XI Olimpíada do Cone Sul
Segundo Teste de Seleção
18 de março de 2000

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

▸ PROBLEMA 1

Prove que $a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$, para todos os a, b, c reais não negativos.

▸ PROBLEMA 2

Seja AD a bissetriz do ângulo A do triângulo ABC. Considere os pontos M, N sobre as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ respectivamente e tais que $\angle MDA \equiv \angle ABC$ e $\angle NDA \equiv \angle BCA$. Seja $\{P\} = AD \cap MN$. Prove que

$$AD^3 = AB.AC.AP.$$

▸ PROBLEMA 3

Eduardo e Mônica competem num tabuleiro $n \times n$. Eduardo começa colocando uma ficha sobre qualquer casa do tabuleiro. Em sua vez, cada jogador deve movimentar a ficha para qualquer casa vizinha ainda não visitada (duas casas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum). O jogador que não tiver opções de movimento perde. Determine qual dos jogadores pode ganhar sempre se

(a) $n = 2000$;

(b) $n = 2001$.

▸ PROBLEMA 4

Mostre que não existem inteiros positivos a e b tais que $(36a + b)(36b + a)$ seja uma potência de 2.