Exercícios Dissertativos

1. (2000) Dois colecionadores de selos têm, juntos, 500 selos. Cada colecionador comprou um álbum para colocar seus selos. Os dois álbuns eram idênticos, tendo o mesmo número de páginas.
   Se o primeiro colecionador colocar exatamente 21 selos em cada página, ele vai conseguir colocar todos os seus selos e usar todas as páginas do álbum.
   Se o segundo colecionador colocar 20 de seus selos em cada página do álbum, sobrarão alguns selos. Caso ele coloque 23 selos em cada página, sobra pelo menos uma, totalmente vazia, podendo haver ainda uma outra página com menos de 23 selos.
   Quantas páginas há no álbum?

---

2. (2001) A diferença entre dois números inteiros positivos é 10. Ao multiplicar um pelo outro, um estudante cometeu um engano, tendo diminuído em 4 o algarismo das dezenas do produto. Para conferir seus cálculos, dividiu o resultado obtido pelo menor dos fatores, obtendo 39 como quociente e 22 como resto. Determine os dois números.

---

3. (2001) Dado um número real a, considere o seguinte problema:
   "Achar números reais x_1, x_2 ,..., x_6 , não todos nulos, que satisfaçam o sistema linear:

$$(r-2)(r-3)x_{r-1} + ((r-1)(r-3)(r-4)(r-6)a + (-1)^r)x_r + (r-3)x_{r+1} = 0$$

   para $r = 1, 2, ..., 6$, onde $x_0 = x_7 = 0$ ".

   (a) Escreva o sistema linear acima em forma matricial.

   (b) Para que valores de a o problema acima tem solução?

   (c) Existe, para algum valor de a, uma solução do problema com $x_1 = 1$? Se existir, determine tal solução.

---

4. (2002) Carlos, Luís e Sílvio tinham, juntos, 100 mil reais para investir por um ano. Carlos escolheu uma aplicação que rendia 15% ao ano. Luís, uma que rendia 20% ao ano. Sílvio aplicou metade de seu dinheiro em um fundo que rendia 20% ao ano, investindo a outra metade numa aplicação de risco, com rendimento anual pós-fixado. Depois de um ano, Carlos e Luís tinham juntos 59 mil reais; Carlos e Sílvio, 93 mil reais; Luís e Sílvio, 106 mil reais

   (a) Quantos reais cada um tinha inicialmente?

   (b) Qual o rendimento da aplicação de risco?

---

5. (2003) Um caminhão transporta maçãs, pêras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, pêras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 pêras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, pêras e laranjas estão sendo transportadas.

---

6. (2004) Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

7. (2005) Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando $R\$96,00$, e unidades do produto B, pagando $R\$84,00$. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em $R\$2,00$ o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

---

8. (2005) Diz-se que a matriz quadrada A tem posto 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de a, b e c para os quais a matriz 3x3

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a-b+2c & 1 & 6 \\ b+c-3a & \frac{1}{2} & c-2a+b \end{pmatrix}$$

tem posto 1.

---

9. (2006) Considere o sistema linear nas variáveis x,y e z:

$$\begin{cases} x+(cos^2a)y+(sen^2a)z=0 \\ x+(cos^2b)y+(sen^2b)z=0 \\ (cos^2c)y+(sen^2c)z=0 \end{cases}$$

(a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear.

(b) Para que valores de a, b e c o sistema linear admite soluções não triviais?

(c) Calcule as soluções do sistema quando e $sen^2a = 1$ e $cos^2c = 1/5$

---

10. (2007) Se Amélia der $R\$3,00$ a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com $R\$6,00$ a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria.
Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

---

11. (2008) João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando $R\$21,50$. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando $R\$57,00$.
Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza $R\$10,00$, calcule o preço de cada um desses itens.

12. (2009) Considere o sistema de equações nas variáveis x e y, dado po:

$$\begin{cases} 4x + 2m^2y = 0 \\ 2mx + (2m-1)y = 0 \end{cases}$$

Desse modo:

(a) Resolva o sistema para $m = 1$.

(b) Determine todos os valores de m para os quais o sistema possui infinitas soluções.

(c) Determine todos os valores de m para os quais o sistema admite uma solução da forma $(x, y) = (\alpha, 1)$, sendo α um número irracional.

---

13. (2013) Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de $R\$10.800,00$ a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, $R\$600,00$ além do combinado no acordo original.

(a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?

(b) Quanto recebeu cada um deles?