PROVA DE MATEMÁTICA

01) **(ITA-92)** Considere as funções $f:\Re^*\to\Re$, $g:\Re\to\Re$ e $h:\Re^*\to\Re$ definidas por: $f(x)=3^{x+\frac{1}{x}}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 81/x$. O conjunto dos valores de x em $\Re^*$ tais que $(fog)(x) = (hof)(x)$, é subconjunto de:
a) [0, 3] b) [3, 7] c) [-6, 1] d) [-2, 2] e) n.d.a.

Resolução

Dado que $f(x)=3^{x+\frac{1}{x}}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 81/x$, ***então, para todo $x \in R$, $x \neq 0$, vem:***

$$(fog)(x)=f(g(x))=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

$$(hof)(x)=h(f(x))=\frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}$$

portanto, $3^{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}$ ***(I)***

Fazendo $x+\frac{1}{x}=t$***, resulta*** $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ ***; então:***

de (I) vem: $3t^2-2=\frac{81}{3^t}$

ou seja: $3^{t^2-2}=3^{4-t}$
que é o mesmo que: $t^2 - 2 = 4 - r$
ou ainda que $t^2 + t - 6 = 0$.
Resolvendo, temos: $t = -3$ ***ou*** $t = 2$

Logo:
$$x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \therefore x=1$$

Então o conjunto solução S é:

$S=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2},1\right\}$***, que é subconjunto de [-6, 1]***

---

02) **(ITA-92)** O domínio da função: $f(x)=\log_{2x^2-3x+1}(3x^2-5x+2)$ é:
a) $(-\infty, 0)\cup(0, 1/2)\cup(1, 3/2)\cup(3/2, +\infty)$
b) $(-\infty, 1/2)\cup(1, 5/2)\cup(5/2, +\infty)$
c) $(-\infty, 1/2)\cup(1/2, 2/3)\cup(1, 3/2)\cup(3/2, +\infty)$
d) $(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$
e) n.d.a.

Resolução

É dado que $f(x)=\log_{2x^2-3x+1}(3x^2-5x+2)$***; aplicando as condições de existência de logaritmos, temos:***

$3x^2 - 5x + 2 > 0 \therefore x < 2/3$ ou $x > 1$ I
e
$2x^2 - 3x + 1 > 0 \therefore x < 1/2$ ou $x > 1$ II
e
$2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \therefore x \neq 0$ ou $x \neq 1/2$ III
O domínio de f(x) é I $\cap$ II $\cap$ III; portanto:
$x < 1/2$ ou $x > 1$ e $x \neq 0$ e $x \neq 3/2$ ou ainda:
$(-\infty,0) \cup (0,1/2) \cup (1,3/2) \cup (3/2, +\infty)$

---

03) **(ITA-92)** Dadas as funções $f:\Re\to\Re$ e $g:\Re\to\Re$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere h = fog. Então podemos afirmar que:
a) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
b) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
c) h é estritamente crescente, mas não necessariamente inversível.
d) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.
e) nda

Resolução
I - f é estritamente decrescente
II - g é estritamente decrescente
III - f é sobrejetora
IV - g é sobrejetora
V - h = fog
e sabendo-se que:
VI - Toda função real de variável real que é estritamente crescente ou estritamente decrescente é uma função injetora.
Então:
De V podemos escrever que, se $\{x_1, x_2\} \in R$ com $x_1 > x_2$, então $h(x_1) = f(g(x_1))$ e $h(x_2) = f(g(x_2))$; fazendo $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$, de II conclui-se que $y_1 < y_2$ e, portanto, $h(x_1) = f(y_1)$ e $h(x_2) = f(y_2)$; de I concluímos que $h(x_1) > h(x_2)$, pois $f(y_1) > f(y_2)$.
CONCLUSÃO 1: $x_1 > x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$. Logo h é estritamente e, portanto, de VI segue-se que h é injetora.
De IV temos:
$\forall y, y \in R, \exists x, x \in R \therefore y = g(x)$ (*)
logo: $h(x) = f(g(x)) = f(y)$
De III temos:
$\forall z, z \in R, \exists y, y \in R \therefore z = f(y)$ (**)
logo: $h(x) = z$
de (*) e (**) conclui-se que
$\forall z, z \in R, \exists x, x \in R \therefore z = h(x)$,
portanto h é função sobrejetora
CONCLUSÃO 2: Sendo h uma função sobrejetora e injetora (conclusão 1), então h é bijetora; logo, é inversível.
Seja h^{-1} a função inversa de h; pela definição de função inversa, para x_1, x_2, y_1 e y_2 reais, vem
$y_1 = h(x_1) \Rightarrow x_1 = h^{-1}(y_1)$
$y_2 = h(x_2) \Rightarrow x_2 = h^{-1}(y_2)$
$x_1 > x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$ (CONCLUSÃO 1),
então:
$h^{-1}(y_1) > h^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 > y_2$

***CONCLUSÃO 3.** h^{-1} é estritamente crescente; portanto, das conclusões 1, 2 e 3, resulta que a alternativa correta é A.*

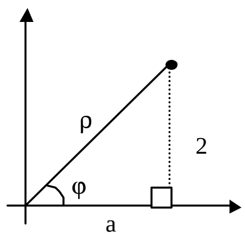
04) **(ITA-92)** Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $(0, \pi/2)$. Sendo S o conjunto dos valores de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

a) 4 b) $4/\sqrt{3}$ c) 8 d) $8/\sqrt{3}$ e) n.d.a.

Resolução

***Sejam** ρ e φ respectivamente o módulo e o argumento de z e suponhamos $a \in R$.*

Assim:



$z^6 = \rho^6 . [\cos.(6\varphi) + i\,\text{sen}(6\varphi)]$

Para z^6 ser número real: $\text{sen}(6\varphi) = 0 \therefore 6\varphi = h\pi \therefore \varphi = \dfrac{k\pi}{6}$, $h \in Z$.

Como $\varphi \in (0, \pi/2)$; $\varphi = \pi/6$ *ou* $\varphi = \pi/3$

Portanto: $tg\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{a} \therefore a = \dfrac{2}{tg\pi/6}$ *ou* $tg\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{a} \therefore a = \dfrac{2}{tg\pi/3}$

Logo o produto dos valores de a é:

$$a_1 \bullet a_2 = \frac{2}{tg\pi/6} \bullet \frac{2}{tg\pi/3} = 4$$

05) **(ITA-92)** Sabe-se que $2(\cos \pi/20 + i\,\text{sen}\,\pi/20)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \dfrac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$. Um subconjunto de S é:

a) $\{2^{1/2}(\cos 7\pi/8 + i\,\text{sen}\,7\pi/8), 2^{1/2}(\cos \pi/8 + i\,\text{sen}\,\pi/8)\}$
b) $\{2^{1/2}(\cos 9\pi/8 + i\,\text{sen}\,9\pi/8), 2^{1/2}(\cos 5\pi/8 + i\,\text{sen}\,5\pi/8)\}$
c) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i\,\text{sen}\,7\pi/4), 2^{1/4}(\cos \pi/4 + i\,\text{sen}\,\pi/4)\}$
d) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i\,\text{sen}\,7\pi/8), 2^{1/4}(\cos \pi/8 + i\,\text{sen}\,\pi/4)\}$
e) n.d.a.

Resolução

Do enunciado: $w = 2^5 . (\cos\dfrac{5\pi}{20} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{20}) = 32 . (\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}) = 16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}\,.\,I$

A equação fica:

$$z^4 - 2z^2 + \frac{16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$$

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 \therefore z^2 = \frac{2 \pm 2i}{2} \left\langle \begin{array}{l} z^2 = 1 + i \\ z^2 = 1 - i \end{array} \right.$$

$$z^2 = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}) \left\langle \begin{array}{l} z = 2^{1/4}.(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}) \\ z = 2^{1/4}.(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}) \end{array} \right.$$

ou

$$z^2 = 1 - i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} z = 2^{1/4}.(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8}) \\ z = 2^{1/4}.(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{15\pi}{8}) \end{array} \right.$$

06) **(ITA-92)** Considere a equação:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{onde:}$$

$F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2}$ e $G(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, com $x \in R$, $x \neq 0$.

Sobre as raízes reais dessa equação, temos:

a) Duas delas são negativas.
b) Uma delas é um número irracional.
c) Uma delas é um número par.
d) Uma delas é positiva e outra negativa.
e) n.d.a.

Resolução

A equação dada é equivalente à seguinte:

$$2 \bullet \det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0,$$

onde o determinante obtido é um determinante de Vandermonde. Portanto:

2 . (G(x) - 2x) . (G(x)) - F(x)) . (2x - F(x)) = 0 ou seja:

G(x) = 2x ou G(x) = F(x) ou F(x) = 2x ou ainda:

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 2x \text{ ou } \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2} \text{ ou}$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2} = 2x$$

Logo:

$x^2 - 1 = 2x^2$ ou $x^3 - x = x^4 + x^3 - x + 1$ ou $x^4 + x^3 - x + 1 = 2x^3$, obtendo:

$x^2 = -1$ ou $x^4 = -1$ ou $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$, isto é $(x - 1)(x^3 - 1) = 0$, cuja única solução real é 1.

07) **(ITA-92)** Sejam a e b constante reais. Sobre a equação: $x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$ podemos afirmar que:

a) Não possui raiz real se $a < b < -3$.
b) Não possui raiz real se $a > b > 3$.
c) Todas as raízes são reais se $|a| \geq 2$ e $|b| \geq 2$.
d) Possui pelo menos uma raiz real se $-1 < a \leq b < 1$.
e) n.d.a.

Resolução

Na equação dada:

$x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$,

x = 0 não é solução; então, dividindo cada termo por x^2 e agrupando convenientemente, temos:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - (a - b)\left(x + \frac{1}{x}\right) + ab + 2 = 0\,.$$

Fazendo $x + \frac{1}{x} = m \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2$***; resulta:*** $m^2 - (a + b)m + ab = 0$***, donde:*** $m = a$ ***ou*** $m = b$.

Então:

$$x + \frac{1}{x} = a \therefore x^2 - ax + 1 = 0$$

ou

$$x + \frac{1}{x} = b \therefore x^2 - bx + 1 = 0$$

Estas equações terão soluções reais se, e somente se, $a^2 - 4 \geq 0$ ***e*** $b^2 - 4 \geq 0$***, ou seja:***

$a \leq -2$ ***ou*** $a \geq 2$ ***e*** $b \leq -2$ ***ou*** $b \geq 2$***, que é o mesmo que:***

$|a| \geq 2$ ***e*** $|b| \geq 2$.

---

08) **(ITA-92)** Numa progressão geométrica de razão inteira $q > 1$. Sabe-se que $a_1a_n = 243$, $\log_q a_n$ e $\log_q a_n = 6$, onde na é o enésimo termo de progressão geométrica e a_n é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\frac{3^9 - 1}{6}$ b) $\frac{3^{10} - 1}{6}$ c) $\frac{3^8 - 1}{6}$

d) $\frac{3^9 - 1}{3}$ e) n.d.a.

Resolução

Podemos escrever:

$P_n = (a_1.a_n)^{n/2} \therefore \log_q P_n = \log_q (a_1.a_n)^{n/2}$

$\therefore \log_q P_n = \frac{n}{2}(\log_q a_1 + \log_q a_n) \therefore 20 = \frac{n}{2}(\log_q a_1 + 6)$

$\therefore n \log_q a_1 = 40 - 6n$ ***(I)***

$P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}} \therefore \log_q P_n = n \log_q a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \log_q q \therefore$

$\therefore 20 = n \log_q a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$ ***(II)***

Substituindo (I) em (II):

$20 = 40 - 6n + \frac{n(n-1)}{2}$

$n^2 - 13n + 40 = 0 \Rightarrow n = 8$ ***ou*** $n = 5$

Para n = 8 em (I), temos:

$8. \log_q a_1 = 40 - 48 \therefore a_1 = 1/q$

É dado que: $a_1.a_8 = 243 \therefore 1/q.1/q.q^7 = 243 \therefore q = 3$ ***e*** $a_1 = 1/3$

Para n = 5 em (I), temos:

$5. \log_q a_1 = 40 - 30 \therefore a_1 = q^2$

Ora, $a_1.a_5 = 243 \therefore q^2. q^2. q^4 = 243 \therefore q = \sqrt[8]{3^5}$ ***(não convém)***

Logo $n = 8$, $q = 3$ ***e*** $a_1 = 1/3$***. Sendo assim a soma*** S_8 ***será:***

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} \therefore S_8 = \frac{\frac{1}{3}(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^8 - 1}{6}$$

---

09) **(ITA-92)** Sejam a, b, c, d números reais não nulos que estão nesta ordem em progressão aritmética. Sabendo que o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4.2^a.x + 2^c.y = \frac{2}{3}.2^b \\ 3^d.x + 9.3^b.y = 81 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, podemos afirmar que a soma desta progressão aritmética é:

a) 13 b) 16 c) 28 d) 30 e) n.d.a.

Resolução

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} 2^{a+2}.x + 2^c.y = \frac{2^{b+1}}{3} \\ 3^d.x + 3^{b+2}.y = 3^4 \end{cases} \qquad .\left(\frac{-3^d}{2^a + 2}\right)$$

$$\begin{cases} 2^{a+2}.x + 2^c.y = \frac{2^{b+1}}{3} \\ \left(3^{b+2} - \frac{2^c.3^d}{2^{a+2}}\right).y = 3^4 - \frac{2^{b+1}.3^d}{3.2^{a+2}} \end{cases}$$

Sendo o sistema possível e indeterminado:

$3^{b+2}.2^{a+2} = 2^c.3^d$ ***(I)***

e

$3^5.2^{a+2} = 2^{b+1}.3^d$ ***(II)***

Como (a,b,c,d) é PA:

$$\begin{cases} b = a + r \\ c = a + 2r \\ d = a + 3r \end{cases}$$

Assim:

De (I): $3^{a+r+2}.2^{a+2} = 2^{a+2r}.3^{a+3r} \therefore 3^{-2r+2}.2^{-2r+2} = 1 \therefore 6^{-2r+2} = 1 \therefore$

$\therefore -2r + 2 = 0 \therefore r = 1$

Em (II): $3^5 . 2^{a+2} = 2^{a+r+1}.3^{a+3r}$ ***substituindo r = 1, vem:***

$3^5.2^{a+2} = 2^{a+2}.3^{a+3} \therefore a = 2.$

Logo: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$.

$a + b + c + d = 14$

---

10) **(ITA-92)** Seja $A \in M_{3x3}$ tal que $\det A = 0$. Considere as afirmações:

I- Existe $X \in M_{3x1}$ não nula tal que AX é identicamente nula.

II- Para todo $Y \in M_{3x1}$, existe $X \in M_{3x1}$ tal que $AX = Y$.

III- Sabendo que $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}$ então a primeira linha da transposta de A é $\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Temos que:

a) Todas são falsas.

b) Apenas II é falsa.

c) Todas são verdadeiras.

d) Apenas I e II são verdadeiras.

e) n.d.a.

Resolução

Sendo $A \in M_{3 \times 3}$***, a equação matricial AX = B, onde X,*** $X \in M_{3 \times 1}$ ***(matriz incógnita) e B,*** $B \in M_{3 \times 1}$***, é equivalente a um***

sistema linear em que A é a matriz dos coeficientes e B a matriz dos termos independentes:
Assim:
A afirmação I é verdadeira, pois:
Sendo B = 0 e det A = 0, o sistema obtido de AX = B é homogêneo, possível e indeterminado. Portanto $\exists X, X \in M_{3 \times 1}$ não nula tal que AX é identicamente nula.
A afirmação II é falsa, pois:
Sendo detA = 0, o sistema obtido de AX = B, pode ser possível e indeterminado ou impossível, dependendo de B. Portanto podemos afirmar que, para um dado Y, nem sempre existe X tal que AX = Y.
A afirmação (III) é verdadeira, pois:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}$$ ***; segue-se que:*** $$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^t A^t=\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}^t$$ ***, ou seja:***

[1 0 0] $\cdot$ A = [5 1 2]; indicando o 1º membro por [a.,b,c], temos: [a b c] = [5 1 2]
Assim[a b c] com a = 5, b = 1 e c = 2 é uma matriz linha cujos elementos, nesta ordem, coincidem com os elementos da 1ª linha de A^t.
Das análises, conclui-se que a alternativa B é a correta

11) **(ITA-92)** Seja C = { X ∈ M_{2x2}; $X^2 + 2X = 0$}. Dadas as afirmações:
I- Para todo X ∈ C e C, (X + 2I) é inversível.
II- Se X ∈ C e det(X + 2I) ≠ 0 então X não é inversível.
III- Se X ∈ C e det X ≠ 0 então det X > 0.
Podemos dizer que:
a) Todas são verdadeiras.
b) Todas são falsas.
c) Apenas II e III são verdadeiras.
d) Apenas I é verdadeira.
e) n.d.a.

Resolução
Temos:
$X^2 + 2X = O$, onde O é a matriz nula, ou seja, $X(X + 2I) = O$
Pelo teorema de Binet, podemos escrever:
det X . det(X + 2I) = 0 (*)
Nestas condições temos que:
A afirmação (I) é falsa, pois:
De (*) podemos ter uma matriz X, X $\in$ C, tal que det (X + 2I) = 0, donde conclui-se que nem sempre X + 2I é inversível.
A afirmação (II) é verdadeira, pois:
Sendo det (X + 2I) $\neq$ 0; de (*) conclui-se que det X = 0, ou seja, X não é inversível.
A afirmação (III) é verdadeira, pois:
$X^2 + 2X = O$ isto é: $X^2 = -2X$
Assim: (det X^2) = $(-2)^2$. detX = 4 . detX
E, como det X $\neq$ 0, conclui-se que det X = 4, ou seja, det X > 0.
Das análises, conclui-se que a alternativa correta é C.

12) **(ITA-92)** A igualdade $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m=64$ é válida para:
a) Quaisquer que sejam n e m naturais positivos.
b) Qualquer que seja n natural positivo e m = 3.
c) n = 13 e m = 6.
d) n ímpar e m par.
e) n.d.a.

Resolução

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m=64$$

$$\therefore 7^n.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k.1^{n-k}+2^m.\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}.1^j.1^{m-j}=64$$

Pela fórmula do binômio de Newton, podemos escrever:
$7^n . (-1 + 1)^n + 2^m . (1 + 1)^m = 64$
$\therefore$ $7^n . 0 + 2^m . 2^m = 64$ (supondo n $\in$ N*).
$\therefore$ $2^{2m} = 2^6$ $\therefore$ 2m = 6 $\therefore$ m = 3

13) **(ITA-92)** No desenvolvimento $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, a soma do 2º termo com 1/10 do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = (1/4)^{z-1/2}$, então:
a) z ∈ [0, 1]
b) z ∈ (20, 50)
c) z ∈ (-∞ , 0]
d) z ∈ [1, 15]
e) n.d.a.

Resolução
O termo geral do desenvolvimento de $(x + y)^6$, segundo expoentes descrescentes de x, é: $T = (6/p)\, y^p x^{6-p}$.
Fazendo p = 1, temos como 2º termo: $(6/1)\, y^1x^5$.
Fazendo p = 3, temos como termo de maior coeficiente: $(6/3)\, y^3x^3$.
A soma dos coeficientes de $(x + y)^6$ é obtida fazendo-se x = y = 1. Logo, tal soma é $(1 + 1)^6 = 64$.
Pelo enunciado, devemos ter:
$(6/1)yx^5 + 1/10 . (6/3)y^3x^3 = 8 . 64 \Rightarrow 6yx^5 + 1/10 . 20y^3x^3 = 512$
$\therefore 6yx^5 + 2y^3x^3 = 512 \therefore 3yx^5 + y^3x^3 = 256$.
Como $x = 2^{z+1}$ e $y = (1/4)^{z-1/2} = 4^{1/2-z} = 2^{1-2z}$ resulta:
$3.(2^{1-2z}) (2^{z+1})^5 + (2^{1-2z})^3 . (2^{z+1})^3 = 256$
$\therefore 3.2^{1-2z}.2^{5z+5} + 2^{3-6z} . 2^{3z+3} = 256$
$\therefore 3. 2^{6+3z} . 2^{6-3z} = 256$; dividindo ambos os membros por 2^6:
$3. 2^{3z} . 2^{-3z} = 4$
Fazendo $2^{3z} = t$, temos:
$3t + 1/t = 4 \therefore 3t^2 - 4t + 1 = 0 \therefore t = 1$ ou $t = 1/3$
Logo:
$2^{3z} = 1 \Rightarrow z = 0$ (I)
$2^{3z} = 1/3$, como 1/2 > 1/3 > 1/4, temos que
$2^{-2} < 2^{3z} < 2^{-1} \Rightarrow -2 < 3z < -1$
$-2/3 < z < -1/3$ (II)
Assim, temos que z $\in$]-2/3, -1/3[$\cup$ {0}.
Como o conjunto]-2/3,-1/3[$\cup$ {0} é subconjunto de] $-\infty$,0], podemos afirmar que z $\in$] $-\infty$,0].

14) **(ITA-92)** Seja $\alpha = \frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. O conjunto solução da desigualdade $2^{\text{sen}\,x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$ no intervalo [0, 2π) é:
a)]0, π/3] ∪ [2π/3, 2π)
b) [0, 7π/6] ∪ [11π/6, 2π)
c) [0, 4π/3] ∪ [5π/3, 2π)
d) [0, π/6] ∪ [5π/6, 2π)
e) n.d.a.

Resolução

$$\alpha = \frac{1}{2}.\frac{\log 2}{\log 2 - \log 3} = \frac{\log 2}{2.\log(2/3)}$$

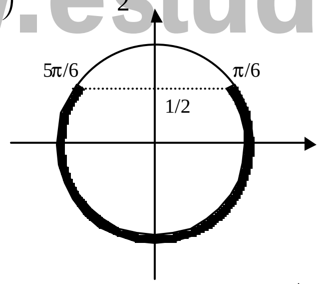
$$2^{\text{sen}\,x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \log 2^{\text{sen}\,x} \le \log\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \therefore \text{sen}\,x.\log 2 \le \alpha\left(\frac{2}{3}\right)$$

Substituindo o valor de α:

$$\text{sen}\,x.\log 2 \le \frac{\log 2}{2.\log(2/3)}.\log\left(\frac{2}{3}\right) \therefore \text{sen}\,x \le \frac{1}{2}$$

Na circunferência trigonométrica:

S = [0,π/6] ∪ [5π/6,2π)



15) **(ITA-92)** Sabendo-se que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que cos x = 5/6 e cos y = 4/5, então se α = x - y e $T = \sqrt{\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} + \text{sen}^2\alpha}$, temos que:

a) α está no 4º quadrante e T = 2/3.
b) α está no 1º quadrante e T = 2/3.
c) α está no 1º quadrante e T = 2/3 + $\sqrt{11}/10$.
d) α está no 4º quadrante e T = 2/3 - $\sqrt{11}/10$.
e) n.d.a.

Resolução

$$T = \sqrt{\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} + \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{\frac{1-\text{tg}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha.\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha}{\sec^2\alpha}} = \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha|$$

Temos ainda que:

$$\alpha = x - y \therefore \begin{cases} \cos\alpha = \cos x\cos y + \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y \\ \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,x\cos y + \text{sen}\,y\cos x \end{cases}$$

Pela relação fundamental e os dados:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{\sqrt{11}}{6} \\ \cos y = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}\,y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Assim:

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}.\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{11}}{6}.\frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10} > 0 \quad \textit{e}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}.\frac{4}{5} - \frac{3}{5}.\frac{5}{6} = \frac{4\sqrt{11}-15}{30} < 0$$

Logo:

$T = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10}$ ***é α está no 4º quadrante.***

16) **(ITA-92)** Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B}$ = 60º. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

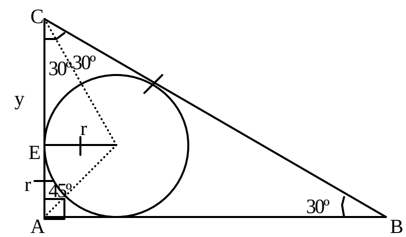
a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm b) $1+\sqrt{3}$ cm c) $2+\sqrt{3}$ cm
d) $1+2\sqrt{2}$ cm e) n.d.a.

Resolução

Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC.
No triângulo retângulo BED, temos:

$$\text{sen}\,30^o = \frac{r}{1} \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{y}{1} \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



No triângulo retângulo ABC, temos $\hat{C} = 30^o$ ***e*** $\overline{AB} = r + y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Sendo $\text{sen}\,30^o = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}; \frac{1}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\overline{BC}} \therefore \overline{BC} = (1+\sqrt{3})$ ***em cm.***

17) **(ITA-92)** A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta y = mx, m > 0, forma com o eixo dos x é:

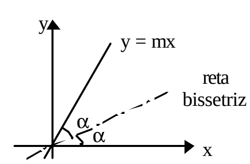
a) $y = \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$ b) $y = \frac{1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

c) $y = \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$ d) $y = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

e) n.d.a.

Resolução

De acordo com o enunciado, temos:



Sendo tg α o coeficiente angular da reta bissetriz, tem-se que tg α > 0.
Como tg 2α = m, podemos escrever:

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = m \therefore m.\text{tg}^2\alpha + 2\text{tg}\alpha - m = 0$$

Resolvendo, obtêm-se:

$$\text{tg}\alpha = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m} \quad \text{ou} \quad \text{tg}\alpha = \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m} \quad \textit{(não convém)}$$

Assim, uma equação da reta bissetriz é:

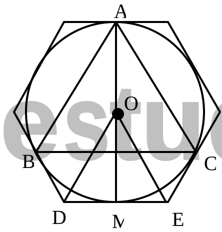
y - 0 - tgα (x - 0), ou seja: $y = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}.x$

18) **(ITA-92)** A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cuja apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:

a) ½ b) 1 c) 1/3 d) 3/8 e) n.d.a.

Resolução
Temos que:

$\overline{MN} = \overline{ON} = \dfrac{\overline{AO}}{2}$ ***= 5cm (pois "O" é baricentro do triângulo ABC).***



Logo, $\overline{AN}$ ***= 15cm***
Sejam:

- ***S a área do hexágono***
- ***S_1 a área do triângulo ABC***
- ***S_2 a área do triângulo ODE***

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim sendo, como os triângulos ABC e ODE são equiláteros, temos:

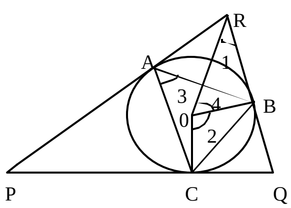
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$$

Comentário:
Como a área S do hexágono é igual a $6S_2$, temos:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{S_1}{6S_2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{8}$$

19) **(ITA-92)** Considere o triângulo PQR ao lado, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangência são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:

a) 40°, 120°, 60° e 50°.
b) 40°, 100°, 50° e 40°.
c) 60°, 140°, 60° e 40°.
d) 60°, 120°, 40° e 50°.
e) n.d.a.



Resolução

Se os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ ***estão, nesta ordem, em P.A. de razão 20º, então:***

$\hat{P} = \hat{Q} - 20$ ***e*** $\hat{R} = \hat{Q} + 20$ ***(I)***

Sendo $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180°$ ***resulta***

$$\hat{Q} - 20° + \hat{Q} + \hat{Q} + 20° = 180° \therefore 3\hat{Q} = 180° \therefore \hat{Q} = 60°$$

Em (I), $\hat{R} = 80°$.

Sendo o triângulo PQR circunscrito à circunferência de centro O, então os pontos A, B e C são os respectivos pontos de tangência dos lados PR, RQ e PQ e O é o incentro do triângulo PQR.

Como $\overrightarrow{RO}$ ***é bissetriz do ângulo*** $P\hat{R}Q$ ***, resulta*** $m(\hat{1})$ ***= 40º.***

Do triângulo ROB, retângulo em $\hat{B}$***,*** $m(\hat{4})$ ***= 50º.***

O quadrilátero BOCQ é inscritível numa circunferência, porque $\hat{B} = \hat{C} = 90°$***. Assim,*** $m(\hat{2}) + \hat{Q} = 180°$***, ou seja,*** $m(\hat{2}) + 60° = 180° \therefore m(\hat{2}) = 120°$.

O ângulo $B\hat{A}C$ ***está inscrito na circunferência de centro O e seu ângulo central*** $B\hat{O}C$ ***mede 120º, logo*** $m(\hat{3}) = \frac{1}{2}.120° = 60°$.

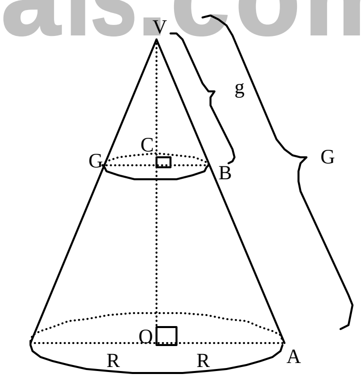
Portanto, $m(\hat{1}) = 40°$, $m(\hat{2}) = 120°$, $m(\hat{3}) = 60°$ e $m(\hat{4}) = 50°$.

20) **(ITA-92)** Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288°. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:

a) $16\pi\,cm^2$ b) $\frac{308\pi}{9}\,cm^2$ c) $\frac{160\pi}{3}\,cm^2$
d) $\frac{100\pi}{9}\,cm^2$ e) n.d.a.

Resolução
O ângulo central θ da superfície lateral desenvolvida sobre um plano mede 288º e, em radianos, $\frac{8\pi}{5}$.

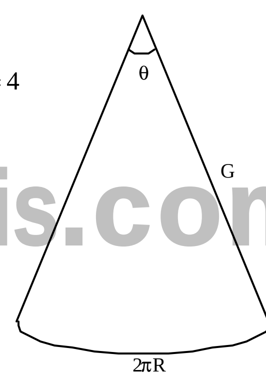
Por outro lado, $\theta = \frac{2\pi R}{G} \therefore \frac{2\pi R}{G} = \frac{8\pi}{5}$ ***(1)***



Do enunciado:
2R + 2G = 18 ∴ R + G = 9 ∴ G = 9 - R (2)

De (1) e (2), vem:

$$\frac{2\pi R}{9-R} = \frac{8\pi}{5} \therefore R = 4$$



Em (2), G = 5

Considerando-se o tronco, temos: $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4}{9} \therefore \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

Logo, $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{3}\therefore r=\dfrac{8}{3}$.

ΔVCB ~ ΔVOA ⇒ $\dfrac{g}{G}=\dfrac{2}{3}\therefore\dfrac{g}{5}=\dfrac{2}{3}\therefore g=\dfrac{10}{3}$

Portanto, a área lateral A_l do tronco é:

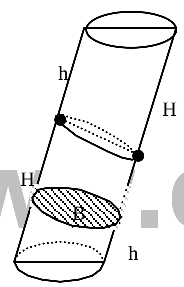
$$A\lambda=\pi RG-\pi rg=\pi.4.5-\pi.\frac{8}{3}.\frac{10}{3}\therefore A\lambda=\frac{308\pi}{9}\text{cm}^2$$

21) **(ITA-92)** Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente, h cm e H cm. Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de 1/3 em relação ao seu volume original. Deste modo:

a) 2H = 3h b) H = 2h c) H = 3h
d) 2H = 5h e) n.d.a.

Resolução

O volume V de um tronco de cilindro é a metade do volume de um cilindro cuja seção plana que contém o eixo é um paralelogramo cujas bases medem H + h, ou seja,



$V=\dfrac{1}{2}B.(H+h)$ ***, onde B é a área de uma seção reta.***

Duplicando a base menor, temos:

$$V'=V+\frac{1}{3}V=\frac{4}{3}V$$

Logo,

$$\frac{1}{2}.B.(H+2h)=\frac{4}{3}.\frac{1}{2}.B.(H+h)$$

$$\therefore 3(H+2h)=4(H+h)\therefore 3H+6h=4H+4h\therefore H=2h$$

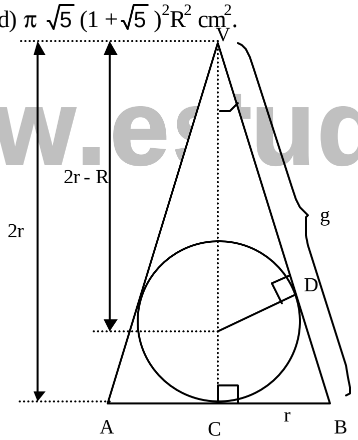
22) **(ITA-92)** Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio R cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:

a) $\pi(1+\sqrt{5})^2R^2/4$ cm². b) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2R^2/4$ cm².
c) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})R^2/4$ cm². d) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2R^2$ cm².
e) n.d.a.

Resolução

Seja a seção meridiana VAB da circunscrição considerada.

No triângulo retângulo VCB, temos pelo teorema de Pitágoras:



$g^2=(2r)^2+r^2 \Rightarrow g=r\sqrt{5}$ ***(1)***

ΔVOD ~ ΔVBC, logo $\dfrac{R}{r}=\dfrac{2r-R}{g}\therefore g=\dfrac{(2r-R)r}{R}$ ***(2)***

De (1) e (2), vem: $\dfrac{(2r-R)r}{R}=r\sqrt{5}\therefore r=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.R$ ***(3)***

De (1) e (3), resulta $g=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{5}.R$

A área lateral A_l desse cone é

$$A\lambda=\pi rg=\pi\frac{\sqrt{5}+1}{2}.R.\frac{\sqrt{5}+1}{2}R.\sqrt{5}\therefore A\lambda=\frac{\pi\sqrt{5}}{4}.(1+\sqrt{5})^2R^2$$

23)**(ITA-92)** Seja C a circunferência $x^2+y^2-2x-6y+5=0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é: M: (2, 2). O comprimento de AB(em unidade de comprimento) é igual a:

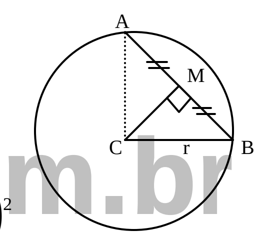
a) $2\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $2\sqrt{3}$ e) n.d.a.

Resolução

$x^2+y^2-2x-6y+5=0$

centro: C(1,3) ***raio: $r=\sqrt{5}$***

Do triângulo retângulo CMB, temos:



$$\overline{CM}^2+\overline{MB}^2=r^2$$

$$\therefore\left(\sqrt{(1-2)^2+(3-2)^2}\right)^2+\overline{MB}^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$\therefore 2+\overline{MB}^2=5\therefore\overline{MB}=\sqrt{3}$$

Como $\overline{AB}=2\overline{MB}$***, temos que:*** $\overline{AB}=2\sqrt{3}$

Portanto o comprimento da corda AB é $2\sqrt{3}$

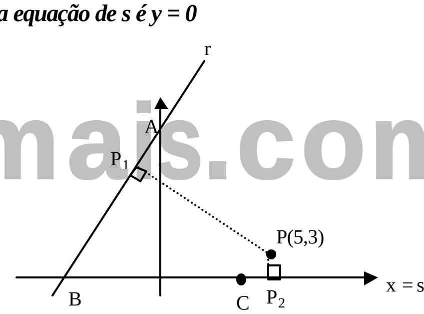
24) **(ITA-92)** Dados os pontos A: (0, 8), B: (-4, 0) e C: (4, 0), sejam r e s as retas tais que A, B ∈ r, B, C ∈ S. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de P: (5, 3) às retas r e s , respectivamente. Então a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:

a) y + x = 5 b) y + 2x = 5 c) 3y - x = 5
d) y + x = 2 e) n.d.a.

Resolução

Uma equação de r é y = 2x + 8

Uma equação de s é y = 0



Sendo P_2 projeção ortogonal de P(5,3) sobre S, segue-se que P_2(5,0).

Sendo P_1 a projeção ortogonal de P(5,3) sobre r, a reta $\overleftrightarrow{PP_1}$ é
y - 3 = -1/2 (x - 5)

O ponto P_1 é a interseção de r com $\overleftrightarrow{PP_1}$; portanto, P_1 é determinado pelo sistema:

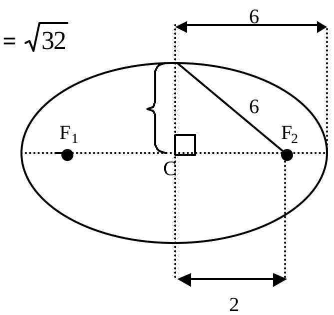
$\begin{cases} y = 2x + 8 \\ y - 3 = -1/2(x - 5) \end{cases}$ ***Resolvendo, obtém-se: x = -1 e y = 6, ou seja, P_1 (-1,6)***

Equação de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$:

$$\left.\begin{array}{l} P_2\,(5{,}0) \\ m = \dfrac{6-0}{-1-5} = -1 \end{array}\right\} y - 0 = -1(x - 5)$$ ***ou ainda y + x = 5***

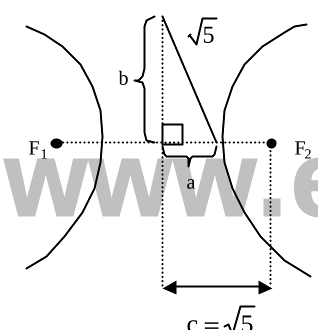
25) **(ITA-92)** Considere as afirmações:
I- Uma elipse tem como focos os pontos F_1: (-2, 0), F_2: (2, 0) e o eixo maior 12. Sua equação é $x^2/36 + y^2/32 = 1$.
II- Os focos de uma hipérbole são F_1: $(-\sqrt{5}, 0)$, F_2: $(\sqrt{5}, 0)$ e sua excentricidade $\sqrt{10}/2$. Sua Equação é $3x^2 - 2y^2 = 6$.
III- A parábola $2y = x^2 - 10x - 100$ tem como vértice o ponto P: (5, 125/2).
Então:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações II e III são falsas.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação III é verdadeira.
e) n.d.a.

Resolução
(I) centro: (0,0)
$b^2 + 2^2 = 6^2 \therefore b = \sqrt{32}$



Uma equação da elipse é: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1$

(II)



excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{10}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{a} \therefore a = \sqrt{2}$
$b^2 + a^2 = c^2$, segue-se que $b^2 = 3$

Uma equação da hipérbole é: $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} = 1$

ou ainda: $3x^2 - 2y^2 = 6$

(III) $2y = x^2 - 10x - 100$, ou seja:
$2y = x^2 - 10x + 25 - 125$, isto é:
$2y + 125 = (x - 5)^2$ e finalmente:
$(x - 5)^2 = 2(y + 125/2)$

Portanto a parábola tem como vértice o ponto P (5,-125/2).
Das análises, conclui-se que a alternativa correta é C.