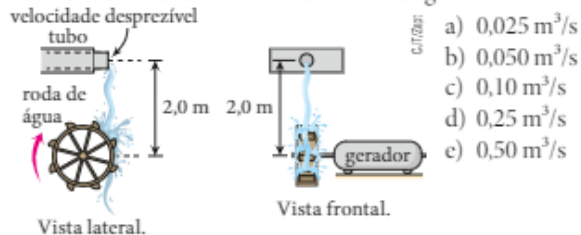
Considerando a corda e a polia ideais e o efeito do ar desprezível, determine:
 a) a intensidade da força com que o homem puxa a corda;
 b) a potência útil da força exercida pelo homem.

25. Um paraquedista desce com velocidade constante de 5,0 m/s. O conjunto paraquedas e paraquedista pesa 100 kgf. Considerando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, podemos dizer que a potência dissipada pelas forças de resistência do ar tem módulo:
 a) 0,50 kW c) 5,0 kW e) 50 kW
 b) 4,9 kW d) 49 kW

26. Sabe-se que a intensidade da força total de resistência recebida por um carro de Fórmula 1 em movimento sobre o solo plano e horizontal é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de sua velocidade. Admita que, para manter o carro com velocidade $v_A = 140 \text{ km/h}$, o motor forneça uma potência útil $P_A = 30 \text{ HP}$. Que potência útil P_B deverá o motor fornecer para manter o carro com velocidade $v_B = 280 \text{ km/h}$?

27. Sob a ação de uma força resultante constante e de intensidade 20 N, uma partícula parte do repouso, adquirindo um movimento cuja função horária das velocidades escalares é $v = 2kt$ (SI), sendo k uma constante adimensional e positiva. Sabendo que, no instante $t = 1 \text{ s}$, a potência da força resultante sobre a partícula vale 200 W, determine o valor de k .

28. O esquema a seguir representa os principais elementos de um sistema rudimentar de geração de energia elétrica. A água que sai do tubo com velocidade praticamente nula faz girar a roda, que, por sua vez, aciona um gerador. O rendimento do sistema é de 80% e a potência elétrica que o gerador oferece em seus terminais é de 4,0 kW. Sabendo a densidade da água (1,0 g/cm³) e a aceleração da gravidade (10 m/s²), qual alternativa traz o valor correto da vazão da água?



- a) 0,025 m³/s
- b) 0,050 m³/s
- c) 0,10 m³/s
- d) 0,25 m³/s
- e) 0,50 m³/s

DESCUBRA MAIS

1 Admita que no teste de um carro, realizado em uma pista plana e horizontal, o veículo parta do repouso e atinja 100 km/h ao fim de 3 s, de modo que nessa arrancada nenhuma de suas rodas derrape. Desconsidere os efeitos do ar. Que forças são responsáveis pela aceleração do carro e que forças são responsáveis pela variação de sua energia cinética?

Potência em cachoeiras

O Brasil é um dos países de maior potencial hídrico do mundo, superado apenas pela Rússia e pelo Canadá. Esse potencial traduz a quantidade de energia mecânica aproveitável das águas dos rios por unidade de tempo. Dos 250 000 MW disponíveis em nosso país, cerca de 20% (50 000 MW) são transformados em potência elétrica nas muitas usinas hidrelétricas espalhadas pelo território nacional, predominantemente nas regiões Sudeste e Sul.

O potencial hídrico (potência hídrica média teórica) de uma queda-d'água depende da densidade absoluta da água (μ), do volume de líquido que despenca por unidade de tempo – vazão em volume (Z) –, da intensidade da aceleração da gravidade (g) e do desnível entre o topo da cachoeira e seu sopé (h).

Vamos admitir, no cálculo a seguir, que a água apresenta velocidade praticamente nula ao se precipitar do alto da cachoeira e que m seja a massa de água que despenca do topo da cachoeira em um intervalo de tempo Δt .

O trabalho τ realizado pelas forças da gravidade para transportar a massa m do topo até o sopé da queda-d'água é dado por:

$$\tau = m g h \quad (\text{I})$$

A potência hídrica média teórica envolvida no processo, porém, é determinada pela relação:

$$\text{Pot}_m = \frac{\tau}{\Delta t} \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\text{Pot}_m = \frac{m g h}{\Delta t} \quad (\text{III})$$

Representemos por V o volume de água correspondente à massa m . A densidade absoluta da água é dada pelo quociente:

$$\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu V \quad (\text{IV})$$

Substituindo (IV) em (III), temos:

$$\text{Pot}_m = \frac{\mu V g h}{\Delta t}$$

Note que, na expressão anterior, o quociente $\frac{V}{\Delta t}$ representa a vazão em volume Z da cachoeira.

Assim: $\text{Pot}_m = \mu Z g h$

Para termos uma ideia da ordem de grandeza da potência hídrica média teórica disponível no sopé de uma cachoeira, consideremos uma queda-d'água com altura de 10 m, situada em um local em que $g = 10 \text{ m/s}^2$, por onde jorram 10 m^3 de água por segundo. Sendo de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ a densidade absoluta da água, temos:

$$\text{Pot}_m = \mu Z g h$$

$$\text{Pot}_m = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (W)}$$

Portanto: $\text{Pot}_m = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kW} = 1,0 \text{ MW}$

Observe que, para μ , Z e g constantes, a Pot_m é diretamente proporcional à altura h da queda-d'água. Dobrando-se h , por exemplo, a Pot_m também dobra.

Já para μ , g e h constantes, a Pot_m é diretamente proporcional à vazão Z de água que jorra pela cachoeira. Dobrando-se Z , por exemplo, a Pot_m também dobra.

Thales Ribeiro / Imagem



Cataratas do Iguaçu, Foz do Iguaçu (PR). Novembro de 2015. A potência hídrica média teórica disponível na base de uma cachoeira cresce com o desnível entre o topo e o sopé da queda-d'água e com a vazão de água que jorra. Essa potência, entretanto, não é totalmente aproveitável, já que sempre haverá perdas nos mecanismos de captação e conversão da energia.

Leia a seguir trechos de um texto sobre a matriz energética brasileira, publicado em novembro 2010 e reeditado em julho de 2014.

Brasil possui a matriz energética mais renovável do mundo industrializado [...]

O Brasil possui a matriz energética mais renovável do mundo industrializado com 45,3% de sua produção proveniente de fontes como recursos hídricos, biomassa e etanol, além das energias eólica e solar. As usinas hidrelétricas são responsáveis pela geração de mais de 75% da eletricidade do país. Vale lembrar que a matriz energética mundial é composta por 13% de fontes renováveis no caso de países industrializados, caindo para 6% entre as nações em desenvolvimento.[...]

O modelo energético brasileiro apresenta um forte potencial de expansão, o que resulta em uma série de oportunidades de investimento de longo prazo.[...]

Hoje, apenas um terço do potencial hidráulico nacional é utilizado. Usinas de grande porte a serem instaladas na região amazônica constituem a nova fronteira hidrelétrica nacional e irão interferir não apenas na dimensão do sistema de geração, mas também no perfil de distribuição de energia em todo o país, abrindo novas possibilidades de desenvolvimento regional e nacional.[...]

O Brasil possui uma matriz de energia elétrica que conta com a participação de 77,1% da hidroeletricidade. Energia proveniente de 140 usinas em operação, com perspectiva de aumento do uso dessa fonte. [...]

A previsão do Plano Decenal de Energia é que o País terá 71 novas usinas até 2017, com potencial de geração de 29 000 MW, sendo 15 na bacia do Amazonas, 13 na bacia do Tocantins-Araguaia, 18 no rio Paraná e 8 no rio Uruguai. As 28 usinas hidrelétricas planejadas na região amazônica têm no seu conjunto, a capacidade instalada de 22 900 MW.

Christian Pina/Photovision



Usina Hidrelétrica de Itaipu, localizada no rio Paraná, fronteira entre Brasil e Paraguai. Novembro de 2015.

Disponível em: <www.brasil.gov.br/meio-ambiente/2010/11/matriz-energetica>. Acesso em: 27 nov. 2015.

O Brasil usa energia hidrelétrica desde o final do século 19, mas as décadas de 1960 e 1970 marcaram a fase de maior investimento na construção de grandes usinas. [...] Inaugurada em 1984 depois de um acordo binacional com o Paraguai, a Usina de Itaipu tem hoje potência instalada de 14 mil MW, com 20 unidades geradoras. Essa capacidade é suficiente para suprir cerca de 80% de toda a energia elétrica consumida no Paraguai e de 20% da demanda do sistema interligado brasileiro.

Já as usinas de Jirau e Santo Antônio – ainda em fase de construção, no Rio Madeira –, por exemplo, utilizam a tecnologia de turbinas bulbo, diminuindo o alagamento necessário e, conseqüentemente, efeitos negativos como o deslocamento de populações locais, a desapropriação de terras e o impacto ambiental. [...]

A hidrelétrica com maior capacidade de geração de energia elétrica no mundo é a Usina de Três Gargantas, na China, com capacidade instalada de 22,5 mil MW.

Fotografia da Usina de Três Gargantas (2009), na província de Hubei, na China, que com 26 turbinas fornece uma potência total de 22 500 MW, maior que os 14 000 MW de potência instalada de Itaipu. É um projeto controverso que inundou importantes sítios arqueológicos e demoveu 1,1 milhão de pessoas, muito embora tenha colaborado para controlar enchentes no rio Yang-Tsé.



REUTERS/Alamy

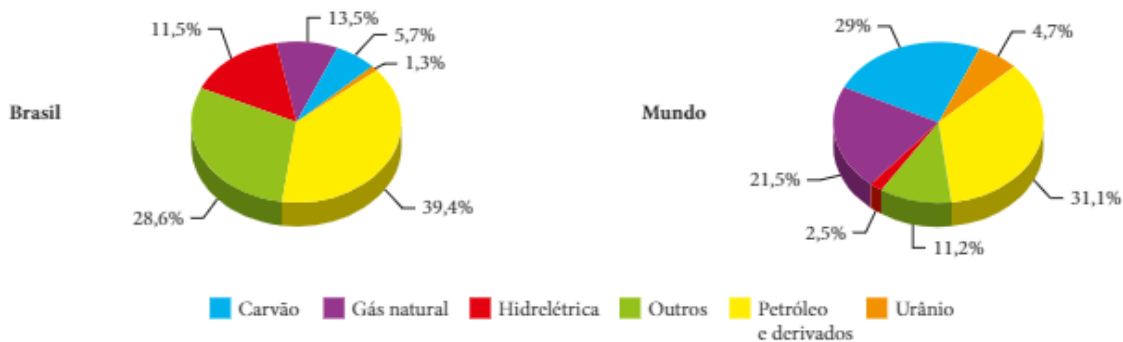
Observe ao lado uma tabela com algumas hidrelétricas brasileiras e sua potência instalada, e abaixo, dois gráficos que indicam a oferta interna de energia no Brasil e no mundo. Uma consideração: em 2016, começou a funcionar no Brasil a usina hidrelétrica de Belo Monte, na bacia do Rio Xingu, no Pará, com capacidade instalada de 11 GW e capacidade efetiva de geração de 4,5 GW.

Algumas usinas hidrelétricas brasileiras Potência hídrica instalada (2014)

Nome	Capacidade (GW)	Rio	UF
Tucuruí I e II	8,54	Tocantins	PA
Itaipu (Parte brasileira)	7,00	Paraná	PR
Ilha Solteira	3,44	Paraná	SP
Xingó	3,16	São Franc.	SE
Paulo Afonso IV	2,46	São Franc.	AL
Santo Antônio	2,29	Madeira	RO
Itumbiara	2,08	Paranaíba	MG
São Simão	1,71	Paranaíba	MG
Gov. Bento Munhoz R. N.	1,68	Iguaçu	PR
Eng. Souza Dias (Jupia)	1,55	Paraná	SP
Eng. Sérgio Motta	1,54	Paraná	MS
Jirau	1,50	Madeira	RO
Luiz Gonzaga (Itaparica)	1,48	São Franc.	BA
Itá	1,45	Uruguai	RS/SC
Marimbondo	1,44	Grande	MG

Fonte: <www.mme.gov.br/documents/1138787/0/Capacidade+Instalada+de+EE+2014.pdf/cb1d150d-0b52-4f65-a86b-b368ee715463>. Acesso em: 27 nov. 2015.

Oferta interna de energia no Brasil e no mundo



Fonte: <www.mme.gov.br/documents/1138787/1732840/Resenha+Energetica+-+Brasil+2015.pdf/4e6b9a34-6b2e-48fa-9ef8-dc7008470bf2>. Acesso em: 18 abr. 2015.

Compreensão, pesquisa e debate

1. Forneça quatro argumentos a favor da construção de usinas hidrelétricas e quatro argumentos contra.
2. De que forma as usinas hidrelétricas colaboram para aumentar o efeito estufa?
3. A matriz energética brasileira é considerada uma das mais limpas do mundo por se fundamentar em fontes renováveis de energia. O que vêm a ser essas fontes energéticas? Cite pelo menos cinco exemplos.
4. Quais os países cuja matriz energética descarta a maior quantidade de dejetos e resíduos poluentes no meio ambiente?
5. Como prover no futuro próximo, de forma sustentável, o crescimento populacional do planeta com energia limpa, agredindo minimamente o meio ambiente? Discuta com seus colegas e professores.



ENERGIA MECÂNICA E SUA CONSERVAÇÃO

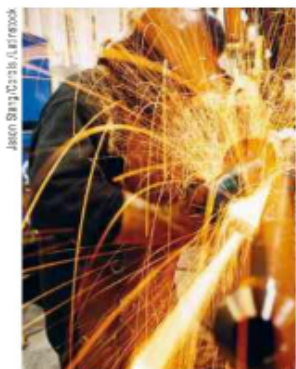
1. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO – INTERCÂMBIOS ENERGÉTICOS

A **energia** desempenha um papel essencial em todos os setores da vida, sendo a grandeza mais importante da Física.

O Sol, a água, o vento, o petróleo, o carvão e o átomo são fontes que suprem o consumo atual de energia no mundo, mas, à medida que a população do planeta cresce e os itens de conforto à disposição da espécie humana se multiplicam, aumenta também a demanda por energia, exigindo novas alternativas e técnicas de obtenção.

Ao que tudo indica, o átomo será a principal fonte de energia do futuro. Por isso, ele vem sendo objeto de estudo nos principais centros de pesquisa, que também se preocupam em investigar o aproveitamento de suas potencialidades de modo seguro e eficaz.

A energia é uma grandeza única, mas, dependendo de como se manifesta, recebe diferentes denominações: energia térmica; energia luminosa; energia elétrica; energia química; energia mecânica; energia atômica, entre outras.



O equipamento usado pelo operário nesta imagem é dotado de uma lâmina em forma de disco que gira em alta velocidade. Na operação, a energia elétrica que alimenta a máquina se transforma essencialmente em energia mecânica (a lâmina e as fagulhas produzidas pelo atrito estão em movimento), térmica (as partes que se atrimam se aquecem) e acústica (há produção de ruído).

Um dos preceitos mais amplos e fundamentais da Física é o **Princípio da Conservação da Energia**, segundo o qual se pode afirmar que:

A energia total do Universo é **constante**, podendo haver apenas transformações de uma modalidade em outras.

Uma lâmpada incandescente, por exemplo, transforma energia elétrica em energia térmica. Seu filamento se aquece a tal ponto que se torna luminoso, transformando parte da energia térmica proveniente da corrente elétrica (efeito Joule) em energia luminosa.

Tudo teria começado com alusões à conservação da matéria. Talvez a referência mais antiga a esse respeito se deva ao poeta romano **Lucrecio**, contemporâneo de Júlio César (100 a.C.-49 a.C.). Ele escreveu em seu célebre poema *De Rerum Natura*:

“[...] As coisas não podem nascer do nada, nem desaparecer voltando ao nada [...]”

Passou muito tempo para que esse conceito fosse retomado e adquirisse base científica. A principal contribuição experimental foi dada pelo químico francês Antoine Laurent **Lavoisier** (1743-1794), considerado por muitos o criador da Química Moderna. Ele escreveu em 1789:

“[...] Devemos tomar como axioma incontestável que, em todas as operações da arte e da natureza, nada é criado; a mesma quantidade de matéria existe antes e após um experimento... e nada ocorre além de mudanças e modificações nas combinações dos elementos envolvidos [...]”

O princípio de Lavoisier, denominado depois **Princípio da Conservação da Massa**, mostrou-se extremamente fértil no desenvolvimento da Química e da Física.

Antoine Laurent **Lavoisier**
O **Princípio da Conservação da Massa**, de Lavoisier, pode ser assim resumido: “Na natureza, nada se cria, nada se perde, tudo se transforma”.



O físico e médico alemão Julius Robert von **Mayer** (1814-1878) foi o primeiro a formular o conceito de conservação da energia.



Julius Robert von **Mayer** é o precursor da **Lei da Conservação da Energia**. Aplicando esse princípio à Termodinâmica, ele estabeleceu relações de igualdade entre trabalho mecânico e energia térmica, o que suscitou o surgimento da lei número 1 dessa área.

Em um ensaio de 1842, Mayer defendeu que: “Quando uma quantidade de energia de qualquer natureza desaparece numa transformação, então se produz uma quantidade igual em grandeza de uma energia de outra natureza”.

Estava lançada a semente da **Lei da Conservação da Energia**.

Na explosão de uma bomba atômica, várias formas de energia estão presentes. A energia nuclear desprendida é transformada principalmente em energia mecânica, térmica e radiante (luz visível e raios γ , que podem provocar degeneração celular nos seres vivos). Em uma visão clássica, considerando o **Princípio da Conservação da Energia**, podemos afirmar que a soma de todas as modalidades de energia liberadas pela bomba no ato da explosão é igual à energia inicial potencializada no artefato.



Explosão de uma bomba atômica no atol de Bikini, no Oceano Pacífico, em 1946.

O físico inglês James Prescott **Joule** (1818-1889) obteve em 1843, um ano depois da publicação de Mayer, com experimentos que se tornaram históricos, a relação quantitativa entre as unidades de calor e trabalho, verificando que 1 caloria = 4,1855 joules. Com isso, a noção de conservação da energia anexava-se também à Termodinâmica prática.

De forma mais abrangente, se considerarmos que o Universo é um sistema físico isolado, a **Lei da Conservação da Energia** estabelece que a energia total contida nesse sistema tem se mantido invariável desde os primórdios de sua formação.

O físico alemão Max **Planck** (1858-1947), considerado um dos mentores da Mecânica Quântica, campo fundamental da Física Moderna que estuda o comportamento de partículas elementares, foi o

primeiro a exprimir matematicamente, em 1887, em termos rigorosos e gerais, essa lei fundamental da natureza. Assim ele se referiu ao conceito:

“A energia total (mecânica e não mecânica) de um sistema isolado, isto é, um sistema que não troca matéria nem energia com o exterior, mantém-se constante”.

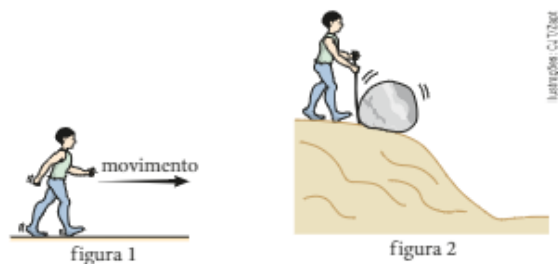
Experimentos recentes fundamentados nas teorias do físico alemão Albert **Einstein** (1879-1955) confirmam que no Universo ocorre, sim, a constância do conjunto massa e energia. Einstein se pronunciou em relação a essa concepção dizendo:

“[...] A Física pré-relativística contém duas leis de conservação cuja importância é fundamental – a Lei de Conservação da Massa e a Lei de Conservação da Energia –, em aparência, completamente independentes entre si. Por meio da Teoria da Relatividade elas se fundem em um único princípio [...]”.

O processo de aniquilamento que se verifica quando se aglutinam um elétron e um pósitron – partículas elementares de massas iguais, cargas elétricas de mesmo módulo, porém de sinais contrários –, por exemplo, confirma tal afirmação. Ao se aniquilarem, essas partículas “desaparecem”, mas em seu lugar nota-se a presença de radiação γ (onda eletromagnética de frequência muito alta), de energia equivalente à massa de repouso das duas partículas mais a energia cinética associada a elas antes do processo. Essa equivalência entre massa e energia é tratada com mais detalhamento em Física Moderna.

Nosso objetivo, neste capítulo, é estudar a energia mecânica que se manifesta em situações de movimento, como a de um cavalo a galope, e em casos de possíveis movimentos, como o de uma pequena bola prestes a ser lançada por uma mola comprimida.

A seguir, na figura 1, o garoto está em movimento. Em relação a um referencial no solo, ele tem energia mecânica. Na figura 2, o garoto está tentando fazer com que uma pedra role encosta abaixo. A pedra tem a potencialidade de se movimentar, apresentando, por isso, energia mecânica em relação à base da encosta.



Da mesma forma que o trabalho, a energia é uma grandeza de natureza **escalar**, por não ter associados a ela direção e sentido.

Um luxo de lixo!

A sociedade de consumo está produzindo cada vez mais lixo. Os depósitos e aterros sanitários estão abarrotados e multiplicam-se rapidamente por todo o mundo, já que a população cresce sem parar e os produtos de consumo, que em épocas passadas eram acondicionados de maneira simples, agora recebem camadas e mais camadas de embalagens de vidro e lata, papel e matérias plásticas.

Uma pessoa sozinha produz em média 583 g de lixo por dia. Isso significa 15 toneladas de dejetos ao longo de sua vida, estimada em 70 anos. Esse descarte equivale a 33 bois ou 18 carros populares, aproximadamente. Se pensarmos na população brasileira, o lixo produzido em um dia chega a 0,11 milhão de toneladas. A humanidade inteira, por sua vez – hoje, em número superior a 7 bilhões de habitantes –, joga fora 3,5 bilhões de toneladas entre um raiar de sol e o próximo.

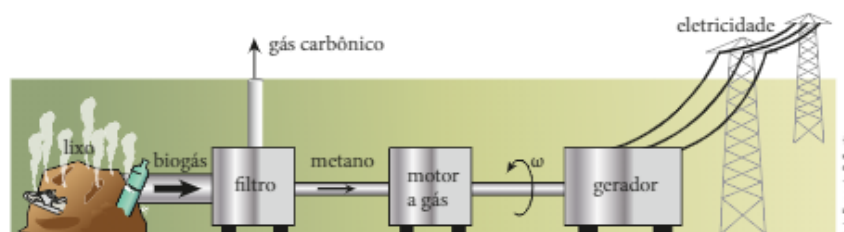
Há lixo de toda espécie e em toda parte: lixo orgânico, lixo reciclável, lixo hospitalar... Há também lixo químico e lixo radioativo, ambos uma ameaça constante ao meio ambiente. E o que fazer com tanto lixo? Onde pôr todos esses rejeitos que diariamente colocamos do lado de fora de nossas casas em quantidades cada vez maiores?

É fundamental que exista, acima de tudo, uma consciência ambiental que leve as pessoas a descartar o lixo de maneira seletiva para que cada item siga o caminho mais adequado. Papel, garrafas de vidro e de plástico, latas, pilhas, baterias, telefones celulares obsoletos e sucata eletrônica, em geral, devem ser direcionados a coletas específicas para reciclagem.

Mas o lixo também pode ter um retorno triunfal à sociedade, sendo empregado atualmente como importante fonte de energia. As bactérias que se proliferam em lixões se alimentam da matéria orgânica lá existente e produzem o chamado biogás, uma mistura de metano e gás carbônico, principalmente.

É justamente o metano, um gás estufa que contribui bastante para o agravamento do aquecimento global, que pode ser utilizado para a produção energética. O biogás desprendido do lixo é captado por meio de drenos especiais e passa por um sistema de filtragem que separa o metano do gás carbônico. O metano é, então, direcionado para o acionamento de motores, semelhantes aos utilizados nos carros movidos a gás, que entram em operação e fazem girar eixos de geradores capazes de disponibilizar tensão suficiente para abastecer de eletricidade cidades inteiras.

Veja no esquema a seguir as etapas de captação da energia do lixo.



O biogás obtido em usinas de lixo pode suprir 15% da demanda energética brasileira. Há vários projetos para o aproveitamento dessa matéria-prima, e a transformação do lixo em energia ainda traria duas consequências benéficas: a primeira é de natureza ambiental, já que haveria melhor seleção e armazenagem dos resíduos que são a base de todo o processo; a segunda é de ordem política, uma vez que o não lançamento do metano diretamente na atmosfera geraria **créditos de carbono**, moeda forte que poderia favorecer o Brasil em negociações internacionais sobre mudanças climáticas, meio ambiente e sustentabilidade.



Aterro Sanitário de São José dos Campos (SP). Abril de 2014. Veículos e máquinas especiais são utilizados para acomodar nos aterros sanitários montanhas de lixo produzidas todo dia.

2. UNIDADES DE ENERGIA

Conforme dissemos no Capítulo 10, as unidades de energia são as mesmas do trabalho. Recordando, vimos que, no SI:

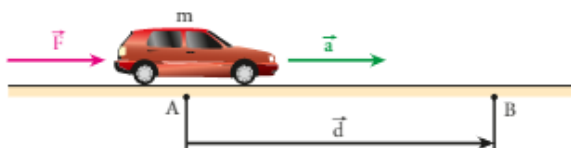
$$\text{unid. (energia)} = \text{unid. (trabalho)} = \text{joule (J)}$$

Entretanto, há outras unidades de energia que, embora não pertençam a nenhum sistema oficial, foram consagradas pelo uso. Temos, por exemplo:

- **Caloria (cal):** utilizada nos fenômenos térmicos.
 $1 \text{ cal} \cong 4,19 \text{ J}$
- **Quilowatt-hora (kWh):** utilizada em geração e distribuição de energia elétrica.
 $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$
- **Elétron-volt (eV):** utilizada nos estudos do átomo.
 $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

3. ENERGIA CINÉTICA

Na figura a seguir, um carrinho de massa m está em repouso no ponto **A** do plano horizontal sem atrito. Alguém empurra o carrinho, aplicando a força F indicada, constante e paralela ao plano de apoio.



Pela ação de \vec{F} , o carrinho adquire a aceleração \vec{a} e atinge um ponto genérico **B** com velocidade \vec{v} . De **A** até **B** o deslocamento é \vec{d} . Por estar em movimento, dizemos que o carrinho está energizado, apresentando o que chamamos de **energia cinética (E_c)**.

Entretanto, de onde vem essa energia? Ocorre que a partir do ponto **A** a força exercida pela pessoa passa a realizar trabalho sobre o carrinho. Esse trabalho é assimilado sob a forma de energia cinética.

Calculemos a energia cinética do carrinho em **B**:

$$E_c = \tau \Rightarrow E_c = F d \quad (\text{I})$$

Como \vec{F} é a força resultante, a aplicação da **2ª Lei de Newton** leva-nos a:

$$F = m a \quad (\text{II})$$

De **A** até **B** o carrinho descreve movimento uniformemente variado, em que o módulo do des-

locamento (d) pode ser calculado pela **equação de Torricelli**:

$$v^2 = (v_0)^2 + 2 a d \Rightarrow d = \frac{v^2 - (v_0)^2}{2a}$$

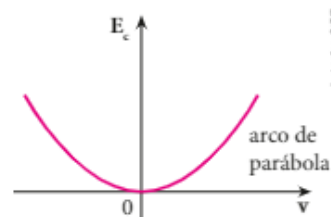
Sendo $v_0 = 0$ (o carrinho partiu do repouso em **A**), temos:

$$d = \frac{v^2}{2a} \quad (\text{III})$$

Substituindo **(II)** e **(III)** em **(I)**, obtemos:

$$E_c = m a \frac{v^2}{2a} \Rightarrow E_c = \frac{m v^2}{2}$$

A energia cinética (E_c) de uma partícula é proporcional ao quadrado de sua velocidade escalar (v). Observe o gráfico ao lado.



Veja que a energia cinética jamais é negativa: é **positiva** ou **nula**. Veja, ainda, que ela é uma grandeza relativa, pois é função da velocidade que depende do referencial. Assim, uma única partícula pode ter, ao mesmo tempo, energia cinética nula para um referencial e não nula para outro.



Na fotografia, um ônibus espacial estadunidense é conduzido acoplado a um avião adaptado especialmente para esse fim. Estando em repouso em relação ao avião, a espaçonave apresenta energia cinética nula em relação a ele. No entanto, em relação ao solo, ela está em movimento. Isso torna sua energia cinética não nula do ponto de vista desse outro referencial.

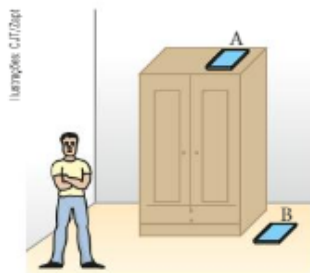
4. ENERGIA POTENCIAL

É uma forma de energia latente, isto é, está sempre prestes a se converter em energia cinética.

Na Mecânica, há dois tipos de energia potencial: **energia potencial de gravidade** e **energia potencial elástica**.

Energia potencial de gravidade (E_p)

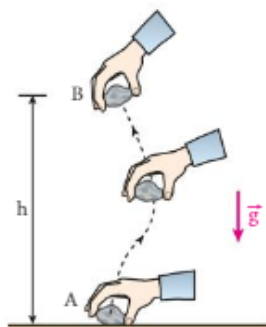
É função da posição de um corpo em um campo gravitacional (por exemplo, o terrestre) e depende da intensidade do peso do corpo no local onde se encontra e da altura do seu centro de massa em relação a um plano horizontal de referência.



Utilizando o piso do quarto como plano horizontal de referência, o estudante poderá dizer que o caderno **A**, colocado sobre o armário, tem energia potencial de gravidade não nula, enquanto o caderno **B**, de espessura desprezível, apoiado sobre o solo, possui energia potencial de gravidade nula.

Na situação da figura a seguir, uma pessoa ergue um corpo de massa **m** da posição **A** à posição **B**. Seja **h** a altura de **B** em relação ao nível horizontal da posição **A** e **g** o módulo da aceleração da gravidade.

Por ocupar a posição **B**, o corpo está energizado, apresentando, em relação à posição **A**, **energia potencial de gravidade** (E_p). De onde veio, essa energia? Veio da pessoa, que, ao erguer o corpo, exerceu uma força que realizou um trabalho assimilado pelo corpo sob a forma de energia potencial de gravidade.



Uma vez em **B** e abandonado, o corpo cai, buscando atingir o nível da posição **A**. Esse fato mostra que, em **B**, o corpo está realmente energizado, pois cai quando largado à ação da gravidade. Assim, ocorre transformação de energia potencial de gravidade em energia cinética. Calculando a energia potencial de gravidade do corpo na posição **B**, temos:

$$E_p = \tau \quad (I)$$

No Capítulo 10, vimos que o trabalho motor realizado no erguimento de um corpo sem variação de energia cinética é calculado por:

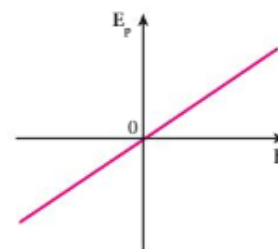
$$\tau = Ph \Rightarrow \tau = mgh \quad (II)$$

De (I) e (II), obtemos:

$$E_p = Ph \quad \text{ou} \quad E_p = mgh$$

Devemos destacar que a energia potencial de gravidade deve ser definida em relação a um determinado **plano horizontal de referência (PHR)**, a partir do qual são medidas as alturas. Um mesmo corpo pode ter energia potencial de gravidade positiva, nula ou negativa, dependendo do PHR adotado.

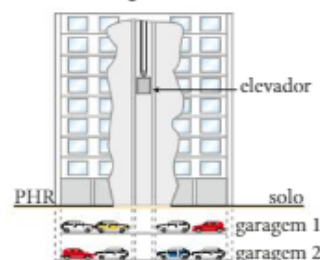
Veja ao lado a representação gráfica da variação da E_p em função de **h**. Convém observar que valores negativos de **h** implicam valores negativos de E_p , que estão associados a posições abaixo do PHR.



Vamos, agora, analisar outro exemplo, em que representamos um edifício cujo elevador serve para transportar pessoas das garagens ao oitavo andar.

Consideremos o nível do solo (térreo) o plano horizontal de referência (PHR). Em relação a esse referencial, os passageiros do elevador, cujas dimensões serão admitidas desprezíveis, apresentarão energia potencial de gravidade positiva se estiverem em qualquer andar acima do solo, nula se estiverem no térreo e negativa se estiverem nas garagens **1** ou **2**.

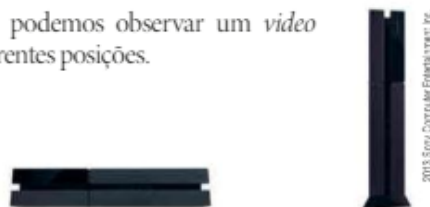
Veja o significado físico de uma energia potencial de gravidade negativa: se a energia potencial de gravidade de um corpo vale $-mgh$, deve-se realizar sobre ele um trabalho equivalente a $+mgh$ para que esse corpo chegue ao nível zero de energia potencial, isto é, ao PHR adotado.



NOTAS

- A variação de energia potencial de gravidade (ΔE_p) é a diferença entre as energias potenciais final (E_{p_f}) e inicial (E_{p_i}): $\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i}$
- Se o centro de massa de um corpo sobe, então $E_{p_f} > E_{p_i}$ e $\Delta E_p > 0$.
- Se o centro de massa de um corpo desce, então $E_{p_f} < E_{p_i}$ e $\Delta E_p < 0$.
- ΔE_p **independe** do PHR adotado.

A seguir podemos observar um *video game* em diferentes posições.

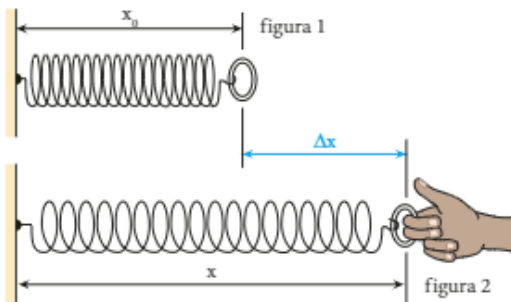


Suponha que inicialmente o aparelho estivesse "deitado" e alguém o tenha colocado de pé. Nessa operação o centro de massa do *video game* sofre uma elevação, de modo que ocorre uma variação positiva de energia potencial de gravidade.

Energia potencial elástica (E_e)

É a forma de energia que encontramos armazenada em sistemas elásticos deformados. É o caso, por exemplo, de uma mola alongada ou comprimida ou de uma tira de borracha alongada.

Vamos analisar a situação das figuras a seguir, em que temos uma mola, suposta ideal, de constante elástica K , fixa em uma parede e inicialmente livre de deformações (figura 1). Um operador puxa a extremidade livre da mola, alongando-a de modo que sofra uma deformação Δx , tal que $\Delta x = x - x_0$ (figura 2).



Por estar deformada, dizemos que a mola está energizada, tendo armazenada em si **energia potencial elástica (E_e)**.

De onde vem, no entanto, essa energia? Vem do operador que, ao deformar a mola, exerce sobre ela uma força que realiza um trabalho, assimilado sob a forma de energia potencial elástica.

A evidência de que a mola deformada está energizada consiste no fato de que ela pode ser usada para impulsionar objetos, dotando-lhes de energia cinética.

Vamos calcular a energia potencial elástica que a mola armazena quando deformada:

$$E_e = \tau \quad (\text{I})$$

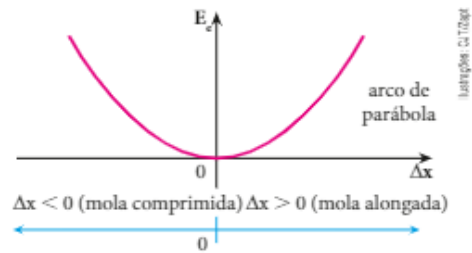
O trabalho realizado pela força do operador ao deformar a mola é dado por:

$$\tau = \frac{K(\Delta x)^2}{2} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), obtemos:

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Observe que a energia potencial elástica (E_e) nunca é negativa: é **positiva** ou **nula**. Ela é diretamente proporcional ao quadrado da deformação (Δx). Assim, o gráfico E_e versus Δx é um arco de parábola, como representamos a seguir.



Skate radical: o Big Air

Desenhada nos Estados Unidos por praticantes muito ousados, a pista do *Skate Big Air* é a mais desafiadora – e perigosa – de todas. Seu percurso total dura cerca de 10 segundos, intervalo de tempo que certamente aparenta ser bem maior para um ás que ousar fazer manobras nessa incrível modalidade, incluída nos *X-Games*, olimpíada dos esportes radicais.

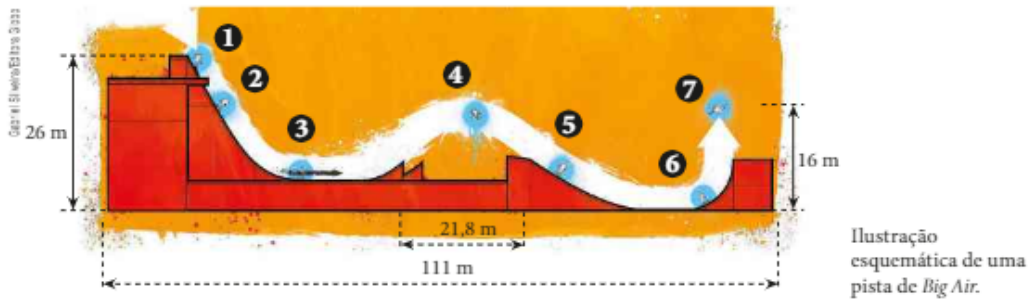


Pista do *Big Air* no Sambódromo de São Paulo. Novembro de 2008. O ponto de partida situa-se a uma altura de 26 metros, o que corresponde, aproximadamente, a um prédio de seis andares. Há um vão central que exige um incrível voo balístico, de alcance horizontal equivalente a 21,8 metros. Se isso não bastasse, a rampa final é vertical, o que projeta o atleta verticalmente a alturas da ordem de 16 metros em relação ao solo.

Grandes intercâmbios de energia podem ser notados no *Skate Big Air*. Nas descidas, o esquetista acelera, havendo conversão de energia potencial em energia cinética. Nas subidas ocorre o inverso, ou seja, a energia cinética transforma-se em energia potencial. Há, porém, durante todo o percurso, a dissipação de parte da energia mecânica, que se degrada principalmente em forma de energia térmica e acústica.

10 segundos de pura adrenalina

Acompanhemos uma “volta” na pista, destacando as ocorrências físicas nos principais momentos.



- ❶ O esquiteista parte do repouso após um pequeno período de concentração.
- ❷ Ele ganha velocidade ao longo da rampa. Nessa fase, o atleta deve posicionar seu corpo adequadamente sobre o *skate* para não se desequilibrar pela ação das forças de resistência do ar, que são muito significativas. Perdas do controle nesse trecho podem provocar quedas espetaculares, com consequências desastrosas para o esquiteista.
- ❸ O atleta atinge a base da rampa com velocidade da ordem de 80 km/h e, no curto percurso horizontal, deve se agachar sobre a prancha em uma atitude intuitiva que determina um ganho de velocidade propício ao voo balístico que virá a seguir. A ação de agachar é procedente, já que rebaixa o centro de massa do conjunto homem-prancha, provocando a redução de energia potencial com consequente ganho de energia cinética.
- ❹ O esquiteista lança-se, então, em um voo balístico de grande risco, mas de impressionante beleza plástica. O alcance horizontal almejado equivale, aproximadamente, a 12 automóveis estacionados lado a lado (21,8 m). Nessa etapa, o atleta praticamente levita sobre a prancha, já que ambos descrevem um arco de parábola sob a ação quase exclusiva da gravidade.
- ❺ O atleta retoma o contato com a pista. No ato da colisão ele recebe uma força de impacto de grande intensidade, cerca de duas vezes seu peso, que é transferida principalmente aos joelhos, além de outras articulações do corpo. Isso exige muita técnica do esportista para que não haja tombos ou traumas nesse momento.
- ❻ Na curva de acesso à rampa vertical, bastante fechada (com um pequeno raio de curvatura), o esquiteista sofre... e muito, porque se estabelece nessa manobra uma gravidade aparente da ordem de 7 g, em que g é a intensidade da aceleração da gravidade (10 m/s^2). Afinal, a força centrípeta exigida nesse percurso traz várias implicações, devendo-se inferir que, no caso de um atleta de peso equivalente a 70 kg, seria necessário girar 490 kg com a prancha em um plano vertical, com todas as solicitações inerentes a esse tipo de ação.
- ❼ O esquiteista é projetado verticalmente e atinge alturas de mais de 16 m contados do nível do chão. Mais uma vez a plateia se extasia, porém a retomada de contato com a pista é bastante perigosa, exigindo total precisão do atleta, que retorna à borda da rampa com velocidades bastante elevadas.

É importante destacar que a perda de altura ($26 \text{ m} - 16 \text{ m} = 10 \text{ m}$) – e, conseqüentemente, de energia potencial – entre as posições inicial e final denota dissipação de energia mecânica, que se transforma essencialmente em energia térmica e acústica pela ação das forças de atrito.

A prática do *skate* em qualquer estágio – da aprendizagem aos níveis mais avançados e radicais – requer acessórios de segurança específicos, como capacete, joelheiras, cotoveleiras etc., além de orientação e monitoramento indispensáveis a esse tipo de esporte.

QUESTÕES COMENTADAS



1 Uma partícula **A** tem massa **M** e desloca-se verticalmente para cima com velocidade de módulo **v**. Uma outra partícula **B** tem massa **2M** e desloca-se horizontalmente para a esquerda com velocidade de módulo $\frac{v}{2}$. Qual é a relação entre as energias cinéticas das partículas **A** e **B**?

RESOLUÇÃO

A energia é uma grandeza física escalar. Por isso, não importam as orientações dos movimentos das partículas **A** e **B**. A energia cinética de uma partícula é calculada por:

$$E_c = \frac{m v^2}{2}$$

Para a partícula **A**, temos: $E_{c_A} = \frac{M v^2}{2}$ (I)

$$\text{Para a partícula B: } E_{c_B} = \frac{2M \left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \frac{2M v^2}{8} \quad \text{(II)}$$

Dividindo (I) por (II), obtemos:

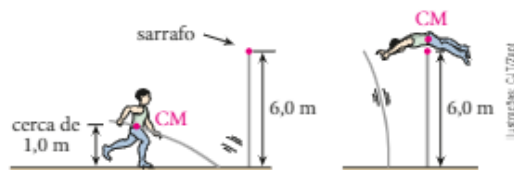
$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = \frac{\frac{M v^2}{2}}{\frac{2M v^2}{8}} \Rightarrow \frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = 2$$

Resposta: 2

2 Um atleta de massa igual a 60 kg realiza um salto com vara, transpondo o sarrafo colocado a 6,0 m de altura. Calcule o valor aproximado do acréscimo da energia potencial de gravidade do atleta nesse salto. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

RESOLUÇÃO

No caso, o atleta é um **corpo extenso** (dimensões não desprezíveis) e, por isso, deve-se raciocinar em termos do seu **centro de massa**.



Sendo $m = 60 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a elevação do centro de massa do atleta $\Delta h \cong 5,0 \text{ m}$, calculemos o acréscimo de energia potencial de gravidade (ΔE_p): $\Delta E_p = m g \Delta h$

$$\text{Assim: } \Delta E_p = 60 \cdot 10 \cdot 5,0 \text{ (J)} \Rightarrow \Delta E_p = 3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Resposta: $3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$

3 Um bloco de peso **P** é dependurado na extremidade livre de uma mola vertical de constante elástica **K**. Admitindo o sistema em equilíbrio, calcule:

- a distensão da mola;
- a energia potencial elástica armazenada na mola.

RESOLUÇÃO

a) Na situação de equilíbrio, o peso (\vec{P}) do bloco é equilibrado pela força elástica exercida pela mola (\vec{F}_e).

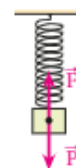
$$F_e = P \Rightarrow K \Delta x = P \Rightarrow \Delta x = \frac{P}{K}$$

b) A energia potencial elástica armazenada na mola é, então, determinada por:

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2} \Rightarrow E_e = \frac{K}{2} \left(\frac{P}{K}\right)^2$$

$$\text{Logo: } E_e = \frac{P^2}{2K}$$

Respostas: a) $\frac{P}{K}$; b) $\frac{P^2}{2K}$



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

4. Apesar das tragédias ocorridas com os ônibus espaciais estadunidenses Challenger e Columbia, que puseram fim à vida de 14 astronautas, esses veículos reutilizáveis foram fundamentais na exploração do cosmo. Admita que um ônibus espacial com massa igual a 100 t esteja em procedimento de reentrada na atmosfera, apresentando velocidade de intensidade 10 800 km/h em relação à superfície terrestre. Qual é a energia cinética desse veículo em relação à Terra?

5. Um elevador, junto com sua carga, tem massa de 2,0 toneladas. Qual é a potência de dez que melhor expressa o acréscimo de energia potencial de gravidade do elevador – dado em joules – quando este sobe do terceiro ao sétimo andar?

6. Um corpo de massa **m** e velocidade \vec{v}_0 possui energia cinética **E₀**. Se o módulo da velocidade aumentar em 20%, a nova energia cinética do corpo será:

- $1,56E_0$
- $1,44E_0$
- $1,40E_0$
- $1,20E_0$
- $1,10E_0$

7. Um garoto chuta uma bola de massa 400 g que, em determinado instante, tem velocidade de 72 km/h e altura igual a 10 m em relação ao solo. Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e considerando um referencial no solo, determine a energia cinética e a energia potencial de gravidade da bola no instante considerado.

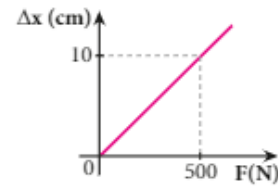
8. Três corpos, **A**, **B** e **C**, têm as características indicadas no quadro a seguir.

	A	B	C
Massa	M	$\frac{M}{2}$	2M
Velocidade escalar	v	2v	$\frac{v}{2}$

Sendo E_A , E_B e E_C , respectivamente, as energias cinéticas de **A**, **B** e **C**, aponte a alternativa correta:

- a) $E_A = E_B = E_C$
- b) $E_A = 2E_B = 4E_C$
- c) $E_B = 2E_A = 4E_C$
- d) $E_C = 2E_A = 4E_B$
- e) $E_A = E_B = 8E_C$

9. A deformação (Δx) em uma mola varia com a intensidade da força (\vec{F}) que a traciona, conforme o gráfico abaixo.



Determine:

- a) a constante elástica da mola, dada em N/m;
- b) a intensidade da força de tração quando a deformação da mola for de 6,0 cm;
- c) a energia potencial elástica armazenada na mola quando esta estiver deformada de 4,0 cm.

5. CÁLCULO DA ENERGIA MECÂNICA

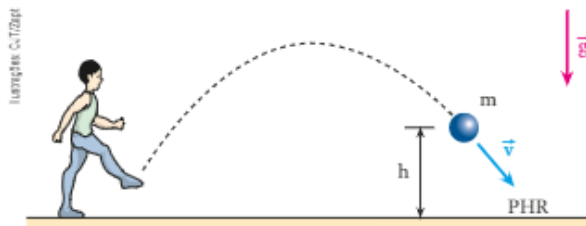
Calculamos a energia mecânica (E_m) de um sistema adicionando a energia cinética à energia potencial, que pode ser de gravidade ou elástica:

$$E_m = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}}$$

Observe os exemplos a seguir, em que mostramos o cálculo em cada caso:

Exemplo 1

Um jogador chuta uma bola de massa **m**, que descreve a trajetória indicada. No instante da figura, a velocidade da bola é \vec{v} e sua altura em relação ao solo (PHR) é **h**.

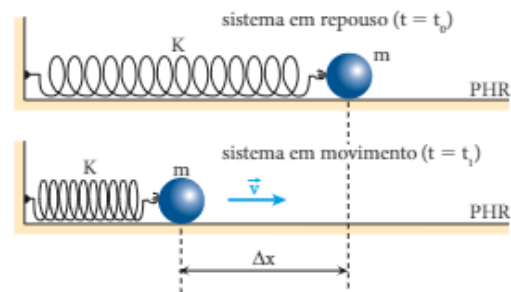


Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, a energia mecânica da bola no instante considerado é calculada por:

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Exemplo 2

Uma partícula de massa **m** oscila horizontalmente, em condições ideais, ligada a uma mola leve, de constante elástica **K**.



No instante $t = t_1$ indicado na figura, a velocidade da partícula é \vec{v} , e a energia mecânica do sistema massa-mola é calculada por:

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

6. SISTEMA MECÂNICO CONSERVATIVO

Sistema mecânico conservativo é todo aquele em que as forças que realizam trabalho transformam **exclusivamente** energia potencial em energia cinética e vice-versa.

É o que ocorre com as forças de gravidade, elásticas e eletrostáticas que, por sua vez, são denominadas **forças conservativas**.

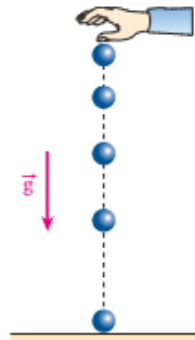
As forças de atrito cinético, de resistência viscosa – exercidas pelos líquidos em corpos movendo-se em seu interior – e de resistência do ar, transformam energia mecânica em outras formas de energia, principalmente térmica. Essas forças são denominadas **forças dissipativas**.

Podemos dizer, então, que um sistema mecânico só é conservativo quando o trabalho é realizado **exclusivamente por forças conservativas**.

Vejam os alguns exemplos:

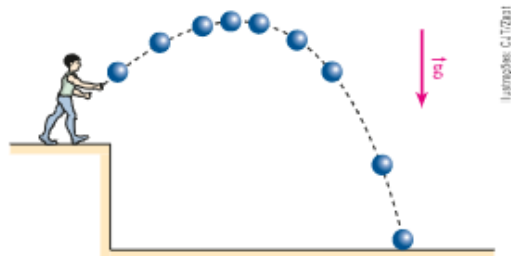
Exemplo 1

Uma partícula cai em movimento vertical sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre, como podemos ver na figura ao lado. Nesse caso, a única força que realiza trabalho sobre a partícula é a da gravidade, que é uma força conservativa.



Exemplo 2

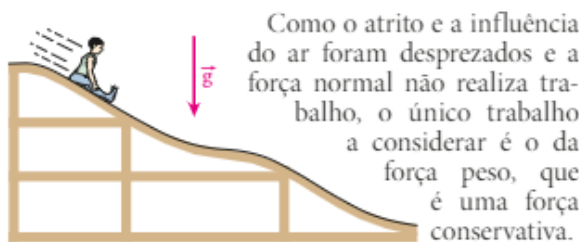
Uma partícula é lançada obliquamente, ficando sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre:



Também, nesse caso, a única força que realiza trabalho é a da gravidade, que é uma força conservativa.

Exemplo 3

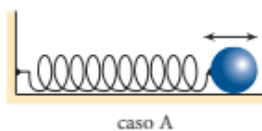
Um garoto desce por um tobogã praticamente sem atrito, movimentando-se sem sofrer a influência do ar.



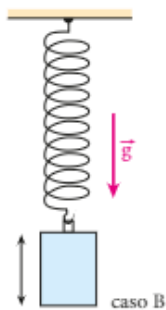
Como o atrito e a influência do ar foram desprezados e a força normal não realiza trabalho, o único trabalho a considerar é o da força peso, que é uma força conservativa.

Exemplo 4

Uma partícula, presa a uma mola leve e elástica, oscila sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar:



caso A



caso B

No caso **A**, somente a força elástica (conservativa) realiza trabalho. Em **B**, são duas forças conservativas realizando trabalho: a força elástica e a força peso.

Um esporte radical que exige do praticante muita técnica e precaução é o *bungee-jump*. Alguém devidamente atado à extremidade de uma corda elástica específica para esse fim, sob os cuidados de monitores especializados, projeta-se a partir de uma plataforma elevada, despencando em um voo que termina em grandes oscilações. Desprezando-se a influência do ar, apenas a força peso e a força elástica realizam trabalho, o que caracteriza o conjunto pessoa-corda como um sistema conservativo.



Thomson/Getty Images

Salto de bungee-jump.

7. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

Trata-se de uma aplicação particular do **Princípio da Conservação da Energia** em sistemas mecânicos:

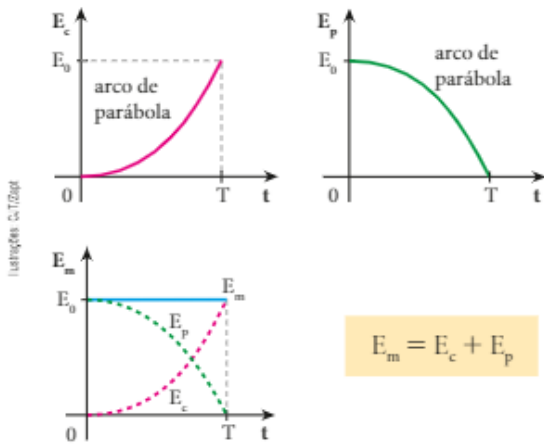
Em um sistema mecânico conservativo, a energia mecânica total é sempre **constante**.

$$E_m = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} \rightarrow \text{constante}$$

Concluimos, então, que qualquer aumento de energia cinética observado nesse sistema ocorre a partir de uma redução igual de energia potencial (de gravidade ou elástica) e vice-versa.

Tomemos, por exemplo, uma partícula em queda livre nas vizinhanças da superfície terrestre. Temos aí um sistema mecânico conservativo, no qual deve permanecer constante a energia mecânica. De fato, durante a queda livre, a energia cinética da partícula aumenta, enquanto a energia potencial de gravidade diminui na mesma quantidade. Isso faz com que a soma da energia cinética com a energia potencial não varie, de modo que a energia mecânica permaneça sempre constante. Admita que a partícula tenha iniciado sua queda no instante $t_0 = 0$ s, a partir do repouso. Considere T o tempo de queda até o solo (altura zero) e E_0 a energia mecânica inicial.

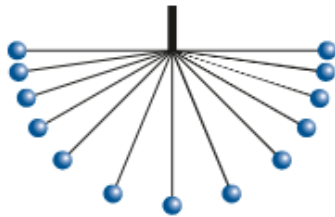
Observe a seguir os gráficos das energias cinética, potencial de gravidade e mecânica, em função do tempo:



Vejamos outro exemplo. Observe o caso da figura a seguir, em que um pêndulo é abandonado do repouso, iniciando movimento descendente:

Durante a descida, a energia cinética do pêndulo é crescente enquanto a potencial é decrescente.

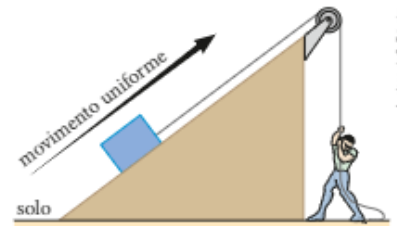
Na subida, ocorre o processo inverso, isto é, enquanto a energia potencial cresce, a cinética decresce.



Não levando em conta as forças dissipativas, o movimento do pêndulo constitui um sistema conservativo, no qual a energia mecânica se mantém constante.

É correto afirmar que um sistema mecânico não conservativo sempre é dissipativo? A resposta é **não**, como exemplifica a situação a seguir.

Na figura a seguir, um homem ergue um bloco apoiado sobre um plano inclinado, perfeitamente liso, utilizando uma corda e uma polia ideais. Suponhamos que o bloco se desloque em **movimento uniforme**.



Podemos afirmar que a energia cinética do bloco se mantém constante ao longo da rampa. À medida que o bloco sobe, porém, sua altura em relação ao solo aumenta, provocando também um aumento na respectiva energia potencial de gravidade.

A energia cinética constante, adicionada à energia potencial crescente, determina uma **energia mecânica total crescente**, o que caracteriza um sistema não conservativo. Esse aumento da energia mecânica do sistema é proveniente do trabalho realizado pelas forças musculares (não conservativas) que o homem exerce sobre a corda. Nesse caso, o sistema é também **não dissipativo**, já que não há forças dissipativas presentes.

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

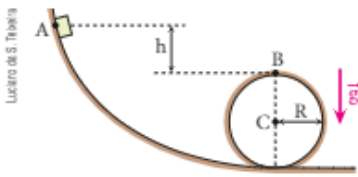
Emoção no looping vertical

Em parques de diversões, há vários brinquedos em que veículos desafiam a gravidade, realizando *loopings* contidos em um plano vertical. Para isso, é fundamental que a construção desses brinquedos leve em conta o desnível entre o ponto de partida dos veículos e o ponto mais alto do *looping*.

Montanha-russa em parque de diversão. Gardaland, Itália. Abril de 2008. Desafiar a gravidade em uma montanha-russa é muito emocionante e divertido, especialmente quando a aceleração se aproxima de \vec{g} . É disso que surge aquela sensação de "frio na barriga", causada pela aparente "perda de peso" das vísceras, que praticamente levitam no interior do abdome.



Consideremos o caso ideal de uma partícula que deverá percorrer o trilho esquematizado na figura a seguir, sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar. O trilho está contido em um plano vertical, e o *looping* circular tem raio R .



Se a partícula partir do repouso do ponto **A**, qual deverá ser o menor desnível h entre os pontos **A** e **B** para que ela consiga descrever toda a trajetória sem perder o contato com o trilho?

Sabe-se que $h \neq 0$, isto é, o ponto **A** está acima do ponto **B**, pois, se esses pontos estivessem no mesmo nível horizontal, a partícula teria em **B** uma parcela de energia (energia cinética) a mais que no ponto **A**, o que contrariaria o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**.

Raciocinando em termos de h mínimo, a partícula não trocará forças com o trilho no ponto **B** e, por isso, seu peso (\vec{P}) fará o papel de resultante centrípeta (\vec{F}_{cp}).

Assim, no ponto **B**, temos: $\vec{P} = \vec{F}_{cp}$

Sendo m a massa, g o valor da aceleração da gravidade e v_B a intensidade da velocidade em **B**, temos:

$$mg = \frac{m(v_B)^2}{R} \Rightarrow gR = (v_B)^2 \quad (\text{I})$$

Adotando o nível horizontal do ponto **B** como referência e aplicando o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**, temos:

$$mgh = \frac{m(v_B)^2}{2} \Rightarrow 2gh = (v_B)^2 \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), calculamos h mínimo:

$$2gh = gR \Rightarrow h = \frac{R}{2}$$

Se h for menor que $\frac{R}{2}$, a partícula não realizará o *looping*, perdendo o contato com o trilho antes de atingir o ponto **B**.

Se não houvesse atrito nem resistência do ar, o desnível deveria ser no mínimo igual à metade do raio do *looping*, como acabamos de demonstrar.

Na prática, entretanto, ocorrem dissipações de energia mecânica. Por esse motivo, e também por questões de segurança, é necessário que esses brinquedos sejam operados com um desnível sempre maior que a metade do raio do *looping*.



Energia do interior da Terra?

O carvão mineral e o petróleo e seus derivados são considerados fontes não renováveis de energia, já que sua extração tem duração finita. Além disso, o uso em larga escala dessas matrizes energéticas contribui sobremaneira para o aumento do efeito estufa, já que sua combustão lança na atmosfera grandes quantidades de gás carbônico (CO_2).

Sustentabilidade é um termo amplo, muito em voga atualmente, que envolve meios de produção continuada a partir de energia limpa e mínima degradação ambiental. Nesse sentido, tem-se utilizado de maneira crescente a **energia geotérmica** (ou geotermal) proveniente do interior da Terra. A crosta do planeta abriga sob si o magma, que se constitui de material rochoso fundido. As temperaturas do magma são extremamente altas, aquecendo lençóis freáticos mais superficiais. A evidência da presença de água aquecida em alta pressão no subsolo são os **gêiseres**, encontrados em diversas partes do mundo. Por meio de dutos verticais, que se estendem a profundidades de centenas (e até milhares) de metros, usinas como a da fotografia abaixo – localizada na Islândia, onde mais de um quarto da energia elétrica do país é de origem geotérmica – colhem vapor de água em altíssima pressão, capaz de se expandir e girar turbinas conectadas a geradores de eletricidade.

A despeito do seu baixo rendimento, as usinas movidas a energia geotermal podem produzir eletricidade ininterruptamente – 24 horas por dia –, de forma limpa, sustentável e com mínima agressão ao meio ambiente.

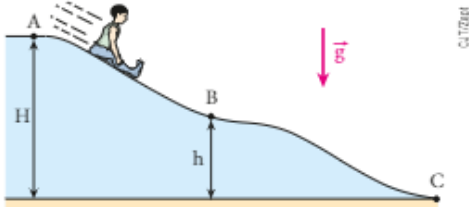
Usina geotérmica de Nesjavellir, Islândia.
Julho de 2013.



QUESTÕES COMENTADAS



10 Um garoto de massa m parte do repouso no ponto **A** do tobogã da figura a seguir e desce sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar:



Sendo dadas as alturas H e h e o valor da aceleração da gravidade (g), calcule o módulo da velocidade do garoto:

- a) no ponto **B**; b) no ponto **C**.

RESOLUÇÃO

O sistema é conservativo, o que nos permite aplicar o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**.

$$a) E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$\frac{m(v_B)^2}{2} + mgh = \frac{m(v_A)^2}{2} + mgH$$

$$\text{Sendo } v_A = 0, \text{ calculemos } v_B: v_B = \sqrt{2g(H-h)}$$

$$b) E_{m_C} = E_{m_A} \Rightarrow E_{c_C} + E_{p_C} = E_{c_A} + E_{p_A}$$

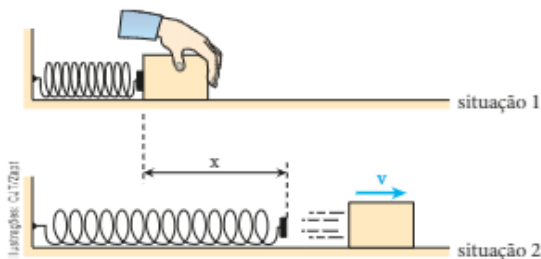
$$\frac{m(v_C)^2}{2} + mgh_C = \frac{m(v_A)^2}{2} + mgH$$

$$\text{Como } h_C = 0 \text{ e } v_A = 0, \text{ temos: } v_C = \sqrt{2gH}$$

As velocidades calculadas **independentem** da massa do garoto e do formato da trajetória descrita por ele.

Respostas: a) $\sqrt{2g(H-h)}$; b) $\sqrt{2gH}$

11 No experimento realizado a seguir, uma mola ideal de constante elástica K , é comprimida por um operador, lançando um bloco de massa m sobre uma mesa horizontal perfeitamente polida.



Na situação **1**, a mola está comprimida de um comprimento x e o bloco está em repouso.

Na situação **2**, a mola está sem deformação e o bloco encontra-se em movimento, com velocidade de intensidade v . Desprezando a influência do ar, determine o valor de v .

RESOLUÇÃO

Como não há atritos nem influência do ar, o sistema é conservativo, devendo ocorrer conservação da energia mecânica total. Isso significa que a energia potencial elástica armazenada inicialmente na mola é totalmente transferida para o bloco, que a assimila em forma de energia cinética.

$$E_c = E_e \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{Kx^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{K}{m}} x$$

É interessante destacar que v é diretamente proporcional a x .

Resposta: $\sqrt{\frac{K}{m}} x$

12 Um garoto de massa 40 kg parte do repouso de uma altura de 10 m, desliza ao longo de um tobogã e atinge a parte mais baixa com velocidade de 5,0 m/s:



Admitindo a aceleração da gravidade de intensidade igual a 10 m/s^2 , calcule a energia mecânica degradada pelas forças dissipativas durante a descida do garoto.

RESOLUÇÃO

A energia mecânica inicial, associada ao garoto no alto do tobogã, era do tipo potencial de gravidade (referencial no solo).

$$E_{m_i} = E_p = mgh$$

$$E_{m_i} = 40 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (J)} \Rightarrow E_{m_i} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

A energia mecânica final com que o garoto atinge a parte mais baixa do tobogã é do tipo cinética:

$$E_{m_f} = E_c = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{m_f} = \frac{40 \cdot (5,0)^2}{2} \text{ (J)} \Rightarrow E_{m_f} = 5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

A energia mecânica degradada pelas forças dissipativas é E_d . Essa energia é calculada por:

$$E_d = E_{m_i} - E_{m_f} \Rightarrow E_d = 4,0 \cdot 10^3 \text{ J} - 5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

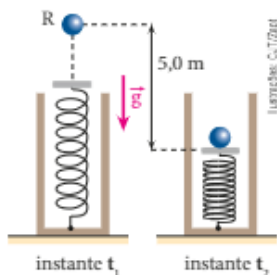
$$\text{Logo: } E_d = 3,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Resposta: $3,5 \cdot 10^3 \text{ J}$

13 Na figura a seguir, uma esfera de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ é abandonada do ponto **R** no instante t_1 , caindo livremente e colidindo com o aparador, que está ligado a uma mola de constante elástica igual a $2,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$. As massas da mola e do aparador são desprezíveis, como também o são todas as dissipações de energia mecânica.

Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e supondo que no instante t_2 a mola está sob compressão máxima, calcule:

- a) a compressão da mola quando a esfera atinge sua máxima velocidade;
- b) a compressão da mola no instante t_2 .



RESOLUÇÃO

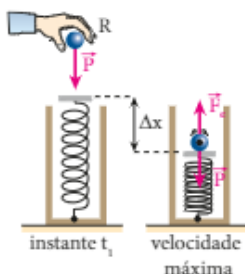
a) Durante a queda livre, o movimento da esfera é uniformemente acelerado pela ação do peso constante \vec{P} .

Após a colisão com o aparador, entretanto, além do peso \vec{P} , passa a agir na esfera a força elástica \vec{F}_e exercida pela mola, que, pela **Lei de Hooke**, tem intensidade proporcional à deformação Δx .

Assim, logo após a colisão, como a deformação da mola ainda é pequena, o mesmo ocorre com a intensidade de \vec{F}_e , havendo predominância de \vec{P} . Isso faz com que o movimento continue acelerado (não uniformemente).

A velocidade da esfera tem **intensidade máxima** no instante em que a força elástica equilibra o peso.

Na posição em que a velocidade é máxima:



$$|\vec{F}_e| = |\vec{P}|$$

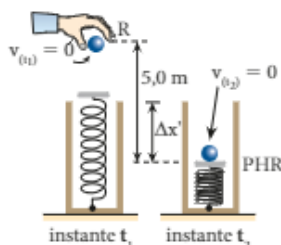
$$K \Delta x = m g$$

$$2,0 \cdot 10^3 \Delta x = 5,0 \cdot 10$$

$$\Delta x = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$$

Da posição de máxima velocidade para baixo, a esfera realiza um movimento retardado (não uniformemente) até parar (instante t_2).

b) Considere o esquema a seguir:



Adotando o nível do aparador na situação da mola sob máxima compressão como referência e observando que o sistema é conservativo, podemos dizer que a energia potencial elástica acumulada na mola no instante t_2 é igual à energia potencial de gravidade da esfera no instante t_1 .

$$E_{c(t_2)} = E_{p(t_1)} \Rightarrow \frac{K(\Delta x')^2}{2} = m g h$$

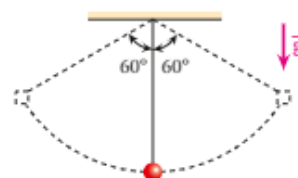
$$\text{Assim: } \frac{2,0 \cdot 10^3 (\Delta x')^2}{2} = 5,0 \cdot 10 \cdot 5,0$$

$$\text{Logo: } \Delta x' = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

Respostas: a) 2,5 cm; b) 50 cm

14 O pêndulo da figura oscila para ambos os lados, formando um ângulo máximo de 60° com a vertical.

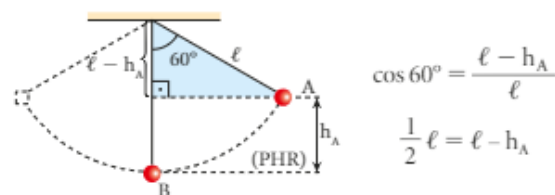
O comprimento do fio é de 90 cm e, no local, o módulo da aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 . Supondo condições ideais, determine:



- a) o módulo da velocidade da esfera no ponto mais baixo de sua trajetória;
- b) a intensidade da força que traciona o fio quando este se encontra na vertical (adotar, para a massa da esfera, o valor 50 g).

RESOLUÇÃO

Considerando o triângulo retângulo destacado na figura, temos:



$$\cos 60^\circ = \frac{\ell - h_A}{\ell}$$

$$\frac{1}{2} \ell = \ell - h_A$$

$$\text{Logo: } h_A = \frac{1}{2} \ell = \frac{90 \text{ cm}}{2} \Rightarrow h_A = 45 \text{ cm}$$

a) Como a única força que realiza trabalho é a da gravidade, o sistema é conservativo, permitindo-nos aplicar o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**:

$$E_{m_A} = E_{B_A} \Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$\text{Logo: } \frac{m (v_B)^2}{2} + m g h_B = \frac{m (v_A)^2}{2} + m g h_A$$

Sendo $h_B = 0$ e $v_A = 0$, calculamos v_B :

$$v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45} \Rightarrow v_B = 3,0 \text{ m/s}$$

b) No ponto **B**, age na esfera seu peso (\vec{P}) e a força aplicada pelo fio (\vec{T}):

A resultante entre \vec{P} e \vec{T} deve ser centrípeta.

$$T - P = F_{cp_B} \Rightarrow T = m \left(\frac{(v_B)^2}{\ell} + g \right)$$

$$T = 50 \cdot 10^{-3} \left(\frac{3,0^2}{0,90} + 10 \right) \Rightarrow T = 1,0 \text{ N}$$



Respostas: a) 3,0 m/s; b) 1,0 N



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

15. Uma partícula de massa $1,0 \text{ kg}$ é lançada verticalmente para cima com velocidade de módulo 20 m/s em um local em que a resistência do ar é desprezível e $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Adotando o nível horizontal do ponto de lançamento como plano de referência, calcule:
- a energia mecânica da partícula;
 - a altura do ponto em que a energia cinética é o triplo da potencial de gravidade.

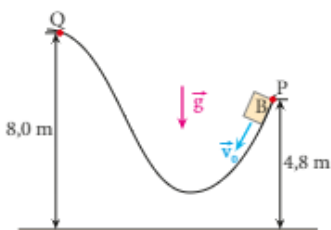
16. Um jogador de voleibol, ao dar um saque, comunica à bola uma velocidade inicial de 10 m/s . A bola, cuja massa é de 400 g , passa a se mover sob a ação exclusiva do campo gravitacional ($|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$), descrevendo a trajetória indicada na figura:



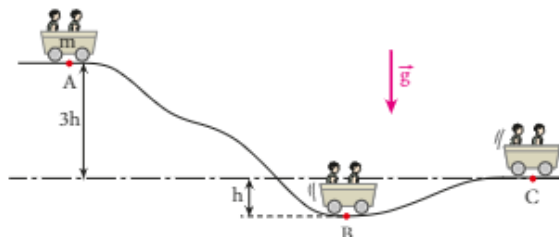
Calcule:

- a energia mecânica da bola no ponto **A** em relação ao plano de referência indicado;
- o módulo da velocidade da bola ao passar pelo ponto **B** (mais alto da trajetória).

17. Um pequeno bloco **B**, lançado do ponto **P** com velocidade de intensidade v_0 , desliza sem atrito e sem sofrer influência do ar sobre a superfície **PQ**, contida em um plano vertical. Sabendo que **B** inverte o sentido do movimento no ponto **Q** e que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o valor de v_0 .

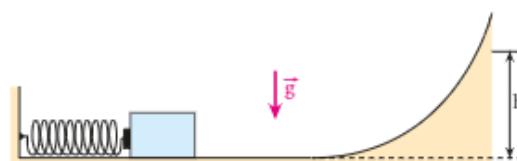


18. Um carrinho de dimensões desprezíveis, com massa igual a m , parte do repouso no ponto **A** e percorre o trilho **ABC** da figura, contido em um plano vertical, sem sofrer a ação de forças dissipativas:



- Supõe-se conhecida a altura h e adota-se para a aceleração da gravidade o valor g . Considerando como plano horizontal de referência aquele que passa pelo ponto **C**, determine:
- a energia potencial de gravidade do carrinho no ponto **B**;
 - a relação $\frac{v_B}{v_C}$ entre os módulos da velocidade do carrinho nos pontos **B** e **C**.

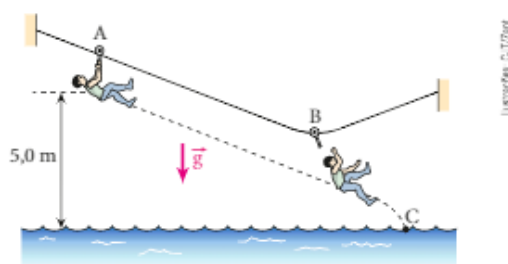
19. No arranjo experimental da figura, desprezam-se o atrito e o efeito do ar:



O bloco (massa de $4,0 \text{ kg}$), inicialmente em repouso, comprime a mola ideal (constante elástica de $3,6 \cdot 10^3 \text{ N/m}$) de 20 cm , estando apenas encostado nela. Largando-se a mola, esta distende-se impulsionando o bloco, que atinge a altura máxima h . Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- o módulo da velocidade do bloco imediatamente após desligar-se da mola;
- o valor da altura h .

20. A figura a seguir ilustra um brinquedo conhecido como tirolesa, existente em alguns parques, originário do Tirol, região alpina da Áustria. Nesse brinquedo, uma pessoa desce de determinada altura segurando-se em uma roldana apoiada em um cabo de aço traçado. Em determinado ponto do percurso, a pessoa se solta e cai na água de um lago, o que completa a diversão.

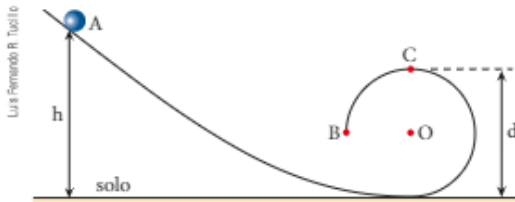


Considere que uma pessoa de massa $50,0 \text{ kg}$ parta do repouso no ponto **A** e desça até o ponto **B** segurando-se na roldana, e que nesse trajeto ocorra dissipação de 36% da energia mecânica do sistema devido aos atritos entre a roldana e o cabo. A energia mecânica foi medida em relação a um referencial coincidente com a superfície da água. Em seu movimento de **A** até **C**, o centro de massa da pessoa desce $5,0 \text{ m}$, conforme mostrado no esquema.

Desprezando-se a massa da roldana bem como a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- A energia mecânica da pessoa no ponto **B**;
- A intensidade da velocidade com que a pessoa atinge o ponto **C**.

21. Uma partícula, saindo do repouso do ponto **A**, percorre a guia representada no esquema, disposta em um plano vertical:



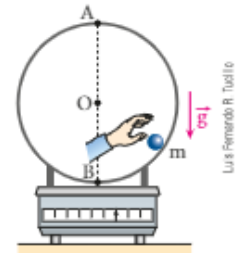
Sendo h a altura do ponto **A** em relação ao solo e d o diâmetro do arco de circunferência indicado, calcule o máximo valor admissível à relação $\frac{d}{h}$ para que a partícula consiga chegar ao ponto **B** sem perder o contato com a guia. Despreze os atritos e a resistência do ar.

22. Calcule o módulo da velocidade que adquiriria um corpo se, partindo do repouso de um ponto **B**, infinitamente afastado, caísse livremente na superfície da Terra em um ponto **A**. Despreze todos os movimentos da Terra (raio igual a $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$), a influência do ar e adote o módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta igual a 10 m/s^2 .

23. Considere a situação esquematizada na figura em que um aro circular de raio $R = 50 \text{ cm}$ e massa $M = 3,0 \text{ kg}$, disposto verticalmente, é apoiado sobre uma balança graduada em newtons. Uma pequena esfera de massa $m = 200 \text{ g}$ é lançada por um operador de modo que percorra a parte interna do aro, sem perder o contato com a trajetória e sem sofrer a ação de forças de atrito.

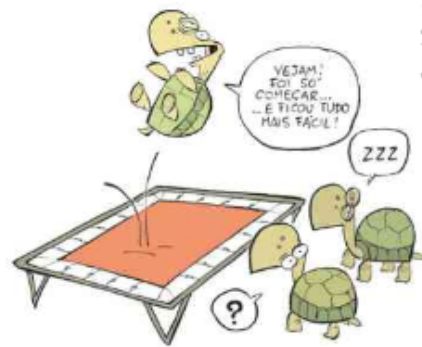
No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que nos instantes em que a esfera passa no ponto **A**, o mais alto do aro, a balança indique zero, determine:

- a intensidade da velocidade da esfera no ponto **B**, o mais baixo do aro;
- a indicação da balança nos instantes da passagem da esfera no ponto **B**.



DESCUBRA MAIS

- Observe o quadrinho ao lado, em que uma tartaruga está se exercitando com entusiasmo em uma cama elástica. Como foi possível iniciar essa série de saltos considerando que o quelônio estava inicialmente em repouso sobre a lona? Explique as conversões de energia envolvidas no processo.
- Considere uma granada explodindo e fragmentando-se em vários estilhaços lançados nas diversas direções ao redor do local da explosão com velocidades de grande intensidade. Nessa situação, há conversão entre que modalidades de energia? A energia total do sistema, que inclui o meio em que ocorre a explosão, permanece constante? No ato da explosão, a granada constitui um sistema mecânico conservativo?
- A energia emanada das estrelas provém de um processo contínuo, que ocorre em seu interior, denominado fusão nuclear. Do que consiste esse processo? Fusão nuclear e fissão nuclear são um mesmo processo? Pesquise sobre esse assunto para responder às questões.
- Com base nos preceitos da gravitação newtoniana, com que velocidade mínima se deveria lançar um objeto sem propulsão a partir da superfície da Terra para ele escapar do Sistema Solar? Pesquise os dados necessários a esse cálculo que justifiquem uma resposta próxima de $43,5 \text{ km/s}$. Observe que essa velocidade é denominada **cósmica terceira**.



INTERSABERES

Salvo pelo neutrino

A água tem energia potencial de gravidade convertida em energia cinética quando despenca do topo de uma cachoeira. Há também nessa queda produção de energias térmica e acústica, formas menos nobres desse ente físico. Se contabilizarmos, no entanto, a energia final do sistema, que inclui a água e o ambiente, veremos que o total obtido coincidirá com a energia mecânica inicial do líquido, no começo de sua precipitação. Esse e outros contextos compõem um amplo cenário que torna plausível considerarmos a manutenção da quantidade total da energia de um sistema amplo em uma transformação qualquer.

A conservação da energia, talvez a mais abrangente e importante concepção da Física, foi colocada na berlinda nas primeiras décadas do século XX. Isso aconteceu por ocasião dos estudos preliminares do decaimento β , um fenômeno atômico muito em voga na época.

O salvador do **Princípio da Conservação da Energia**, por assim dizer, foi o físico austríaco Wolfgang Pauli (1900-1958), que explicou o decaimento β . O físico italiano Enrico Fermi (1901-1954) corroborou com as ideias de Pauli e chamou a misteriosa partícula de **neutrino**.



Wolfgang Pauli ganhou o Prêmio Nobel em 1945 pela formulação do seu Princípio da Exclusão.

A hipótese de neutrino

[...] Durante a década de 1930, um dos grandes problemas da Física Nuclear era explicar o decaimento β . Nesse tipo de processo, um núcleo atômico instável pode transformar-se em outro núcleo pela emissão de uma partícula β (um elétron ou um pósitron). Hoje, há duas formas de explicá-lo: no caso da emissão de elétrons, um nêutron (**n**) do núcleo se transforma em um próton (**p**), um elétron (**e⁻**) e um neutrino ($\bar{\nu}$); na emissão de pósitrons, um próton do núcleo se transforma em um nêutron, um pósitron (**e⁺**) e um antineutrino.

Essas transformações são representadas, respectivamente, por: $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$; e $p^+ \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}$

Nos anos 1930, no entanto, os neutrinos ainda não eram conhecidos. Em um experimento realizado em 1911, a física Lise Meitner (1878-1968) e o químico Otto Hahn (1879-1968) mostraram que a energia do elétron emitido não era igual à diferença entre a energia final e inicial do núcleo, indicando que parte da energia era carregada por alguma partícula ainda não detectada. Medidas do *spin* do núcleo e dos elétrons emitidos indicavam, por outro lado, uma aparente violação da conservação total do *spin* do sistema.

Por isso, vários físicos, entre eles Bohr, chegaram a pensar em abandonar o **Princípio da Conservação da Energia**. Até que, em 1931, Pauli propôs uma alternativa menos drástica, supondo a existência de uma partícula com massa extremamente pequena e com *spin* 1/2, emitida junto com o elétron no processo de decaimento. Para distinguir tal partícula do nêutron, Fermi batizou-a de neutrino, usando um diminutivo de nêutron em italiano. Isso estava de acordo com a conservação da energia e do *spin*, e a razão de o neutrino não ser observado estaria na sua fraca interação com a matéria.

Em razão dessa pequena interação, os neutrinos só foram detectados quase 25 anos após a proposição teórica de Pauli. Isso ocorreu em 1956, em um experimento com reatores nucleares feito pelos físicos americanos Clyde Cowan e Frederick Reines, que deu a Reines o Prêmio Nobel de Física de 1995. [...]

SILVA, Cibelle Celestino. Wolfgang Pauli. *Scientific American Brasil*, Gênios da Ciência, São Paulo, ed. 13, p. 82-89, dez. 2006.

Compreensão, pesquisa e debate

1. Pense nos diversos intercâmbios energéticos existentes na natureza. Em sua opinião, haveria algum processo em que não se verifica o **Princípio da Conservação da Energia**? Discuta o assunto com seus colegas e professor.
2. Procure saber mais sobre o decaimento β e outros processos radioativos. Além disso, pesquise também sobre cientistas envolvidos nesses estudos, dentre eles, Marie Curie (1867-1934).



QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUA CONSERVAÇÃO

1. IMPULSO DE UMA FORÇA CONSTANTE

Os impulsos mecânicos estão presentes em uma série de fenômenos do dia a dia, como nas situações em que há empurrões, puxões, impactos e explosões.

Um jogador de futebol, por exemplo, impulsiona a bola no ato de um chute. Seu pé aplica na bola uma força que, agindo durante certo intervalo de tempo, determina um impulso. Ao se dar um tiro com uma arma de fogo qualquer, o projétil é impulsionado pelos gases provenientes da detonação do explosivo. Esses gases agem muito rapidamente sobre o projétil, porém de forma intensa, determinando um impulso considerável. Também recebem impulsos uma flecha ao ser lançada por um arco e uma pedra ao ser disparada por um estilingue.

Em nosso estudo vamos nos restringir à definição do **impulso de uma força constante** (intensidade, direção e sentido invariáveis), uma vez que a definição geral dessa grandeza requer elementos de Matemática normalmente não estudados no Ensino Médio.

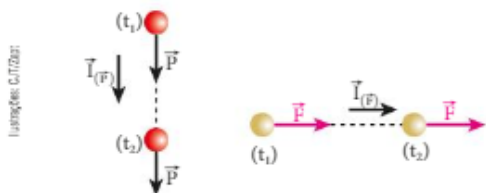
Para isso, considere o esquema a seguir, em que uma força \vec{F} constante age sobre uma partícula do instante t_1 ao instante t_2 :



O impulso de uma força \vec{F} no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é a grandeza vetorial \vec{I} , definida por:

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t$$

Sendo Δt um escalar positivo, \vec{I} tem sempre a mesma orientação de \vec{F} , como representado a seguir.



As unidades de impulso decorrem da própria definição: $\text{unid} (I) = \text{unid} (F) \cdot \text{unid} (\Delta t)$

No Sistema Internacional (SI), temos:

$$\text{unid} (I) = \text{newton} \cdot \text{segundo} = \text{N} \cdot \text{s}$$

Se a força tiver direção constante, mas intensidade variável, também podemos utilizar a definição particular dada para a grandeza impulso. Basta raciocinar em termos de uma **força média** que exerça, no mesmo intervalo de tempo, o mesmo efeito dinâmico da força considerada.

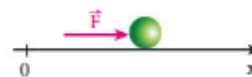
Durante o curto intervalo de tempo em que estabelece contato com as cordas da raquete, uma bola de tênis recebe um impulso de considerável intensidade, capaz de provocar significativas variações de sua velocidade vetorial.



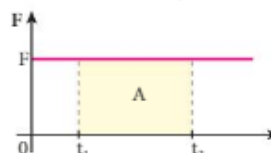
O impulso exercido pela raquete sobre a bola tem mesma direção e sentido da força que a raquete aplica sobre ela.

Cálculo gráfico do valor algébrico do impulso

Considere o esquema a seguir, em que uma partícula se movimenta ao longo do eixo $0x$ sob a ação da força \vec{F} constante.



Tracemos o gráfico do valor algébrico de \vec{F} (dado em relação ao eixo $0x$) em função do tempo:



Seja a “área” A destacada no gráfico, teria essa “área” algum significado especial? Sim: ela fornece uma medida do valor algébrico do impulso da força \vec{F} , desde o instante t_1 até o instante t_2 .

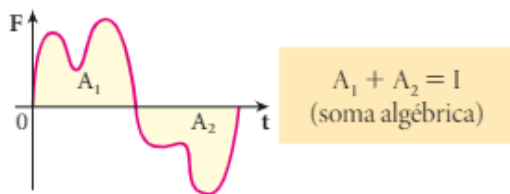
De fato, isso pode ser facilmente verificado:

$$A = F(t_2 - t_1)$$

Mas $t_2 - t_1$ é o intervalo de tempo Δt considerado. Logo: $A = F \Delta t$.

Como o produto $F \Delta t$ corresponde ao valor algébrico do impulso de \vec{F} , segue que: $A = I$

Embora a última propriedade tenha sido apresentada com base em um caso simples e particular, sua validade estende-se também a situações em que a força envolvida tem direção constante, porém valor algébrico variável. Nesses casos, entretanto, sua verificação requer um tratamento matemático mais elaborado.



F é o valor algébrico da força responsável pelo impulso.

Tendo em conta o exposto, podemos fazer a seguinte generalização:

Dado um diagrama do valor algébrico da força atuante em uma partícula em função do tempo, a “área” compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa o valor algébrico do impulso da força. No entanto, a força considerada deve ter direção constante.

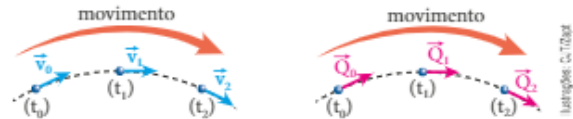
2. QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Em diversos fenômenos físicos, é necessário agrupar os conceitos de massa e de velocidade vetorial. Isso ocorre, por exemplo, nas colisões mecânicas e nas explosões. Nesses casos, torna-se conveniente a definição de **quantidade de movimento** (ou momento linear), que é uma das grandezas fundamentais da Física.

Considere uma partícula de massa m que, em certo instante, tem velocidade vetorial igual a \vec{v} . Por definição, a quantidade de movimento da partícula nesse instante é a grandeza vetorial \vec{Q} , expressa por:

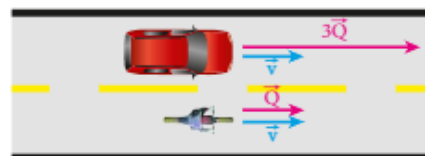
$$\vec{Q} = m \vec{v}$$

A quantidade de movimento é uma grandeza instantânea, já que sua definição envolve o conceito de velocidade vetorial instantânea. Sendo m um escalar positivo, \vec{Q} tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{v} , isto é, em cada instante é tangente à trajetória e dirigida no sentido do movimento.



Nas figuras há uma partícula nos instantes t_0 , t_1 e t_2 do seu movimento curvilíneo. Na primeira representação estão indicadas as velocidades vetoriais \vec{v}_0 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e, na segunda, as respectivas quantidades de movimento \vec{Q}_0 , \vec{Q}_1 e \vec{Q}_2 .

Na figura a seguir estamos admitindo que o carro e a moto se movimentam lado a lado, com velocidades iguais. Supondo que a massa do carro seja o triplo da massa da moto, teremos para o carro uma quantidade de movimento de intensidade igual ao triplo da definida para a moto. É interessante ressaltar que, quanto maior for a intensidade da quantidade de movimento de um corpo, maior será seu “poder de impacto”.



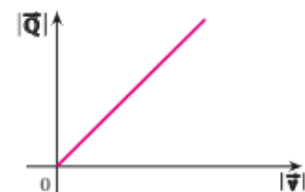
Um carro que trafega sob uma forte chuva de granizo geralmente fica bastante danificado, o que certamente não seria verificado sob chuva em estado líquido. Isso acontece porque as pedras de gelo que despencam das nuvens – água no estado sólido, de massa geralmente maior que a de gotas de água individuais – atingem o veículo com uma quantidade de movimento relativamente intensa, o que, juntamente com a rigidez própria do gelo, determina um maior “poder de impacto”, capaz mesmo de causar estragos à lataria.

Um outro exemplo é o de um caminhão a 60 km/h que vai colidir frontalmente com um poste. Esse veículo provocará um dano muito maior ao poste do que aquele que seria observado no impacto frontal de um carro popular igualmente rígido à mesma velocidade.

Para m constante, \vec{Q} tem módulo diretamente proporcional ao módulo de \vec{v} . O gráfico ao lado representa tal proporcionalidade.

Declividade da reta:

$$\frac{|\vec{Q}|}{|\vec{v}|} = m$$



A energia cinética (E_c) pode ser relacionada com o módulo da quantidade de movimento $|\vec{Q}|$, fazendo-se:

$$E_c = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} \quad (\text{I})$$

$$|\vec{Q}| = m|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|\vec{Q}|}{m} \quad (\text{II})$$

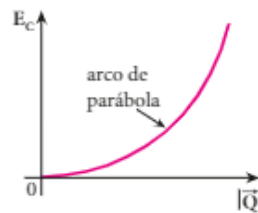
Substituindo (II) em (I), temos:

$$E_c = \frac{m}{2} \left(\frac{|\vec{Q}|}{m} \right)^2 \Rightarrow E_c = \frac{|\vec{Q}|^2}{2m}$$

Para m constante, E_c é diretamente proporcional ao quadrado de $|\vec{Q}|$.

O gráfico ao lado representa tal proporcionalidade.

As unidades de quantidade de movimento decorrem da própria definição:



$$\text{unid}(Q) = \text{unid}(m) \cdot \text{unid}(v)$$

No Sistema Internacional (SI), temos:

$$\text{unid}(Q) = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. TEOREMA DO IMPULSO

Um arco dispara uma flecha conferindo-lhe um impulso, que provoca no dardo certa variação de quantidade de movimento. Um jogador de futebol cobra uma falta, imprimindo à bola no momento do chute um forte impulso. Este, por sua vez, determina expressiva variação de quantidade de movimento na bola. Você lança uma pedra e o impulso exercido no ato do lançamento provoca no projétil uma dada variação de quantidade de movimento...

Haveria alguma conexão entre as noções de impulso e variação de quantidade de movimento? Certamente que sim! O **Teorema do Impulso**, apresentado a seguir, estabelece uma relação matemática entre essas grandezas.

O impulso da resultante (impulso total) das forças sobre uma partícula é igual à variação de sua quantidade de movimento:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_{\text{total}} = \vec{Q}_{\text{final}} - \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Demonstração (particular):

Na figura a seguir, temos uma partícula de massa m sujeita à ação da força resultante \vec{F} , constante

e de mesma orientação que o movimento. Sejam \vec{a} a aceleração comunicada por \vec{F} , \vec{v}_1 a velocidade inicial da partícula no instante t_1 , e \vec{v}_2 sua velocidade final no instante t_2 .



O impulso da força \vec{F} no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é \vec{I}_{total} , tal que $\vec{I}_{\text{total}} = \vec{F} \Delta t$ (I)

Como \vec{F} é a resultante, a aplicação do **Princípio Fundamental da Dinâmica** conduz a:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{II})$$

Sendo \vec{F} constante, \vec{a} será constante. Logo,

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \quad (\text{III})$$

Substituindo (III) em (II), temos:

$$\vec{F} = m \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} \quad (\text{IV})$$

Substituindo agora (IV) em (I), segue que:

$$\vec{I}_{\text{total}} = m \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} \Delta t \Rightarrow \vec{I}_{\text{total}} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

Como os produtos $m\vec{v}_2$ e $m\vec{v}_1$ são as respectivas quantidades de movimento da partícula nos instantes final (t_2) e inicial (t_1), temos:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_{\text{total}} = \vec{Q}_{\text{final}} - \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Embora tenhamos demonstrado o **Teorema do Impulso** a partir de uma situação simples e particular, sua aplicação é geral, estendendo-se ao cálculo do impulso de forças constantes ou variáveis. Devemos observar apenas que a força, cujo impulso é igual à variação da quantidade de movimento, deve ser a **resultante**. Podemos dizer, ainda, que o impulso da força resultante é equivalente à soma vetorial dos impulsos de todas as forças que atuam na partícula.

O **Teorema do Impulso** permite concluir que as unidades $\text{N} \cdot \text{s}$ e $\text{kg} \cdot \text{m/s}$, respectivamente de impulso e de quantidade de movimento, são equivalentes. Isso ocorre porque essas grandezas têm as mesmas dimensões físicas.

O **Teorema do Impulso** aplicado a uma partícula solitária equivale à **2ª Lei de Newton** (Princípio Fundamental da Dinâmica).

Air bags: frenagens menos traumáticas

Na fotografia a seguir, observa-se um teste de colisão em que um carro equipado com *air bags* se choca contra um obstáculo fixo. No ato do impacto, os *air bags* são prontamente inflados, minimizando os efeitos da inércia de movimento inerente aos corpos situados dentro do veículo.



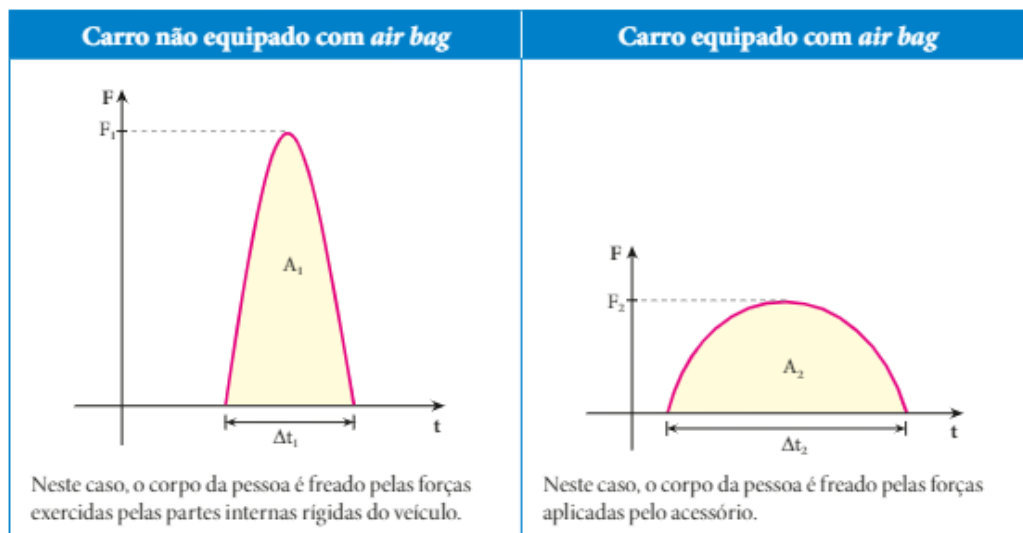
Carro em teste de colisão.

Vale destacar que o *air bag* de um carro é constituído por um sensor que detecta súbitas reduções de velocidade, uma bolsa inflável e um dispositivo contendo azida de sódio (NaN_3), além de outras substâncias secundárias. O sensor, ao constatar uma intensa aceleração de re-

tardamento, produz uma descarga elétrica que provoca o aquecimento e a decomposição da azida de sódio. O nitrogênio (N_2) liberado na reação enche rapidamente a bolsa do acessório.

A proteção proporcionada pelo dispositivo ocorre porque, em contato com ele, a frenagem fica suavizada, ocorrendo em um intervalo de tempo maior do que aquele no qual ocorreria sem o equipamento. Com isso, uma mesma variação de quantidade de movimento, obtida em um intervalo de tempo maior, requer uma força de intensidade menor, o que reduz os possíveis danos.

Nos gráficos a seguir você poderá assimilar melhor o que foi dito até aqui. As escalas utilizadas para intensidade de força (F) e valores de tempo (t) são as mesmas, respectivamente, e, nas duas situações, uma mesma pessoa dentro de um carro vai sofrer uma freada súbita, provocada por uma colisão frontal do veículo. Em ambos os casos a velocidade inicial é a mesma, o que impõe ao corpo da pessoa uma mesma variação de quantidade de movimento até sua completa imobilização. Assim, será exigido, nas duas frenagens, o mesmo impulso de retardamento, o que implica a igualdade entre as áreas A_1 e A_2 destacadas nos dois gráficos.



Com a utilização do *air bag*, o intervalo de tempo de frenagem é maior, isto é, $\Delta t_2 > \Delta t_1$. Sendo assim, como $A_1 = A_2$, conclui-se que $F_2 < F_1$, o que significa que, com o *air bag*, os possíveis traumas no corpo da pessoa são menores, já que as forças impactantes exercidas sobre ele são de intensidade menor.

QUESTÕES COMENTADAS



- 1** Uma partícula de massa 8,0 kg desloca-se em trajetória retilínea, quando lhe é aplicada, no sentido do movimento, uma força resultante de intensidade 20 N. Sabendo que no instante de aplicação da força a velocidade da partícula varia 5,0 m/s, determine:
- o módulo do impulso comunicado à partícula, durante 10 s de aplicação da força;
 - o módulo da velocidade da partícula ao fim do intervalo de tempo referido no item anterior.

RESOLUÇÃO

- a) A intensidade do impulso da força referida no enunciado, suposta constante, é calculada por: $I = F \Delta t$. Sendo $F = 20 \text{ N}$ e $\Delta t = 10 \text{ s}$, calculemos I :
- $$I = 20 \cdot 10 \text{ (N} \cdot \text{s)} \Rightarrow I = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}$$
- b) A força aplicada na partícula é a resultante. Por isso, o impulso exercido por ela deve ser igual à variação da quantidade de movimento da partícula (**Teorema do Impulso**):



LUCIANO S. TEIXEIRA

$$I = \Delta Q \Rightarrow I = Q_2 - Q_1$$

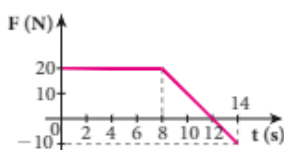
Logo: $I = m v_2 - m v_1 \Rightarrow I = m (v_2 - v_1)$
 Com $I = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}$, $m = 8,0 \text{ kg}$ e $v_1 = 5,0 \text{ m/s}$, calculemos v_2 :

$$2,0 \cdot 10^2 = 8,0 \cdot (v_2 - 5,0) \Rightarrow v_2 = 30 \text{ m/s}$$

Respostas: a) $2,0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}$; b) 30 m/s

- 2** Um corpo de massa 38 kg percorre um eixo orientado com velocidade escalar igual a 15 m/s. No instante $t_0 = 0 \text{ s}$, aplica-se sobre ele uma força resultante cujo valor algébrico varia em função do tempo, conforme o gráfico.

Admitindo que a força seja paralela ao eixo, calcule a velocidade escalar do corpo no instante $t = 14 \text{ s}$.



RESOLUÇÃO

Determinemos, inicialmente, o valor algébrico do impulso que a força resultante comunica ao corpo de $t_0 = 0 \text{ s}$ a $t = 14 \text{ s}$. Isso pode ser feito calculando-se a "área" destacada no gráfico a seguir.



$$I = A_1 + A_2 = \frac{(12 + 8,0) \cdot 20}{2} + \frac{2,0 \cdot (-10)}{2} \text{ (N} \cdot \text{s)}$$

Logo: $I = 190 \text{ N} \cdot \text{s}$

Aplicando ao corpo o **Teorema do Impulso**, temos:

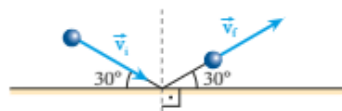
$$I = Q_{14} - Q_0 = m v_{14} - m v_0$$

Sendo $I = 190 \text{ N} \cdot \text{s}$, $m = 38 \text{ kg}$ e $v_0 = 15 \text{ m/s}$, calculemos v_{14} , que é a velocidade escalar da partícula no instante $t = 14 \text{ s}$:

$$190 = 38 \cdot (v_{14} - 15) \Rightarrow v_{14} = 20 \text{ m/s}$$

Resposta: 20 m/s

- 3** Uma bola de tênis de massa m é lançada contra o solo, com o qual interage, refletindo-se em seguida sem perdas de energia cinética. O esquema abaixo representa o evento.



Café/Digital

Sabendo que $|\vec{v}_i| = v$ e que a interação tem duração Δt , calcule a intensidade média da força que o solo exerce na bola.

RESOLUÇÃO

Como não há perdas de energia cinética, temos:

$$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = v$$

Aplicando à bola o **Teorema do Impulso**, obtemos:

$$\vec{I} = \Delta \vec{Q} \Rightarrow \vec{I} = m \Delta \vec{v} \quad (\text{I})$$

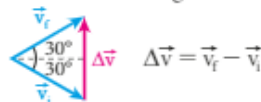
$$\text{Mas: } \vec{I} = \vec{F}_m \Delta t \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), segue que:

$$\vec{F}_m \Delta t = m \Delta \vec{v} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Em módulo, temos: $|\vec{F}_m| = \frac{m |\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$

Com base no diagrama vetorial, determinamos $|\Delta \vec{v}|$:



O triângulo formado pelos vetores é equilátero, o que permite escrever: $|\Delta \vec{v}| = |\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = v$

Assim, finalmente, calculamos $|\vec{F}_m|$: $|\vec{F}_m| = \frac{mv}{\Delta t}$

Resposta: $\frac{mv}{\Delta t}$

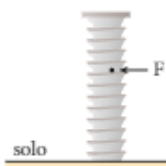


QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

4. Uma formiga F sobe com velocidade escalar constante a "rosca" de um grande parafuso, colocado de pé sobre um solo plano e horizontal, como indica a figura. Em relação a um referencial no solo, podemos afirmar que:



- as energias cinética e potencial de gravidade da formiga permanecem constantes.
- a energia cinética e a quantidade de movimento da formiga permanecem constantes.
- a energia cinética da formiga permanece constante, mas sua energia potencial de gravidade aumenta.
- a quantidade de movimento da formiga permanece constante, mas sua energia potencial de gravidade aumenta.
- a energia mecânica total da formiga permanece constante.

5. Os leões são animais carnívoros que habitam savanas, matas abertas e planícies em parte da Ásia e em quase toda a África. A tarefa de caçar é desincumbida pelas fêmeas, que geralmente andam em grupos, sorrateiras, em busca de uma presa que, uma vez abatida, serve de banquete para toda a alcateia.

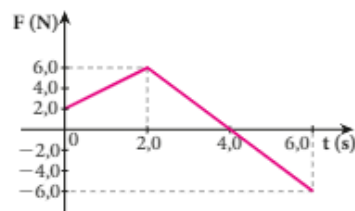


Admita que em um instante $t_0 = 0$ s uma leoa, de massa $m_1 = 120$ kg, correndo em linha reta com velocidade constante de intensidade $v_1 = 8,0$ m/s, está em procedimento de ataque a uma zebra, de massa $m_2 = 200$ kg, inicialmente em repouso. Nesse instante, a distância entre os dois animais é 20 m, quando a zebra inicia uma fuga desesperada, acelerando com intensidade constante de $2,0$ m/s² ao longo da mesma reta percorrida pela leoa.

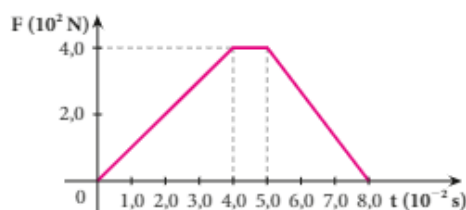
- A leoa consegue êxito em seu ataque, isto é, consegue alcançar a zebra?
- Qual é a distância mínima verificada entre os dois animais, admitidos pontos materiais?
- Qual é a intensidade da quantidade de movimento da zebra em relação à leoa no instante em que a distância entre os dois animais for mínima?

6. Um carrinho de massa 2,0 kg está em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. No instante $t_0 = 0$ s, passa a agir sobre ele uma força \vec{F} de direção constante, paralela ao plano, cujo valor algébrico é dado em função do tempo, conforme o gráfico a seguir.

Desprezando a influência do ar, determine as velocidades escalares do carrinho nos instantes $t_1 = 2,0$ s, $t_2 = 4,0$ s e $t_3 = 6,0$ s.



7. Ao cobrar uma falta, um jogador de futebol chuta uma bola de massa igual a $4,5 \cdot 10^2$ g. No lance, seu pé comunica à bola uma força resultante de direção constante, cuja intensidade varia com o tempo, conforme o seguinte gráfico.

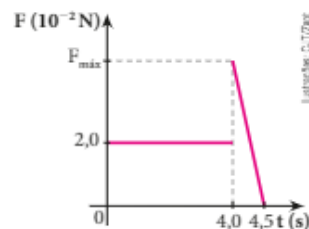


Em $t_0 = 0$ s (início do chute) a bola estava em repouso. Calcule:

- o módulo da quantidade de movimento da bola no instante $t_1 = 8,0 \cdot 10^{-2}$ s (fim do chute);
- o trabalho realizado pela força que o pé do jogador exerce na bola.

8. Os gafanhotos são insetos pertencentes à subordem *Caelifera*, da ordem *Orthoptera*. Caracterizam-se por terem patas posteriores longas e fortes, o que lhes permite deslocar-se aos saltos. Algumas espécies formam enormes enxames que podem devastar grandes plantações. Considere o gráfico a seguir, que mostra o comportamento da intensidade da força vertical que uma superfície plana e horizontal exerce sobre um gafanhoto. No intervalo em que F é constante, o inseto encontra-se em repouso sobre a superfície e, no intervalo em que F é variável, ele está realizando um salto vertical, com perda de contato com a superfície no instante $t = 4,5$ s.

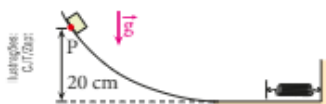
Desprezando as dimensões do gafanhoto e também a influência do ar, adotando-se para a intensidade da aceleração da gravidade o valor 10 m/s² e sabendo que a altura máxima atingida no salto é de 20 cm, determine:



- a massa do gafanhoto, em grammas;
- o valor de $F_{\text{máx}}$ indicado no gráfico.

9. Uma bola de massa igual a 40 g, ao chegar ao local em que se encontra um tenista, tem velocidade horizontal de módulo 12 m/s. A bola é golpeada pela raquete do atleta, com a qual interage durante $2,0 \cdot 10^{-2}$ s, retornando horizontalmente em sentido oposto ao do movimento inicial. Supondo que a bola abandone a raquete com velocidade de módulo 8,0 m/s, calcule a intensidade média da força que a raquete exerce sobre a bola.

10. Na situação da figura, o bloco de massa $m = 2,0$ kg é abandonado no ponto P, de onde desce sem sofrer atritos ou resistência do ar:

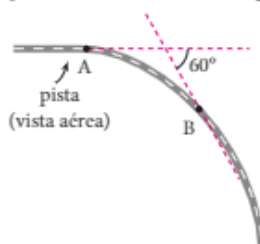


O bloco colide com a mola e, após a interação, que acontece sem dissipação de energia mecânica, adquire movimento de sentido oposto em relação ao inicial. Sabendo que o bloco permanece em contato com a mola durante $2,0 \cdot 10^{-2}$ s e que $|\vec{g}| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, determine:

- a intensidade média da força que o bloco troca com a mola durante a interação;
- a altura máxima que o bloco atinge após a interação com a mola.

11. Considere um carro de massa igual a $8,0 \cdot 10^2$ kg que entra em uma curva com velocidade \vec{v}_1 de intensidade 54 km/h e sai dessa mesma curva com velocidade \vec{v}_2 de intensidade 72 km/h. Sabendo que \vec{v}_2 é perpendicular a \vec{v}_1 , calcule a intensidade do impulso total (da força resultante) comunicado ao carro.

12. Um carro de massa igual a 1,0 tonelada percorre uma pista como a esquematizada na figura, deslocando-se do ponto A ao ponto B em movimento uniforme, com velocidade de intensidade igual a 90 km/h. Sabendo que o comprimento do trecho AB é igual a 500 m, calcule:



- o intervalo de tempo gasto pelo carro no percurso de A até B;
- a intensidade da força capaz de provocar a variação de quantidade de movimento sofrida pelo carro de A até B.

13. Em uma importante final futebolística, um jogador cobra um pênalti e a bola, depois de chocar-se contra o travessão, sai em uma direção perpendicular à do movimento inicial. A bola, que tem 0,50 kg de massa, incide no travessão com velocidade de módulo 80 m/s e recebe deste uma força de intensidade média $5,0 \cdot 10^3$ N. Sabendo que o impacto da bola no travessão dura $1,0 \cdot 10^{-2}$ s, calcule:



- o módulo da velocidade da bola imediatamente após o impacto;
- a energia mecânica dissipada no ato da colisão.

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

Mochila voadora

Projetada originalmente por uma empresa de brinquedos aquáticos alemã, essa mochila propulsãoada por água permite a um homem se manter em equilíbrio pairando no ar, como se pudesse voar. Trata-se do *jetlev*, que deixa o usuário a cerca de 8,5 m de altura mediante um jato de água que circula pela mochila, produzindo uma força vertical dirigida para cima que equilibra o peso total.

A água é introduzida em uma mangueira gigante por meio de uma bomba existente em um pequeno barco conectado ao equipamento. Essa injeção de água ocorre em grande vazão: algo em torno de 20,0 litros por segundo. Depois de fazer uma curva de 180° na mochila, com mudança na intensidade da velocidade, mas com conservação da vazão, o líquido provoca a sustentação da pessoa que se mantém elevada sobre um lago ou sobre o mar.

O usuário também pode deslocar-se horizontalmente a uma velocidade próxima de 40 km/h, bastando para isso inclinar adequadamente os jatos por onde a água é ejetada, além de controlar a vazão.



"Voo" realizado com *jetlev* em Newport Beach, Califórnia. Setembro 2012.

Considerando-se a vazão de 20,0 L/s, citada no texto, levando-se em conta que a densidade da água vale $d = 1,0 \text{ kg/L}$, que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e que a água é introduzida na mochila verticalmente para cima a 20,0 m/s e ejetada verticalmente para baixo a 30,0 m/s, que massa ficaria suspensa em equilíbrio nessas condições?

- I. Sendo \vec{F} a força vertical aplicada pela água no sistema, \vec{P} o peso e considerando M a massa suspensa em equilíbrio, tem-se o seguinte:

$$F = P \Rightarrow F = Mg$$

- II. Aplicando-se o **Teorema do Impulso** à água, temos:

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{F}_A \Delta t = m \Delta\vec{v}$$

\vec{F}_A é a força (vertical para baixo) que o equipamento aplica na água, m é a massa de água e $\Delta\vec{v}$ é a variação de sua velocidade vetorial.

Pela Lei da Ação e Reação, $F_A = F$ ou seja, $F_A = Mg$.

Chamando-se de Z a vazão (em massa) de água que circula pelo equipamento, com $Z = \frac{m}{\Delta t}$, em módulo, segue-se que:

$$Mg \Delta t = m[v_f - (-v_i)] \Rightarrow Mg = Z[v_f - (-v_i)]$$

Na expressão anterior se levou em conta o fato de que a água inverteu o sentido do seu movimento.

Como $d = 1,0 \text{ kg/L}$, podemos dizer que $Z = 20,0 \text{ kg/s}$.

Logo, com $v_f = 30,0 \text{ m/s}$, $v_i = 20,0 \text{ m/s}$ e $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, calculemos M :

$$M \cdot 10,0 = 20,0 [30,0 - (-20,0)] \Rightarrow M = 100 \text{ kg}$$

- Que parâmetro(s) envolvido(s) nesse contexto você modificaria para manter uma massa ainda maior em equilíbrio e em suspensão? Discuta o assunto com os colegas e o professor.



"Deixa a vida me levar..."

Imagine que você esteja sob uma intensa chuva constituída, não de gotas de água em queda vertical, como ocorre normalmente, mas de enormes pneus de caminhão...

Com certeza, esse bombardeio, felizmente fictício, seria fatal, já que você teria que absorver toda a energia de impacto transmitida pelas forças exercidas pelos pneus e o solo durante o curto intervalo de tempo de cada colisão. As forças impulsivas provocariam gravíssimas lesões, como ocorre em qualquer trombada severa.

Guardadas as devidas proporções, e em relação a pequenos insetos como moscas e muriçocas, em voo durante uma chuva regular, não ocorreria a mesma coisa? Esses pobres animais não seriam impactados por gotas de água, em certos casos, muitas vezes mais pesadas que eles?

Estudos desenvolvidos pelo Instituto de Tecnologia da Geórgia, nos Estados Unidos, e publicados na prestigiada revista *Proceedings of the National Academy of Sciences*, demonstraram que, ao contrário do que se imagina, os insetos em geral suportam muito bem o "impacto" das gotas de chuva, já que, ao melhor estilo "deixa a vida me levar...", uma vez em contato com o material líquido, deslocam-se de modo a acompanhar a trajetória da gota, minimizando assim os efeitos da colisão. Dessa forma, o impacto ocorre em um intervalo de tempo maior, o que reduz a intensidade das forças sobre o corpo do animal. Por isso, durante momentos de tempestade, eles voam a altitudes maiores de maneira a disporem de mais espaço vertical para realizar a manobra descendente.

Se impactados em solo, muitos insetos seriam abatidos pelas forças exercidas pelas gotas de água e pela superfície de apoio, podendo ainda sofrer afogamento, uma vez envolvidos pela massa líquida derramada sobre eles.



Inseto voando sob chuva.

Vídeos produzidos na pesquisa estão disponíveis em: <http://cienciahoje.uol.com.br/noticias/2012/06/voando-na-chuva>. Acesso em: 4 dez. 2015.

4. SISTEMA MECÂNICO ISOLADO

Um sistema mecânico é denominado **isolado de forças externas** quando a resultante das forças externas atuantes sobre ele for nula.

Uma partícula em equilíbrio é o caso mais elementar de sistema mecânico isolado. Estando em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, a resultante das forças que agem sobre ela é nula.

Vejam outro exemplo: admita que dois patinadores, inicialmente em repouso sobre uma plataforma plana e horizontal, se empurrem mutuamente, conforme representa a figura.

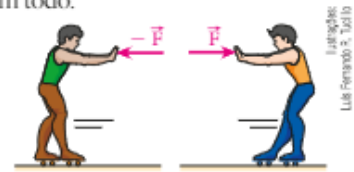


Desprezando os atritos e a influência do ar, os dois patinadores constituem um sistema mecânico isolado,

pois a resultante das forças externas atuantes no conjunto é nula. De fato, as únicas forças externas que agem em cada patinador são a força da gravidade (peso) e a força de sustentação da plataforma (normal), que se equilibram.

Entretanto, uma pergunta surge naturalmente: as forças trocadas entre eles no ato do empurrão não seriam resultantes, uma vez que cada patinador, pela ação da força recebida, tem seu corpo acelerado a partir do repouso? E a resposta é simples: sim, essas forças (ação e reação) são as resultantes que aceleram **cada corpo**, porém são **forças internas** ao sistema, não devendo ser consideradas no estudo do sistema como um todo.

De fato, a soma dos impulsos das forças internas \vec{F} e $-\vec{F}$ (forças de ação e reação trocadas pelos patinadores no ato do mútuo empurrão) é **nula** e, por isso, essas forças não participam da composição do impulso total externo exercido sobre o sistema.



FAÇA VOCÊ MESMO

Canhão de sal de frutas

Suponha que você seja um astronauta e que esteja em repouso fora de sua espaçonave, estacionada nas proximidades de um local onde as influências gravitacionais possam ser consideradas desprezíveis. Você saca uma ferramenta do seu traje espacial e então lança esse objeto vigorosamente para a frente. O que você imagina que ocorreria com seu corpo e seus equipamentos logo após esse lançamento?

De certa forma, o experimento que apresentamos a seguir propõe uma situação análoga que poderá servir de base para suas conclusões.

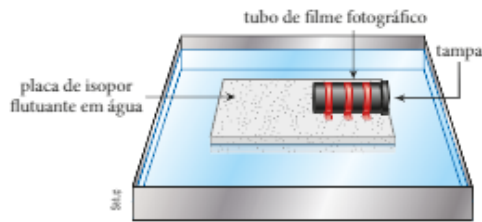
Material necessário

- 1 tubo cilíndrico com tampa de pressão, desses utilizados para acondicionar filmes fotográficos. Você poderá conseguir um desses em lojas de revelação de fotografias;
- 1 placa retangular de isopor com dimensões aproximadas de 10 cm por 15 cm;
- 1 tampa plástica de caneta esferográfica com a haste cortada;
- sal de frutas utilizado para alívio de indisposições estomacais;
- fita adesiva;
- 1 recipiente com água (uma assadeira rasa, bacia ou mesmo o tanque de lavar roupas).

Procedimento

- Utilizando a fita adesiva, fixe firmemente o tubo cilíndrico na placa de isopor de modo que este fique posicionado em uma das bordas da placa com o eixo disposto paralelamente à superfície de fixação.
- Encha a cavidade da tampa de caneta com sal de frutas e coloque-a dentro do tubo previamente preenchido com água até um terço da sua capacidade. Cuide para que a tampa de caneta fique de "boca para cima" de modo a não molhar inicialmente o sal de frutas.

- III. Tampe o tubo, chacoalhe o conjunto, agora, de modo a molhar o sal de frutas. Coloque rapidamente a placa de isopor em repouso flutuando na água do recipiente e aguarde alguns instantes. Observe a ilustração.



Subitamente, o “canhão” irá disparar seu “projétil”. A tampa do tubo de filme fotográfico será ejetada horizontalmente e o tubo de filme fotográfico fixado em sua base de isopor será projetado em sentido oposto. Verifique atentamente.

Analisando o experimento

1. Que reações químicas fazem o sal de frutas se tornar efervescente em contato com a água?
2. Que intercâmbios energéticos você destaca nesse experimento?
3. Como você explica o princípio de funcionamento do canhão de sal de frutas proposto?
4. O canhão de sal de frutas flutuante em água pode ser considerado um sistema isolado de forças externas?
5. Quem adquire velocidade mais intensa após a “explosão”: o “projétil” ou o “canhão”? Faça observações e justifique sua resposta.
6. Compare a quantidade de movimento do sistema imediatamente após a “explosão” com o valor nulo verificado antes desse evento. A partir dessa comparação, o que você conclui?
7. Você identifica comportamento semelhante ao observado nesse experimento em algum processo da natureza ou do dia a dia? Exemplifique.

5. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

As leis mais importantes e gerais da Física são os **princípios de conservação**, ou **princípios de simetria**, dentre os quais destacamos o da conservação da energia, o da conservação da quantidade de movimento (ou momento linear), o da conservação do momento angular e o da conservação da carga elétrica.

Veremos, agora, o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, mas, antes da apresentação formal de seu enunciado, analisemos a situação a seguir.

Consideremos um pequeno bote em repouso nas águas tranquilas de um lago. Admitamos que no local não haja correnteza nem ventos. Um homem está parado na proa da embarcação. Você pode concluir, então, que, nessa situação, a quantidade de movimento total do sistema homem-bote é nula. De repente, o homem lança-se horizontalmente, mergulhando diretamente na água. O que ocorre com o bote? Tomando-se por base uma série de ocorrências similares de nosso dia a dia, a resposta imediata seria: a embarcação é impulsionada para trás, em sentido oposto ao da velocidade do homem.

Nesse contexto, desprezando-se a resistência da água ao movimento do bote, houve a conservação da quantidade de movimento total do sistema

homem-bote, que permaneceu nula do início ao final do episódio. Se adicionarmos vetorialmente as quantidades de movimento do homem e do bote em qualquer instante, desde o momento imediatamente anterior ao mergulho até a situação imediatamente posterior, a soma será nula.

Isso ocorre porque estamos diante de um sistema isolado de forças externas, como foi descrito na seção anterior, e, nesse caso, deve ocorrer a conservação da quantidade de movimento total do sistema.

A conservação da quantidade de movimento também pode ser notada no mundo atômico, como acontece no decaimento radioativo α , em que o núcleo de um dos isótopos radioativos do urânio (U^{232}), inicialmente em repouso, se divide em um núcleo de tório e uma partícula α (núcleo de hélio), que adquirem movimento em sentidos opostos, de modo que a quantidade de movimento total do sistema se mantém igual a zero.

A validade desse princípio fundamental ainda pode ser verificada nas imensidões cósmicas, por ocasião de explosões estelares ou de colisões entre asteroides e astros maiores, como planetas e satélites.

Em um sistema mecânico isolado de forças externas, conserva-se a quantidade de movimento total.

$$\Delta \vec{Q} = \vec{0}, \text{ ou } \vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Façamos a verificação desse enunciado.

Segundo o **Teorema do Impulso**, temos:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \Delta \vec{Q}$$

Entretanto, em um sistema mecânico isolado, a resultante das forças externas é nula, o que permite dizer que o impulso total (da força resultante externa) também é nulo. Então: $\vec{I}_{\text{total}} = \vec{0}$

Assim, temos $\Delta \vec{Q} = \vec{0}$ e, portanto:

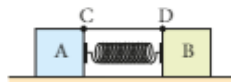
$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Vejamos alguns exemplos típicos em que se aplica o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**.

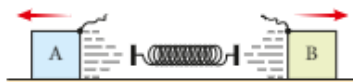
Exemplo 1

Considere o esquema a seguir, em que dois blocos, A e B, amarrados pelo fio CD, repousam sobre uma superfície horizontal e sem atrito.

Os blocos estão inicialmente separados por uma mola ideal, que se encontra comprimida.



Admita que, em determinado instante, o fio CD seja cortado. O que ocorre? A mola distende-se bruscamente, impulsionando um bloco para cada lado.



Desprezando a influência do ar, temos, nesse caso, um sistema isolado de forças externas (as forças que os blocos recebem da mola são internas ao sistema), o que possibilita dizer que, nele, a quantidade de movimento total permanece constante. Assim: $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$

Como os blocos estavam inicialmente em repouso, temos $\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$.

$$\text{Logo: } \vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$$

Portanto: $\vec{Q}_A = -\vec{Q}_B$ (movimentos em sentidos opostos).

Em módulo, temos: $Q_A = Q_B$

Sendo m_A e v_A , m_B e v_B , respectivamente, a massa e o módulo da velocidade de A e B, temos:

$$m_A v_A = m_B v_B \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

Observe que, se $m_B > m_A$, teremos $v_B < v_A$. Na situação estudada, as velocidades e as respectivas massas são inversamente proporcionais.

Exemplo 2

Na fotografia seguinte, duas bolas de bilhar realizam uma colisão mecânica.



Fotografia estroboscópica mostrando bolas de bilhar ao realizarem uma colisão mecânica.

Por causa da breve duração da interação (da ordem de 10^{-2} s), os impulsos de eventuais forças externas – atritos, por exemplo – sobre cada bola são desprezíveis. Assim, essas forças não alteram de modo significativo a quantidade de movimento total do sistema, que permanece praticamente constante desde o imediato instante antes da colisão até o imediato instante após sua ocorrência.

Portanto, é correto afirmar que, nessa colisão, o sistema é isolado de forças externas, valendo o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

De modo geral, os corpos que participam de uma colisão mecânica podem ser considerados um sistema isolado de forças externas, o que possibilita aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**.

Exemplo 3: Outra situação importante em que podemos aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento** é a de uma explosão.

Também nesse caso, em razão da breve duração do fenômeno, os impulsos de eventuais forças externas são desprezíveis, não alterando de modo significativo a quantidade de movimento total do sistema, que se conserva, obedecendo à equação $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$.

Na explosão de uma bomba, a soma vetorial das quantidades de movimento dos fragmentos imediatamente após o evento deve ser igual à quantidade de movimento inicial do artefato.

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

$$\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \dots = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

NOTAS

- Nos exemplos vistos, em virtude da existência de forças internas aos sistemas, as quantidades de movimento de suas partes variam e apenas a quantidade de movimento total (soma vetorial das quantidades de movimento parciais) permanece constante.
- Não se deve confundir **sistema isolado** com **sistema conservativo**. Observe que nem todo sistema isolado é conservativo e nem todo sistema conservativo é isolado.
- O **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento** é muito amplo, porém, aplicado a um sistema de duas partículas isoladas de forças externas, conduz a resultados equivalentes àqueles obtidos pela aplicação da 3ª e da 2ª leis de Newton, o **Princípio da Ação e Reação** e o **Princípio Fundamental da Dinâmica**, respectivamente.

FAÇA VOCÊ MESMO

Propulsão de dispositivos

A atividade experimental que apresentamos a seguir possibilita verificar de maneira qualitativa uma das leis mais fundamentais da Física: o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**.

Material necessário

- 1 carrinho de brinquedo de pequenas dimensões, sem autopropulsão, feito de plástico leve;
- 1 bexiga (balão de festas);
- fita adesiva ou cola.

Procedimento

- I. Cole a bexiga (balão de festas) no teto do carrinho com o bico voltado para trás. A fixação deve ser bem firme e pode ser realizada com a fita adesiva ou a cola.
- II. Encha a bexiga, pressionando seu bico para impedir a saída do ar.
- III. Com a bexiga cheia e o bico travado, coloque o brinquedo em repouso sobre uma mesa horizontal e deixe o ar escapar subitamente. Você notará que o carrinho será propulsionado, adquirindo movimento para a frente, em sentido oposto ao do escape gasoso. Nas ilustrações, é possível observar a situação imediatamente anterior à ejeção do ar (figura 1) e a situação imediatamente posterior à desobstrução do bico da bexiga (figura 2).



figura 1



figura 2

Ilustração: Luziro da S. Theoret

Analisando o experimento

1. Com base no **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, elabore uma explicação detalhada para a propulsão do conjunto carrinho-bexiga.
2. A propulsão verificada poderia ser explicada também pela 3ª Lei de Newton (**Princípio da Ação e Reação**)?
3. As naves espaciais que se deslocam em regiões do cosmo onde não existe atmosfera funcionam de maneira semelhante ao conjunto carrinho-bexiga que você estudou? Pesquise a respeito dos mecanismos propulsores dessas espaçonaves, sobretudo a respeito do tipo de combustível que elas utilizam.
4. As "motos" aquáticas podem atingir alta velocidade, permitindo ao piloto, devidamente treinado, manobras radicais. Como é propulsionada uma moto aquática? Na propulsão desses veículos é válido o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**? E a **Lei da Ação e Reação**?

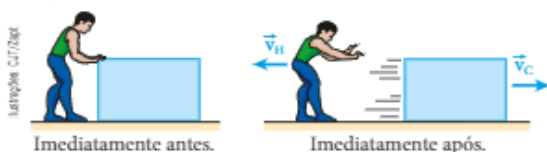
QUESTÕES COMENTADAS



14 Sobre um plano horizontal e perfeitamente liso, repousam, frente a frente, um homem e uma caixa, de massas respectivamente iguais a 80 kg e 40 kg. Em dado instante, o homem empurra a caixa, que se desloca com velocidade de módulo 10 m/s. Desprezando a influência do ar, calcule o módulo da velocidade do homem após o empurrão.

RESOLUÇÃO

Nos elementos componentes do sistema (homem e caixa), a resultante das forças externas é nula. Por isso, o sistema é **isolado**, o que permite aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**.



$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Como $\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$ (o sistema estava inicialmente em repouso), temos: $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0}$

$$\text{Nesse caso, temos: } \vec{Q}_H + \vec{Q}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_H = -\vec{Q}_C$$

(movimentos em sentidos opostos)

Considerando apenas os módulos das quantidades de movimento, podemos escrever: $Q_H = Q_C$

$$\text{Então: } m_H v_H = m_C v_C \Rightarrow \frac{v_H}{v_C} = \frac{m_C}{m_H}$$

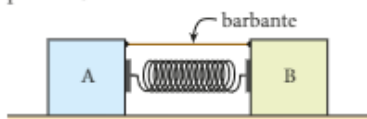
$$\text{Sendo } v_C = 10 \text{ m/s, } m_C = 40 \text{ kg e } m_H = 80 \text{ kg, calculemos } v_H: \\ \frac{v_H}{10} = \frac{40}{80} \Rightarrow v_H = 5,0 \text{ m/s}$$

Nesse caso e em situações similares, as velocidades adquiridas pelos corpos têm intensidade inversamente proporcional às respectivas massas.

Resposta: 5,0 m/s

15 Dois blocos A e B, de massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 4,0 kg, encontram-se em repouso sobre um plano horizontal perfeitamente polido. Entre os blocos, há uma mola de massa desprezível, comprimida, que está impedida de se expandir por causa de um barbante que conecta os blocos.

Em determinado instante, queima-se o barbante e a mola se expande, impulsionando os blocos. Sabendo que o bloco B adquire velocidade de intensidade 3,0 m/s e que a influência do ar é desprezível, determine:



- a intensidade da velocidade adquirida pelo bloco A;
- a energia potencial elástica armazenada na mola antes da queima do barbante.

RESOLUÇÃO

a) O sistema é isolado de forças externas, o que permite aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**: $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$

Com o sistema inicialmente em repouso, porém, temos:

$$\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$$

Assim: $\vec{Q}_A = -\vec{Q}_B$ (movimentos em sentidos opostos)

$$\text{Em módulo: } Q_A = Q_B \Rightarrow m_A v_A = m_B v_B$$

Com $m_A = 2,0 \text{ kg}$, $m_B = 4,0 \text{ kg}$ e $v_B = 3,0 \text{ m/s}$, calculemos v_A :

$$2,0 v_A = 4,0 \cdot 3,0 \Rightarrow v_A = 6,0 \text{ m/s}$$

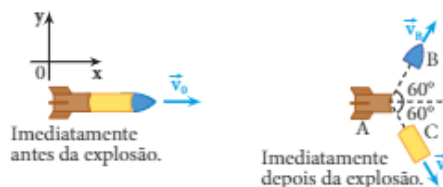
b) A energia elástica armazenada inicialmente na mola pode ser calculada adicionando-se as energias cinéticas adquiridas pelos blocos:

$$E_e = E_{cA} + E_{cB} \Rightarrow E_e = \frac{m_A (v_A)^2}{2} + \frac{m_B (v_B)^2}{2}$$

$$E_e = \frac{2,0 \cdot (6,0)^2}{2} + \frac{4,0 \cdot (3,0)^2}{2} \text{ (J)} \Rightarrow E_e = 54 \text{ J}$$

Respostas: a) 6,0 m/s; b) 54 J

16 Na situação do esquema a seguir, um míssil move-se no sentido do eixo 0x com velocidade \vec{v}_0 , de módulo 40 m/s. Em dado instante, ele explode, fragmentando-se em três partes A, B e C, de massas M, 2M e 2M, respectivamente.



Sabendo que, imediatamente após a explosão, as velocidades das partes B e C valem $v_B = v_C = 110 \text{ m/s}$, determine as características da velocidade vetorial da parte A, levando em conta o referencial 0xy.

RESOLUÇÃO

Como a explosão do míssil constitui um **sistema isolado de forças externas**, podemos aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**: $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$

Segundo a direção 0y, podemos escrever:

$$\vec{Q}'_{yA} + \vec{Q}'_{yB} + \vec{Q}'_{yC} = \vec{Q}_{yA} + \vec{Q}_{yB} + \vec{Q}_{yC}$$

$$M v'_{yA} + 2M v \cdot \text{sen } 60^\circ - 2M v \cdot \text{sen } 60^\circ = 0$$

$$M v'_{yA} = 0 \Rightarrow v'_{yA} = 0$$

O último resultado leva-nos a concluir que, segundo a direção 0y, a velocidade vetorial do fragmento A não apresenta componente imediatamente após a explosão.

Segundo a direção 0x, podemos escrever:

$$\vec{Q}'_{x_A} + \vec{Q}'_{x_B} + \vec{Q}'_{x_C} = \vec{Q}_{x_A} + \vec{Q}_{x_B} + \vec{Q}_{x_C}$$

$$M v'_{x_A} + 2M v \cdot \cos 60^\circ + 2M v \cdot \cos 60^\circ = 5M v_0$$

$$v'_{x_A} + 4v \cdot \cos 60^\circ = 5v_0$$

$$v'_{x_A} + 4v \cdot \frac{1}{2} = 5v_0 \Rightarrow v'_{x_A} = 5v_0 - 2v$$

Sendo $v_0 = 40$ m/s e $v = 110$ m/s, calculemos v'_{x_A} , que é a componente, segundo 0x, da velocidade vetorial do fragmento A imediatamente após a explosão:

$$v'_{x_A} = 5 \cdot 40 - 2 \cdot 110 \Rightarrow v'_{x_A} = -20 \text{ m/s}$$

Tendo em vista os valores obtidos para v'_{y_A} e v'_{x_A} , devemos responder:

Imediatamente após a explosão, o fragmento A tem velocidade na direção do eixo 0x, sentido oposto ao do referido eixo e módulo de 20 m/s.

Resposta: Velocidade na direção do eixo 0x, sentido oposto ao desse eixo e módulo de 20 m/s.



QUESTÕES PROPOSTAS

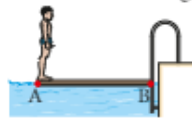


FAÇA NO CADERNO.

17. Um astronauta de massa 70 kg encontra-se em repouso em uma região do espaço em que as ações gravitacionais são desprezíveis. Ele está fora de sua nave, a 120 m dela, mas consegue mover-se com o auxílio de uma pistola que dispara projéteis de massa 100 g, os quais são expelidos com velocidade $5,6 \cdot 10^2$ m/s.

Dando um único tiro, qual é o intervalo de tempo que o astronauta leva para atingir sua nave, supostamente em repouso?

18. A figura a seguir representa um homem de massa 60 kg, de pé sobre uma prancha de madeira, de massa 120 kg, em repouso na água de uma piscina. Inicialmente, ele ocupa o ponto A, oposto de B, onde a prancha está em contato com a escada.



Em determinado instante, o homem começa a andar, objetivando alcançar a escada. Não levando em conta os atritos entre a prancha e a água, ventos ou correntezas, e considerando para a prancha comprimento de 1,5 m, calcule:

- a) a relação entre os módulos das quantidades de movimento do homem e da prancha, enquanto o homem não alcança o ponto B;
- b) a distância x do homem à escada depois de ter atingido o ponto B;
- c) o módulo da velocidade escalar média do homem em relação à escada e em relação à prancha, se, ao se deslocar de A até B, ele gasta 2,0 s.

19. Considere uma espaçonave em movimento retilíneo, com velocidade escalar de $2,0 \cdot 10^3$ m/s em uma região de influências gravitacionais desprezíveis. Em determinado instante, ocorre uma explosão e a espaçonave se fragmenta em duas partes, A e B, de massas respectivamente iguais a M e $2M$.

Se a parte A adquire velocidade escalar de $8,0 \cdot 10^3$ m/s, qual é a velocidade escalar adquirida pela parte B?

20. Uma bomba, em queda vertical nas proximidades da superfície terrestre, explode no instante em que a intensidade de sua velocidade é 20 m/s. A bomba fragmenta-se em dois pedaços, A e B, de massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 1,0 kg. Sabendo que, imediatamente após a explosão, o pedaço A se move para baixo, com velocidade de intensidade 32 m/s, determine:

- a) a intensidade e o sentido da velocidade do pedaço B imediatamente depois da explosão;
- b) o aumento da energia mecânica do sistema devido à explosão.

21. Um artefato explosivo, inicialmente em repouso, é detonado, fragmentando-se em quatro partes, A, B, C e D, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg, 2,5 kg, 2,0 kg e 4,0 kg. Despreze a perda de massa do sistema no ato da explosão e admita que os quatro fragmentos sejam lançados com velocidades contidas em um mesmo plano. No esquema a seguir, são fornecidas as características das velocidades vetoriais adquiridas por A, B e C.



Aponte a alternativa que melhor traduz as características da velocidade vetorial adquirida por D:

- a) \vec{v}_D (125 m/s)
 - b) \vec{v}_D (125 m/s)
 - c) \vec{v}_D (180 m/s)
 - d) \vec{v}_D (180 m/s)
- e) \vec{v}_D (100 m/s)

6. ESTUDO DAS COLISÕES MECÂNICAS

Um jogo de sinuca é um excelente cenário para observarmos um bom número de colisões mecânicas. As bolas, lançadas umas contra as outras, interagem, alterando as características de seus movimentos iniciais.

As colisões mecânicas têm, em geral, breve duração. Quando batemos um prego usando um martelo, por exemplo, o intervalo de tempo médio de contato entre o martelo e o prego em cada impacto é da ordem de 10^{-2} s.

Duas fases podem ser distinguidas em uma colisão mecânica: a de **deformação** e a de **restituição**. A primeira tem início no instante em que os corpos entram em contato, passando a se deformar mutuamente, e termina quando um corpo para **em relação ao outro**. Nesse instante começa a segunda fase, que tem seu fim no momento em que os corpos se separam. A fase de restituição, entretanto, não ocorre em todas as colisões. Em uma batida entre dois automóveis que não se separam após o choque, por exemplo, praticamente não há restituição.

Dizemos que uma colisão mecânica é **unidimensional** (ou **frontal**) quando os centros de massa dos corpos se situam sobre uma mesma reta antes e depois do choque. Em nosso estudo, trataremos preferencialmente das colisões unidimensionais.

Quantidade de movimento e energia mecânica nas colisões

Conforme comentamos na seção 5 deste capítulo, os corpos que participam de qualquer tipo de colisão mecânica podem ser considerados um **sistema isolado de forças externas**. De fato, recordemos que, em razão da breve duração da interação, os impulsos das eventuais forças externas sobre o sistema são praticamente desprezíveis, não modificando de modo sensível a quantidade de movimento total.

Portanto, para qualquer colisão, podemos aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, que significa o seguinte:

Em qualquer tipo de colisão mecânica, a quantidade de movimento total do sistema mantém-se constante. A quantidade de movimento imediatamente após a interação é igual à quantidade de movimento imediatamente antes: $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$

É importante observar, entretanto, que, embora a quantidade de movimento total se conserve nas colisões, o mesmo não ocorre, necessariamente, com a energia mecânica (cinética) total do sistema. Quando dois corpos colidem, há, geralmente, degradação de energia mecânica (cinética) em energia térmica, acústica e trabalho de deformação permanente, entre outras dissipações. Por isso, na maior parte das situações, os corpos que participam de uma colisão mecânica constituem um **sistema dissipativo**.

Excepcionalmente, porém, no caso de as perdas de energia mecânica serem desprezíveis – e somente nesse caso –, os corpos que participam da colisão constituem um **sistema conservativo**. Ratificando, pois, frisemos que os corpos que participam de colisões mecânicas constituem normalmente sistemas isolados, sendo sistemas conservativos apenas excepcionalmente.

Velocidade escalar relativa entre duas partículas que percorrem uma mesma reta

Considere a figura a seguir, em que um carro trafega em uma rua, tendo seu velocímetro indicando permanentemente 30 km/h.



A velocidade acusada pelo velocímetro do veículo é referente ao solo, ou seja, é dada, por exemplo, em relação a uma pessoa que, parada na calçada, observa o carro passar.

Movimentos no mesmo sentido

Considere, agora, o caso em que dois carros, A e B, trafegam por uma mesma avenida retilínea, no mesmo sentido. Admita que os módulos das velocidades escalares de A e B em relação ao solo sejam, respectivamente, 60 km/h e 40 km/h, com A à frente de B.



Se o motorista do carro B observar o carro da frente, verá este se afastar dele com uma velocidade escalar de módulo 20 km/h, tudo se passando como se ele próprio estivesse parado e apenas o carro A se movesse a 20 km/h. Diz-se, então, que a velocidade escalar relativa entre os dois carros tem módulo 20 km/h.

Assim:

Se duas partículas percorrem uma mesma reta no mesmo sentido, o módulo da velocidade escalar relativa entre elas é dado pelo módulo da diferença entre as velocidades escalares das duas, medidas em relação ao solo.

Exemplos:



$$|v_{r_{A,B}}| = |v_A - v_B| = |10 - 50|$$

$$\text{Logo: } |v_{r_{A,B}}| = 40 \text{ m/s}$$



$$|v_{r_{A,B}}| = |v_A - v_B| = |60 - 20|$$

$$\text{Logo: } |v_{r_{A,B}}| = 40 \text{ m/s}$$

Movimentos em sentidos opostos

Imagine agora uma outra situação, em que os carros A e B trafegam por uma mesma estrada retilínea, em sentidos opostos. Sejam 60 km/h e 40 km/h, respectivamente, os módulos das velocidades escalares de A e de B em relação ao solo.



Se o motorista do carro B observar o carro A, verá este se aproximar dele com uma velocidade escalar de módulo 100 km/h, tudo se passando como se ele próprio estivesse parado e apenas o carro A se movesse ao seu encontro a 100 km/h. Diz-se, então, que a velocidade escalar relativa entre os dois carros tem módulo 100 km/h.

Assim:

Se duas partículas percorrem uma mesma reta em sentidos opostos, o módulo da velocidade escalar relativa entre elas é dado pela soma dos módulos das velocidades escalares das duas, medidas em relação ao solo.

Exemplos:



$$|v_{r_{A,B}}| = |v_A| + |v_B| = |10| + |-50|$$

$$\text{Logo: } |v_{r_{A,B}}| = 60 \text{ m/s}$$



$$|v_{r_{A,B}}| = |v_A| + |v_B| = |-10| + |50|$$

$$\text{Logo: } |v_{r_{A,B}}| = 60 \text{ m/s}$$

NOTA

Os critérios apresentados para o cálculo da velocidade escalar relativa são aplicáveis somente aos casos em que as partículas têm velocidades muito menores que a da luz no vácuo ($c \cong 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$). Para partículas dotadas de grandes velocidades, os efeitos relativísticos não podem ser desprezados e os critérios de cálculo sofrem alterações, como se estuda em Física Moderna.

Coefficiente de restituição ou de elasticidade (e)

Sejam $|v_{rf}|$ e $|v_{rp}|$, respectivamente, os módulos das velocidades escalares relativas de **afastamento** (após a colisão) e de **aproximação** (antes da colisão) de duas partículas que realizam uma colisão unidimensional. O **coeficiente de restituição** ou **de elasticidade (e)** para a referida colisão é definido pelo quociente:

$$e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|}$$

NOTAS

- O coeficiente de restituição (e) não depende da massa, mas dos materiais dos corpos que participam da colisão.
- O coeficiente de restituição (e) é adimensional por ser calculado pelo quociente de duas grandezas medidas nas mesmas unidades.
- Pode-se demonstrar que: $0 \leq e \leq 1$

Classificação das colisões quanto ao valor de e

De acordo com o valor assumido pelo coeficiente de restituição e , as colisões mecânicas unidimensionais classificam-se em duas categorias: **elásticas** e **inelásticas**.

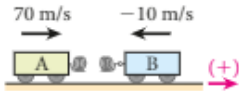
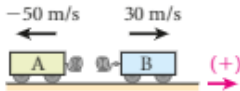
Colisões elásticas (ou perfeitamente elásticas)

Constituem uma situação ideal em que o coeficiente de restituição é máximo, isto é: $e = 1$

Sendo $e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|}$, decorre que: $|v_{rf}| = |v_{rp}|$

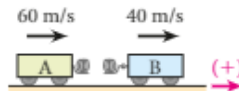
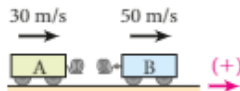
Em uma colisão elástica, as partículas aproximam-se (antes da colisão) e afastam-se (depois da colisão) com a mesma velocidade escalar relativa, em módulo.

Exemplos:

a) Antes da colisão:  Depois da colisão: 

$|v_{rp}| = 70 + 10$ $|v_{rf}| = 50 + 30$
 $|v_{rp}| = 80 \text{ m/s}$ $|v_{rf}| = 80 \text{ m/s}$

$e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|} = \frac{80}{80} \Rightarrow e = 1$

b) Antes da colisão:  Depois da colisão: 

$|v_{rp}| = 60 - 40$ $|v_{rf}| = 50 - 30$
 $|v_{rp}| = 20 \text{ m/s}$ $|v_{rf}| = 20 \text{ m/s}$

$e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|} = \frac{20}{20} \Rightarrow e = 1$

Nas colisões elásticas, o sistema, além de isolado, também é conservativo. A energia mecânica (cinética) total do sistema, imediatamente após a interação, é igual à energia mecânica (cinética) total do sistema imediatamente antes da interação.

Colisão elástica \Rightarrow Sistema conservativo
 $E_{c_{final}} = E_{c_{inicial}}$

Nas colisões elásticas, não há degradação da energia mecânica do sistema. Durante a fase de deformação não há transformação de energia cinética em energia potencial elástica. Durante a fase de restituição ocorre o processo inverso, isto é, a energia potencial elástica armazenada é totalmente reconvertida em energia cinética.

Colisões inelásticas


I. Colisões totalmente inelásticas

São aquelas em que o coeficiente de restituição é nulo: $e = 0$


Sendo $e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|}$, decorre que: $|v_{rf}| = 0$

Nas colisões totalmente inelásticas, como a velocidade escalar relativa de afastamento tem módulo nulo, concluímos que, após a interação, os corpos envolvidos **não se separam**.

Exemplos:

a) Antes da colisão: 

$|v_{rp}| = 80 + 60 \Rightarrow |v_{rp}| = 140 \text{ km/h}$

Depois da colisão: 

Assim: $e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|} = \frac{0}{140} \Rightarrow e = 0$

b) Antes da colisão:  Depois da colisão: 

Como não há separação entre as partículas após a colisão, temos $|v_{rf}| = 0$; logo, $e = 0$.

Pelo fato de os corpos permanecerem unidos (juntos) após uma colisão totalmente inelástica, inexistente a fase de restituição, ocorrendo apenas a fase de deformação. Os corpos que participam de colisões totalmente inelásticas constituem sistemas dissipativos. A energia mecânica (cinética) total imediatamente após a interação é menor que a energia mecânica (cinética) total imediatamente antes da interação.

Colisão totalmente inelástica \Rightarrow Sistema dissipativo
 $E_{c_{final}} < E_{c_{inicial}}$

Destaquemos que, nas colisões totalmente inelásticas, a dissipação de energia mecânica é relativamente grande. Há casos, como o da colisão entre os carros, representados anteriormente, em que toda a energia mecânica se degrada, transformando-se em energia térmica, energia acústica e trabalho de deformação permanente, entre outras formas de energia, havendo, portanto, dissipação total.

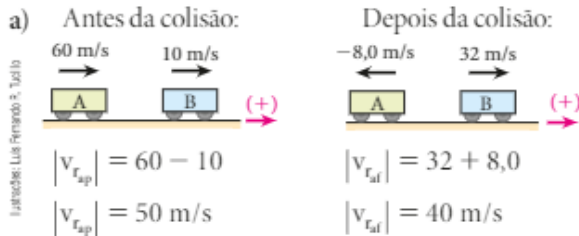
II. Colisões parcialmente elásticas

São aquelas em que o coeficiente de restituição se situa entre zero e um: $0 < e < 1$

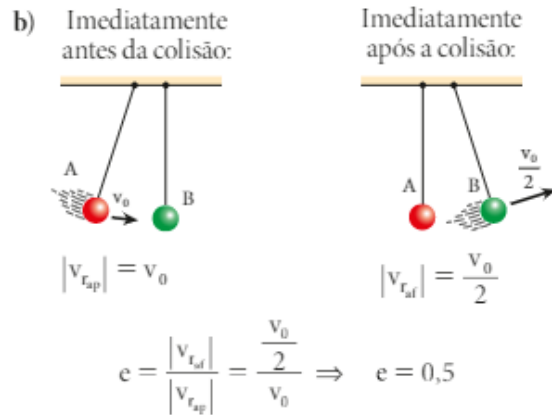
Sendo $e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|}$, decorre que: $0 < |v_{rf}| < |v_{rp}|$

Nas colisões parcialmente elásticas, os corpos envolvidos separam-se após a interação, existindo, assim, a fase de restituição. Os corpos afastam-se, entretanto, com velocidade escalar relativa de módulo **menor** que o da aproximação.

Exemplos:



$$e = \frac{|v_{rf}|}{|v_{rp}|} = \frac{40}{50} \Rightarrow e = 0,8$$



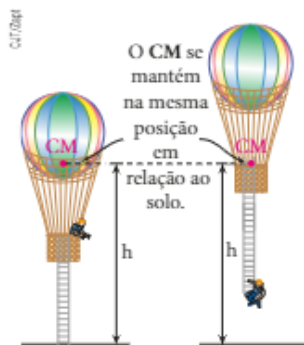
Os corpos que participam de colisões parcialmente elásticas também constituem sistemas dissipativos. A energia mecânica (cinética) total imediatamente após a interação é **menor** que a energia mecânica (cinética) total imediatamente antes da interação.

Colisão parcialmente elástica \Rightarrow Sistema dissipativo
 $E_{\text{final}} < E_{\text{inicial}}$

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

O balão teimoso

Na figura a seguir, está esquematizado um balão tripulado, inicialmente em repouso em relação ao solo, em um local onde não há correntes de ar. Do cesto do balão pende uma escada de corda, que tangencia o chão. Nessas condições, o centro de massa (CM) do sistema balão-homem está a uma altura h em relação ao solo. Admita que o homem resolva descer a escada na tentativa de abandonar o balão. Ele se frustrará, pois, ao atingir a extremidade inferior da escada, ele notará que esta já não mais tangenciará o chão como antes, tendo se elevado em relação ao solo.



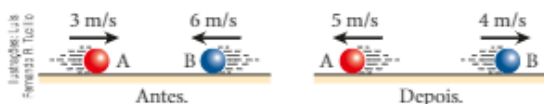
A explicação é esta: o sistema balão-homem é isolado de forças externas ($\vec{F}_{\text{externa}} = \vec{0}$) e, por isso, a velocidade do seu centro de massa deve permanecer constante.

Como o centro de massa estava inicialmente em repouso, assim vai permanecer todo o tempo. Com a descida do homem há um deslocamento de massa para as partes mais baixas do balão, o que tenderia a rebaixar o centro de massa do sistema. Mas a altura do centro de massa se mantém igual a h , pois, à medida que o homem desce, o balão sobe. Ao retornar ao cesto, o homem perceberá que, novamente, a extremidade inferior da escada estará tangenciando o chão.

QUESTÕES COMENTADAS



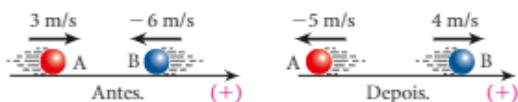
22 No esquema seguinte, estão representadas as situações imediatamente anterior e imediatamente posterior à colisão unidimensional ocorrida entre duas partículas A e B:



Sendo conhecidos os módulos das velocidades escalares das partículas, calcule a relação $\frac{m_A}{m_B}$ entre suas massas.

RESOLUÇÃO

Qualquer colisão mecânica constitui um sistema isolado de forças externas, o que permite a aplicação do **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:



$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}} \Rightarrow \vec{Q}_{f_A} + \vec{Q}_{f_B} = \vec{Q}_{i_A} + \vec{Q}_{i_B}$$

Como a colisão é unidimensional, levando em conta a orientação atribuída à trajetória, raciocinemos em termos escalares:

$$Q_{f_A} + Q_{f_B} = Q_{i_A} + Q_{i_B}$$

$$m_A v_{f_A} + m_B v_{f_B} = m_A v_{i_A} + m_B v_{i_B}$$

$$m_A (-5) + m_B (4) = m_A (3) + m_B (-6)$$

$$8 m_A = 10 m_B \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{5}{4}$$

Resposta: $\frac{5}{4}$

23 Um vagão (I) de massa M , movendo-se sobre trilhos retos e horizontais com velocidade de intensidade v_0 , colide com um vagão (II) de massa m , inicialmente em repouso. Se o vagão (I) fica acoplado ao vagão (II), determine a intensidade da velocidade do conjunto imediatamente após a colisão.

RESOLUÇÃO

Os esquemas seguintes representam as situações imediatamente anterior e imediatamente posterior à colisão:



Aplicando o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, temos:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

$$(M + m) v = M v_0 \Rightarrow v = \frac{M}{M + m} v_0$$

Destaquemos que a colisão é totalmente inelástica e que $v < v_0$.

Resposta: $\frac{M}{M + m} v_0$

24 Duas pequenas esferas de massas iguais realizam um choque unidimensional e perfeitamente elástico sobre uma mesa do laboratório. No esquema abaixo, observe a situação imediatamente anterior e a imediatamente posterior ao evento.



Supondo conhecidos os módulos de \vec{v}_A e \vec{v}_B (v_A e v_B), determine os módulos de \vec{v}'_A e \vec{v}'_B (v'_A e v'_B).

RESOLUÇÃO

Aplicando ao choque o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, temos:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}} \Rightarrow \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

Em termos escalares, temos:

$$Q'_A + Q'_B = Q_A + Q_B$$

$$m v'_A + m v'_B = m v_A + m v_B$$

$$\text{Logo: } v'_A + v'_B = v_A + v_B \quad (I)$$

Sabemos também que: $e = \frac{|v'_{\text{rel}}|}{|v_{\text{rel}}|} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$

Sendo o choque perfeitamente elástico, temos $e = 1$, decorrendo que:

$$1 = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B \quad (II)$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (I) e (II), obtemos:

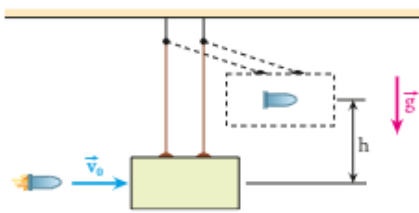
$$v'_A = v_B \text{ e } v'_B = v_A$$

Cabe aqui uma observação importante:

Em um choque unidimensional e perfeitamente elástico entre partículas de massas iguais, estas **trocam suas velocidades**.

Resposta: $v'_A = v_B$ e $v'_B = v_A$

25 O dispositivo representado na figura a seguir denomina-se **pêndulo balístico** e pode ser utilizado para a determinação da intensidade da velocidade de projéteis:



LUIS FERRAZ R. TOLTA

Considere desprezíveis os pesos das hastes e o efeito do ar. Um projétil de massa m é disparado horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 contra o bloco de massa M , inicialmente em repouso. O projétil fica incrustado no bloco e o conjunto eleva-se a uma altura máxima h . Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, determine, em função de M , m , g e h , a intensidade de \vec{v}_0 .

RESOLUÇÃO

Se o projétil fica incrustado no bloco, a colisão é totalmente inelástica. Calculemos o módulo v da velocidade do conjunto bloco-projétil, imediatamente após o impacto. Para tanto, apliquemos à colisão o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}} \Rightarrow (M + m)v = m v_0$$

$$\text{Logo: } v = \frac{m}{M + m} v_0 \quad (\text{I})$$

Devido às condições ideais, imediatamente após a colisão, o sistema torna-se conservativo, valendo, a partir daí, o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**.

Adotemos o plano horizontal de referência passando pela posição inicial do centro de massa do conjunto bloco-projétil. Assim, imediatamente após o impacto, a energia mecânica do conjunto será puramente cinética e, no ponto de altura máxima, puramente potencial de gravidade.

$$E_{\text{m final}} = E_{\text{m inicial}} \Rightarrow E_p = E_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M + m)gh = \frac{(M + m)v^2}{2} \Rightarrow gh = \frac{v^2}{2} \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$gh = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M + m} \right)^2 v_0^2 \Rightarrow v_0 = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$

Embora imediatamente após o impacto o sistema seja conservativo, analisado do início ao fim do fenômeno, ele assim não pode ser considerado, pois, devido à colisão totalmente inelástica ocorrida, uma fração da energia mecânica total é dissipada.

Resposta: $\frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

26. Em um jogo de bolinhas de gude, após uma pontaria perfeita, um garoto lança uma bolinha **A** de massa 10 g, que rola com velocidade constante de módulo 1,5 m/s sobre o solo horizontal, em linha reta, no sentido da esquerda para a direita. Ela choca-se frontalmente contra outra bolinha **B**, de massa 20 g que estava parada. Devido ao impacto, a bolinha **B** parte com velocidade de módulo 1,0 m/s e dirigida para a direita.



Quais são as características da velocidade adquirida pela bolinha **A** após a colisão?

27. A fotografia mostrada a seguir expõe a reconstituição de um acidente, resultado de uma imprudência. Um carro de massa igual a 1 tonelada, ao tentar ultrapassar de maneira incorreta um caminhão, acabou batendo de frente em outro carro, de massa 800 kg, que estava parado no acostamento. Em virtude de a estrada estar muito lisa por causa

de uma chuva ocorrida momentos antes da colisão, os carros se moveram juntos em linha reta, com uma velocidade de intensidade 54 km/h, após o impacto.



CTV - Projeção/Corbis

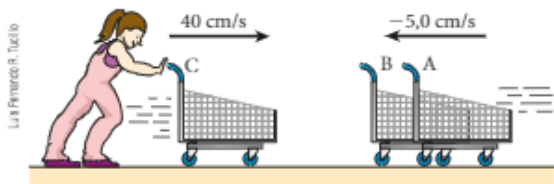
Admitindo-se que a força que deformou os veículos agiu durante 0,10 s, são feitas as seguintes afirmações para a situação descrita:

- I. O choque foi totalmente inelástico e, por isso, não houve conservação da quantidade de movimento total do sistema.
- II. A intensidade da velocidade do carro de 1 tonelada antes da batida era de 97,2 km/h.
- III. A intensidade do impulso em cada carro no ato da colisão foi de $1,2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s}$.
- IV. A intensidade da força média que deformou os veículos foi de $1,2 \cdot 10^3 \text{ N}$.

Estão corretas somente:

- a) I e II
- b) II e III
- c) III e IV
- d) I, II e III
- e) II, III e IV

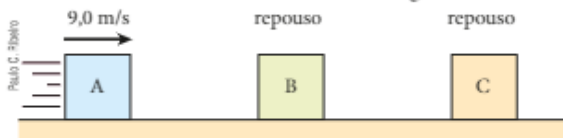
28. Ao perceber que dois carrinhos vazios, A e B, se deslocam acoplados ao seu encontro com uma velocidade escalar de $-5,0$ cm/s, a funcionária de um supermercado lança contra eles um terceiro carrinho, C, também vazio, com velocidade escalar de 40 cm/s. Veja a figura:



Ao colidir com o conjunto A-B, C nele se encaixa e os três carrinhos seguem unidos com velocidade escalar v . Admitindo que os carrinhos sejam iguais e que se movimentem ao longo de uma mesma reta horizontal sem a ação de atritos nos eixos das rodas, tanto antes como depois da interação, pede-se determinar:

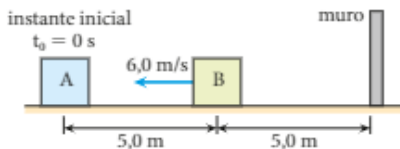
- a) o valor de v ;
- b) a intensidade do impulso que C exerce no conjunto A-B no ato da colisão. Considere que cada carrinho tenha massa igual a 15 kg.

29. Três blocos, A, B e C, de dimensões idênticas e massas respectivamente iguais a $2M$, M e M , estão inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, alinhados em um ambiente em que a influência do ar é desprezível. O bloco A é, então, lançado contra o bloco B com velocidade de escalar de $9,0$ m/s, conforme indica a figura.



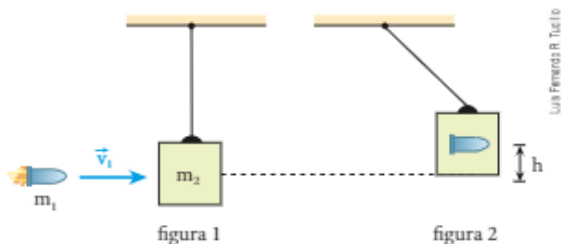
Admitindo que as colisões entre A, B e C sejam unidimensionais e perfeitamente elásticas, determine as velocidades escalares desses blocos depois de ocorridas todas as colisões possíveis entre eles.

30. Apoiados sobre um piso horizontal desprovido de atrito estão um bloco A, em repouso, e um bloco B, de massa $5,0$ kg se aproximando de A com velocidade constante de módulo $6,0$ m/s, como indicado na figura a seguir.



Considerando-se que as dimensões de A e B sejam desprezíveis, quando comparadas com as distâncias dadas, e que a colisão entre A e B seja perfeitamente elástica, qual será a distância entre A e B quando B atingir o muro?

31. (UFJF-MG) A figura 1 a seguir ilustra um projétil de massa $m_1 = 20$ g disparado horizontalmente com velocidade de módulo $v_1 = 200$ m/s contra um bloco de massa $m_2 = 1,98$ kg, em repouso, suspenso na vertical por um fio de massa desprezível. Após sofrerem uma colisão perfeitamente inelástica, o projétil fica incrustado no bloco e o sistema projétil-bloco atinge uma altura máxima h , conforme representado na figura 2.



Desprezando a força de resistência do ar e adotando $g = 10$ m/s², resolva os itens abaixo.

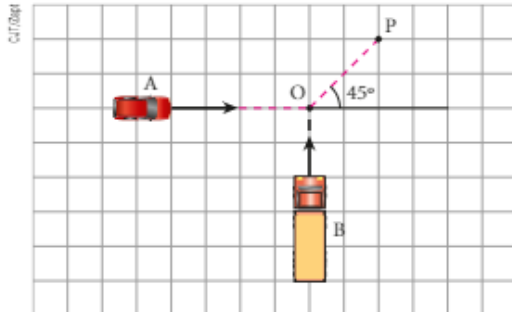
- a) Calcule o módulo da velocidade que o sistema projétil-bloco adquire imediatamente após a colisão.
- b) Aplicando-se o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**, calcule o valor da altura máxima h atingida pelo sistema projétil-bloco após a colisão.

32. O Large Hadron Collider, ou simplesmente, LHC, do CERN, é o maior acelerador de partículas e o de maior energia existente do mundo. Seu principal objetivo é obter dados sobre colisões de feixes de partículas, tanto de prótons, a uma energia de $7,0$ TeV ($1,12$ microjoules) por partícula, como de núcleos de chumbo, a uma energia de 574 TeV ($92,0$ microjoules) por núcleo. O laboratório localiza-se em um túnel de 27 km de circunferência, a 175 metros abaixo do nível do solo, na fronteira franco-suíça próximo a Genebra, Suíça.

Considere duas partículas com cargas elétricas de mesmo sinal em rota de colisão dentro de um acelerador semelhante ao LHC. A partícula 1 tem massa $2m$ e a partícula 2 é um próton, de massa m . Quando a distância entre elas é muito grande, suas velocidades têm a mesma direção e sentidos opostos, mas intensidades iguais a $6,0 \cdot 10^4$ m/s. Desprezando-se os efeitos relativísticos, determine os módulos das velocidades das partículas 1 e 2 imediatamente após a colisão perfeitamente elástica que se verifica entre elas.



33. Um automóvel (A) e um caminhão (B) colidem no ponto O indicado, após o que prosseguem unidos, deslocando-se na direção OP. A massa do caminhão é quatro vezes a do automóvel e sua velocidade, imediatamente antes da batida, valia 30,0 km/h.

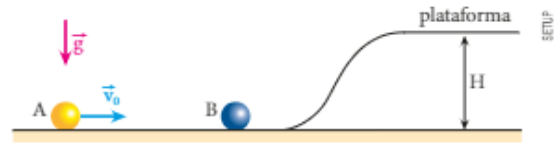


Ao narrar a colisão à Polícia Rodoviária, o motorista do automóvel argumentou que, antes do choque, a velocidade de seu veículo era inferior à máxima permitida (80,0 km/h).

- Verifique, justificando, se a afirmação do motorista do automóvel é falsa ou verdadeira.
- Calcule a velocidade do conjunto automóvel-caminhão imediatamente após a batida.

34. Uma partícula A viaja com velocidade constante e horizontal de módulo v_0 . Após a colisão com uma partícula B, que está inicialmente em repouso, verifica-se que as duas

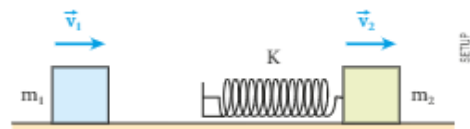
partículas sobem uma plataforma horizontal de altura $H = 0,80$ m, como representado na figura a seguir.



Porém, a partícula A entra em repouso quando atinge essa altura e B continua a se mover na plataforma com energia cinética igual a 240 J. Desprezando-se os efeitos do atrito e sabendo-se que as massas de A e B valem 5,0 kg e 10,0 kg, respectivamente, determine o coeficiente de restituição da colisão.

Adote $g = 10$ m/s² e não considere o efeito do ar.

35. Um bloco de massa $m_1 = 2,0$ kg desliza em linha reta sobre uma mesa sem atrito, com velocidade de módulo 7,0 m/s. Em frente a ele e deslocando-se na mesma direção e sentido há um bloco de massa $m_2 = 4,0$ kg, movendo-se com velocidade de módulo 4,0 m/s. Uma mola com massa desprezível, de constante elástica $K = 300$ N/m, é presa no bloco de massa m_2 . Quando os blocos se chocam, qual é a máxima compressão verificada na mola?



DESCUBRA MAIS

- Admita que você esteja em repouso sobre a superfície horizontal e perfeitamente lisa de um grande lago congelado. Portanto, devido à inexistência de atritos, é impossível caminhar. Você tem em suas mãos um pesado bloco de gelo. Que procedimento você adotaria para atingir uma determinada borda do lago com maior rapidez?
- O momento linear (ou quantidade de movimento), definido pelo produto da massa pela velocidade vetorial, é uma grandeza física de grande importância, essencial no estudo de explosões e colisões. Pesquise sobre o que vem a ser **momento angular**?
- Suponha que você esteja sentado em uma cadeira giratória realizando rotações em torno de um eixo vertical. Você está de braços cruzados e, neste caso, sua velocidade angular é igual a ω_0 . Se você abrir os braços posicionando-os horizontalmente, haverá uma alteração em sua velocidade angular que adquirirá um novo valor $\omega < \omega_0$. A explicação para essa variação na velocidade angular é fundamentada em que princípio físico?
- Imaginemos que a Terra sofra, por alguma razão, um significativo "encolhimento" (redução de raio), sendo mantidas, porém, sua massa e sua forma esférica. Isso provocaria alguma alteração no período de rotação do planeta? Os dias terrestres ficariam mais curtos, mais longos ou manteriam a duração atual de 24 h?

UNIDADE

3

ESTÁTICA

A Estática é a parte da Física que estuda o equilíbrio dos corpos. Seu campo de ação estende-se do equilíbrio de partículas ao equilíbrio de corpos extensos. A Estática também trata do equilíbrio de fluidos. Como explicar, por exemplo, a situação de líquidos imiscíveis, estáveis dentro de um tubo em forma de U e com as superfícies livres desniveladas nos dois ramos do tubo?



Casal e filha equilibrados em uma prancha. Se essa imagem da família sobre a prancha fosse o cartaz de um filme, que nome seria o mais adequado à produção? *Certeza de estabilidade; O enorme peso do ar; Prestes a desabar?* Talvez esta última opção seja a melhor, pois, se a prancha, supostamente homogênea, estiver simplesmente apoiada sobre a base vertical, será uma situação de equilíbrio impossível.

NESTA
UNIDADE

13

ESTÁTICA
DOS SÓLIDOS

14

ESTÁTICA
DOS FLUIDOS



ESTÁTICA DOS SÓLIDOS

1. INTRODUÇÃO

O objetivo primordial deste capítulo é estudar as condições para que um sólido esteja em **equilíbrio estático**, isto é, as condições para que um sólido não apresente nenhum tipo de movimento macroscópico em relação a um dado referencial, que, muito frequentemente, é o solo. Para evidenciar a importância do assunto, basta lembrar que o equilíbrio estático precisa ser garantido no projeto das estruturas de edifícios, pontes, viadutos etc.



Ponte Harbour, Sidney (Austrália). Julho de 2015. Conhecimentos de Estática foram necessários para garantir as condições de equilíbrio dessa ponte.

Estudaremos um ponto, definido para qualquer corpo sujeito a um campo gravitacional, denominado **centro de gravidade** do corpo. Em um de seus livros, o grego Arquimedes (287-212 a.C.), nascido em Siracusa e considerado o pai da Mecânica, descreveu a determinação do centro de gravidade de um corpo qualquer.

No projeto de um avião, por exemplo, a posição desse ponto, estabelecida em solo, é fundamental para garantir a estabilidade da aeronave em voo.

Em várias outras situações, como veremos, a localização do centro de gravidade é decisiva para se saber se o sólido estará ou não em equilíbrio.

Neste capítulo, veremos conceitos que farão você entender o princípio de funcionamento de muitas máquinas elementares que facilitam sobremaneira a realização de tarefas em nosso cotidiano.

Há muitos casos em que essa realização nem seria possível sem as tais máquinas.

Imagine, por exemplo, que o pneu de um automóvel que trafegava por uma rodovia furou. Obviamente foi preciso substituir o pneu furado para que a viagem pudesse ter continuidade. Para isso, o “macaco” foi fundamental. Sem a chave de roda seria impossível desapertar os parafusos e, assim, remover a roda. Sem essa chave também seria impossível apertar corretamente os parafusos da roda sobressalente.

Abrir uma garrafa, como você pode ver na fotografia abaixo, fica muito mais fácil com um abridor.



A Estática está presente até mesmo na simples tarefa de abrir uma garrafa: o abridor é um tipo de alavanca.

Introduzir um parafuso em uma tábua é outra tarefa que uma máquina elementar – a chave de fenda – facilita muito. Nessa operação, o fato de o parafuso ter rosca também é fundamental.



A Estática também justifica a vantagem do uso de uma chave de fenda para apertar ou desapertar parafusos.

Antigamente as bicicletas não tinham marchas. Subir uma ladeira íngreme era uma tarefa muito árdua. Muitas vezes, o ciclista descia da bicicleta e a empurrava até o final da ladeira.

Veja na imagem a seguir um sistema constituído por dois garfos e um palito fincados em uma rolha, em equilíbrio, apoiado na borda da boca de uma garrafa.

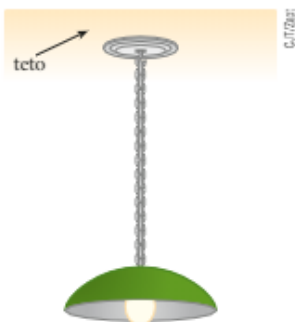


O sistema encontra-se em equilíbrio, apoiado na borda da boca da garrafa. O segredo desse equilíbrio está na posição do centro de gravidade do sistema.

2. ESTÁTICA DO PONTO MATERIAL E ESTÁTICA DO CORPO EXTENSO

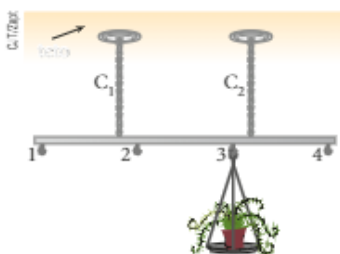
O sistema abaixo é formado por um lustre em repouso, suspenso no teto de uma sala por meio de uma corrente.

Quando esse sistema foi fixado no teto, certamente ninguém teve a preocupação de que seu equilíbrio pudesse ser comprometido por uma possível rotação. De fato, a possibilidade de rotação não é um fator relevante nessa situação, pois, para o equilíbrio acontecer, basta que a corrente suporte a tração exercida pelo lustre sem se romper e que a fixação no teto seja bem-feita. Nesse caso, o lustre pode ser considerado uma partícula — com toda a sua massa concentrada nela — suspensa na extremidade da corrente.



A situação descrita anteriormente se enquadra no que chamamos de **estática do ponto material ou estática da partícula**.

Considere, agora, a situação de repouso ilustrada na figura ao lado, em que uma barra com ganchos para pendurar vasos está suspensa no teto por meio de duas correntes C_1 e C_2 .



Nesse caso, dependendo do gancho em que um mesmo vaso é pendurado, temos situações diferentes. Quando o vaso está no gancho 3, por exemplo, a corrente C_2 suporta mais carga que a C_1 . Suspenso, no gancho 2, porém, a corrente C_1 passa a ser mais tracionada que a C_2 . Observe que, nesse caso, a possibilidade de rotação da barra passa a ter importância, pois ela poderá ocorrer quando o vaso for colocado no gancho 1 (possível rotação em torno do ponto de suspensão da corrente C_1) ou no gancho 4 (possível rotação em torno do ponto de suspensão da corrente C_2).

O equilíbrio da barra representada na figura anterior se enquadra na **estática do corpo extenso**, porque os efeitos produzidos por uma mesma carga dependem da posição em que ela é colocada. Além disso, é importante destacar a possibilidade de ocorrer rotação em torno de um ponto. Por isso, a barra não pode ser encarada apenas como um ponto material.

3. EQUILÍBRIO DO PONTO MATERIAL

Como foi visto em **Dinâmica**, um ponto material está em equilíbrio em relação a um referencial adequado (como o solo) quando se encontra em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme em relação a esse referencial. O repouso corresponde ao equilíbrio estático, enquanto o movimento retilíneo e uniforme corresponde ao equilíbrio dinâmico.

A condição para um ponto material estar em equilíbrio em relação a um referencial é que a resultante das forças que nele atuam seja nula.

Observe a fotografia a seguir, em que uma pessoa está suspensa em um cabo de aço por meio de um aparato.



Menino brincando em tirolesa.

As forças que atuam no sistema (pessoa e aparato de suspensão) são o peso desse sistema e as trações do cabo de aço. Se o sistema estiver em equilíbrio, a resultante dessas forças será nula.

Note que a soma das trações \vec{T}_1 e \vec{T}_2 , obtida pela regra do paralelogramo, equilibra o peso \vec{P} .

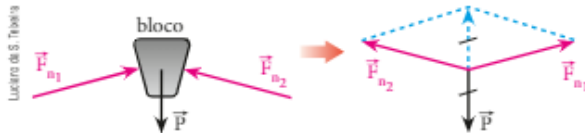


Veja na próxima fotografia detalhes de um aqueduto romano em Segóvia.



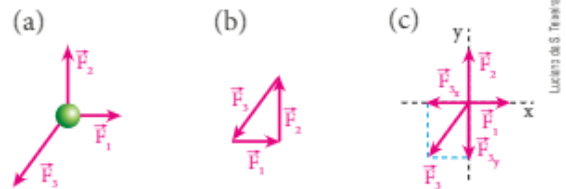
Antigo arqueduto romano em Segóvia, Espanha. Julho de 2012.

Esses arcos eram construídos com blocos de pedra simplesmente justapostos, sem nenhum material que ligasse um bloco ao outro. Isso era possível porque cada bloco é equilibrado pelas forças que recebe dos blocos adjacentes. Ao se considerar a não solicitação de atrito, as forças que cada bloco recebe são normais de compressão:



Observe que a soma de \vec{F}_{n_1} com \vec{F}_{n_2} , obtida novamente pela regra do paralelogramo, equilibra o peso \vec{P} .

A figura a seguir, mostrada esquematicamente em três situações, (a), (b) e (c), representa uma partícula em equilíbrio e tem como finalidade recordar o uso de outras regras de adição vetorial.



Em (a), a partícula está sob a ação exclusiva de três forças no plano do papel. A soma de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , pela regra do paralelogramo, equilibra a força \vec{F}_3 .

Em (b), as três forças são adicionadas pela regra do polígono, obtendo-se uma linha poligonal fechada, razão pela qual a força resultante é nula e a partícula encontra-se em equilíbrio.

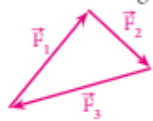
Em (c), analisamos a força resultante por meio da decomposição das forças segundo duas retas perpendiculares, x e y: \vec{F}_{3x} equilibra \vec{F}_1 e \vec{F}_{3y} equilibra \vec{F}_2 .

QUESTÕES COMENTADAS

1 Um ponto material está em equilíbrio, submetido a três forças. Que condição as intensidades dessas forças devem satisfazer?

RESOLUÇÃO

1ª possibilidade: As forças têm direções diferentes. Nesse caso, posicionando-as segundo a regra do polígono, obtemos um triângulo:

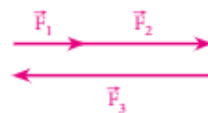


Suponha que as forças estejam representadas em escala, isto é, que cada 1 N delas corresponda a um segmento de reta de mesmo comprimento.

Para o triângulo existir, a medida de cada um dos seus lados deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois. Então, a intensidade de cada uma das três forças tem de ser menor que a soma das intensidades das outras duas. Por exemplo: $F_1 = 4 \text{ N}$, $F_2 = 3 \text{ N}$ e $F_3 = 6 \text{ N}$.

Se a citada condição não for satisfeita, o triângulo não poderá existir. Então, a poligonal não será fechada e, portanto, a força resultante não será nula e a partícula não estará em equilíbrio. Isso ocorre, por exemplo, com $F_1 = 3 \text{ N}$, $F_2 = 4 \text{ N}$ e $F_3 = 20 \text{ N}$.

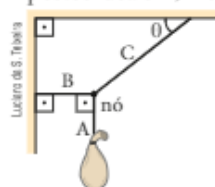
2ª possibilidade: As forças têm direções iguais. Agora, temos a situação a seguir:



Isso significa que a intensidade de uma das três forças tem de ser igual à soma das intensidades das outras duas.

Resposta: Na 1ª possibilidade, a intensidade de cada uma das três forças tem de ser menor que a soma das intensidades das outras duas. Na 2ª possibilidade, a intensidade de uma das três forças tem de ser igual à soma das intensidades das outras duas.

2 Na figura abaixo, um corpo de peso 120 N encontra-se em equilíbrio, suspenso por um conjunto de três fios suspensos ideais A, B e C.

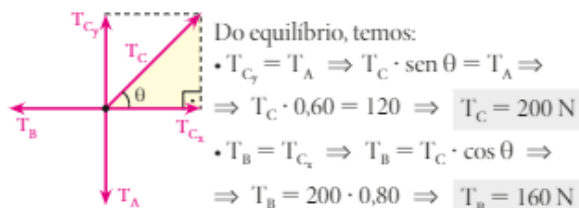


Calcule as intensidades das trações \vec{T}_A , \vec{T}_B e \vec{T}_C , respectivamente, nos fios A, B e C, sabendo que $\text{sen } \theta = 0,60$ e $\text{cos } \theta = 0,80$.

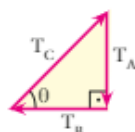
RESOLUÇÃO

A tração no fio A tem a mesma intensidade do peso do corpo: $T_A = 120 \text{ N}$

Representemos as forças de tração que os fios exercem no nó e façamos a decomposição dessas forças segundo a vertical e a horizontal.



Observe que a tração mais intensa é a de intensidade T_C , o que era esperado, já que ela está representada na hipotenusa do triângulo destacado na figura anterior. Portanto, se os três fios forem igualmente resistentes, é o fio C que correrá mais riscos de se romper, se cargas maiores forem suspensas em A. Também podemos determinar T_B e T_C lembrando que o polígono das forças de tração exercidas pelos fios no nó é fechado:



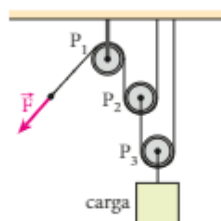
Assim, temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{T_A}{T_C} \Rightarrow 0,60 = \frac{120}{T_C} \Rightarrow T_C = 200 \text{ N}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow 0,80 = \frac{T_B}{200} \Rightarrow T_B = 160 \text{ N}$$

Resposta: 120 N, 160 N e 200 N.

3 A figura representa um sistema constituído de fios e três polias P_1 , P_2 e P_3 , todos considerados ideais.



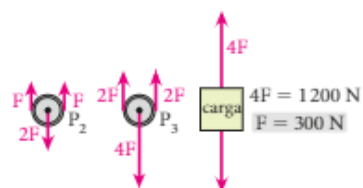
A força \vec{F} aplicada na extremidade de um dos fios mantém o sistema em equilíbrio, sustentando uma carga de 1200 N. Calcule a intensidade da força \vec{F} .

RESOLUÇÃO

Para resolver esse tipo de exercício, é necessário lembrar que:

- em um mesmo fio ideal, a tração tem a mesma intensidade em todos os seus pontos;
- em qualquer corpo em equilíbrio, a força resultante é nula (nas polias, a força resultante seria nula mesmo que não estivessem em equilíbrio, porque, sendo consideradas ideais, têm massas nulas).

Observe que esse sistema de polias e fios quadruplicou a intensidade F da força aplicada por seu usuário. De fato, a força recebida pela carga tem intensidade $4F$. Essa é a vantagem da utilização de sistemas como este.

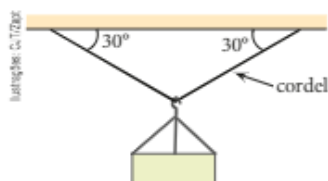


Em contrapartida, se a carga for erguida a uma altura d em relação à sua posição inicial, o ponto de aplicação da força F deverá ser deslocado de $4d$ (**Princípio da Conservação do Trabalho**).

Resposta: 300 N

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

4. Um bloco de peso 80 N está suspenso por um cordel, como indica a figura. No equilíbrio, calcule a intensidade da tração no cordel.



5. Uma partícula encontra-se em equilíbrio sob a ação de um sistema constituído de apenas três forças, sendo o peso uma delas. A respeito das outras duas forças, podemos afirmar que:

- elas são necessariamente horizontais;
- elas são necessariamente verticais;
- apenas uma pode ser vertical;

d) elas não podem ser ambas horizontais;
e) elas não podem ser ambas verticais.

6. A figura a seguir representa uma corrente de peso igual a 40 N, cujas extremidades estão em um mesmo nível horizontal, presas em dois suportes. Suponha o peso da corrente em seu ponto médio.



Considerando iguais a 45° os ângulos θ indicados na figura, determine a intensidade da força:

- que a corrente exerce em cada suporte;
- de tração no ponto mais baixo da corrente.

4. EQUILÍBRIO DO CORPO EXTENSO

Tratar um corpo como um ponto material equivale a admitir que, na situação em que está sendo estudado, só interessa considerar a possibilidade de ele adquirir algum movimento de translação, já que não se pode caracterizar o movimento de rotação de um corpo puntiforme. Por isso, dizemos que o equilíbrio de um ponto material é de translação.

O corpo extenso, por sua vez, pode apresentar tanto o movimento de translação como o de rotação. Por esse motivo, o estudo do equilíbrio do corpo extenso requer duas análises: uma referente à translação e outra referente à rotação.

Equilíbrio de translação

Um corpo extenso está em **equilíbrio de translação** quando seu centro de massa está em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme em relação a um determinado referencial.

A condição para que o equilíbrio de translação de um corpo extenso ocorra é que a resultante das forças externas que nele atuam seja nula, pois, desse modo, também será nula a aceleração de seu centro de massa:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_{\text{CM}} = m \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Equilíbrio de rotação

Um corpo extenso está em **equilíbrio de rotação** quando está em repouso (não rota) ou em movimento de rotação uniforme (rota com velocidade angular constante) em relação a um referencial determinado.

A condição para que o equilíbrio de rotação de um corpo extenso ocorra será vista na seção 7 deste capítulo.

Na **Estática**, são considerados apenas corpos extensos em **equilíbrio estático**, isto é, corpos em repouso tanto em relação à translação como em relação à rotação (corpos que não transladam nem rotam).

FAÇA VOCÊ MESMO

Investigando uma nova grandeza

Já sabemos que a condição para um corpo extenso estar em equilíbrio de translação é a nulidade da resultante das forças que atuam nele. Isso, entretanto, não garante o equilíbrio de rotação. Em uma bússola, por exemplo, se a agulha imantada for solta em uma direção diferente da direção norte-sul magnética, ela iniciará um movimento de rotação acelerado apesar de ser nula a resultante das forças que atuam na agulha.

Nesta atividade, vamos investigar a condição de equilíbrio de rotação do corpo extenso.

Material utilizado

- 1 canudo comum de refrigerante;
- 1 tesoura;
- 1 caneta de ponta fina que escreva em plásticos, denominada marcador permanente;
- 1 agulha de costura;
- 1 régua escolar;
- cerca de 30 cm de linha de costura;
- 6 cliques metálicos **iguais** (tamanho 8/0).

Procedimento

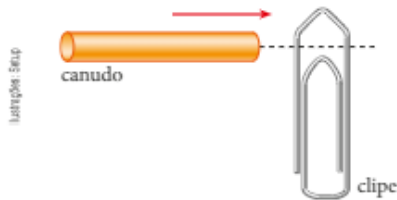
I. Com a régua, determine o centro do canudo e, com a caneta, faça uma marca em forma de um fino anel ao redor dele. A partir do centro do canudo, e a cada 3,5 cm, faça nele outras marcas iguais, tanto de um lado como do outro. Esses comprimentos de 3,5 cm serão representados por d . Com a agulha e o pedaço de linha, fure o canudo na marca central, perpendicularmente ao canudo, e amarre nele uma das pontas da linha. Suspenda-o como mostra a figura ao lado:



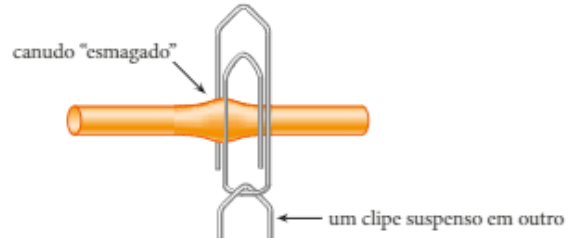
O canudo suspenso deve ficar em equilíbrio na horizontal. Se pender para a direita (ou para a esquerda), vá cortando com a tesoura finíssimos anéis da extremidade direita (ou esquerda) até que ele fique equilibrado na horizontal.

II. Em seguida, será preciso fixar cliques no canudo. Veja uma sugestão para fixá-los:

a) Introduza o canudo no vão indicado:



b) Prenda o clipe na posição — que será indicada no procedimento III —, de modo que ele fique como na figura:



Quando tiver de colocar mais de um clipe em uma mesma posição do canudo, conecte um no outro como indica a figura do item b.

III. Tomando como referência a figura do procedimento I, realize o seguinte:

- Fixe um clipe em D e um clipe em outra posição de modo a manter o canudo suspenso em equilíbrio na horizontal. Anote qual foi essa outra posição.
- Acrescente um clipe ao que está suspenso em D e procure, escorregando o outro clipe no canudo, sua nova posição para manter o canudo equilibrado na horizontal. Anote essa nova posição.
- Desloque o conjunto de dois cliques para a posição E, leve o outro para C e procure a posição em que deve ser fixado um quarto clipe de modo a manter o equilíbrio. Anote essa posição.
- Mantendo em E o conjunto de dois cliques, verifique quantos cliques é preciso suspender, apenas em C, para manter o equilíbrio. Anote o resultado que você observou.
- Mantendo em E o conjunto de dois cliques, suspenda dois em D e descubra em que posição deve suspender outros dois para manter o equilíbrio. Anote a posição encontrada.

Analizando o experimento

- Representando por F o módulo da força recebida pelo canudo devido a cada clipe suspenso em equilíbrio, e lembrando que d é a distância entre marcas consecutivas no canudo, em cada um dos cinco itens do procedimento III, faça o que se pede:
 - Multiplique o módulo da força recebida pelo canudo em cada posição à direita de O (pode ser F , $2F$ etc.) pela distância dessa posição até O (pode ser d , $2d$ ou $3d$). Adicione todos esses produtos.
 - Repita esses cálculos para as forças à esquerda de O e compare o resultado obtido de um lado e do outro.
- Suspendendo três cliques entre O e D, a 3 cm de O, e um entre E e F, a 8 cm de O, a que distância de O devem ser suspensos os outros dois para equilibrar o canudo?
- Desprezando o peso do canudo, qual é a intensidade T da força de tração exercida nele pela linha em cada uma das cinco situações de equilíbrio analisadas no procedimento III? Dê as respostas em função de F .
Em cada uma dessas situações, o peso total do(s) clipe(s) suspenso(s) de um lado e de outro do ponto de suspensão O foram iguais?
- Uma menina de 24 kg e um menino de 30 kg, sem tocar os pés no chão, estão em uma gangorra equilibrada. Se a menina está a 2,5 m do eixo de suspensão da gangorra, qual deve ser a distância entre o menino e a menina?

5. MOMENTO ESCALAR DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO

Estudaremos agora uma grandeza capaz de medir a eficiência de uma força em produzir rotação em um corpo. Para isso, consideremos três situações práticas.

Situação 1: Uma pessoa deseja fechar uma porta, como representa a figura a seguir. Para isso, ela precisa aplicar uma força que, vamos supor, seja perpendicular à porta.



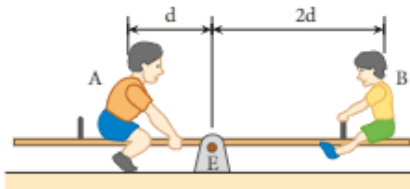
É fácil constatar que a eficiência da força em fazer a porta rotar é tanto maior quanto maiores forem sua intensidade e a distância entre o local onde ela é aplicada e o eixo de rotação (eixo das dobradiças).

Situação 2: O motorista do caminhão representado na figura está tentando desapertar um parafuso de uma das rodas com uma chave.



Se, esforçando-se ao máximo, ele não conseguir seu intento, poderá fazê-lo acoplado um cano de ferro à chave, de modo a aumentar a distância do local onde aplica a força até o eixo de rotação do parafuso.

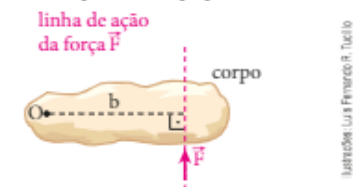
Situação 3: A gangorra também é um sistema que permite investigar a eficiência de uma força em produzir rotação:



Verifica-se que, se o peso do garoto **A** é o dobro do peso do garoto **B**, é necessário que a distância de **B** até o eixo **E** seja o dobro da distância de **A** até esse mesmo eixo para que ambos fiquem em equilíbrio (como mostra a figura anterior).

De acordo com as situações que acabamos de descrever, podemos concluir que a eficiência de uma força em produzir rotação em um corpo é tanto maior quanto maiores forem sua intensidade e a distância entre a reta que passa pela força – denominada **linha de ação** – e o eixo de rotação do corpo. A grandeza física que mede essa eficiência é denominada **momento** ou **torque**.

Para definir escalarmente essa grandeza, considere um corpo sob a ação da força \vec{F} e um eixo de rotação (real ou imaginário) perpendicular ao plano da figura e passando pelo ponto **O** (polo do momento). A força \vec{F} e o ponto **O** estão no plano do papel.

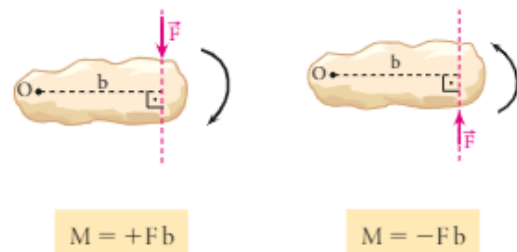


A distância **b**, de **O** até a linha de ação de \vec{F} , denomina-se **braço de \vec{F}** em relação a **O**.

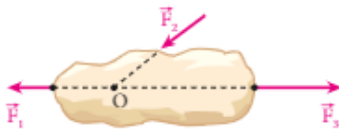
Momento escalar (M) da força \vec{F} em relação a **O** é o produto da intensidade dessa força por seu braço em relação a **O**, precedido de um sinal algébrico arbitrário: $M = \pm Fb$

A finalidade do sinal algébrico (+ ou -) é distinguir os momentos que correspondem a uma tendência de rotação no sentido horário daqueles que correspondem a uma tendência de rotação no sentido anti-horário. Em cada problema, deve-se convencionar o sinal que será atribuído ao momento.

Pode-se considerar positivo, por exemplo, o momento de uma força capaz de produzir rotação no sentido horário e negativo o momento de uma força capaz de produzir rotação no sentido anti-horário:



Observe que o momento será nulo em relação a **O** quando esse ponto pertencer à linha de ação da força, situação em que o braço é nulo:



Os momentos das forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 são nulos em relação ao polo **O**.

Luis FERNANDES TAVELLO

As unidades de medida de **momento** são obtidas pelo produto de uma unidade de força por uma unidade de comprimento:

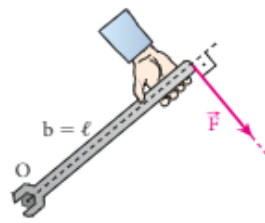
$$\text{unid (M)} = \text{unid (F)} \cdot \text{unid (b)}$$

Assim, a unidade de medida de momento, no SI, é o **newton · metro (Nm)**, que **não** deve ser chamada de joule, reservando-se essa denominação para a unidade de trabalho e energia, que são grandezas físicas diferentes do momento de uma força.

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

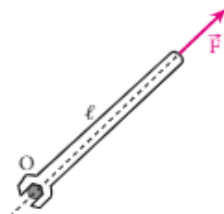
O braço do momento

Para apertar um parafuso, uma pessoa pode aplicar na extremidade de uma chave, de comprimento ℓ , uma força de intensidade F em diversas direções.



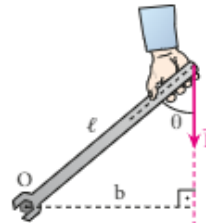
$$|M_{\vec{F}}| = Fb = F\ell$$

figura 1



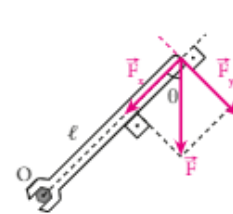
$$|M_{\vec{F}}| = Fb = F \cdot 0 = 0$$

figura 2



$$|M_{\vec{F}}| = Fb = F\ell \cdot \text{sen } \theta$$

figura 3



$$|M_{\vec{F}_y}| = F_y b = F\ell \cdot \text{sen } \theta$$

figura 4

COT/UFPA

O momento (torque) **mais intenso** é conseguido quando a força é perpendicular à chave (veja na figura 1). Nesse caso, o braço da força em relação ao eixo **O** de rotação do parafuso é igual ao comprimento da chave, e o módulo do torque (Fb) é igual a $F\ell$. Com isso, podemos dizer que a força \vec{F} está sendo integralmente aproveitada para produzir momento em relação a **O**.

Na figura 2, o ponto **O** pertence à linha de ação de \vec{F} . Logo, o braço **b** de \vec{F} em relação a **O** é nulo: $b = 0$.

Se a força não for perpendicular à barra, nem estiver alinhada com ela, a intensidade do momento não será nula, mas será menor que o valor máximo ($F\ell$), como se pode observar na figura 3. Veja que $\text{sen } \theta = \frac{b}{\ell}$. O módulo do momento (Fb) é igual a $F\ell \cdot \text{sen } \theta$, que é menor que $F\ell$. Podemos dizer, então, que a força \vec{F} não está sendo integralmente aproveitada para produzir o torque desejado. De fato, se ela for substituída pelas componentes representadas na figura 4, só a componente \vec{F}_y produzirá momento em relação a **O**. Observe que o ponto **O** pertence à linha de ação da componente \vec{F}_x . Por isso, o braço de \vec{F}_x em relação a **O** é igual a zero, ocorrendo o mesmo com seu momento.

Note também que o braço de \vec{F}_y em relação a **O** é igual a ℓ .

Observe que $\text{sen } \theta = \frac{F_y}{F}$. Assim, o módulo do momento de \vec{F}_y é dado por:

$$|M_{\vec{F}_y}| = F_y b = F_y \ell = (F \cdot \text{sen } \theta) \ell = F\ell \cdot \text{sen } \theta$$

que, por sua vez, é igual ao módulo do momento de \vec{F} .

Portanto, nesse caso: $|M_{\vec{F}}| = |M_{\vec{F}_y}|$

6. CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DO CORPO EXTENSO

Para um corpo extenso estar em equilíbrio, é necessário satisfazer duas condições: uma referente ao equilíbrio de translação e outra ao equilíbrio de rotação.

Condição de equilíbrio de translação

Já determinamos essa condição no início deste capítulo, mas vamos recordá-la:

A condição de equilíbrio de translação de um corpo extenso (centro de massa em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme) é que a resultante das forças externas atuantes no corpo seja nula:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Condição de equilíbrio de rotação

Duas pessoas com pesos diferentes podem usar normalmente uma gangorra, equilibrando-a? Podem, desde que a pessoa mais pesada esteja sentada mais perto do eixo de rotação da gangorra do que a outra, de modo que as forças que elas exercem na gangorra sejam igualmente eficientes em produzir a rotação dela nos sentidos horário e anti-horário, ou seja, que a soma dos momentos dessas forças em relação ao eixo de rotação seja nula (ou que esses momentos tenham módulos iguais).

Generalizando, para um corpo extenso, sob a ação de um sistema de forças coplanares, temos:

A condição de equilíbrio de rotação de um corpo extenso é que a soma algébrica dos momentos escalares de todas as forças em relação a **qualquer** eixo perpendicular ao plano das forças seja nula:

$$\sum M = 0$$

Essa condição de equilíbrio pode ser expressa de outra maneira. Considerando todos os momentos **em módulo**, podemos escrever que a soma de todos os momentos horários ($\sum M_H$) é igual à soma de todos os momentos anti-horários ($\sum M_{AH}$):

$$\sum M_H = \sum M_{AH}$$

Atualmente, a grua é muito usada na construção civil para erguer cargas até os diversos andares de um prédio em construção. Nesse equipamento, um contrapeso fixo (bloco de concreto) tem a função de produzir um momento que contrabalance o momento correspondente à carga que está sendo erguida, garantindo a estabilidade do sistema.



Grua usada em obra no Aeroporto Internacional de Denver, Colorado (EUA). Setembro de 2014.

7. ALAVANCAS

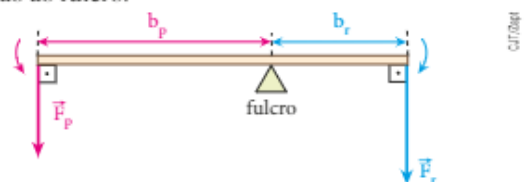
Alavancas são barras geralmente utilizadas para ampliar a intensidade de forças. Para que possam operar, elas necessitam de um ponto de apoio denominado **fulcro**.

Chamaremos de **força potente** (\vec{F}_p) a força exercida na alavanca por quem a usa e de **força resistente** (\vec{F}_r) a força que se pretende vencer com a alavanca.

Existem três tipos de alavanca: interfixa, inter-resistente e interpotente.

Alavanca interfixa

É um tipo de alavanca em que o fulcro (ponto de apoio) está entre os pontos de aplicação de \vec{F}_p e \vec{F}_r , como ilustra a figura a seguir, em que b_p é o braço da força potente e b_r é o braço da força resistente, ambos em relação ao fulcro.



Representação esquemática de uma alavanca interfixa.

Se desconsiderarmos a massa da alavanca, suposta em equilíbrio, poderemos afirmar que, em relação ao fulcro, o momento horário da força resistente é, em módulo, igual ao momento anti-horário da força potente.

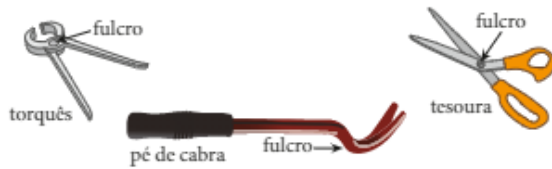
$$F_p b_p = F_r b_r \Rightarrow F_p = \frac{F_r b_r}{b_p}$$

Fazendo b_r **menor** que b_p , temos F_p **menor** que F_r . Essa é a vantagem do uso da alavanca interfixa.

Em um alicate, por exemplo, temos um par de alavancas interfexas operando em conjunto:

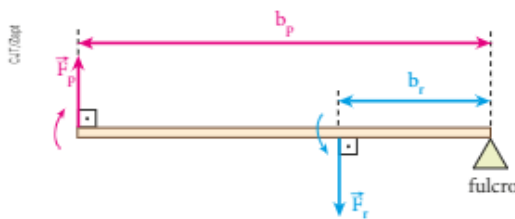


Veja outros exemplos de alavanca interfexa:



Alavanca inter-resistente

É um tipo de alavanca em que a força resistente está aplicada entre a força potente e o fulcro.



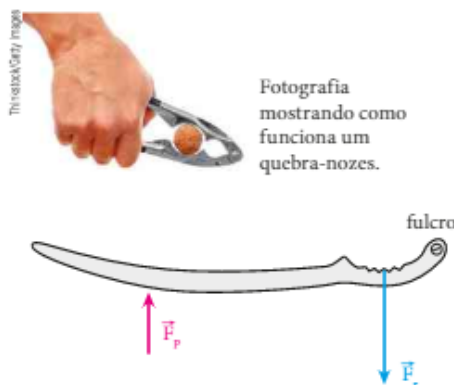
Representação esquemática de uma alavanca inter-resistente.

Ignorando a massa da alavanca e considerando-a em equilíbrio, temos:

$$F_p b_p = F_r b_r \Rightarrow F_p = \frac{F_r b_r}{b_p}$$

Como b_r é **menor** que b_p , continuamos obtendo F_p **menor** que F_r . Essa é a vantagem do uso desse tipo de alavanca.

Em um quebra-nozes, por exemplo, temos um par de alavancas inter-resistentes operando em conjunto.



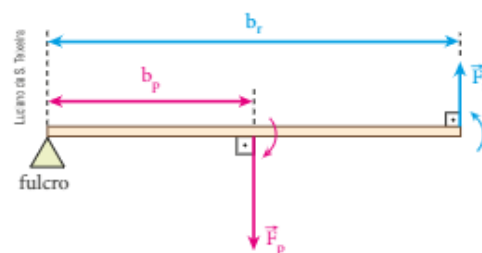
Fotografia mostrando como funciona um quebra-nozes.

O carrinho de mão também é um exemplo de alavanca inter-resistente. A força resistente corresponde ao peso total do carrinho e seu conteúdo, que pode ser considerado aplicado em um ponto chamado centro de gravidade do conjunto. A força potente é a força total exercida pela pessoa nos braços do carrinho. O fulcro está na região do solo em que a roda se apoia.



Alavanca interpotente

Nesse tipo de alavanca, a força potente está aplicada entre o fulcro e o ponto de aplicação da força resistente.



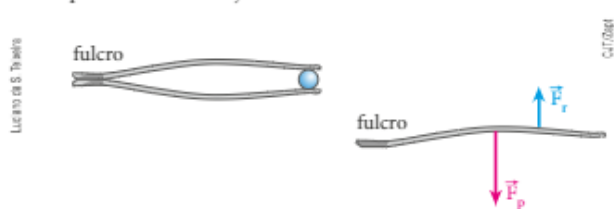
Representação esquemática de uma alavanca interpotente.

Ignorando a massa da alavanca e considerando-a em equilíbrio, temos, em relação ao fulcro:

$$F_p b_p = F_r b_r \Rightarrow F_p = \frac{F_r b_r}{b_p}$$

Note que, pela primeira vez, b_r é **maior** que b_p . Então, F_p é **maior** que F_r , de modo que esse tipo de alavanca não apresenta a vantagem dos outros tipos analisados. Entretanto, nem por isso ela deixa de ter sua utilidade. É o caso, por exemplo, de uma pinça, com a qual podemos lidar, sem causar danos, com objetos muito delicados, como uma pedrinha preciosa a ser colocada em um anel, as minúsculas peças do mecanismo de um relógio, entre outros. Nessas tarefas, o uso de um alicate poderia danificar esses objetos.

Em uma pinça, temos duas alavancas interpotentes operando em conjunto:

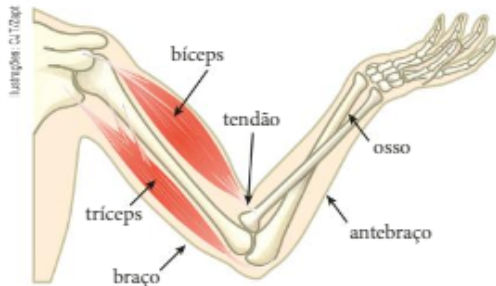


Algumas alavancas nos seres vivos

No corpo humano

No corpo humano, articulações são regiões em que dois ou mais ossos estão combinados para produzir movimentos. Esses ossos são alavancas fundamentais para que se possa abrir e fechar a boca e movimentar braços e pernas, por exemplo. Eles são movidos por músculos, com os quais se conectam por meio de tendões. Os músculos podem se contrair, mas para isso acontecer precisam receber impulsos nervosos (sinais elétricos) do sistema nervoso central e periférico, conduzidos por nervos.

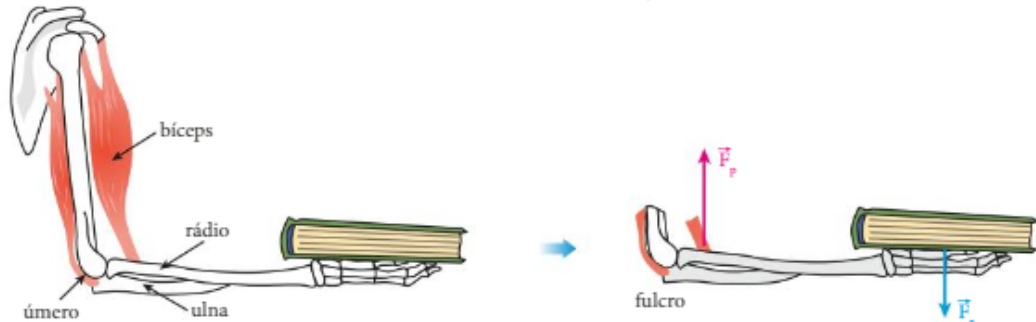
Veja um caso de alavanca no corpo humano.



O biceps é um músculo que, ao se contrair, puxa o antebraço para cima. Ao mesmo tempo, ocorre o estiramento de um outro músculo: o tríceps.

O tríceps, por sua vez, é um músculo que, ao se contrair, puxa o antebraço para baixo. Ao mesmo tempo, acontece o estiramento do biceps.

O antebraço é uma alavanca interpotente em que o fulcro está na articulação com o úmero (osso do cotovelo) e a força potente, na situação ilustrada a seguir, é exercida pelo biceps.



Ignorando o peso do antebraço (para simplificar), podemos dizer que a força resistente, no equilíbrio, tem a mesma intensidade do peso do livro. (Esquema em cores fantasia.)

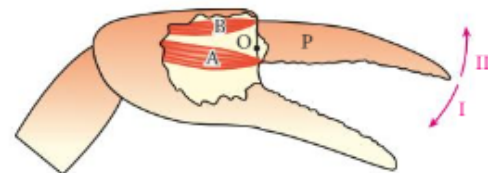
Uma forte alavanca em um caranguejo

Nas tenazes de um caranguejo, mais conhecidas por pinças, encontramos alavancas, também controladas por impulsos nervosos de seu sistema nervoso ganglionar ventral.



Caranguejo da espécie *Ocypode ceratophthalmus* em uma praia nas ilhas Seychelles.

Quando o músculo A se contrai, a parte P gira em torno do fulcro O, no sentido I, e o sistema se fecha. Quando o músculo B se contrai, a parte P gira no sentido II e o sistema se abre:



Representação esquemática simplificada de uma pinça.

8. CENTRO DE GRAVIDADE

Após a definição do momento (torque) de uma força, percebe-se que cada força exercida em um corpo extenso precisa ser representada em um “lugar” certo desse corpo. Se isso não for levado em conta, os braços das forças serão adulterados e, conseqüentemente, seus torques não estarão corretos.

Essa preocupação não existia quando o modelo de ponto material era aplicável ao corpo.

Sabe-se que qualquer corpo sob a influência de um campo gravitacional – o da Terra, por exemplo – se submete a uma força de atração, que é a força peso. E, nesse caso, em que “lugar” essa força deve ser representada?

O peso desse corpo extenso precisa ser representado em um “lugar” certo: um ponto denominado **centro de gravidade** do corpo.

Considere, por exemplo, um cabo de vassoura em sua casa. Imaginando esse cabo dividido em pedaços, haverá uma força de atração gravitacional em cada um deles:



Mas podemos representar a força de atração total (o peso do cabo) em seu centro de gravidade (CG). Para localizar esse ponto, basta segurar, com uma das mãos, o cabo de vassoura na horizontal e deslocar sob ele um dos dedos da outra mão até perceber que o cabo não tomba quando livre da primeira mão:



Na primeira situação, observa-se a moça procurando o centro de gravidade de um cabo de vassoura; em um segundo momento, o cabo já em equilíbrio apoiado na região do centro de gravidade.

No ponto encontrado podemos, de fato, considerar aplicado o peso do cabo, pois, se ele não tomba, seu peso deve ter braço nulo em relação à região em que se apoia.



Denomina-se **centro de gravidade (CG)**, de um corpo ou de um sistema de pontos materiais discretos, um determinado ponto onde podemos considerar aplicado o peso total do corpo ou do sistema.

Centro de gravidade e centro de massa

Representemos por \vec{Q}_{total} e m_{total} , respectivamente, a quantidade de movimento e a massa de um corpo ou de um sistema de corpos.

Podemos conceituar o **centro de massa (CM)** do corpo ou do sistema de corpos afirmando que se trata de um ponto com uma velocidade instantânea \vec{v}_{CM} tal que o produto de m_{total} por \vec{v}_{CM} é igual à quantidade de movimento do corpo ou sistema.

É fundamental perceber que esse conceito nada tem a ver com o fato de o corpo ou sistema estar ou não submetido a um campo gravitacional.

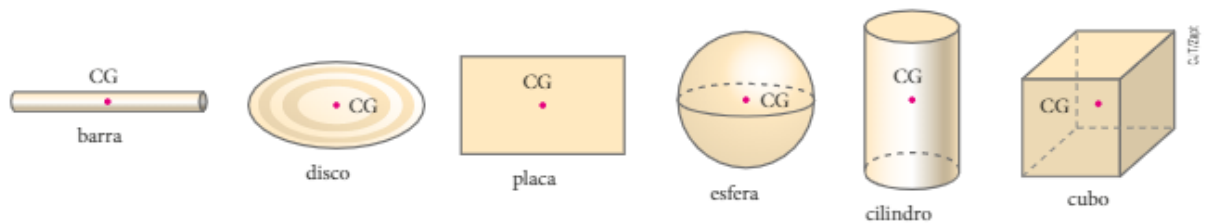
Por outro lado, o conceito de **centro de gravidade (CG)** vincula-se à submissão do corpo ou sistema a um campo gravitacional. Se ele não estiver submetido a um campo gravitacional, o centro de gravidade simplesmente não existe, mas existe o centro de massa.

Apesar dessa profunda diferença conceitual entre os dois pontos citados, eles coincidem quando o corpo ou sistema submete-se a um campo gravitacional **uniforme**, situação em que se engastam todos os casos em que precisamos da posição do centro de gravidade.

Centro de gravidade de alguns corpos homogêneos (em campo gravitacional uniforme)

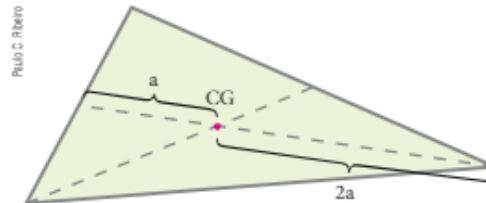
O centro de gravidade de uma barra cilíndrica ou prismática, de um disco ou de uma placa retangular de espessura uniforme, de uma esfera, de um cilindro ou de um cubo encontra-se no centro geométrico desses corpos, desde que sejam homogêneos.

Observe as figuras a seguir.



Veja que esses corpos admitem planos de simetria e que o CG pertence a esses planos.

O centro de gravidade de uma placa triangular homogênea de espessura uniforme está no ponto de encontro de suas medianas (baricentro). O baricentro divide as medianas na razão 2 : 1.



FAÇA VOCÊ MESMO

Estudando o centro de gravidade de um sistema

O principal objetivo desta atividade é determinar experimentalmente a posição do centro de gravidade de uma distribuição discreta (não contínua) de massas e, com base na teoria, chegar a uma expressão que possibilite determinar essa posição por meio de cálculos. Além disso, deverá ser percebida uma condição de estabilidade de uma estrutura suspensa estaticamente.

Material utilizado

- 1 canudo comum de refrigerante;
- 8 cliques metálicos grandes (tamanho 8/0);
- 1 régua escolar;
- 1 caneta de ponta fina que escreva em plásticos, denominada marcador permanente;
- cerca de 30 centímetros de linha de costura;
- 2 agulhas de costura: uma grossa e uma fina.

ATENÇÃO!

Este experimento envolve objetos pontiagudos. Cuide para não se ferir.

Procedimento

- I. Adote um eixo de abscissas $0x$ na direção do eixo do canudo e com a origem O em uma de suas extremidades. Com a caneta e a régua, faça marcas no canudo, em forma de anéis finos, a 6 cm e a 18 cm de O . Assim, passamos a ter no eixo $0x$ duas posições determinadas pelas abscissas $x_1 = 6$ cm e $x_2 = 18$ cm.



- II. Monte duas fileiras de cliques, uma com três cliques e a outra com cinco. Prenda a fileira com três cliques na posição de abscissa x_1 , e a outra, na posição de abscissa x_2 .

III. Na região do canudo localizada entre as duas fileiras de cliques, amarre a linha para depois suspendê-lo. Suspenda o sistema e localize seu centro de gravidade **CG**. Com a régua, meça x_{CG} — a abscissa do **centro de gravidade do sistema** —, que é a distância de **O** até a vertical que passa por **CG**. Anote o valor obtido.

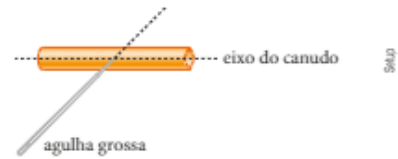
IV. Permute as posições das fileiras de cliques e meça x_{CG} novamente. Anote o resultado.

V. Finalmente, com apenas o canudo suspenso na linha, determine seu centro de gravidade **CG**.

Com a agulha grossa posicionada perpendicularmente ao canudo e intersectando seu eixo, faça-a atravessá-lo de um lado ao outro, ficando com dois furos:

Repita essa operação em uma posição **P** a cerca de 6 cm de uma das extremidades.

A agulha grossa só serviu para fazer os furos largos o suficiente para a agulha fina passar por eles com folga.



VI. Introduza a agulha fina nos furos feitos em **P** e, segurando-a na horizontal, solte o canudo e aguarde até ele parar de balançar, ficando em uma situação de equilíbrio E_1 . Erga lentamente o **CG** do canudo, girando-o em torno da agulha e procure uma outra situação de equilíbrio E_2 .

Você deve ter percebido que existe uma situação de equilíbrio “preferida”, “buscada” pelo canudo e outra em que é difícil mantê-lo. A “buscada” é a situação de estabilidade, e a outra é a de instabilidade.

Observe em cada uma delas onde está o **CG** em relação à agulha e anote.

Retire a agulha de **P** e introduza-a nos furos feitos em **CG**. Rode o canudo em torno da agulha e procure observar se há uma forte “preferência” do canudo por ficar em alguma posição. Anote o que você observou.

Analisando o experimento

1. Você dispõe dos valores de x_{CG} medidos nos procedimentos III e IV.

Agora, represente por m a massa de cada clipe, por m_1 a massa da fileira suspensa em x_1 (qualquer que seja), por m_2 a massa daquela suspensa em x_2 e calcule x_{CG} naqueles procedimentos por meio da seguinte média ponderada, uma expressão que determina a posição do centro de massa do sistema (um ponto conceitualmente diferente do centro de gravidade, mas que, nas situações que vamos analisar, podem ser considerados coincidentes):

$$x_{CG} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

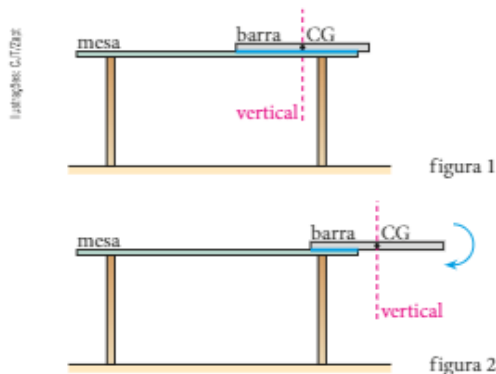
Compare os valores calculados com os valores medidos.

- Em sua opinião, por que foram recomendados cliques grandes e, além disso, que fossem montadas fileiras de cliques?
- A partir de seus conhecimentos teóricos, demonstre a expressão proposta para x_{CG} (média ponderada). Se necessário, peça a orientação ao professor.
- Considere a Terra e a Lua duas esferas homogêneas com centros separados por uma distância igual a $60R$, em que R é o raio da Terra. Sabendo-se que a massa da Terra é aproximadamente igual a 81 vezes a massa da Lua, determine, em função de R , a distância entre o centro da Terra e o centro de massa, **CM**, do sistema Terra-Lua.
- No procedimento V, qual é a condição para o canudo, simplesmente suspenso na agulha e livre para girar em torno dela, ficar equilibrado em situação de estabilidade, instabilidade e indiferença?

9. EQUILÍBRIO DE CORPOS APOIADOS

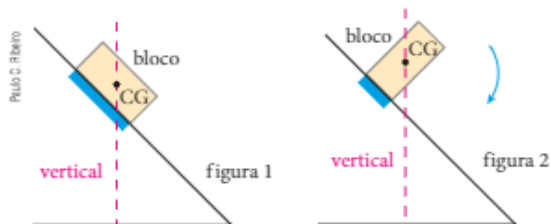
Vamos ver alguns exemplos em que um corpo apoiado poderá estar ou não em equilíbrio.

Exemplo 1: As figuras 1 e 2 a seguir representam uma barra prismática e homogênea, simplesmente apoiada em uma mesa.



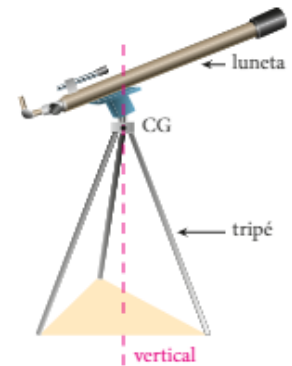
Em 1, a linha de ação do peso da barra (reta vertical, passando pelo seu centro de gravidade) intersecta a região de apoio, destacada em azul. Nesse caso, a barra **não tomba**. Já em 2, a linha de ação do peso da barra não intersecta a região de apoio e ela **tomba** ao ser solta.

Exemplo 2: Nas situações das figuras 1 e 2 a seguir, supondo que o atrito impeça o escorregamento do bloco, ele **não tomba** em 1, mas **tomba** em 2. Observe que, em 1, a linha de ação do peso do bloco intersecta a região de apoio em azul no plano inclinado, o que não acontece em 2:



Em 1, a vertical que passa pelo centro de gravidade do bloco intersecta a região de apoio: **o bloco não tomba**. Em 2, a vertical que passa pelo centro de gravidade do bloco não intersecta a região de apoio: **o bloco tomba**.

Exemplo 3: Em uma situação como a figura ao lado, devemos considerar a menor superfície convexa definida pelos pontos de apoio, que, no caso, é uma região triangular. Para o sistema não tombar, a vertical que passa pelo centro de gravidade deve intersectar essa região.



A gravura *Vendedor de cestos*, do pintor francês Jean-Baptiste Debret (1768-1848), ilustra uma maneira de transportar mercadorias no século XIX, muito usada ainda hoje em algumas regiões do Nordeste. O centro de gravidade do sistema suspenso deve estar em uma vertical que intersecte a região de apoio na cabeça da pessoa.

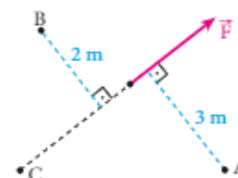


Vendedor de cestos. Aquarela sobre papel; 16 cm × 22 cm. Jean-Baptiste Debret. Rio de Janeiro, 1826. Museu Castro Maia, Rio de Janeiro (RJ).

QUESTÕES COMENTADAS

7 A força \vec{F} de módulo 20 N, e os pontos A, B e C estão todos no plano do papel. Os pontos representam as interseções entre o plano do papel e três eixos perpendiculares a ele.

Convencionando positivos os momentos horários, calcule o momento escalar de \vec{F} em relação a A, B e C.



RESOLUÇÃO

Em relação a **A**, a força \vec{F} dá tendência de rotação no sentido horário. Sendo $F = 20 \text{ N}$ e $b = 3 \text{ m}$, temos:

$$M = +Fb = 20 \cdot 3 \Rightarrow M = 60 \text{ N m}$$

Em relação a **B**, a força \vec{F} dá tendência de rotação no sentido anti-horário. Sendo $F = 20 \text{ N}$ e $b = 2 \text{ m}$, temos:

$$M = -Fb = -20 \cdot 2 \Rightarrow M = 40 \text{ N m}$$

Em relação a **C**, a força \vec{F} não dá tendência de rotação, pois o ponto **C** pertence à sua linha de ação e, assim, o braço b é igual a zero. Assim, temos:

$$M = Fb = 20 \cdot 0 \Rightarrow M = 0 \text{ N m}$$

Observe que uma mesma força pode produzir diferentes momentos (torques), já que eles dependem não apenas da força, mas também da distância do ponto considerado até sua linha de ação (braço).

Resposta: 60 Nm, -40 Nm e 0 Nm.

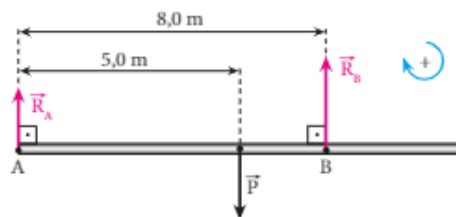
8 Uma barra cilíndrica homogênea, de peso 200 N e 10,0 m de comprimento, encontra-se em equilíbrio, apoiada nos suportes **A** e **B**, como representa a figura.



- Calcule as intensidades R_A e R_B das reações dos apoios **A** e **B** sobre a barra.
- Usando-se uma corda leve, um bloco metálico de peso 400 N é dependurado na barra em um ponto **C** à direita de **B**. Determine a máxima distância x de **B** a **C** de modo que a barra não tombe.

RESOLUÇÃO

a) Representando as forças que atuam na barra, temos:



Em relação a **A**: $M_{R_A} + M_P + M_{R_B} = 0$

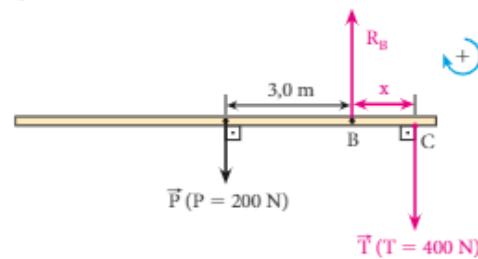
$$R_A \cdot 0 + 200 \cdot 5,0 - R_B \cdot 8,0 = 0 \Rightarrow R_B = 125 \text{ N}$$

Como $R_A + R_B = P$, temos:

$$R_A + 125 = 200 \Rightarrow R_A = 75 \text{ N}$$

- A máxima distância pedida corresponde à situação em que a barra está na iminência de tombar. Nessa situação, ela se apoia exclusivamente no suporte **B** e, portanto, a reação do suporte **A**, \vec{R}_A , é nula.

Representando as forças na barra, temos:



Em relação a **B**: $M_{R_B} + M_P + M_T = 0$

$$R_B \cdot 0 - 200 \cdot 3,0 + 400 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 1,5 \text{ m}$$

Se fosse obtido um valor de x maior que 2,0 m ou igual a este valor, o que você concluiria?

Respostas: a) 75 N e 125 N; b) 1,5 m.

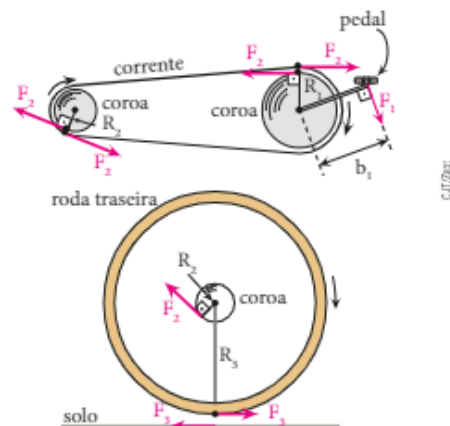
9 Uma bicicleta equipada com um câmbio de várias marchas possui algumas rodas dentadas (coroas) ligadas ao pedal e outras ligadas ao eixo da roda traseira (roda motriz). Essas coroas têm raios (R_i) diferentes. Para cada par de coroas acopladas pela corrente, temos uma marcha. Com relação à diversidade dos raios das coroas, qual é a melhor escolha (melhor marcha):

- numa subida muito acentuada, situação em que o fundamental é conseguir subir, e não desenvolver altas velocidades?
- quando se pretende desenvolver altas velocidades, numa pista horizontal?

RESOLUÇÃO

Em todo o desenvolvimento desta resolução, expressaremos os torques em relação ao centro das coroas. Além disso, as coroas serão consideradas em equilíbrio de rotação, isto é, em movimento de rotação com velocidade angular constante. Assim, em módulo, os torques horário e anti-horário serão sempre iguais.

Nas figuras a seguir, estão representadas as forças relevantes à análise que vamos fazer. É bom lembrar que, com as coroas em equilíbrio de rotação, a intensidade (F_2) da tração em todos os pontos da corrente é a mesma.



No sistema constituído pelo pedal e pela coroa nele ligada, temos:

$$F_1 b_1 = F_2 R_1 \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 b_1}{R_1}$$

No sistema constituído pela roda traseira e pela coroa correspondente, temos:

$$F_3 R_3 = F_2 R_2 \Rightarrow F_3 R_3 = \frac{F_1 b_1}{R_1} \cdot R_2$$

constante

$$\text{Logo: } F_3 = F_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{b_1}{R_3}$$

a) A última expressão obtida permite concluir que, para um determinado valor de F_1 , quanto **maior** for R_2 e **menor** for R_1 , **maior** será F_3 , ou seja, mais intensa será a força motriz que a bicicleta receberá do solo. Então, essa é a melhor combinação:

Menor coroa ligada ao pedal e maior coroa da roda traseira.

Como vimos no Capítulo 3, as frequências de rotação das coroas combinadas são inversamente proporcionais aos seus raios:

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow 2\pi f_1 R_1 = 2\pi f_2 R_2 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow f_2 = f_1 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Note, então, que R_1 menor e R_2 maior minimizam f_2 , que é a frequência da roda traseira (roda motriz). Por isso, altas velocidades não são conseguidas nessa situação.

b) Nesse caso, devemos maximizar f_2 . Para isso, interessam o **maior** valor de R_1 e o **menor** valor de R_2 . Então, a melhor combinação é:

Maior coroa ligada ao pedal e menor coroa da roda traseira.

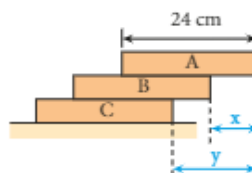
Note que R_1 maior e R_2 menor contribuem para a redução de F_3 . Isso, entretanto, não é importante, porque não

são necessárias forças de grande intensidade para acelerar suficientemente a bicicleta em uma pista horizontal.

Respostas:

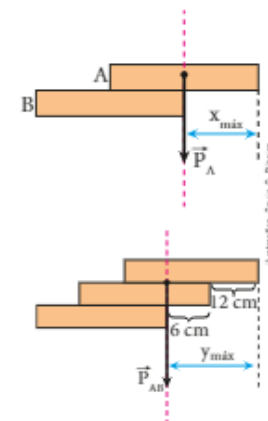
- a) Menor coroa ligada ao pedal e maior coroa da roda traseira.
- b) Maior coroa ligada ao pedal e menor coroa da roda traseira.

10 Na figura ao lado, temos três tijolos idênticos de 24 cm de comprimento empilhados. Determine os máximos valores de x e de y para que a pilha ainda se mantenha em equilíbrio, como mostra a figura.



RESOLUÇÃO

Para que a pilha se mantenha em equilíbrio, devemos impor que o tijolo A esteja em equilíbrio sobre B e que o conjunto AB esteja em equilíbrio sobre C.



Para o tijolo A estar em equilíbrio sobre B, é preciso que a linha de ação do peso de A intersecte a região de apoio de A sobre B. Assim, o máximo valor de x é 12 cm:

$$x_{\max} = 12 \text{ cm}$$

Para o conjunto AB estar em equilíbrio sobre C, é preciso que a linha de ação do peso de AB intersecte a região de apoio de AB sobre C.

Assim, temos: $y_{\max} = 18 \text{ cm}$

Resposta: 12 cm e 18 cm.

QUESTÕES PROPOSTAS FAÇA NO CADERNO.

11. Considere as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 e os pontos A, B, C, D e O, todos no plano desta página.



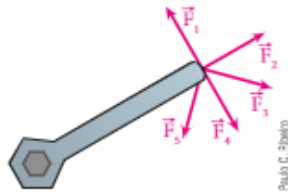
Julgue corretas ou incorretas as afirmações a seguir. Em cada uma delas, imagine a existência de um eixo de rotação perpendicular ao plano da figura passando pelo ponto citado.

01. Os braços de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , em relação a O, medem OA, OB e OC, respectivamente.

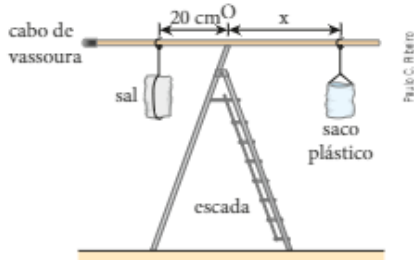
- 02.** Os braços de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , em relação a O, medem $OA \cdot \sin \theta$, zero e OC, respectivamente.
- 04.** Os braços de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , em relação a A, medem zero, AO e AC, respectivamente.
- 08.** Em relação a O, o momento de \vec{F}_1 é horário, o de \vec{F}_2 é nulo e o de \vec{F}_3 é anti-horário.
- 16.** Em relação a C, o momento de \vec{F}_1 é horário, o de \vec{F}_2 é anti-horário e o de \vec{F}_3 é nulo.
- 32.** Em relação a D, os momentos de \vec{F}_1 e de \vec{F}_2 são horários e o de \vec{F}_3 é anti-horário.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

12. Qual das forças aplicadas na extremidade da chave, todas de mesma intensidade, é mais eficiente para girar o parafuso no sentido horário?

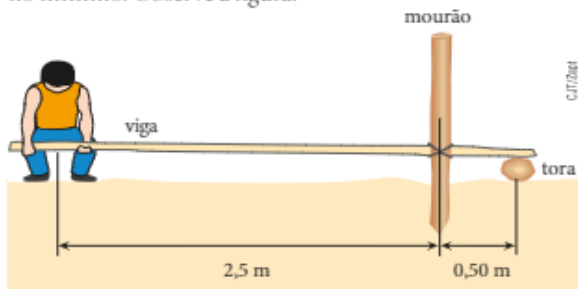


13. Uma pessoa precisava separar 400 g de açúcar para fazer um doce, mas não tinha uma balança. Pegou, então, um cabo de vassoura e o apoiou em uma escada, de modo a ficar em equilíbrio na horizontal (o ponto O é o centro de gravidade do cabo).



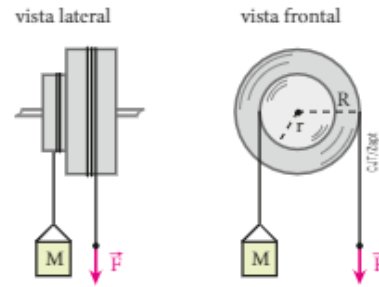
Usando um barbante, suspendeu no cabo um saco fechado de sal de cozinha, de 1 kg (1 000 g), a 20 cm do ponto de apoio (A). Usando outro barbante, suspendeu um saco plástico vazio e foi despejando açúcar nele até o cabo ficar novamente em equilíbrio na horizontal. Calcule a distância x que determina a posição em que o saco plástico deve ser colocado para que se consiga a quantidade de açúcar desejada.

14. Suponha que, para arrancar um mourão fincado no chão, um homem, puxando-o diretamente com as mãos, tivesse de exercer nele uma força de intensidade 1 800 N, no mínimo. Observe a figura:



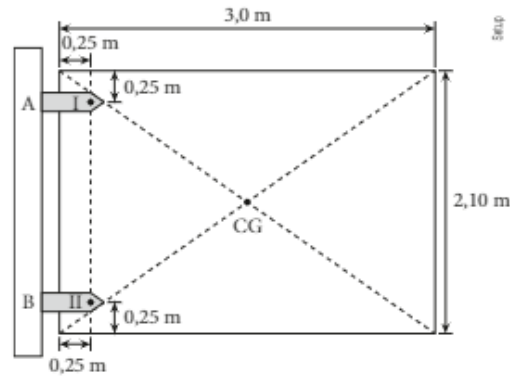
Usando uma viga amarrada no mourão e apoiada em uma tora, como indica a figura, determine a mínima intensidade da força que o homem precisa exercer na viga para arrancar o mourão. Para simplificar, desconsidere o peso da viga e suponha que a força total exercida nela pelo homem esteja aplicada no ponto médio entre suas mãos.

15. A figura a seguir representa duas roldanas de raios $r = 10\text{ cm}$ e $R = 40\text{ cm}$ presas em um mesmo eixo que pode rotar praticamente sem atrito.



Cordas leves estão enroladas nessas roldanas. Em uma delas, está suspenso um bloco de massa M igual a 50 kg e o sistema é mantido em equilíbrio pela força vertical \vec{F} aplicada na outra corda. Considerando $g = 10\text{ m/s}^2$, calcule a intensidade de \vec{F} .

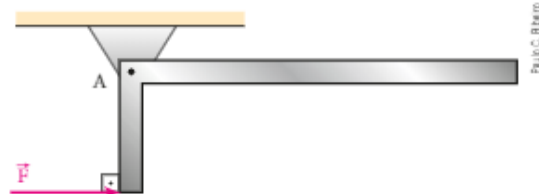
16. A figura a seguir representa esquematicamente uma porteira homogênea e de espessura uniforme, com 60 kg de massa, 3,0 m de comprimento e 2,10 m de altura. A e B são duas dobradiças que sustentam a porteira em repouso e estão fixadas nela por dois parafusos, I e II.



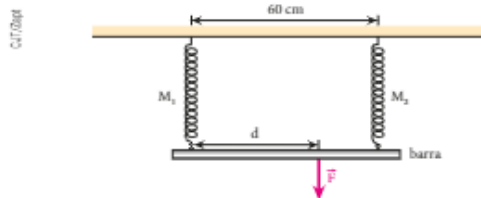
Determine, considerando g igual a 10 m/s^2 :

- as intensidades das componentes horizontais das forças $\vec{F}_{hor\ I}$ e $\vec{F}_{hor\ II}$ que a porteira recebe dos parafusos I e II;
- a intensidade da resultante das componentes verticais das forças $\vec{F}_{vert\ I}$ e $\vec{F}_{vert\ II}$ que a porteira recebe dos parafusos I e II.

17. Na figura, temos uma barra homogênea de espessura e largura pequenas e uniformes, em forma de L, articulada sem atrito em A. A parte vertical da barra tem 1,0 m de comprimento, enquanto a parte horizontal mede 3,0 m. Sendo de 120 N o peso total da barra, calcule a intensidade da força horizontal \vec{F} que mantém a barra em equilíbrio.



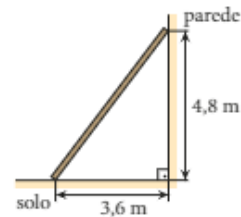
18. Uma barra leve encontra-se em equilíbrio dependurada em duas molas M_1 e M_2 , de constantes elásticas iguais a 200 N/m e 600 N/m, respectivamente. Uma força \vec{F} , vertical para baixo, é aplicada na barra, atingindo-se uma nova situação de equilíbrio na qual a barra permanece na horizontal.



Calcule:

- a distância d indicada na figura;
- o deslocamento da barra da primeira para a segunda situação de equilíbrio supondo a intensidade de \vec{F} igual a 120 N.

19. Uma viga prismática e homogênea, de 6,0 m de comprimento e 360 N de peso, é posicionada apoiando-se em uma parede e no solo, como representa a figura.

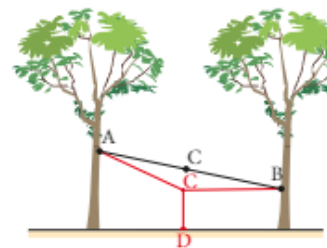


- Supondo que exista atrito entre a viga e a parede, mas não entre a viga e o solo, responda: é possível que ela fique em equilíbrio, como na figura?
- Supondo que não exista atrito entre a viga e a parede, calcule, no equilíbrio, as intensidades das componentes da força de contato que a viga recebe do solo (força normal \vec{F}_n e força de atrito \vec{F}_a).



DESCUBRA MAIS

- As teias das aranhas são estruturas estáticas construídas de um modo muito curioso. Existem vários tipos de teia. Vamos abordar aqui a teia produzida por uma espécie de aranha do gênero *Argiope* sp. Quando uma dessas aranhas constrói uma teia — como no alto entre duas árvores, a dois metros uma da outra —, ela começa produzindo um fio AB, cujas extremidades são fixadas, cada uma delas, em uma das árvores, ficando esticado (veja a representação esquemática na figura ao lado, em que o fio AB está desenhado em traço preto). Depois, ela produz um outro fio, CD, que vai de um ponto AB até um ponto qualquer, que pode estar no chão. Esse outro fio também fica esticado. Os segmentos AC, CB e CD costumam ser chamados de estirantes e estão destacados em vermelho na figura. Em seguida, ela constrói a teia propriamente dita. Procure saber como a aranha consegue fazer tudo isso, lembrando que ela não voa e que por meio de saltos a operação não seria possível. Pesquise também como ela constrói toda a teia.
- Investigue outras alavancas nas articulações do ser humano, procurando saber os nomes dos ossos e dos músculos que as constituem e de que tipo são.
- Explique o comportamento do João-teimoso, aquele boneco que sempre se levanta quando é tombado e, em seguida, solto. Para simplificar, suponha que a base desse boneco seja hemisférica, de raio R e centro O .
- Você já deve ter notado, nos parques de diversão, que as gangorras desocupadas estão sempre com uma das extremidades apoiada no solo. Elas nunca se encontram em equilíbrio na horizontal. Por que isso acontece? Quando a gangorra desocupada gira em torno de seu eixo de suspensão, ela encontra um outro apoio — solo — e, por isso, o equilíbrio lhe é imposto. Se, ao contrário, não houvesse qualquer restrição à sua rotação, como ficaria a gangorra ao atingir sua posição de equilíbrio estável?
- A respeito da Torre de Pisa, procure saber: Para que foi construída? Quando se iniciou sua construção? Qual é o motivo de ela ter se inclinado? Atualmente, a inclinação continua aumentando? Em que situação o equilíbrio da torre estaria em estado crítico?





ESTÁTICA DOS FLUIDOS

1. INTRODUÇÃO

A **Estática dos Fluidos** ou **Hidrostática** é a parte da Mecânica que estuda os fluidos em equilíbrio.

Classificamos como **fluidos**, indistintamente, os líquidos e os gases. Em uma primeira abordagem, os líquidos não têm forma própria, embora possuam volume definido. Já os gases, por sua vez, não têm forma nem volume próprios.

Um litro de água, por exemplo, não sofre mudança de volume quando o transferimos de uma panela para uma garrafa. Nesse caso, apenas sua forma é alterada. Já uma determinada massa de gás sempre tende a ocupar todo o volume que lhe é oferecido, propriedade conhecida por expansibilidade. Devemos dizer, ainda, que a forma de certa porção de gás é a do recipiente que a contém.

Por apresentar maior utilidade prática, daremos mais ênfase ao equilíbrio dos líquidos. Nesse estado, as substâncias têm, de modo geral, uma configuração estrutural em que as moléculas se mostram notadamente reunidas. Por causa dessa característica microscópica, os líquidos oferecem grande resistência à compressão. Em nosso estudo, a pequena compressibilidade dos líquidos será negligenciada e os consideraremos incompressíveis.

A **Estática dos Fluidos** está fundamentada em três teoremas (também chamados de leis). São eles:

- Teorema de Stevin;
- Teorema de Pascal;
- Teorema de Arquimedes.



Por que certos líquidos não se misturam?

Em alguns casos, por falta de afinidade molecular, dois ou mais líquidos podem não se misturar. Eles são chamados **líquidos imiscíveis**. Ainda que agitemos dois desses líquidos dentro de um mesmo recipiente, depois de certo intervalo de tempo ocorrerá uma separação entre eles, ficando o menos denso em cima e o mais denso embaixo.

Nesta fotografia, podemos observar água e óleo – líquidos imiscíveis – sendo vertidos simultaneamente dentro de um mesmo béquer. Passadas as turbulências iniciais, o óleo, que é o menos denso, vai subir, e a água, que é a mais densa, vai descer, criando-se uma nítida superfície de separação entre os dois fluidos. Situações como a da água e do óleo são estudadas em **Hidrostática**.



Água e óleo em um mesmo béquer: esses líquidos se misturam?

2. MASSA ESPECÍFICA OU DENSIDADE ABSOLUTA (μ)

Fixadas a temperatura e a pressão, uma substância pura tem a propriedade fundamental de apresentar massa diretamente proporcional ao respectivo volume.

Sejam m_1, m_2, \dots, m_n as massas de porções de uma substância pura em uma mesma temperatura e submetida à mesma pressão. Sendo V_1, V_2, \dots, V_n os respectivos volumes, podemos verificar que:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \dots = \frac{m_n}{V_n} = \mu(\text{constante})$$

Por definição, a constante μ é a **massa específica** ou **densidade absoluta** da substância.

Do exposto, concluímos que:

Em pressão e temperatura constantes, uma substância pura tem **massa específica** (μ) constante e calculada pela divisão da massa considerada (m) pelo volume correspondente (V):

$$\mu = \frac{m}{V}$$

As unidades de massa específica são obtidas pela divisão da unidade de massa pela unidade de volume.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a massa é medida em kg e o volume, em m^3 .

Assim: $\text{unid}(\mu) = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Outras unidades usuais: $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{L}}$

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{L}}$$

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Na tabela a seguir fornecemos os valores usuais das massas específicas de algumas substâncias.

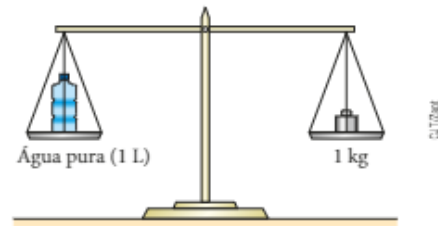
Massa específica (μ)	
Material	μ (g/cm^3)
Ar (20 °C e 1 atm)	0,001
Isopor	0,10
Gelo	0,92
Água	1,00
Glicerina	1,26
Alumínio	2,70
Ferro	7,87
Cobre	8,96
Prata	10,49
Chumbo	11,35
Mercúrio	13,55
Ouro	19,32
Platina	21,45

Fonte: HALLIDAY, D. et al. *Fundamentos da Física: gravitação, ondas, termodinâmica*. Vol. 2. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

A água, à qual está subordinada a vida na Terra, é o líquido mais abundante do planeta, cobrindo praticamente $\frac{2}{3}$ da superfície terrestre. Por isso, o estudo da **Estática dos Fluidos** dá ênfase especial a essa substância.

É importante observar que, como a densidade absoluta da água é igual a 1 kg/L, existe paridade entre o número que mede a massa dessa substância em qui-

logramas e o número que mede seu volume em litros. Um quilograma de água, por exemplo, ocupa um volume de um litro.



Em uma balança de travessão de braços iguais, um litro de água contido em uma garrafa plástica de massa desprezível é equilibrado por um cilindro (massor) de um quilograma.

3. DENSIDADE DE UM CORPO (d)

Será que um corpo de ferro ($\mu_{\text{Fe}} = 7,8 \text{ g}/\text{cm}^3$) pode ser menos denso que a água ($\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0 \text{ g}/\text{cm}^3$)? A resposta é sim. Para isso, esse corpo deverá ser provido de descontinuidades internas (regiões ocas), de modo que sua massa total seja medida por um número, em gramas, menor que aquele que mede, em cm^3 , o volume delimitado por sua superfície externa.

Por definição, a **densidade** de um corpo (d) é o quociente de sua massa (m) pelo volume delimitado por sua superfície externa V_{ext} :

$$d = \frac{m}{V_{\text{ext}}}$$

Os navios modernos são metálicos, basicamente construídos em aço. Por ser um material de elevada densidade, o aço afunda rapidamente na água quando considerado em porções maciças. No entanto, os navios flutuam na água porque, sendo dotados de descontinuidades internas (partes ocas), apresentam densidade menor que a desse líquido.



Navio no Porto de Khasab, Omã. Novembro de 2013.

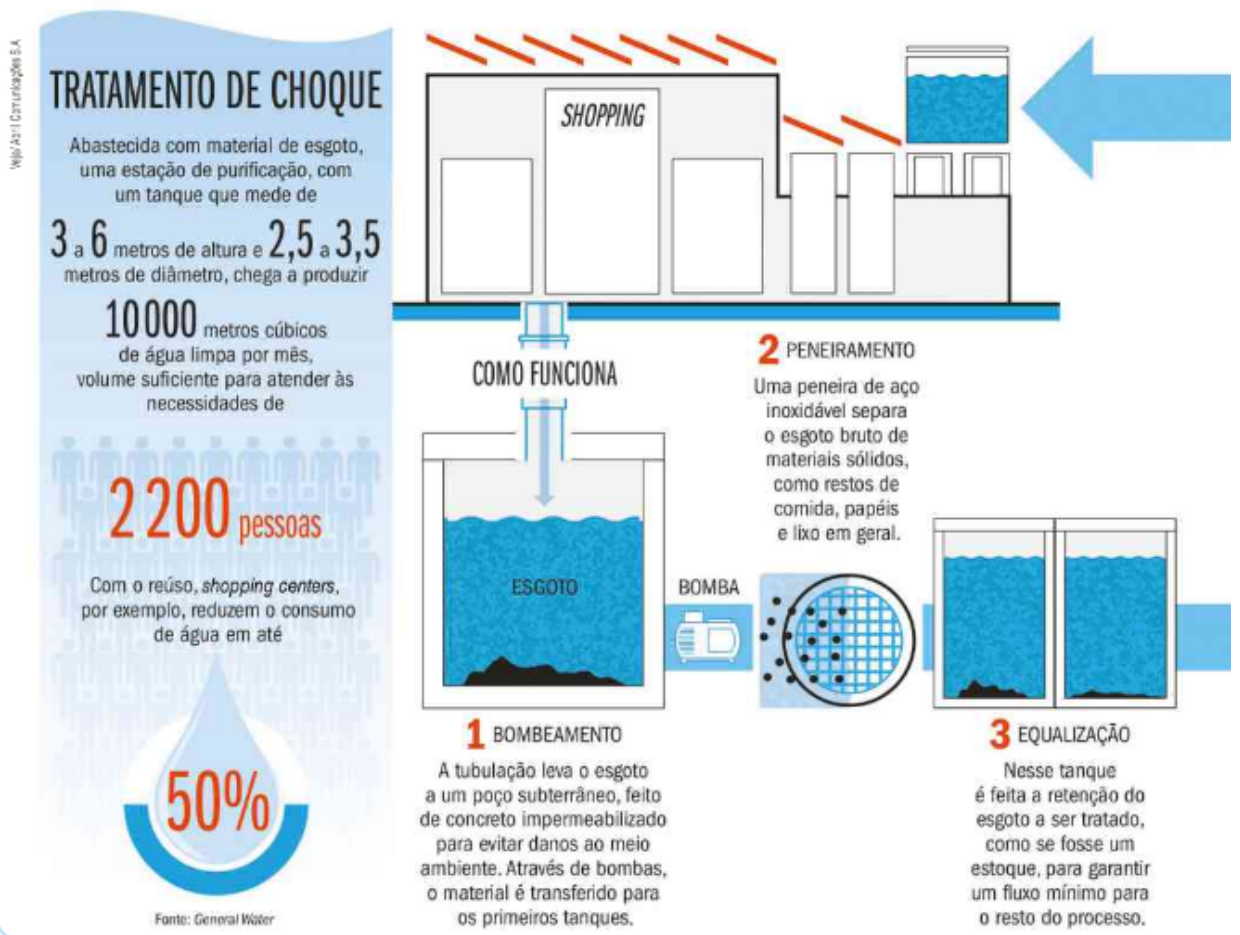
O ciclo das águas

A não ser em regiões pontuais, como nos estados nordestinos, o Brasil sempre viveu uma cultura de abundância de água, que associa as crises de escassez a locais distantes, muito além de nossas fronteiras.

Governantes em geral, nas últimas décadas, não deram a devida importância à questão do abastecimento hídrico, negligenciando a proposição de novos meios de captação e a construção de usinas alternativas de tratamento e distribuição.

Pois é, depois de sucessivas ocorrências dos fenômenos climáticos conhecidos como **El Niño** e **La Niña**, com um céu de esplendoroso azul e chuvas rarefeitas, uma das maiores crises hídricas de todos os tempos aconteceu; ficamos na dependência de reservatórios cada vez mais vazios... Regiões que desconheciam esse problema, como grande parte do Sudeste brasileiro, têm vivido dias de restrições com racionamento e medidas punitivas contra o desperdício de água.

Em países como o Japão, Austrália, Cingapura e Estados Unidos, especialmente em cidades do estado da Califórnia, como Santa Bárbara, com poucos mananciais e chuvas irregulares ou escassas, cada gota de água vale ouro. Por isso, a captação e correta armazenagem de águas pluviais é obrigatória, havendo na maioria das edificações mini-instalações de adequado acondicionamento e tratamento desse insumo essencial. Ocorrem também usinas de dessalinização da água do mar por meio de processos cada vez mais simples e baratos.



O infográfico desta seção representa o sistema de reúso de água em um *shopping center*, o que pode acarretar uma economia de até 50% no consumo do líquido proveniente de redes públicas de distribuição.

Nesses locais, a água empregada em irrigação, descargas sanitárias, lavagem de veículos etc. é toda de reúso, proveniente de usinas de portes variados que reabilitam as condições de utilização do líquido por meio das mais diversas tecnologias de purificação.

O que é fundamental registrar, em relação a essas localidades, é que se criou na população uma consciência voltada para o uso racional da água – utilização sustentável –, sem os frequentes exemplos de desperdício que ainda verificamos por aqui.

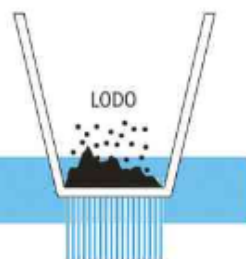
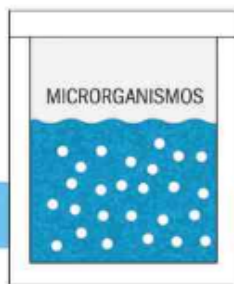
E essa consciência também deverá nos permear a todos – brasileiros –, já que a demanda por água em nosso país tem crescido muito além da oferta e o regime de chuvas não é algo infalível ou imune a fatores perturbadores, como correntes oceânicas de alta ou baixa temperatura, desmatamento e queimadas, entre outros.



Nesse Brasil de contrastes, encontramos também casos de edifícios sustentáveis, contemplados com prêmios internacionais, por serem projetados de modo a demandar menos energia e manutenção, reduzir o uso de recursos ambientais não renováveis, melhorar a qualidade interna do ar e promover ganhos de qualidade de vida e saúde aos usuários. É o caso do Corporate Towers Rochaverá, em São Paulo, que aparece nesta fotografia.

4 REAÇÃO BIOLÓGICA

Em um tanque de fibra de vidro ou concreto, os microrganismos vivos recebem as condições para se alimentar de restos orgânicos.



5 FILTRAÇÃO

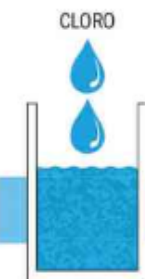
O conjunto de bactérias se transforma em lodo e, por uma membrana de poros extremamente finos, similar a um coador de café, o material pastoso é separado do líquido.

6 OSMOSE REVERSA

Para que se torne potável, a água passa por membranas ainda mais finas, que retêm os sais. Trata-se do mesmo procedimento seguido na dessalinização da água do mar.



ÁGUA POTÁVEL



7 DESINFECÇÃO

A água, nesta etapa, já apresenta um aspecto cristalino. Falta ainda, porém, a aplicação de cloro. Em geral, são utilizados de 3 a 5 miligramas de cloro por litro de água.



8 DISTRIBUIÇÃO

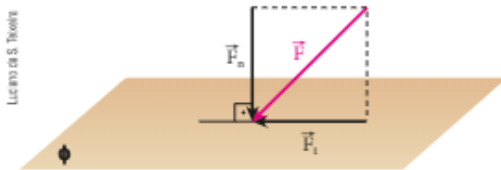
O estabelecimento que adota o reúso precisa de uma rede de tubulação específica para utilizar essa água – na irrigação, descarga sanitária etc.



4. O CONCEITO DE PRESSÃO

Suponha que você esteja comprimindo na palma de uma de suas mãos uma pequena bola de borracha com movimentos sucessivos de compressão e relaxamento. Cada vez que você aperta a bola, seus dedos exercem sobre ela certa **pressão**. A pressão é uma importante grandeza física que se destaca sobremaneira no estudo da Estática dos Fluidos.

Considere a figura a seguir, em que a superfície ϕ , de área A , está sujeita a uma distribuição de forças cuja resultante é \vec{F} .



\vec{F}_t é a componente de \vec{F} tangencial a ϕ .

\vec{F}_n é a componente de \vec{F} normal a ϕ .

Por definição, a pressão média (p_m) que \vec{F} exerce na superfície ϕ é obtida dividindo-se o módulo da componente normal de \vec{F} em relação a ϕ (F_n) pela correspondente área A :

$$p_m = \frac{|\vec{F}_n|}{A}$$

Convém destacar que apenas e tão somente a componente normal da força exerce pressão na superfície. A componente tangencial exerce outro efeito, denominado **cisalhamento**.

As unidades de pressão decorrem da própria definição, isto é, são obtidas da divisão da unidade de força pela unidade de área:

$$\text{unid}(p) = \frac{\text{unid}(F)}{\text{unid}(A)}$$

No SI, a força é medida em newton (N) e a área, em metro quadrado (m^2).

Assim: $\text{unid}(p) = \frac{N}{m^2} = \text{pascal (Pa)}$

Outra unidade usual:

$$\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \text{atmosfera técnica métrica (atm)}$$

$$1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{9,8 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Logo: $1 \text{ atm} = 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Uma unidade inglesa de pressão bastante difundida no Brasil é o **psi**.

$$1 \text{ psi} = 1 \frac{\text{libra-força}}{(\text{polegada})^2} = \frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2}$$

Nos calibradores de pneus encontrados em postos de gasolina, a pressão é geralmente expressa em psi.

$$1 \text{ psi} \cong 6,9 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Calibrador analógico de pneus.



Por causa da atração gravitacional, a atmosfera terrestre pressiona a superfície da Terra. Verifica-se que, ao nível do mar, a pressão atmosférica é praticamente igual a 1 atm ou $1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Representamos na ilustração a seguir a Terra e sua atmosfera. Observe as setas em magenta. Elas indicam as forças radiais de natureza gravitacional que a atmosfera exerce sobre a superfície do planeta. São essas forças que produzem a pressão atmosférica.



Ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Admitindo-se a Terra esférica e com raio igual a 6 400 km, faça uma estimativa da massa da atmosfera. Adote nos cálculos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (valor médio da aceleração da gravidade) e veja que a área A de uma superfície esférica de raio R é calculada por:

$$A = 4\pi R^2$$

A pressão é uma grandeza que não tem orientação privilegiada. Uma evidência disso é o fato de ela ser a mesma, **em qualquer direção**, em um ponto situado no interior de um fluido em equilíbrio. Por isso, a pressão é uma **grandeza escalar**, ficando plenamente definida pelo valor numérico acompanhado da respectiva unidade de medida.

Para uma mesma força normal, a pressão média exercida sobre uma superfície é inversamente proporcional à área considerada. Isso significa que um prego, por exemplo, comprimido sempre perpendicularmente a uma parede e com a mesma intensidade, poderá exercer pressões diferentes. Tudo dependerá do modo como ele entrar em contato com a superfície, pela ponta ou pela cabeça. No primeiro caso, a força estará distribuída em uma área menor, o que provocará maior pressão.

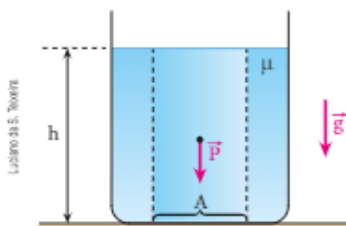
Em algumas praias do Nordeste é tradicional o passeio de *buggy*. Esse veículo é geralmente equipado com pneus que apresentam banda de rodagem de largura maior que o normal (pneus tala larga). Em razão de uma área maior de contato com o solo, a pressão exercida pelos pneus sobre a areia torna-se menor, dificultando o atolamento.



Pessoas andando de *buggy*. Natal (RN).

5. PRESSÃO EXERCIDA POR UMA COLUNA LÍQUIDA

Considere a figura a seguir, que representa um reservatório contendo um líquido homogêneo de massa específica μ , em equilíbrio sob a ação da gravidade (de intensidade g). Seja h a altura do nível do líquido no reservatório. Isolemos, no meio fluido, uma coluna cilíndrica imaginária do próprio líquido, com peso de módulo P e área da base A .



A referida coluna exerce uma pressão média (p) na base do reservatório, que pode ser calculada por:

$$p = \frac{P}{A} \quad (I)$$

Como $P = m g$ e $\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu V$, temos:

$$P = \mu V g \quad (II)$$

Como a coluna é cilíndrica, seu volume é dado por:

$$V = A h \quad (III)$$

Substituindo (III) em (II), temos:

$$P = \mu A h g \quad (IV)$$

Substituindo (IV) em (I), obtemos:

$$p = \frac{\mu A h g}{A} \Rightarrow p = \mu g h$$

Note que a pressão p independe da área A e, com μ e g constantes, p é diretamente proporcional a h .

Visando obter um dado importante para a análise de situações hidrostáticas, vamos calcular o acréscimo de pressão Δp registrado por um mergulhador que se aprofunda verticalmente $\Delta h = 10$ m na água de um lago, admitida homogênea e com massa específica $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Supondo que a aceleração da gravidade local seja $g = 10 \text{ m/s}^2$, temos:

$$\Delta p = \mu g \Delta h$$

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (Pa)}$$

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 1,0 \text{ atm}$$



Um mergulhador aprofunda-se na água agarrado a uma corda.

Assim, concluímos que, a cada 10 m acrescentados à profundidade do mergulhador na água, há um aumento de $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm na pressão exercida sobre ele.

6. O TEOREMA DE STEVIN

Simon **Stevin** (1548-1620) nasceu em Bruges, nos Países Baixos (hoje, Bélgica), e notabilizou-se como engenheiro militar. Estudou os números fracionários e a queda livre de corpos com diferentes massas, constatando a igualdade de suas acelerações, e propôs alguns inventos, como a carroça movida a vela. Uma de suas funções era inspecionar as condições de segurança dos diques holandeses, o que o levou a importantes conclusões sobre Hidrostática.



Simon Stevin. Pintura de autor desconhecido, 1590. Paris, coleção particular.

Vimos que, quanto mais se aprofunda em um líquido em equilíbrio, maior é a pressão observada. Como foi calculado na seção 5, acréscimos de profundidade de 10 m na água límpida e tranquila de um lago, por exemplo, implicam incrementos de pressão hidrostática próximos de 1,0 atm.

Consideremos, então, dois pontos de um líquido em equilíbrio, com um deles mais ao fundo que o outro. Existe, portanto, um desnível (diferença de alturas) entre esses pontos. Em quanto a pressão verificada no ponto mais ao fundo supera a pressão notada no ponto mais ao raso?

O **Teorema de Stevin**, enunciado e demonstrado a seguir, propõe uma expressão matemática para o cálculo da diferença de pressão entre dois pontos quaisquer de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade.

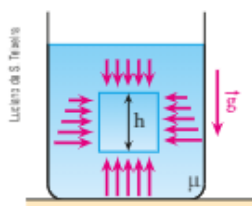
Esse teorema, também chamado de **Lei Fundamental da Hidrostática**, estabelece o seguinte:

A diferença de pressões entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade é calculada pelo produto da massa específica do líquido pelo módulo da aceleração da gravidade no local e pelo desnível (diferença de cotas) entre os pontos considerados:

$$p_2 - p_1 = \mu g h$$

Demonstração:

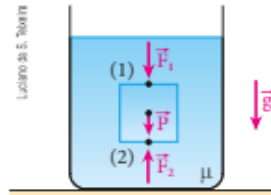
Considere o recipiente da figura a seguir, que contém um líquido homogêneo de massa específica μ , em equilíbrio sob a ação da gravidade (\vec{g}). Admita, para efeito de demonstração do teorema, um cilindro imaginário do próprio líquido, com área da base A e altura h .



O cilindro tem bases paralelas à superfície do líquido.

Pelo fato de estar envolvido pelo líquido, o cilindro recebe dele os conjuntos de forças indicados.

Em razão da simetria, as forças laterais ao cilindro (horizontais) equilibram-se duas a duas. As forças aplicadas segundo a vertical, no entanto, não se equilibram. Por isso, temos uma resultante \vec{F}_1 aplicada no ponto 1, na base superior do cilindro, e uma resultante \vec{F}_2 aplicada no ponto 2, na base inferior do cilindro.



Observe que, além de \vec{F}_1 e de \vec{F}_2 , também atua no cilindro a força da gravidade \vec{P} .

Como o líquido está em equilíbrio, o cilindro, que faz parte dele, também deve estar. Para que isso ocorra, devemos ter: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = \vec{0}$

Ou, em módulo: $F_2 - F_1 = P$

Dividindo todos os termos da igualdade anterior por A (área das bases do cilindro), obtemos:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \frac{P}{A}$$

Sabemos que: $\frac{F_2}{A} = p_2$ (pressão no ponto 2) e

$$\frac{F_1}{A} = p_1 \text{ (pressão no ponto 1)}$$

Assim: $p_2 - p_1 = \frac{P}{A} \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{m g}{A}$

A massa m pode ser expressa fazendo-se:

$$m = \mu V = \mu A h$$

Com isso, obtemos o seguinte:

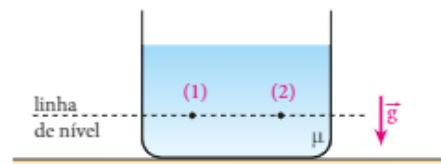
$$p_2 - p_1 = \frac{\mu A h g}{A} \Rightarrow p_2 - p_1 = \mu h g$$

Consequências do Teorema de Stevin

Primeira consequência:

Todos os pontos de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade, situados em um mesmo nível horizontal, suportam a **mesma pressão**, constituindo uma **região isobárica**.

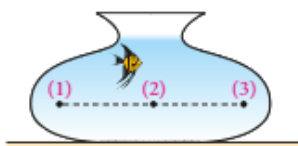
Consideremos a figura abaixo, na qual os pontos 1 e 2 pertencem a um mesmo nível (mesma horizontal). O líquido considerado é homogêneo e encontra-se em equilíbrio.



Aplicando o **Teorema de Stevin** aos pontos 1 e 2, temos: $p_2 - p_1 = \mu g h$

Entretanto, se os pontos estão no mesmo nível, o desnível entre eles (h) é nulo, levando-nos a escrever:

$$p_2 - p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = p_1$$

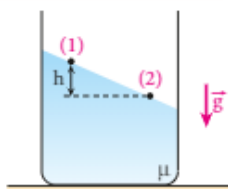


No aquário esquematizado acima, o peixe se submeterá à mesma pressão, nos pontos 1, 2 e 3, situados no mesmo nível horizontal, não importando o fato de os pontos 1 e 3 situarem-se abaixo das paredes laterais do recipiente e de o ponto 2 situar-se sob a superfície livre da água.

Segunda consequência:

Desprezando fenômenos relativos à tensão superficial, a superfície livre de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade é plana e horizontal.

Suponhamos que no recipiente da figura ao lado exista um líquido em equilíbrio, sob a ação da gravidade. Sejam 1 e 2 pontos da superfície livre do líquido, desnivelados de uma altura h .



Aplicando a esses pontos o **Teorema de Stevin**, obtemos: $p_2 - p_1 = \mu g h$

Como os pontos 1 e 2 estão expostos diretamente ao ar, a pressão que se exerce sobre ambos é a pressão atmosférica (p_0). Então, temos: $p_2 = p_1 = p_0$

$$\text{Assim: } p_0 - p_0 = \mu g h \Rightarrow \mu g h = 0$$

Como o produto $\mu g h$ é nulo e sendo $\mu \neq 0$ e $g \neq 0$, concluímos que: $h = 0$.

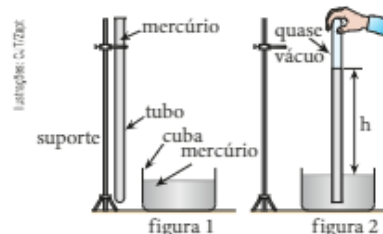
Do exposto, observamos que os pontos 1 e 2 não podem estar desnivelados, sendo, portanto, absurda a figura proposta.

7. A PRESSÃO ATMOSFÉRICA E O EXPERIMENTO DE TORRICELLI

A **pressão atmosférica** influi de maneira decisiva em muitas situações. Um litro de água, por exemplo, pode ferver em maior ou em menor temperatura, dependendo da pressão atmosférica do local. A cidade de São Paulo, por estar a cerca de 731 m acima do nível do mar, suporta pressão atmosférica menor que Santos, no litoral. Por esse motivo, em São Paulo a água ferve a 98 °C, aproximadamente, enquanto em Santos ferve a 100 °C.

O cientista italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647), aluno de Galileu, propôs um critério bastante simples para a obtenção experimental do valor da pressão atmosférica. O aparato e o método utilizados por ele estão descritos a seguir.

Considere uma cuba e um tubo, de aproximadamente 1,0 m de comprimento, ambos contendo mercúrio (figura 1).



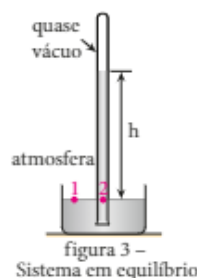
A princípio, o tubo encontra-se completamente tomado pelo fluido (mercúrio), até sua extremidade aberta.

Veda-se, então, a abertura do tubo e, posicionando-o de boca para baixo, introduz-se parte dele no mercúrio da cuba. Em seguida, destapa-se sua extremidade, tomando-se o cuidado de mantê-la sempre voltada para baixo (figura 2). Com isso, parte do mercúrio do tubo escoo para a cuba, até que seja estabelecido o equilíbrio fluidostático do sistema.

Vamos chamar de μ_{11g} a massa específica do mercúrio, g o módulo da aceleração da gravidade, p_0 a pressão atmosférica local e h a altura do nível do mercúrio no tubo em relação à superfície livre do mercúrio na cuba (figura 2).

Na figura 3, sejam p_1 e p_2 , respectivamente, as pressões nos pontos 1 e 2.

Pelo fato de o ponto 1 pertencer ao nível livre do mercúrio na cuba e estar exposto diretamente à atmosfera, tem-se: $p_1 = p_0$. No ponto 2, a pressão se deve praticamente à coluna de mercúrio que aí se sobrepõe, pois acima do mercúrio do tubo temos quase o vácuo (apenas vapor de mercúrio muito rarefeito). Desse modo: $p_2 = \mu_{11g} g h$.



Entretanto, no equilíbrio, as pressões nos pontos 1 e 2 são iguais, pois os referidos pontos pertencem ao mesmo fluido (mercúrio) e estão no mesmo nível (mesma região isobárica).

$$\text{Assim, } p_1 = p_2, \text{ ou seja: } p_0 = \mu_{11g} g h$$

Fazendo o experimento de Torricelli ao nível do mar ($g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$) e a 0 °C, obtém-se para h um valor muito próximo de 76,0 cm. Assim, com $\mu_{11g} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, calcula-se o valor de p_0 no local:

$$p_0 = 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,760 \text{ m}$$

$$\text{Logo: } p_0 \cong 1,01 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Na prática, para se evitar o incômodo da multiplicação $\mu_{\text{Hg}} g h$, é comum expressar-se a pressão atmosférica diretamente em centímetro de mercúrio (cmHg) ou milímetro de mercúrio (mmHg). Dessa forma, ao nível do mar e a 0°C , diz-se que a pressão atmosférica tem um valor próximo de 76,0 cmHg ou 760 mmHg.

EM BUSCA DE EXPLICAÇÕES

A sucção impossível

Não há nada melhor para os momentos de calor e sede que tomar uma bebida bem gelada!

Nessas ocasiões, é comum utilizarmos canudinhos, que permitem a ingestão do líquido de maneira confortável e gradual.

Os canudinhos encontrados no comércio têm comprimento próximo de 25 cm, sendo adequados para canalizar líquidos aquosos – de massa específica em torno de $1,0 \text{ g/cm}^3$ – de copos ou garrafas até a boca das pessoas.

Todavia, qual seria o comprimento máximo de um canudinho que, colocado na vertical, teoricamente permitiria a alguém sugar um líquido aquoso até o nível de sua boca?

Para responder a essa questão, considere o esquema da figura ao lado, em que um garoto se utiliza de um longo canudinho, de comprimento maior que 10 m, com a pretensão de sorver o refrigerante contido em um recipiente ao ar livre.

À medida que ele for aspirando o ar contido no canudinho, o refrigerante irá subindo ao longo do duto, empurrado pelas forças devidas à pressão atmosférica.

A subida do refrigerante, entretanto, cessará quando o garoto tiver retirado todo o ar do canudinho (supondo que isso seja possível), provocando praticamente o vácuo entre sua boca e a superfície livre do líquido já elevado.

Chamemos de p_1 e p_2 as pressões totais nos pontos 1 e 2 indicados na figura. Essas pressões ficam determinadas por:

$$p_1 = \mu g h \quad \text{e} \quad p_2 = p_0$$

em que μ é a massa específica do refrigerante ($1,0 \text{ g/cm}^3$);

g é a intensidade da aceleração da gravidade (10 m/s^2); p_0 é a pressão atmosférica local ($1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

Como os pontos 1 e 2 pertencem ao mesmo nível horizontal (mesma região isobárica), suportam pressões iguais.

Assim: $p_1 = p_2 \Rightarrow \mu g h = p_0$

Substituindo os dados numéricos apresentados, calculemos a altura máxima h procurada:

$$1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot h = 1,0 \cdot 10^5 \Rightarrow h = 10 \text{ m}$$

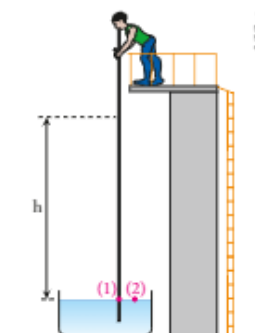
Concluimos, então, que o garoto conseguiria elevar o refrigerante, no máximo, até uma altura de 10 m a contar da superfície livre do líquido no recipiente.

NOTA

Em situações reais, por melhor que fosse a capacidade de sucção de uma pessoa, ela jamais conseguiria elevar, com um canudinho, líquidos aquosos a alturas próximas de 10 m.

Bombas hidráulicas que eventualmente recalcam água de poços com profundidades maiores que 10 m não desempenham essa tarefa por simples sucção, já que isso seria impossível, como acabamos de demonstrar. Para isso, há um compressor que aumenta a pressão do ar sobre a água a ser elevada, favorecendo a operação.

Esta fotografia mostra um painel publicitário no centro da cidade de São Paulo – SP em que um jovem parece tomar refrigerante sugando o líquido por meio de um canudinho posicionado na vertical. Considerando-se que cada andar do prédio onde está instalado o anúncio abrange aproximadamente uma extensão de 3 m, pode-se inferir que o canudinho tem mais de 10 m, o que torna a elevação do refrigerante, como sugerida na imagem, impossível.



FAÇA VOCÊ MESMO

A vela que ergue água

No experimento de Torricelli descrito anteriormente, vimos que uma coluna de mercúrio com altura próxima de 76 cm produz em sua base uma pressão capaz de equilibrar a pressão atmosférica. Por outro lado, realizando-se experimento similar com água, seria necessária uma coluna líquida com altura em torno de 10 m para equilibrar a mesma pressão atmosférica (veja o **Em busca de explicações – A sucção impossível**).

O experimento sugerido a seguir propõe o equilíbrio entre a pressão exercida por uma coluna de um líquido aquoso, aliada a uma coluna gasosa, e a pressão atmosférica.

ATENÇÃO!

Este experimento envolve fogo. Realize-o apenas com a supervisão do professor.

Material necessário

- 1 vela com cerca de 10 cm de altura;
- 1 frasco cilíndrico de vidro transparente e incolor, de preferência de boca larga, tal que possa abrigar com folga a vela. Pode ser uma embalagem de aspargos, palmito, maionese, doces em calda etc.
- 1 prato fundo;
- 1 sachê de suco de frutas em pó. Recomendamos suco de uva, que tem uma pigmentação mais escura. Observe que o suco mais escuro favorece a visualização;
- 1 vasilha com água para diluir o suco de frutas em pó;
- Fósforos ou isqueiro para acender a vela.

Procedimento

- Dilua o suco de frutas em pó na vasilha com água e, tomando o devido cuidado para não se queimar, acenda a vela. Por meio da parafina derretida, que surge logo de início, fixe a vela em posição vertical no centro do prato. Despeje cuidadosamente parte do suco contido na vasilha dentro do prato até preencher cerca de 1/3 de sua capacidade.
- Em seguida, emborque o frasco com a boca para baixo e introduza a vela acesa em seu interior, de modo a apoiar a boca do frasco no fundo do prato.
- Durante um breve intervalo de tempo, observe a vela erguer uma coluna de suco dentro do frasco com redução concomitante no tamanho da chama, que, por fim, irá se extinguir. Com a vela apagada, você perceberá uma situação de **equilíbrio** com a coluna de suco dentro do frasco praticamente estabilizada em relação ao suco contido no prato.



Foto: g1 - Sérgio Brito, J. The Noi

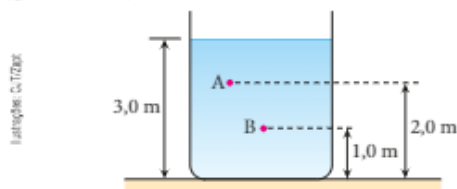
Analisando o experimento

- Por que a vela acaba se apagando quando confinada no interior do frasco? Elabore hipóteses e confronte-as com as de seus colegas.
- Por que o suco sobe no interior do frasco? Elabore hipóteses e confronte-as com as de seus colegas.
- Em termos de pressões, qual é a equação para o equilíbrio verificado na situação descrita no procedimento III? Discuta o resultado com seus colegas.

QUESTÕES COMENTADAS



1 O tanque representado na figura a seguir contém água ($\mu = 1,0 \text{ g/cm}^3$) em equilíbrio sob a ação da gravidade ($g = 10 \text{ m/s}^2$):



Determine, em unidades do Sistema Internacional:

- a diferença de pressão entre os pontos **B** e **A** indicados;
- a intensidade da força resultante devido à água na parede do fundo do tanque, cuja área vale $2,0 \text{ m}^2$.

RESOLUÇÃO

- a) A diferença de pressão entre os pontos **B** e **A** pode ser calculada pelo **Teorema de Stevin**: $p_B - p_A = \mu g h$

Fazendo $p_B - p_A = \Delta p$, temos: $\Delta p = \mu g h$

Sendo $\mu = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 2,0 \text{ m} - 1,0 \text{ m} = 1,0 \text{ m}$, calculemos Δp :

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1,0 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

- b) A intensidade F da força resultante que a água exerce na parede do fundo do tanque é dada por:

$$F = p_{\text{fundo}} A = \mu g H A$$

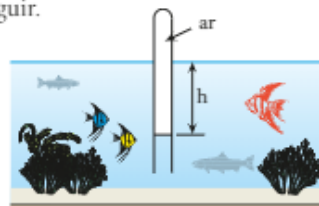
Sendo $H = 3,0 \text{ m}$ e $A = 2,0 \text{ m}^2$, calculamos F :

$$F = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 3,0 \cdot 2,0 \text{ (N)} \Rightarrow F = 6,0 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Respostas: a) $1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$; b) $6,0 \cdot 10^4 \text{ N}$

2 Um longo tubo de vidro, fechado em sua extremidade superior, é cuidadosamente mergulhado nas águas de um lago ($\mu_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) com seu eixo longitudinal

coincidente com a direção vertical, conforme representa a figura a seguir.



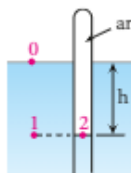
No local, a pressão atmosférica vale $p_0 = 1,0 \text{ atm}$ e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se o nível da água no interior do tubo sobe até uma profundidade $h = 5,0 \text{ m}$, medida em relação à superfície livre do lago, qual é a pressão do ar contido no interior do tubo?

RESOLUÇÃO

Considere o esquema a seguir:

Aplicando o **Teorema de Stevin** aos pontos **0** e **1**, temos:

$$p_1 - p_0 = \mu_{\text{água}} g h \Rightarrow p_1 = \mu_{\text{água}} g h + p_0$$



Concluimos, então, que a pressão total no ponto **1** é constituída por duas parcelas: $\mu_{\text{água}} g h$, que é a pressão efetiva exercida pela água, e p_0 , que é a pressão atmosférica.

É importante notar que a pressão atmosférica manifesta-se não apenas na superfície livre da água, mas também em todos os pontos do seu interior, como será demonstrado na seção **8** deste capítulo. No ponto **2**, temos: $p_2 = p_{\text{ar}}$

Como os pontos **1** e **2** pertencem à água e estão situados no mesmo nível horizontal (mesma região isobárica), suportam pressões iguais. Assim: $p_2 = p_1 \Rightarrow p_{\text{ar}} = \mu_{\text{água}} g h + p_0$

Sendo $\mu_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h = 5,0 \text{ m}$ e $p_0 = 1,0 \text{ atm} \cong 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, calculemos p_{ar} :

$$p_{\text{ar}} = (1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 5,0 + 1,0 \cdot 10^5) \text{ Pa}$$

$$\text{Portanto: } p_{\text{ar}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 1,5 \text{ atm}$$

Resposta: $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 1,5 \text{ atm}$



QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

3. Dois blocos cúbicos **A** e **B**, extraídos de uma mesma rocha maciça e homogênea, têm arestas respectivamente iguais a x e $3x$ e estão apoiados sobre um solo plano e horizontal. Sendo p_A e p_B as pressões exercidas por **A** e **B** na superfície de apoio, determine a relação $\frac{p_A}{p_B}$.

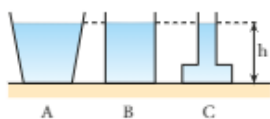
4. Um mesmo livro é mantido em repouso apoiado nos planos representados nos esquemas seguintes:



LUIS FERRAZ R. T. 2012

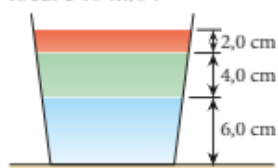
Seja p_1 a pressão exercida pelo livro sobre o plano de apoio na situação 1 e p_2 a pressão exercida pelo livro sobre o plano de apoio na situação 2, determine o valor de $\frac{p_2}{p_1}$.

5. Os recipientes A, B e C da figura têm áreas das paredes do fundo iguais. Eles contêm o mesmo líquido homogêneo em equilíbrio, e em todos o nível livre do líquido atinge a altura h . Sejam p_A , p_B e p_C e F_A , F_B e F_C , respectivamente, as pressões e as intensidades das forças exercidas pelo líquido nas paredes do fundo dos recipientes A, B e C. Compare:



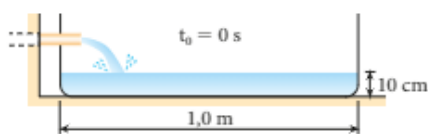
- a) p_A , p_B e p_C ; b) F_A , F_B e F_C .

6. (PUC-RJ) Em um vaso em forma de cone truncado, são colocados três líquidos imiscíveis. O mais leve ocupa um volume cuja altura vale 2,0 cm; o de densidade intermediária ocupa um volume de altura igual a 4,0 cm, e o mais pesado ocupa um volume de altura igual a 6,0 cm. Supondo que as densidades dos líquidos sejam 1,5 g/cm³, 2,0 g/cm³ e 4,0 g/cm³, respectivamente, qual é a força extra exercida sobre o fundo do vaso devido à presença dos líquidos? A área da superfície inferior do vaso é 20 cm² e a área da superfície livre do líquido que está na primeira camada superior vale 40 cm². A aceleração gravitacional local é 10 m/s².



- a) 3500 Pa
b) 10,5 N
c) 14,0 N
d) 7,0 N
e) 4,8 N

7. No esquema a seguir está representada, no instante $t_0 = 0$ s, uma caixa-d'água, cuja base quadrada tem área igual a 1,0 m². A partir desse instante, a caixa passa a ser preenchida com a água proveniente de um tubo, que opera com vazão constante de $1,0 \cdot 10^{-2}$ m³/min.



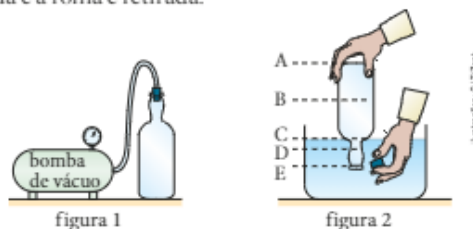
Desprezando-se as perturbações causadas pela introdução da água na caixa, adotando-se $g = 10$ m/s² e considerando que a água tem densidade igual a 1,0 g/cm³, pede-se:

- a) trace o gráfico quantitativo da pressão exercida pela água na base do reservatório, desde o instante $t_0 = 0$ min até o instante $t = 20$ min (admita que não ocorram transbordamentos);
b) calcule, no instante $t = 20$ min, as intensidades das forças resultantes aplicadas pela água nas cinco paredes molhadas da caixa.

8. Considere o experimento descrito a seguir:

Figura 1: Uma garrafa de vidro de altura igual a 40 cm é conectada a uma bomba de vácuo, que suga todo o ar do seu interior. Uma rolha de borracha obtura o gargalo, impedindo a entrada de ar.

Figura 2: A garrafa é emborcada em um recipiente contendo água e a rolha é retirada.

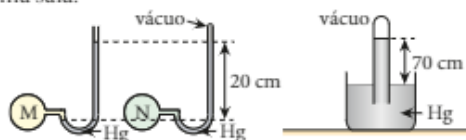


Qual é o nível da água na garrafa, depois de estabelecido o equilíbrio hidrostático?

- a) A b) B c) C d) D e) E

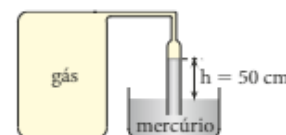
Dados: pressão atmosférica = 1,0 atm;
densidade absoluta da água = 1,0 g/cm³;
intensidade da aceleração da gravidade = 10 m/s².

9. Os três aparelhos abaixo estão situados no interior da mesma sala:



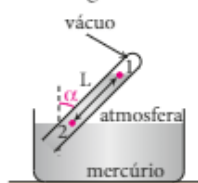
Fundamentado nas indicações das figuras, determine as pressões exercidas pelos gases contidos em M e N.

10. O sistema da figura encontra-se em equilíbrio sob a ação da gravidade, cuja intensidade vale 10 m/s²:



Dados: pressão atmosférica $p_0 = 1,0$ atm;
massa específica do mercúrio $\mu = 13,6$ g/cm³.
Considerando $1,0$ atm = $1,0 \cdot 10^5$ N/m², calcule, em atm, a pressão do gás contido no reservatório.

11. Em uma região ao nível do mar, a pressão atmosférica vale $1,01 \cdot 10^5$ N/m² e $g = 9,81$ m/s². Repete-se o experimento de Torricelli, dispondo-se o tubo do barômetro conforme representa a figura.



A distância L entre os pontos 1 e 2 vale 151 cm e a massa específica do mercúrio é $\mu = 13,6$ g/cm³. Estando o sistema em equilíbrio, calcule o valor aproximado do ângulo α que o tubo forma com a direção vertical.

8. O TEOREMA DE PASCAL

Blaise Pascal (1623-1662) nasceu em Clermont-Ferrand, França, e ainda criança manifestou grande habilidade em Matemática. Estudou Geometria, Probabilidade e Física, chegando a importantes descobertas. Aos 19 anos, depois de dois anos de trabalho intenso, terminou a construção de uma revolucionária calculadora mecânica que permitia a realização de operações aritméticas sem que o usuário precisasse saber os respectivos algoritmos. Buscando outros conhecimentos, embrenhou-se na Filosofia e na Teologia, tendo legado uma frase memorável, em que deixou clara sua insatisfação com as coisas meramente racionais: “O coração tem razões que a própria razão desconhece”.



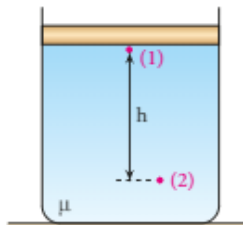
Blaise Pascal. Retrato feito por Philippe de Champaigne em óleo sobre tela. Coleção particular.

A Blaise Pascal devemos o teorema enunciado a seguir, que encontra várias aplicações práticas.

Um incremento de pressão comunicado a um ponto qualquer de um líquido incompressível em equilíbrio **transmite-se integralmente** a todos os demais pontos do líquido, bem como às paredes do recipiente.

Demonstração:

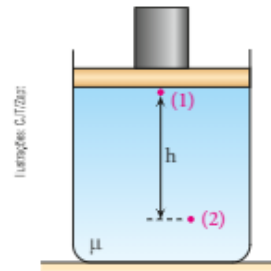
Consideremos o cilindro da figura a seguir, que contém um líquido homogêneo, incompressível e em equilíbrio sob a ação da gravidade. O líquido encontra-se aprisionado por um êmbolo livre, de peso P . Consideremos dois pontos no líquido: o ponto 1, situado imediatamente sob o êmbolo, e o ponto 2, situado a uma profundidade h em relação a 1.



Aplicando o Teorema de Stevin aos pontos 1 e 2, temos: $p_2 - p_1 = \mu g h$

$$\text{Então: } p_2 = p_1 + \mu g h \quad (I)$$

Se um corpo for depositado sobre o êmbolo, a pressão no ponto 1 será incrementada de Δp .



Tendo em vista esse incremento de pressão Δp , a nova pressão no ponto 1 (p'_1) será dada por:

$$p'_1 = p_1 + \Delta p$$

Com base na expressão indicada por (I), podemos constatar que a variação de p_1 acarreta também uma variação em p_2 , já que a parcela $\mu g h$ não se altera (h é constante, pois o líquido é incompressível). Calculemos, então, a nova pressão (p'_2) exercida no ponto 2:

$$p'_2 = p'_1 + \mu g h$$

$$p'_2 = p_1 + \Delta p + \mu g h \Rightarrow p'_2 = p_1 + \mu g h + \Delta p$$

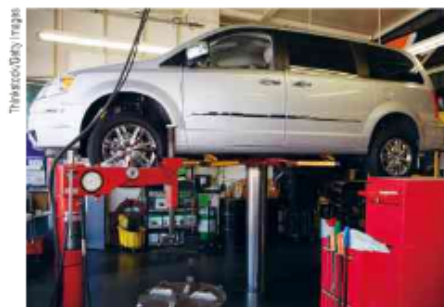
Lembrando que $p_2 = p_1 + \mu g h$, concluímos que:

$$p'_2 = p_2 + \Delta p$$

Esse último resultado permite-nos verificar que o incremento de pressão Δp , dado ao ponto 1, se transmitiu, manifestando-se também no ponto 2.

Nos sistemas de freios utilizados na maioria dos veículos automotores, por exemplo, ao se pisar no pedal do freio, exerce-se um acréscimo de pressão sobre um líquido especial existente logo depois da estrutura do pedal. Esse incremento de pressão transmite-se a todos os pontos do fluido, sendo notado nos mecanismos de frenagem instalados juntos às rodas, fazendo-os entrar em operação.

Vejamos a seguir outras situações em que o Teorema de Pascal é determinante no funcionamento de alguns dispositivos.



Elevador hidráulico de automóveis (prensa hidráulica).

Mecanismo hidráulico de abaixamento e recolhimento de trem de pouso de aviões.



Foto: BERNARDE FORTUCCIO/Grupo Nexo/RE

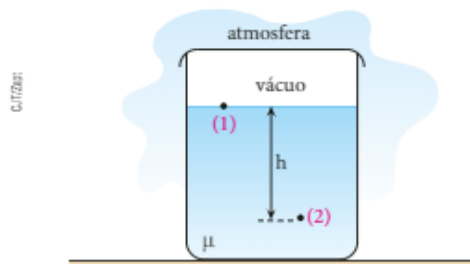


Multiplicadores hidráulicos de forças em retroscavadeiras.

Consequência do Teorema de Pascal

Todos os pontos de um líquido em equilíbrio exposto à atmosfera ficam submetidos à pressão atmosférica.

No esquema a seguir temos um líquido em equilíbrio dentro de um recipiente fechado por uma tampa.



Admitamos, por hipótese, que entre a base da tampa e a superfície livre do líquido foi feito vácuo. Sejam os pontos 1 e 2 pertencentes ao líquido, tal que 1 se encontre na superfície livre e 2, a uma profundidade h .

Nas condições descritas, a pressão no ponto 1 é nula, pois a esse ponto sobrepõe-se o vácuo.

Assim: $p_1 = 0$

No ponto 2, a pressão deve-se exclusivamente à camada líquida de altura h .

Então: $p_2 = \mu g h$

Se destamparmos o recipiente, a pressão no ponto 1 ficará incrementada de $\Delta p = p_0$, em que p_0 é a pressão atmosférica do local.

A nova pressão p'_1 no ponto 1 será dada por:

$$p'_1 = \Delta p \Rightarrow p'_1 = p_0$$

Conforme o **Teorema de Pascal**, entretanto, esse incremento de pressão deverá transmitir-se integralmente também ao ponto 2.

A nova pressão p'_2 no ponto 2 será dada por:

$$p'_2 = \mu g h + \Delta p \Rightarrow p'_2 = \mu g h + p_0$$

Vimos que uma camada (ou coluna) de água de espessura (ou altura) 10 m exerce em sua base uma pressão equivalente a $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm. Assim, a uma profundidade de 30 m, por exemplo, um mergulhador submerso em um lago detectará uma pressão total de 4,0 atm, sendo 3,0 atm exercidas pela água e 1,0 atm exercida pelo ar externo.



O mergulhador submerso está livre da pressão atmosférica?

Nesse tranquilo mergulho oceânico, a pressão total sentida pela mergulhadora é obtida por meio da soma da pressão hidrostática que a água exerce sobre ele com a pressão atmosférica, que se manifesta em todos os pontos do líquido.



Mulher realizando mergulho sobre recife em Rangiora, Polinésia Francesa, 2015.

Você seria capaz de determinar a profundidade de um mergulhador que, submerso nas águas de um lago, detectasse uma pressão total de 3,8 atm?

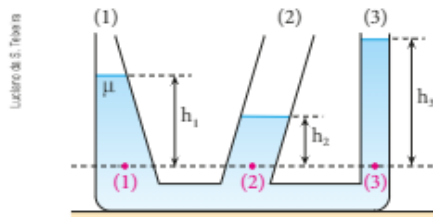
Se você disse 28 m, acertou, pois das 3,8 atm mencionadas, 2,8 atm são devidas à água, o que corresponde a uma profundidade de 28 m.

9. VASOS COMUNICANTES

Um líquido em equilíbrio

Considere os recipientes da figura a seguir, que se comunicam pelas bases. Admita que um mesmo líquido homogêneo preencha os três ramos existentes no sistema, suposto em equilíbrio.

Observe que os ramos têm diâmetros suficientemente grandes, de modo que os efeitos ligados à capilaridade possam ser considerados desprezíveis.



Em relação à linha de nível indicada, sejam h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente, as alturas das colunas líquidas nos ramos (1), (2) e (3).

As pressões absolutas nos pontos 1, 2 e 3 são calculadas por:

$$p_1 = \mu g h_1 + p_0 \Rightarrow h_1 = \frac{p_1 - p_0}{\mu g}$$

$$p_2 = \mu g h_2 + p_0 \Rightarrow h_2 = \frac{p_2 - p_0}{\mu g}$$

$$p_3 = \mu g h_3 + p_0 \Rightarrow h_3 = \frac{p_3 - p_0}{\mu g}$$

Nos três casos, p_0 (pressão atmosférica), μ (massa específica do líquido) e g (aceleração da gravidade) são constantes, e, como os pontos 1, 2 e 3 estão no mesmo nível, deve-se ter (pelo Teorema de Stevin) a igualdade $p_1 = p_2 = p_3$. Assim, podemos constatar que:

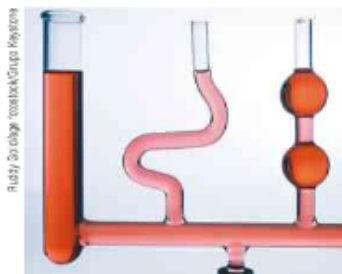
$$h_1 = h_2 = h_3$$

Concluimos, então, que a figura proposta é absurda. Disso, podemos dizer que:

Em um sistema de vasos comunicantes abertos nas extremidades superiores, situados em um mesmo ambiente e preenchidos por um mesmo líquido em equilíbrio, tem-se, em todos os vasos, a **mesma altura** para o nível livre do líquido.

Vamos ver alguns exemplos de vasos comunicantes.

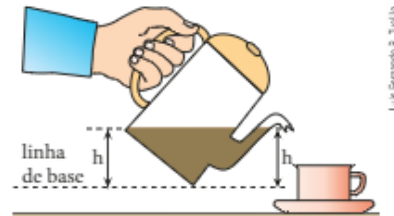
Exemplo 1: Na fotografia a seguir, o sistema de vasos comunicantes está preenchido com um mesmo líquido.



Fotografia mostrando um sistema de vasos comunicantes.

Observe que, independentemente da forma dos tubos, a altura atingida pelo líquido em cada um deles, medida a partir de um determinado nível, é sempre a mesma.

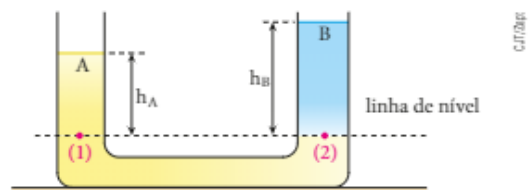
Exemplo 2: Um bule é um sistema de vasos comunicantes em que o bico do recipiente se comunica com o corpo principal.



Ao tomarmos um bule para servir um café, por exemplo, a superfície livre da bebida fica à mesma altura h em relação à linha de base do sistema, tanto no bico como no corpo principal, apresentando-se praticamente plana e horizontal, conforme mostra a figura.

Dois líquidos imiscíveis em equilíbrio

Considere o tubo em U da figura a seguir, com os ramos abertos em um mesmo ambiente, contendo dois líquidos imiscíveis, A (massa específica μ_A) e B (massa específica μ_B), em equilíbrio.



Passando uma linha de nível pela superfície de separação dos líquidos, temos:

h_A = altura da superfície livre de A;

h_B = altura da superfície livre de B.

Os pontos 1 e 2 pertencentes ao líquido A, por estarem no mesmo nível, devem suportar pressões totais iguais. Assim, temos:

$$\text{ponto 1: } p_1 = \mu_A g h_A + p_0$$

$$\text{ponto 2: } p_2 = \mu_B g h_B + p_0$$

Sabemos que: $p_1 = p_2$

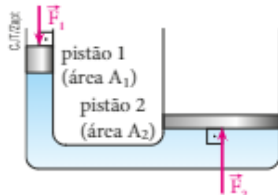
$$\text{Logo: } \mu_A g h_A + p_0 = \mu_B g h_B + p_0$$

$$\text{Portanto: } \frac{h_B}{h_A} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

Na situação de equilíbrio, as alturas das superfícies livres são inversamente proporcionais às respectivas massas específicas.

10. PRENSA HIDRÁULICA

É um dispositivo largamente utilizado, cuja finalidade principal é a multiplicação de forças. Em sua versão mais elementar, a prensa hidráulica é um tubo em U, cujos ramos têm áreas da seção transversal diferentes. Normalmente, esse tubo é preenchido com um líquido viscoso (em geral, óleo) aprisionado por dois pistões, conforme indica a figura abaixo.



Ao exercermos uma força \vec{F}_1 no pistão 1, provocamos um incremento de pressão Δp nos pontos do líquido vizinhos da base desse pistão.

Esse acréscimo de pressão é transmitido integralmente aos demais pontos do líquido, o que é justificado pelo **Teorema de Pascal**. Isso significa que os pontos vizinhos da base do pistão 2 também recebem o acréscimo de pressão Δp e, por isso, exercem uma força \vec{F}_2 na base desse pistão.

Temos, então:

$$\text{pistão 1: } \Delta p = \frac{F_1}{A_1} \quad \text{e} \quad \text{pistão 2: } \Delta p = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\text{Logo: } \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Supondo que os pistões 1 e 2 sejam circulares, com raios respectivamente iguais a R_1 e R_2 , temos:

$$A_2 = \pi (R_2)^2 \quad \text{e} \quad A_1 = \pi (R_1)^2$$

$$\text{Logo: } \frac{F_2}{F_1} = \frac{\pi (R_2)^2}{\pi (R_1)^2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

As forças aplicadas nos pistões da prensa hidráulica têm intensidades diretamente proporcionais aos quadrados dos respectivos raios desses pistões. Se, por exemplo, $R_2 = 10 R_1$, teremos $F_2 = 100 F_1$.

NOTAS

- Embora a prensa hidráulica multiplique forças, não multiplica trabalho (**Princípio da Conservação de Energia**). Desprezando dissipações, os trabalhos realizados sobre os dois êmbolos têm valores absolutos iguais.
- O número $\frac{A_2}{A_1}$ ou $\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$ define a **vantagem mecânica** da prensa hidráulica, que é o fator de multiplicação de força oferecido pela máquina.

11. O TEOREMA DE ARQUIMEDES

Qual é a força vertical e dirigida para cima que equilibra o peso de um navio permitindo que ele flutue? Que força arrebatadora vertical e dirigida para cima colabora para que uma bola de plástico, mergulhada totalmente na água de uma piscina, quando largada, aflore rapidamente à superfície? Reflita ainda sobre a força vertical e dirigida para cima responsável pela manutenção de um balão suspenso no ar...

Qual é a origem dessas forças? Teriam elas algo em comum? Sim, elas advêm do fluido que envolve total ou parcialmente os corpos citados. Essa força vertical e dirigida para cima que os corpos recebem quando imersos na água, no ar ou em outros líquidos ou gases tem fundamental importância na compreensão de fenômenos hidrostáticos. Seu nome é **empuxo**, tendo sido descrita por Arquimedes de Siracusa no século III a.C.

Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) nasceu em Siracusa, na ilha da Sicília, cidade que na época pertencia à Magna Grécia. Em viagem de estudos a Alexandria (Egito), conheceu Euclides e seus discípulos, tornando-se entusiasta de sua obra. Determinou a área da superfície esférica, obteve com precisão o centro de gravidade de várias figuras planas, construiu engenhos bélicos de notável eficiência e também um parafuso capaz de elevar a água de poços e estudou o mecanismo das alavancas. O que realmente o celebrou, no entanto, foi a formulação da **lei do empuxo**. Morreu em plena atividade, na Primeira Guerra Púnica, durante o massacre realizado pelos romanos por ocasião da tomada de Siracusa.



Supercolor/Upix/Mydane

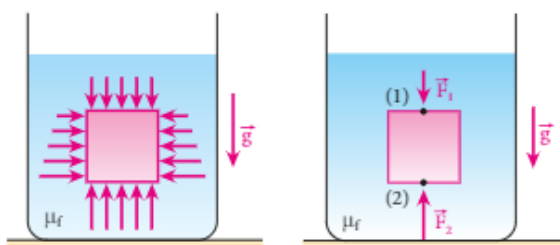
Arquimedes.
Gravura do
séc. XVII.
Biblioteca
Nacional de Paris.

Leia o enunciado do **Teorema de Arquimedes**:

Quando um corpo é imerso total ou parcialmente em um fluido em equilíbrio sob a ação da gravidade, ele recebe do fluido uma força denominada **empuxo** (ou impulsão de Arquimedes). Tal força tem sempre direção vertical, sentido de baixo para cima e intensidade igual à do peso do fluido deslocado pelo corpo.

Demonstração:

Vamos admitir um líquido homogêneo de massa específica μ_f , contido no recipiente da figura. O sistema acha-se em equilíbrio sob a ação da gravidade (\vec{g}). Seja também um cilindro, de altura h e bases de área A , totalmente imerso no líquido.



Por estar envolvido pelo líquido, o cilindro recebe forças deste, indicadas pelo esquema. As forças horizontais (laterais) equilibram-se devido à simetria. Na vertical, entretanto, temos duas forças a considerar: uma, \vec{F}_1 , aplicada no ponto 1, resultante na base superior do cilindro, e outra, \vec{F}_2 , aplicada no ponto 2, resultante na base inferior desse cilindro.

Devido à maior profundidade do ponto 2, devemos ter $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$, o que significa que as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 admitem uma resultante vertical e dirigida para cima. Essa resultante que o líquido exerce no cilindro, suposto em repouso, denomina-se **empuxo** (\vec{E}).

Temos, então, que: $\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{E}$

Em módulo, temos: $F_2 - F_1 = E$ (I)

A intensidade de \vec{E} pode ser obtida aplicando-se aos pontos 1 e 2 o **Teorema de Stevin**:

$$p_2 - p_1 = \mu_f g h$$

Sendo $p_2 = \frac{F_2}{A}$ e $p_1 = \frac{F_1}{A}$, temos:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \mu_f g h \Rightarrow F_2 - F_1 = \mu_f g h A$$

O produto $h A$ traduz, no entanto, o volume do cilindro imerso no líquido (V). Assim:

$$F_2 - F_1 = \mu_f V g \quad (\text{II})$$

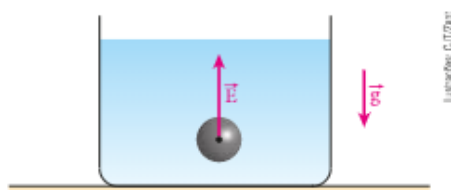
Comparando (I) e (II), segue que: $E = \mu_f V g$

Seja V_{fd} o volume de fluido deslocado em razão da imersão do cilindro. É fundamental notar que esse volume é exatamente igual ao volume do cilindro imerso no fluido: $V_{fd} = V$

Diante disso, podemos escrever: $E = \mu_f V_{fd} g$

Entretanto, $\mu_f V_{fd} = m_{fd}$ (massa do fluido deslocado). Assim, obtemos, finalmente:

$$E = \mu_f V_{fd} g \Rightarrow E = m_{fd} g \Rightarrow E = P_{fd}$$

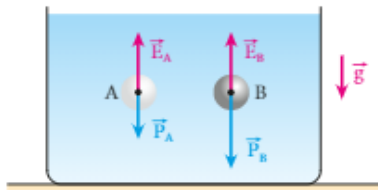


Na situação representada na figura acima, temos uma esfera em repouso totalmente imersa na água. A resultante das ações da água sobre a esfera é o empuxo \vec{E} , força vertical e dirigida para cima. A intensidade de \vec{E} é igual à do peso do fluido deslocado pela esfera.

Tenha em mente os seguintes pontos:

- O empuxo só pode ser considerado a resultante das ações do fluido sobre o corpo se este estiver em repouso;
- A linha de ação do empuxo passa sempre pelo centro de gravidade da porção fluida que ocupa o local em que está o corpo;
- O empuxo **não** tem nenhuma relação geral com o peso do corpo imerso, cuja intensidade pode ser maior que a do empuxo, menor que ela ou igual à do empuxo;
- Para μ_f e g constantes, E é diretamente proporcional a V : se uma bola for inflada debaixo da água, por exemplo, a intensidade do empuxo exercido sobre ela aumentará. Quanto maior for o volume da bola, maior será o volume de água deslocado e maior será a intensidade do empuxo;
- Para V e g constantes, E é diretamente proporcional a μ_f : um corpo totalmente imerso na água do mar receberá um empuxo mais intenso que o recebido quando totalmente imerso na água límpida de um lago. Isso ocorre porque a água salgada do mar tem densidade absoluta maior que a da água "doce" do lago.

Exemplo 1: Na figura, temos uma bola de pingue-pongue (A) e uma esfera maciça de aço (B), de mesmo volume externo. Esses dois corpos estão totalmente imersos na água.



É claro que a esfera B é mais pesada que a bola A, porém, por terem o mesmo volume externo, A e B deslocam volumes iguais de água e, por isso, recebem **empuxos de mesma intensidade**:

$$|\vec{P}_A| < |\vec{P}_B|, \text{ mas } |\vec{E}_A| = |\vec{E}_B|$$

Exemplo 2: Considere a figura a seguir.



No experimento ilustrado acima, quando o bloco (sem porosidades) é introduzido na jarra preenchida com água até o nível do seu bico, certo volume do líquido extravasa, sendo recolhido no recipiente lateral. O volume de água extravasado é igual ao volume do bloco, e a intensidade do empuxo recebido por ele é igual à do peso do líquido deslocado (**Teorema de Arquimedes**).

Exemplo 3: Na fotografia abaixo, um balão inflado com um gás menos denso que o ar mantém suspensa, em repouso, uma pedra presa por um barbante.

Nesse caso, o sistema apresenta-se em equilíbrio e a intensidade do seu peso total é igual à intensidade do empuxo exercido pelo ar.

É interessante observar que, como a densidade do ar é bem menor que a da água ($\mu_{\text{ar}} \cong 1,3 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_{\text{água}} \cong 1\,000 \text{ kg/m}^3$), para se obter no ar empuxos equivalentes aos obtidos na água é necessário utilizar, no meio gasoso, corpos de grandes volumes. É por isso que os balões atmosféricos são tão grandes.



Balão inflado mantendo uma pedra suspensa, em repouso.

Uma verificação da lei do empuxo

Consideremos a situação representada na figura 1, em que se tem uma balança de travessão de braços iguais em equilíbrio. Nessas condições, o peso pendente na extremidade esquerda do travessão tem intensidade igual à do peso pendente na extremidade direita.

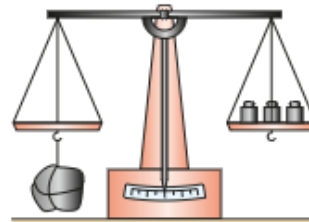


figura 1

Admitamos, agora, a situação representada na figura 2. Introduzindo o corpo de ferro não poroso (dependurado no prato esquerdo) em um recipiente contendo água, verificamos certo desequilíbrio da balança. Isso ocorre porque, ao ser imerso na água, o corpo de ferro recebe desta uma força vertical e dirigida para cima – o **empuxo** –, que provoca uma redução na intensidade da força que solicita a extremidade esquerda do travessão.

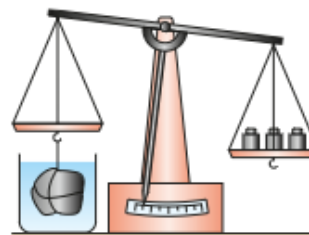


figura 2

Na situação mostrada na figura 3, o travessão encontra-se novamente em equilíbrio, tendo retornado à sua posição inicial. Para isso, foi necessário reduzir a intensidade do peso pendente à direita, retirando-se um dos massores do prato.

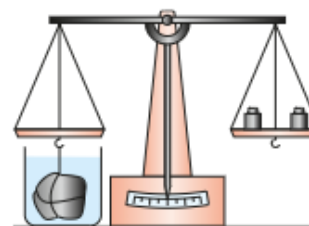


figura 3

Supondo que a retirada de um massor do prato à direita tenha sido suficiente para recolocar o travessão na horizontal, podemos afirmar que a intensidade do peso desse objeto é igual à do empuxo recebido pelo corpo de ferro imerso na água.

FAÇA VOCÊ MESMO

Verificando o Princípio de Arquimedes

A flutuação de um corpo na superfície de um líquido ocorre quando esse corpo é menos denso que o líquido. Nesse caso, seu peso é equilibrado pela força **empuxo**, descrita pelo **Princípio de Arquimedes**.

Propomos a seguir um experimento envolvendo a flutuação de uma pequena caixa de papelão dotada de uma carga de grãos de feijão.

Material necessário

- 1 vasilha de vidro com capacidade em torno de 500 mL cheia de água da torneira (pode ser a base de uma garrafa plástica do tipo *pet* de 1,5 L ou 2 L);
- 1 pequena caixa de papelão fino e pouco absorvente, capaz de flutuar na água do recipiente. É importante que a base da caixa não tenha aberturas ou frestas;
- 1 punhado de grãos de feijão para serem colocados dentro da caixa;
- cerca de 50 g de sal de cozinha, o que equivale aproximadamente a meia xícara de chá;
- 1 colher;
- 1 caneta hidrográfica.

Procedimento

I. Mantenha o recipiente com água em repouso e a superfície do líquido sem ondulações; coloque a caixa de papelão para flutuar no líquido e adicione no interior dela um punhado de grãos de feijão de modo a tornar o conjunto um pouco mais pesado que a caixa vazia. Estabelecido o equilíbrio, retire cuidadosamente a caixa da água e verifique a região molhada em sua lateral. Risque com a caneta hidrográfica a linha demarcatória do nível atingido pelo líquido na lateral da caixa.



II. Com a caixa fora do recipiente, adicione o sal de cozinha à água e dilua-o, mexendo vigorosamente com a colher. Você obterá uma solução saturada esbranquiçada, que deverá permanecer também em repouso até que a superfície líquida volte a ficar sem perturbações. Retorne em seguida a caixa de papelão com a mesma carga de feijão para dentro da vasilha. Você notará, então, que a caixa se apresentará menos imersa que no caso anterior, isto é, a linha de flutuação que você riscou se elevará em relação à superfície líquida.



Foto: Eduardo Savarim

Você poderá ainda afundar um pouco mais a caixa, restabelecendo a linha de flutuação demarcada na situação inicial. Para isso, bastará acrescentar mais alguns grãos de feijão dentro dela, tornando o conjunto um pouco mais pesado.

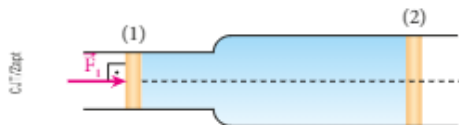
Analisando o experimento

1. Em sua opinião, o que provocou essa subida da caixa em relação à superfície da água salgada? Que grandezas físicas foram alteradas do primeiro para o segundo momento do experimento? Elabore hipóteses capazes de explicar a menor imersão da caixa quando posta a flutuar na solução de água e sal.
2. Com base nas leis da Hidrostática, elabore uma explicação consistente para o que foi observado e compare suas conjecturas com aquelas apresentadas por seus colegas.
3. Quando um barco que estava navegando em um rio (água doce) entra no mar (água salgada), ocorre alguma alteração na linha de flutuação, isto é, o nível atingido pela superfície da água na lateral do casco do barco se modifica?
4. Quando um barco que estava navegando em um rio (água doce) entra no mar (água salgada), ele pode receber uma carga adicional de modo a flutuar com o mesmo percentual do volume do casco imerso comparativamente com a flutuação fluvial? Discuta sobre essas questões com os colegas e o professor.

QUESTÕES COMENTADAS



12 Na figura seguinte, está representado um recipiente constituído pela junção de dois tubos cilíndricos coaxiais e de eixos horizontais. O recipiente contém um líquido incompressível aprisionado pelos êmbolos 1 e 2, de áreas respectivamente iguais a $0,50 \text{ m}^2$ e $2,0 \text{ m}^2$.



Empurrando-se o êmbolo 1 para a direita com a força \vec{F}_1 de intensidade 100 kgf , obtém-se, nesse êmbolo, um deslocamento de 80 cm . Desprezando os atritos, determine:

- a) a intensidade da força horizontal \vec{F}_2 com que o líquido empurra o êmbolo 2;
- b) o deslocamento do êmbolo 2.

RESOLUÇÃO

- a) Seja Δp o acréscimo de pressão que os pontos do líquido, vizinhos do êmbolo 1, recebem devido à aplicação de \vec{F}_1 .

$$\text{Temos: } \Delta p = \frac{F_1}{A_1} \quad (\text{I})$$

Conforme o **Teorema de Pascal**, esse acréscimo de pressão transmite-se a todos os demais pontos do líquido, manifestando-se no êmbolo 2 por uma força \vec{F}_2 , perpendicular ao êmbolo:

$$\Delta p = \frac{F_2}{A_2} \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Sendo $A_2 = 2,0 \text{ m}^2$, $A_1 = 0,50 \text{ m}^2$ e $F_1 = 100 \text{ kgf}$, calculamos F_2 :

$$F_2 = \frac{2,0}{0,50} \cdot 100 \text{ (kgf)} \Rightarrow F_2 = 400 \text{ kgf}$$

- b) Ao se deslocar, o êmbolo 1 expulsa do tubo de menor diâmetro um volume de líquido ΔV , dado por:

$$\Delta V = A_1 L_1 \quad (\text{III})$$

Como o líquido é incompressível, esse volume ΔV é integralmente transferido para o tubo de maior diâmetro, provocando no êmbolo 2 um deslocamento L_2 .

Temos, então, que:

$$\Delta V = A_2 L_2 \quad (\text{IV})$$

$$\text{De (III) e (IV), temos: } A_2 L_2 = A_1 L_1 \Rightarrow L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1$$

Lembrando que $L_1 = 80 \text{ cm}$, obtemos:

$$L_2 = \frac{0,50}{2,0} \cdot 80 \text{ (cm)} \Rightarrow L_2 = 20 \text{ cm}$$

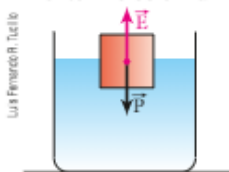
Respostas: a) 400 kg f ; b) 20 cm

13 Um bloco de madeira flutua inicialmente na água com metade do seu volume imerso. Colocado a flutuar no óleo, o bloco apresenta $\frac{1}{4}$ do seu volume emerso.

Determine a relação entre as massas específicas da água (μ_a) e do óleo (μ_o).

RESOLUÇÃO

Analisemos, inicialmente, o equilíbrio do bloco parcialmente imerso em um fluido de massa específica μ_f :



Para que se verifique o equilíbrio, o empuxo recebido pelo volume imerso do bloco (\vec{E}) deve equilibrar a força da gravidade (\vec{P}):

$$\vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$$

Ou, em módulo, temos: $E = P$

Lembrando que $E = \mu_f V_i g$, verificamos o seguinte:

$$\mu_f V_i g = P$$

Para a flutuação na água, temos:

$$\mu_a \frac{1}{2} V g = P \quad (\text{I})$$

Para a flutuação no óleo, temos:

$$\mu_o \frac{3}{4} V g = P \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), obtemos:

$$\mu_a \frac{1}{2} V g = \mu_o \frac{3}{4} V g \Rightarrow \mu_a = \frac{3}{2} \mu_o$$

$$\text{Portanto: } \frac{\mu_a}{\mu_o} = \frac{3}{2}$$

Resposta: $\frac{3}{2}$

14 Um bloco de gelo flutua na água, conforme representa a figura a seguir.



O gelo e a água encontram-se em equilíbrio térmico, num local em que a pressão atmosférica é normal. Demonstre que, se o gelo se fundir, o nível da água no recipiente na situação final não se alterará. Admita que na situação final a temperatura do sistema ainda seja de 0°C .

RESOLUÇÃO

Para que o gelo permaneça em equilíbrio, flutuando na água, seu peso deve ter módulo igual ao do empuxo recebido pela fração imersa de seu volume.

$$\text{Assim: } m_G g = \mu_A V_i g \Rightarrow m_G = \mu_A V_i \quad (\text{I})$$

Para que a água proveniente da fusão do gelo permaneça em equilíbrio, seu peso deve ter módulo igual ao do empuxo recebido.

$$\text{Assim: } m_A g = \mu_A V_A g \Rightarrow m_A = \mu_A V_A \quad (\text{II})$$

Considerando, entretanto, a conservação da massa do gelo que se funde, podemos escrever: $m_A = m_G$

Portanto, de (I) e (II), obtemos:

$$\mu_A V_A = \mu_A V_i \Rightarrow V_A = V_i$$

Concluimos, então, que o volume de água proveniente da fusão do gelo (V_A) é igual ao volume da fração imersa inicialmente na água (V_i). Assim, se o volume de água deslocado pelo gelo e pela água oriunda de sua fusão é o mesmo, podemos afirmar que o nível da água no recipiente não se alterará.

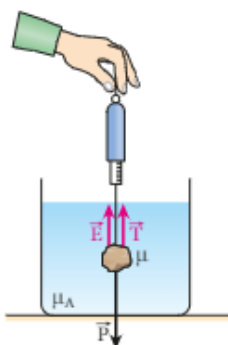
Resposta: Ver resolução.

15 Um estudante, utilizando uma balança de mola tipo dinamômetro, faz no ar e na água a pesagem de um corpo maciço, constituído de um metal de massa específica μ .

Sendo P a medida obtida no ar e μ_A a massa específica da água, determine a medida obtida na água.

RESOLUÇÃO

O peso aparente P_{ap} registrado pela balança corresponde à intensidade da força de tração exercida em suas extremidades. Com o corpo totalmente imerso na água, temos o esquema de forças da figura.



\vec{T} é a força de tração (peso aparente registrado pela balança);
 \vec{E} é o empuxo;
 \vec{P} é o peso.

Na situação de equilíbrio: $\vec{T} + \vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$
 Em módulo, temos:

$$T + E = P$$

$$\text{Logo: } T = P - E \Rightarrow P_{ap} = P - \mu_A V g \quad (\text{I})$$

$$\text{Sendo } \mu = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\mu} \quad (\text{II})$$

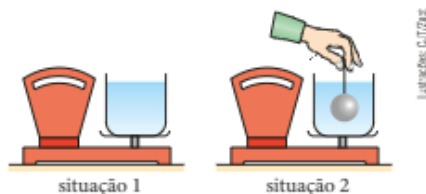
Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$P_{ap} = P - \mu_A \frac{m}{\mu} g \Rightarrow P_{ap} = P - \frac{\mu_A}{\mu} P$$

$$\text{Portanto: } P_{ap} = P \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu} \right)$$

Resposta: $P \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu} \right)$

16 Na situação 1 da figura a seguir, tem-se um recipiente com água em equilíbrio sobre o prato de uma balança que, nessas condições, indica 80 N. Na situação 2, uma esfera de chumbo de $2,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$ de volume é totalmente imersa na água, permanecendo suspensa por um fio de espessura desprezível sem contactar as paredes do recipiente.



Sabendo que a densidade da água vale $1,0 \text{ g/cm}^3$ e que $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a indicação da balança no caso da situação 2.

RESOLUÇÃO

Pelo fato de estar imersa na água, a esfera recebe o empuxo \vec{E} , força vertical e dirigida para cima, que corresponde à ação da água. Conforme a **Terceira Lei de Newton**, entretanto, ao empuxo \vec{E} deve corresponder uma reação $-\vec{E}$, e isso se verifica. A esfera reage na água com uma força de mesma intensidade que o empuxo, vertical e dirigida para baixo, que provoca aumento na indicação da balança.

A esfera está em equilíbrio, totalmente imersa na água. Nessas condições, ela interage com a água, havendo troca de forças de ação e reação.

A água age na esfera, aplicando-lhe a força \vec{E} (empuxo).

A esfera reage na água, aplicando-lhe a força $-\vec{E}$.



Sendo I' e I , respectivamente, as indicações final e inicial da balança, temos: $I' = I + E$

em que a intensidade E da força que a esfera troca com a água é calculada por: $E = \mu_a V g$

$$\text{Como } \mu_a = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$V = 2,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ e } g = 10 \text{ m/s}^2, \text{ obtemos:}$$

$$I' = I + \mu_a V g$$

$$I' = 80 + 1,0 \cdot 10^3 \cdot 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \text{ (N)}$$

$$\text{Assim: } I' = 82 \text{ N}$$

Resposta: 82 N

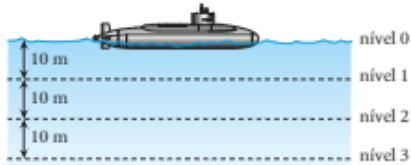


QUESTÕES PROPOSTAS



FAÇA NO CADERNO.

17. Um submarino, inicialmente em repouso em um local do nível 0 (superfície da água), indicado na figura, inunda seus compartimentos de lastro e afunda verticalmente, passando pelos níveis 1, 2 e 3. No local, a pressão atmosférica é normal (1,0 atm) e $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

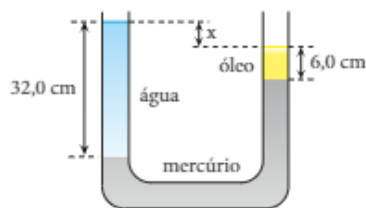


Sabendo que a densidade absoluta da água, suposta homogênea, é de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e considerando $1,0 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, faça o que se pede:

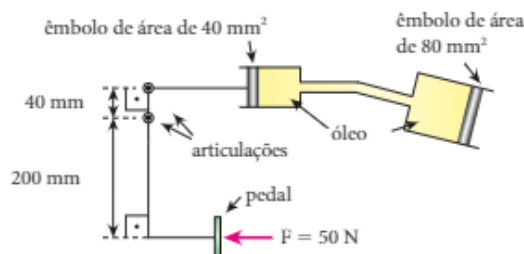
- calcule o acréscimo de pressão registrado pelos aparelhos do submarino quando ele desce de um dos níveis referidos para o imediatamente inferior;
- trace em seu caderno o gráfico da pressão total (em atm) em função da profundidade quando o submarino desce do nível 0 ao nível 3.

18. Na situação esquematizada fora de escala na figura, um tubo em U, longo e aberto nas extremidades, contém mercúrio, cuja densidade é $13,6 \text{ g/cm}^3$.

Em um dos ramos desse tubo, coloca-se água, de densidade $1,0 \text{ g/cm}^3$, até ocupar uma altura de 32,0 cm. No outro ramo, coloca-se óleo, de densidade $0,80 \text{ g/cm}^3$, que ocupa uma altura de 6,0 cm. Qual é o desnível x entre as superfícies livres da água e do óleo nos dois ramos do tubo?



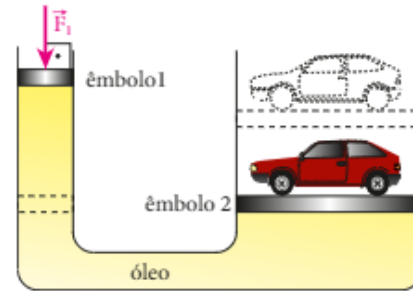
19. (Mack-SP) O diagrama abaixo mostra o princípio do sistema hidráulico do freio de um automóvel.



Quando uma força de 50 N é exercida no pedal, a força aplicada pelo êmbolo de área igual a 80 mm^2 é de:

- 100 N
- 250 N
- 350 N
- 400 N
- 500 N

20. Por meio do dispositivo da figura, pretende-se elevar um carro de massa $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ a uma altura de 3,0 m em relação à sua posição inicial. Para isso, aplica-se sobre o êmbolo 1 a força \vec{F}_1 indicada e o carro sobe muito lentamente, em movimento uniforme.



As áreas dos êmbolos 1 e 2 valem, respectivamente, $1,0 \text{ m}^2$ e 10 m^2 . No local, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando a ação da gravidade sobre os êmbolos e sobre o óleo e também os atritos e a compressibilidade do óleo, determine:

- a intensidade de \vec{F}_1 ;
- o trabalho da força que o dispositivo aplica no carro, bem como o trabalho de \vec{F}_1 .

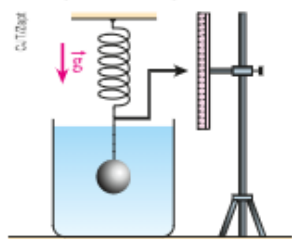
21. Como defesa contra submarinos e navios de grande calado, minas explosivas eram instaladas em diferentes profundidades, ancoradas ao fundo do mar e presas por fortes correntes verticais. Considere um desses dispositivos em equilíbrio silencioso a 8,0 m de profundidade à espera de algum esbarrão. Suponha que a massa da mina seja de 200 kg e seu volume corresponda a $1,0 \text{ m}^3$. Considere desprezíveis a massa e o volume da corrente de fixação.



- Seja de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ a densidade da água e de 10 m/s^2 a intensidade da aceleração da gravidade local, determine a intensidade do empuxo recebido pela mina, bem como a intensidade da força de tração na corrente que prende a mina ao fundo do mar.
- Suponha que os pinos detonadores da mina somente ativem o explosivo a pressões a partir de $5,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Considerando que a pressão atmosférica ao nível do mar tenha valor igual a $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, determine a pressão mínima que deve ser exercida pelo casco de uma embarcação para que a mina seja detonada.

22. Um bloco de gelo (densidade de $0,90 \text{ g/cm}^3$) flutua na água (densidade de $1,0 \text{ g/cm}^3$). Que porcentagem do volume total do bloco permanece imersa?

23. Quando a esfera de aço representada na figura a seguir é imersa inteiramente na água, observa-se que o ponteiro, rigidamente fixado à mola de constante elástica $K = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, sofre um deslocamento vertical de 1,0 cm.



Adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e admita que a densidade absoluta da água vale $1,0 \text{ g/cm}^3$ para responder às questões.

- o deslocamento sofrido pelo ponteiro é para cima ou para baixo?
- qual é o volume da esfera?

24. Um objeto maciço, de massa específica igual a $8,0 \text{ g/cm}^3$, está totalmente mergulhado em certo líquido e apresenta, nessas condições, um peso aparente igual a $\frac{3}{4}$ do seu peso no ar. Desprezando o empuxo do ar, calcule a massa específica do líquido em g/cm^3 .

25. Um barco de madeira de massa 500 kg é transportado de um rio para o mar. Supondo que a densidade da água do rio valha $1,00 \text{ g/cm}^3$ e que a da água do mar valha $1,03 \text{ g/cm}^3$, calcule a massa adicional que deve ser colocada sobre o barco para que o volume da parte imersa seja o mesmo, no rio e no mar.

26. O ano de 2015 foi marcado por uma grande crise humanitária. Sírios e refugiados de outras nacionalidades, em debandada maciça de conflitos e perseguições, deixaram seus lares e se lançaram a qualquer custo no Mediterrâneo, rumo a outras paragens, simplesmente em busca de uma chance para sobreviver. Muitas foram as embarcações que naufragaram nas diversas rotas rumo à Europa, o que vitimou milhares de pessoas, em muitos casos, famílias inteiras.

Barco com refugiados próximo a ilha grega de Lesbos. Outubro de 2015.



Considere um barco pesqueiro de massa total $M = 28$ toneladas que será utilizado por um grupo de refugiados para fazer a travessia entre o norte da África e a Grécia. Lotado com uma carga de n pessoas, ele consegue flutuar com um volume de casco submerso igual a 40 m^3 , que é o máximo admitido ainda seguro para a navegação.

Sabendo-se que a massa média de cada pessoa embarcada é de 60 kg e que a densidade da água do mar é de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, pede-se:

- Calcular o valor de n ;
- Determinar a massa de suprimentos e bagagens que deverá ser lançada ao mar para que o volume de casco submerso seja reduzido para 37 m^3 .



DESCUBRA MAIS

- Na construção de barragens e diques, a espessura desses retentores de água cresce uniformemente do topo para a base. Explique por quê.
- Explique detalhadamente o mecanismo que permite a sucção de um refrigerante utilizando-se um canudinho com comprimento próximo de 20 cm.
- Por que razão os meios gasosos não são tão eficientes para transmitir acréscimos de pressão como os meios líquidos?
- O que flutua em água com maior porcentagem de volume imerso: um cubo maciço de isopor com 1,0 m de aresta ou um cubo maciço de isopor com 10 cm de aresta? Justifique matematicamente sua resposta.
- Como as plumas de cisnes, gansos e patos, entre outras aves aquáticas, colaboram na flutuação dessas aves?
- Uma das etapas no treinamento de astronautas destinados à Estação Espacial Internacional (EEI) consiste em sua permanência dentro de uma enorme piscina onde são instaladas maquetes, em tamanho natural, de alguns engenhos que estarão presentes na missão. Vestidos em trajes semelhantes aos espaciais, os astronautas são levados a realizar operações delicadas e demoradas, que envolvem o uso de equipamentos sofisticados. Com isso, ficam minimizadas as possibilidades de erros nas situações reais. Por que esses treinamentos são realizados dentro da água?

A atmosfera terrestre

O manto fundamental que envolve o planeta Terra apresenta, dos gases que o constituem, as seguintes porcentagens: nitrogênio (N_2): 78,084%, oxigênio (O_2): 20,948%, argônio (A): 0,934%, dióxido de carbono (CO_2): 0,031%, neônio (Ne): 0,001818%, hélio (He): 0,000524%, metano (CH_4): 0,0002%, criptônio (Kr): 0,000114%, hidrogênio (H_2): 0,00005% e xenônio (Xe): 0,0000087%. Além desses gases, há outras substâncias e também muito vapor de água, um dos fatores determinantes do clima e dos fenômenos meteorológicos típicos de cada região.

Foto: De Agostini/Edizone



Do espaço, é possível ver a atmosfera como uma tênue camada azulada. Podemos fazer a seguinte analogia: a atmosfera está para a Terra, assim como a casca de uma maçã está para o fruto todo.

A atmosfera é uma espécie de escudo protetor que assegura e resguarda as condições de vida na Terra, protegendo o planeta da incidência de radiações nocivas e do bombardeio de corpos de diversos tamanhos que se estendem de partículas elementares e pequenos asteroides a meteoritos e corpos ainda maiores. Estes, ao invadirem o ar, são geralmente incinerados e desintegrados pelas forças de atrito. Diferentes moléculas absorvem radiações com comprimentos de onda distintos. Por exemplo, o oxigênio e o ozônio absorvem quase todos os comprimentos de onda mais curtos que 300 nanômetros (radiação ultravioleta e radiações mais energéticas, como raios X e raios γ). Já o vapor de água, absorve vários comprimentos de onda acima de 700 nanômetros (radiação infravermelha e radiações menos energéticas).

A massa total da atmosfera é estimada em $5,1 \cdot 10^{18}$ kg (compare este valor com o da massa da Terra, que é cerca de $5,9 \cdot 10^{24}$ kg). Essa massa fica "presa" ao planeta pela ação de forças gravitacionais. Isso significa que a atmosfera tem peso, exercendo forças de pressão contra a superfície terrestre, e essas forças determinam a chamada **pressão atmosférica**. Ao nível do mar, a pressão atmosférica vale, em média, 1,0 atmosfera (atm), o que equivale, aproximadamente, a $1 \cdot 10^5$ pascal (Pa), ou ainda, no sistema inglês de unidades, a 14,7 libras-força por polegada ao quadrado (psi). Embora não seja uma unidade física para medidas de pressão, costuma-se expressar essa grandeza em milímetros (ou centímetros) de mercúrio, obtendo-se para a pressão atmosférica ao nível do mar um valor que ronda 760 mmHg ou 76 cmHg.

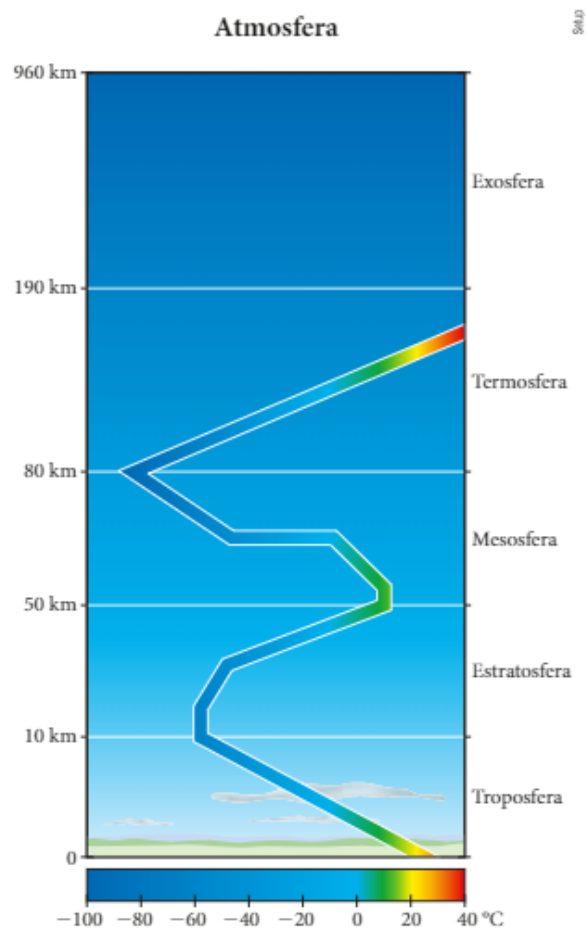
Os fenômenos atmosféricos são verificados de maneira mais notória até altitudes em torno de 120 km. Particularmente, a altitude de 100 quilômetros é conhecida como **linha Kármán**, sendo frequentemente utilizada como referência limite entre a atmosfera e o espaço exterior. À medida que se sobe, o ar fica cada vez mais rarefeito. Isso significa que há maior concentração de massa nas baixas altitudes. A densidade média do ar atmosférico é estimada em $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Camadas de nomes distintos e de diferentes constituições compõem a atmosfera da Terra. A camada mais baixa, que se estende do nível do mar até altitudes da ordem de 10 km, denomina-se **troposfera**. Aí se concentra praticamente todo o vapor de água.

Acima da troposfera vem a **estratosfera**, de ar muito rarefeito, mas rica em ozônio. Essa camada, que alcança altitudes próximas de 50 km, bloqueia grande parte das radiações solares, nocivas aos organismos vivos.

Sobre a estratosfera vêm, respectivamente, a **mesosfera**, a **ionosfera** e a **exosfera**, sendo as duas últimas camadas as principais responsáveis pela desintegração diária de milhões de meteoritos e pequenos asteroides que, provenientes do espaço, submetem-se à atração gravitacional terrestre.

No gráfico ao lado, está esboçado o comportamento da temperatura, em graus Celsius, em função da altitude a partir da superfície terrestre, expressa em quilômetros. É interessante observar que na termosfera, camada superior que compreende a ionosfera, a temperatura cresce, atingindo valores superiores a 40 °C, o que se deve a interações entre íons e outras partículas aí existentes com elétrons e diversas radiações vindas principalmente do Sol.



Compreensão, pesquisa e debate

1. A composição química da atmosfera terrestre foi sempre a atual desde a formação do planeta, há cerca de 4,5 bilhões de anos?
2. Algum planeta do Sistema Solar tem atmosfera semelhante à da Terra? Pesquise e descreva como é a composição do "ar" de Vênus e de Marte.
3. Antes da existência de vida na Terra, o planeta era mais vulnerável ao impacto de meteoritos e outros corpos celestes?
4. A existência de água no estado líquido na superfície da Terra tem alguma relação com a atmosfera do planeta?
5. Há cerca de 150 anos, a partir da Revolução Industrial iniciada no Reino Unido, a atmosfera terrestre tem recebido quantidades crescentes de gás carbônico (CO_2), fruto da queima de matas nativas e de combustíveis fósseis, como o carvão mineral e derivados do petróleo. Quais são as consequências disso para o planeta?



RESPOSTAS DAS QUESTÕES PROPOSTAS

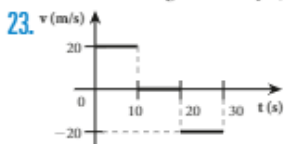
UNIDADE 1

CINEMÁTICA

Capítulo 1

Iniciação à cinemática escalar e movimento uniforme

3. a) 50 min
b) Vinte minutos antes do início ($t = 0$ s) da contagem de tempo.
c) 50 min
4. c
5. Se estivessem em um mesmo plano, os eclipses ocorreriam aproximadamente uma vez por mês, o que não é verdade.
6. d
7. c
8. c
9. 60 km/h
10. a) 0,87 m/s
b) 117,45 m
11. a) $\Delta t > 8$ h 18 min
b) Foi menor que 1,6 m/min.
12. 90 km/h
16. 222 m
17. a) $s_A = 20 + 11t$ (SI); $s_B = 90 + 4t$ (SI)
b) 10 s
c) $s_A = s_B = 130$ m
18. 9 h 15 min
19. a) 10 s
b) 15 s
20. a) 45 min
b) 54 min
c) A 120 km/h: aproximadamente 12,3 L;
a 100 km/h: aproximadamente 10,4 L.
d) A 120 km/h: 70,60 m;
a 100 km/h: 50,15 m.
21. 2,0 mm/s
22. a) **A** move-se no sentido da trajetória, enquanto **B** move-se em sentido contrário.
b) **A** e **B** se encontram.
c) **B** está na origem dos espaços.



24. 10 h

25. $v \geq 16$ m/s ou $v \leq 10$ m/s

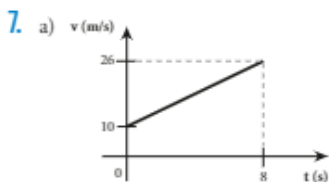
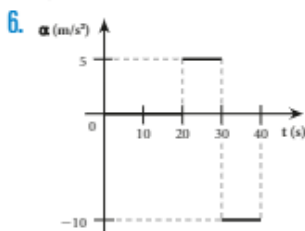
Capítulo 2

Movimento uniformemente variado

3. a) 15 m/s e 20 m/s², respectivamente.
b) 95 m/s
c) 10 s

4. a) $v = 20 - 2t$ (SI)
b) 10 s

5. 9,5 m/s



b) 144 m

14. a) 5,0 m/s²

b) $2,25 \cdot 10^3$ m

8. 20 m/s

15. 45 m

9. a) 14 s

16. d

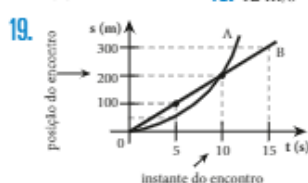
b) 70 m

10. 50 s

17. d

11. 40 s

18. 12 m/s



20. $1 \cdot 10^{15}$ m/s²

21. 40 m e 4 s, respectivamente.

22. 108 km/h

Capítulo 3

Movimento circular uniforme

3. 72 km/h

4. 30 cm

7. 2 Hz e 0,5 s, respectivamente.

8. 0,02 s

9. 0,12 m/s

10. $T_A = T_B$
 $f_A = f_B$
 $\omega_A = \omega_B$
 $v_B = 2v_A$

11. a) 15 rpm

b) 31 cm/s

12. a) 1 b) $\frac{r_1}{r_2}$

13. 5

14. a) 10000 rpm

b) $\frac{1}{2}$

15. $v = 108$ km/h

16. a) 2500 rpm

b) 45 rpm

Capítulo 4

Vetores e cinemática vetorial

5. a) 1 247

b) 3 568

6. a) 140 u

b) 20 u

c) 100 u

7. 5 u

8. 39 u

9. a) x

b) zero

10. a) 45 N

b) zero

11. a) $|\vec{S}| = 7,0$ N e $|\vec{D}| = 17$ N

b) $|\vec{S}| = 13$ N e $|\vec{D}| = 13$ N

12. Na direção

de t : 17,4 N

Na direção

de n : 10,0 N

13. a) 288 km/h

b) 8,0 s

c) 800 m

17. a) 4,5 km/h

b) 2,5 km/h

18. a) 5,0 m

b) 2,5 m/s

19. a) I e II

b) I e IV

c) I e III

20. a) 30 km/s

b) $6,0 \cdot 10^{-3}$ m/s²

21. a) 3,0 m/s

b) 5,0 m/s²

22. a) $|\vec{a}| = 12$ m/s²

b) O movimento é acelerado.

26. 8,0 m

27. a) 15 min; não.

b) 2,5 km

28. 120°

29. a) 30 km/h

b) 50 km/h

30. 13 cm/s

31. 4,0 cm/s

32. Ponto A:

200 km/h

Ponto B: zero

Ponto C:

140 km/h

33. a) $v = 2,0$ m/s e

$L = 3,0$ m

b) 75 rpm

UNIDADE 2

DINÂMICA

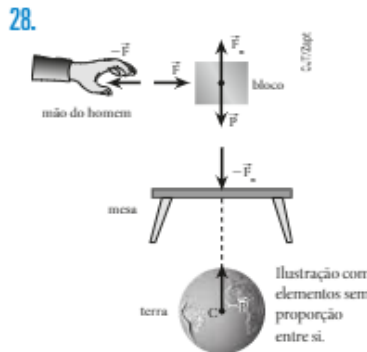
Capítulo 5

Princípios da Dinâmica

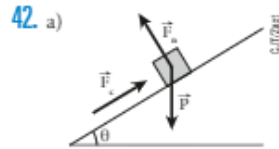
3. c

4. 3,0 m/s² na direção de \vec{F}_1 ou \vec{F}_2 e no sentido de \vec{F}_1 .

5. 116 N
 6. $3,6 \cdot 10^2 \text{ m/s}$
 7. a) $1,2 \text{ m/s}^2$
 b) 2,0 s
 20. a) $5,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$
 b) 20 m/s^2
 21. a) 3,0 kg
 b) Tração nula.
 22. a) $6,0 \text{ m/s}^2$
 b) 48 N
 23. a) De A para B.
 b) 10 m/s^2
 c) A orientação de \vec{v} está indeterminada, podendo ser de A para B ou de B para A.
 24. a) $v_1 = 50 \text{ m/s}$
 b) $k = 0,30 \text{ N s}^2/\text{m}^2$
 c) $7,5 \text{ m/s}^2$
 26. $\frac{M_1}{M_2} = 4$
 27. $5,0 \text{ m/s}^2$
 25. a) 6,0 cm
 b) 0,50 N/cm



29. d
 30. 1,0 m/s
 31. a) $2,0 \text{ m/s}^2$
 b) 4,0 N
 32. d
 33. 40 N
 34. a
 35. a) $2,0 \text{ m/s}^2$
 b) 8,0 N
 36. $T = \frac{3Mg}{2}$ e $F = \frac{Mg}{2}$
 37. a) $2,0 \text{ m/s}^2$
 b) 24 N
 c) 48 N
 38. $8,00 \cdot 10^{-1} \text{ s}$
 39. a) 770 N, 700 N e 630 N
 b) Peso aparente nulo.
 40. a) $9,8 \text{ m/s}^2$ e $2,2 \text{ m/s}^2$
 b) 588 N
 41. $1,6 \cdot 10^2 \text{ N}$



- b) 30 N e 40 N
 43. a) $5,0 \text{ m/s}^2$; a aceleração independe da massa.
 b) 1,0 s
 c) $5,0 \text{ m/s}$

Capítulo 6
Atrito entre sólidos

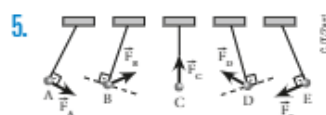
6. a) $2,0 \cdot 10^2 \text{ N}$
 b) 50 N
 7. a) 3,0 N
 b) 7 blocos
 8. $\theta = 45^\circ$
 9. 50 N

10.

F(N)	F _{at} (N)	a(m/s ²)
10	10	0
12	12	0
30	10	5,0

11. a) $2,0 \text{ m/s}^2$
 b) 100 m e 10 s
 12. a) $4,0 \text{ m/s}^2$
 b) 30 N
 13. a) $5,0 \text{ m/s}^2$
 b) 30 N
 14. a) 0,60
 b) $2,0 \text{ m/s}^2$
 15. a
 16. a) 7,0 s
 b) 10 m e 25 m
 17. a) 120 N
 b) 800 N
 18. Para baixo e 1,5 N.
 19. a) $3,0 \text{ m/s}^2$
 b) 1,2 s

Capítulo 7
Resultantes tangencial e centrípeta



6. d
 7. d
 8. 72 kN
 9. 90 km/h
 10. 3,0 m/s
 11. 2,0 m
 12. 20 N
 13. a) 2,0 N
 b) 12 N
 14. $\frac{1}{2} \sqrt{gR}$
 15. 15
 16. 30 N
 17. a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \tan \theta}}$

b) O período ficaria multiplicado por 2, já que ele é inversamente proporcional à raiz quadrada da intensidade da aceleração da gravidade.

Capítulo 8
Gravitação

4. b
 5. a) 24 h
 b) Aproximadamente 6,7 R.
 6. As pessoas e o avião possuem aceleração vetorial igual a \vec{g} .
 7. 20
 8. 90%
 9. a) aproximadamente 7,8 km/s
 b) Aproximadamente 89 min 33 s.
 10. a) 250 anos
 b) Aproximadamente 4,7 km/s.
 14. a) $4,0 \text{ m/s}^2$
 b) 5,0 m
 16. $\frac{1}{2}$
 17. $0,10 \text{ m/s}^2$
 15. 25 600 km

Capítulo 9
Movimentos em campo gravitacional uniforme (balística)

4. a) 7 s
 b) 70 m/s
 5. a) 40 m/s
 b) 80 m
 6. 30 m, 90 m e 150 m
 7. a) 4,9 m
 b) Não.
 8. a) 24 m/s
 b) 12 m/s²
 9. 32 m
 10. 8 m
 11. a) 0,7 s
 b) 1,4 m
 12. 1 m
 16. Fora do círculo de 9 km de raio e centro no ponto de lançamento.
 17. a) 4,0 m/s
 b) 1,2 s
 c) 3,0 m/s
 18. a) 4 s
 b) 120 m
 c) 40 m/s
 d) 30 m/s e 40 m/s, respectivamente.
 19. b = 3 m; d = 4 m
 20. a) $1,6 \cdot 10^3 \text{ m}$
 b) $2,0 \cdot 10^3 \text{ m}$
 c) Em relação ao avião, segmento de reta vertical. Em relação ao solo, arco de parábola.

21. Não aconteceu. $3,75 > 2,44$

22. a) 20 m/s e 12 m/s^2
 b) y(m)

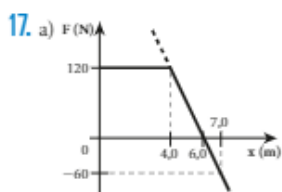


23. 60 m

Capítulo 10

Trabalho e potência

5. a) $1,0 \cdot 10^3$ J
b) $-1,0 \cdot 10^3$ J
6. $\tau_1 = 0, \tau_2 = 300$ J, $\tau_3 = 0$ e $\tau_4 = -250$ J
7. a) 30 N
b) $\omega = 5,0$ rad/s
c) O trabalho é nulo.
8. a) $4,0 \cdot 10^2$ J
b) $-1,0 \cdot 10^2$ J
c) $6,0 \cdot 10^2$ J
9. d
10. 5,0 m
11. -22 J
12. a) 5,0 m/s
b) 0,25
c) $4,0 \cdot 10^3$ N/m
13. a) 5,0 J
b) -5,0 J
c) $4,0 \cdot 10^3$ N/m
14. $p > \frac{v_0^2}{4g} + \frac{H}{2}$
15. $\frac{F_1}{F_2} = 200$
16. 10 m/s



17. a)
b) Aproximadamente 10,7 m/s.
21. 2,5 L
22. a) $5,5 \cdot 10^2$ J
b) $1,1 \cdot 10^2$ W
23. 100 m
24. a) 300 N
b) 150 N

Capítulo 11

Energia mecânica e sua conservação

4. $4,5 \cdot 10^{11}$ J
5. 10^5 J
6. b
7. Energia cinética: 80 J
Energia potencial: 40 J
8. c
9. a) $5,0 \cdot 10^3$ N/m
b) 300 N
c) 4,0 J
15. a) $2,0 \cdot 10^2$ J
b) 5,0 m
16. a) 20 J
b) 6,0 m/s
17. $v_0 = 8,0$ m/s
18. a) $-mgh$
b) $\frac{v_B}{v_C} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
19. a) 6,0 m/s
b) $h = 1,8$ m
20. a) 1,6 kJ
b) 8,0 m/s
21. $\left(\frac{d}{h}\right)_{\max} = \frac{4}{5}$
22. Aproximadamente 11,3 km/s.

23. a) 10 m/s
b) 72 N

Capítulo 12

Quantidade de movimento e sua conservação

4. c
5. a) A leoa não consegue êxito em seu ataque.
b) 4,0 m
c) $640 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. 4,0 m/s; 7,0 m/s; 4,0 m/s
7. a) $18 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
b) $3,6 \cdot 10^2$ J
8. a) 2,0 g
b) $5,6 \cdot 10^{-2}$ N
9. 40 N
10. a) $4,0 \cdot 10^2$ N
b) 20 cm
11. $2,0 \cdot 10^4$ N · s
12. a) 20 s
b) 1250 N
13. a) 60 m/s
b) $7,0 \cdot 10^2$ J
17. 2 min 30 s
18. a) $\frac{Q_{H1}}{Q_P} = 1$
b) 50 cm
c) 0,50 m/s e 0,75 m/s
19. $-1,0 \cdot 10^3$ m/s
20. a) 4,0 m/s para cima
b) 432 J
21. a

26. 0,50 m/s para a esquerda
27. b
28. a) 10 cm/s
b) 4,5 N · s
29. Bloco A: 1,0 m/s
Bloco B: 4,0 m/s
Bloco C: 12 m/s
30. 30,0 m
31. a) 2,0 m/s
b) 20 cm

32. $v_{\text{partícula 1}} = 2,0 \cdot 10^4$ m/s e
 $v_{\text{partícula 2}} = 1,0 \cdot 10^5$ m/s
33. a) A afirmação é falsa, pois seu veículo estava a 120 km/h.
b) 33,9 km/h

34. 0,20
35. 0,20 m ou 20 cm

UNIDADE 3

ESTÁTICA

Capítulo 13

Estática dos sólidos

4. 80 N
5. d
6. a) $20\sqrt{2}$ N
b) 20 N
11. 62

12. \vec{F}_4
13. 50 cm
14. 300 N
15. 125 N
16. a) 469 N e 469 N
b) 600 N
17. 135 N
18. a) 45 cm
b) 15 cm
19. a) Não é possível.
b) $F_n = 360$ N;
 $F_{at} = 135$ N

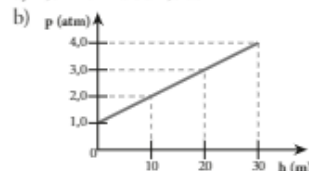
Capítulo 14

Estática dos fluidos

3. $\frac{P_A}{P_B} = \frac{1}{3}$
4. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2}$
5. a) $P_A = P_B = P_C$
b) $F_A = F_B = F_C$
6. d
7. a)

- b) Parede do fundo: $3,0 \cdot 10^3$ N;
Paredes laterais: $4,5 \cdot 10^2$ N.

8. a
9. Gás M: 90 cm Hg; Gás N: 20 cm Hg
10. 0,32 atm
11. $\alpha \cong 60^\circ$
17. a) $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm



- b)
18. 24,0 cm
19. e
20. a) $1,0 \cdot 10^3$ N
b) Os dois trabalhos valem $3,0 \cdot 10^4$ J.
21. a) Empuxo: $1,0 \cdot 10^4$ N
Força de tração: $8,0 \cdot 10^3$ N
b) $3,2 \cdot 10^5$ N
22. 90%
23. a) Para cima.
b) $1,0 \cdot 10^2$ cm³
24. 2,0 g/cm³
25. 15 kg
26. a) 200 pessoas
b) 3 toneladas



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, M. S.; FINN, E. J. *Física*. São Paulo: Blucher, 2014. v. 1 e 2.
- _____. *Física: um curso universitário*. São Paulo: Blucher, 2014.
- _____. *Fundamentos cuánticos y estadísticos*. Cidade do México: Addison Wesley, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.
- BRAZ JR., Dulcídio. *Física Moderna: tópicos para o Ensino Médio*. Campinas: Companhia da Escola, 2002.
- CANIATO, Rodolpho. *O céu*. Campinas: Átomo, 2011.
- CHAVES, Alaor. *Física básica*. Rio de Janeiro: LTC/LAB, 2007.
- CUTNELL, John D.; JOHNSON, Kenneth W. *Física*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 1, 2 e 3.
- EINSTEIN, Albert. *Como vejo o mundo*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2015.
- EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. *Física quântica*. Rio de Janeiro: Campus, 1994.
- FLEMING, Phyllis J. *Physics*. Reading (MA): Addison Wesley, 1978.
- GAMOW, George. *Gravidade*. São Paulo: Edart, 1973.
- GARCIA, Eduardo A. C. *Biofísica*. São Paulo: Sarvier, 2015.
- GIANCOLI, Douglas C. *Física, principios con aplicaciones*. Cidade do México: Prentice Hall Hispanoamericana, 2007.
- GROUEFF, S.; CARTEIR, J. P. *O enigma do cosmo*. Rio de Janeiro: Primor, 1978.
- GUAYDIER, Pierre. *História da Física*. São Paulo: Martins Fontes, 1983.
- GUIMBAL, Roger. *Le problème de la Physique*. Paris: Bordas, 1972.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos da física*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- HAYT, W. H. *Eletromagnetismo*. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- HECHT, E. *Óptica*. Lisboa: Fund. Calouste Gulbekian, 2002.
- HESSEB, Boris. *Las raíces socioeconómicas de la Mecánica de Newton*. Havana: Academia, 1985.
- KOESTLER, Arthur. *Os sonâmbulos*. São Paulo: Ibrasa, 1971.
- KÓSEL, S. *Problemas de Física*. Moscou: Mir, 1986.
- LANDAU, L.; KITAIGORODSKI, A. *Física para todos*. Moscou: Mir, 1967.
- LANDAU, L.; RUMER, Y. *Aprenda a Teoria da Relatividade brincando*. São Paulo: Hemus, 1970.
- LUCIE, Pierre. *Física básica*. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
- MATVEEV, A. N. *Electricidad y magnetismo*. Moscou: Mir, 1988.
- NUSSBAUM, Allen. *Comportamento eletrônico e magnético dos materiais*. São Paulo: Blucher, 1971.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de Física básica*. São Paulo: Blucher, 2013.
- OKUNO, E.; CALDAS, L. L.; CHOW, C. *Física para ciências biológicas e biomédicas*. São Paulo: Harbra, 1986.
- OREAR, Jay. *Física*. Rio de Janeiro: LTC, 1991.
- OSADA, Jun'ichi. *Evolução das ideias da Física*. São Paulo: Blucher/USP, 1972.
- PAIS, Abraham. *A ciência e a vida de Albert Einstein*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.
- PERELMAN, Y. *Física recreativa*. Moscou: Mir, 1987.
- PURCELL, E. M. *Curso de Física de Berkeley: eletricidade e magnetismo*. São Paulo: Blucher, 1981. v. 2.
- RONAN, Colin A. *História ilustrada da Ciência da Universidade de Cambridge*. São Paulo: Jorge Zahar, 1991.
- ROZEMBERG, I. M. *O sistema internacional de unidades (SI)*. São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologia, 2006.
- SAVELYEV, I. V. *Physics: a general course*. Moscou: Mir, 1980. v. 1 e 2.
- SERWAY, Raymond; JEWETT JR., John W. *Principios de Física*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.
- THE Visual Dictionary of Physics*. Toronto: Stoddart, 1995.
- TIPLER, Paul A. *Física*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978. v. 1 e 2.
- VAN WYLEN, G. J.; SONNTAG, R. E. *Fundamentos da Termodinâmica clássica*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1995.
- WALKER, Jearl. *O grande circo da Física*. Lisboa: Gradiva, 2001.
- WESTFALL, Richard S. *A vida de Isaac Newton*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1993.
- WHITE, Harvey E. *Física Moderna*. Barcelona: Montaner y Simón, 1979. v. 1 e 2.
- WILSON, Jerry. *Física*. Nova Jersey: Prentice Hall, 1996.
- WOLF, Jonathan S. *Physics*. Nova York: Barron's Educational Series, 1996.
- YOUNG, Hugh D. *Sears and Zemansky's University Physics*. Reading (MA): Addison Wesley, 2008.