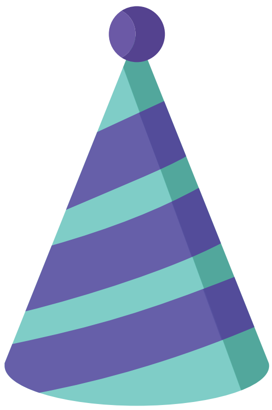
CONE

Você lembra quando, na sua infância, você era convidado para as festas de aniversário (e talvez até tenha feito uma) em que todos os convidados colocavam o chapéu temático ilustrado abaixo para esta celebração?

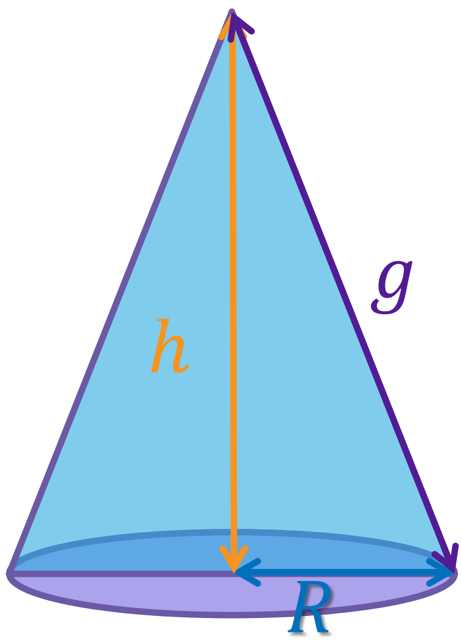


Tirando a bolinha colorida no topo desse chapéu, ele tem o formato de um **cone**. Vamos estudar esse sólido e suas propriedades, começando pela sua definição matemática.

Definição 1. Considere um plano α que contenha um círculo C e um ponto P fora de α. Dizemos que um cone é um sólido formado pela união entre os segmentos de reta que partem do círculo e chegam até P.

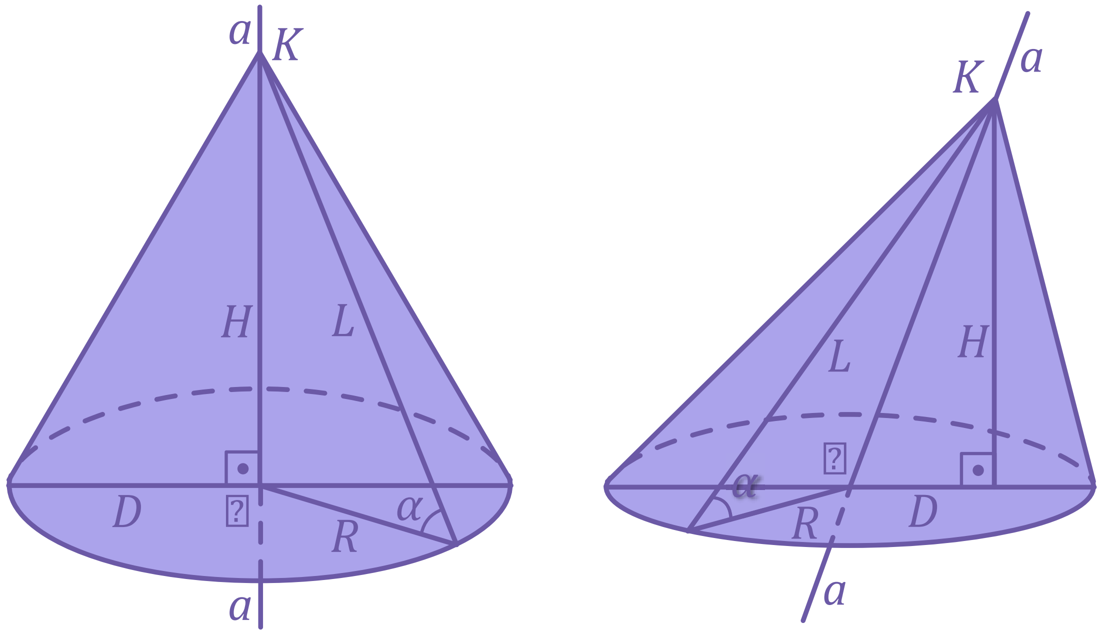
Obs.: O círculo do cone contido no plano é chamado de **base** e o ponto P é chamado de **vértice**.

Observe a figura abaixo. Como a base do cone é um círculo, ela possui um **raio** R associado. Além disso, o segmento de reta perpendicular que une o vértice à um ponto da base é chamado de **altura** h do cone. Por fim, os segmentos de reta que unem o vértice a um ponto na circunferência da base são chamados de **geratrizes**, denotadas abaixo por g.



TIPOS DE CONE

Os cones podem ser classificados em **retos**, quando o segmento de reta que une o vértice e o centro da base é perpendicular ao plano, e **oblíquos** no caso deste segmento de reta não ser perpendicular ao plano. Observe na ilustração abaixo estes dois tipos de cones.



Cone Reto

Cone Oblíquo

Obs.: salvo se dito ou ilustrado o contrário, sempre que falarmos em cone, estamos nos referindo ao caso do cone reto.

PERÍMETRO E ÁREA DO CONE

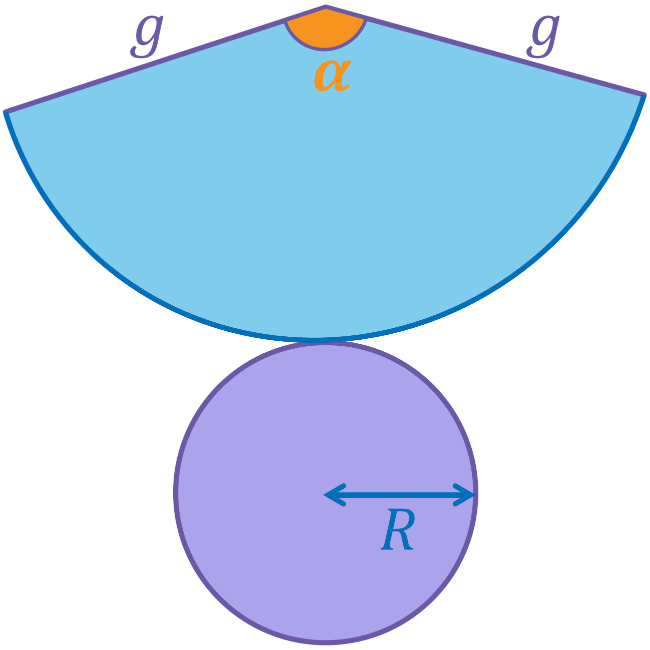
O perímetro da base é o perímetro de um círculo:

$$P_B = 2\pi R$$

A área da base é dada pela seguinte equação:

$$A_B = \pi R^2$$

Note na figura abaixo que, ao “retirarmos” a lateral do cone e colocarmos sobre um plano, vemos que ela possui um formato de um setor circular com um ângulo α associado (em graus). Perceba também que o comprimento do arco desse setor circular é exatamente igual ao perímetro da base, ou seja, de $2\pi R$.



Sabendo disso, podemos agora calcular a **área lateral** do cone, que nada mais é do que a área deste setor circular:

$$360° - \pi R^2$$

$$\alpha - A_{lateral}$$

Temos então:

$$A_{lateral} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right).\pi R^2$$

Com α dado em graus.

Assim, a área total do cone é a soma da área lateral encontrada com a área da base:

$$A_{cone} = A_{lateral} + A_B$$

Uma vez que falamos da área, seguimos agora para falar do volume do cone. Ele é calculado de forma igual à vista no caso da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3}A_B.h$$

Existe um caso especial de cone, semelhante ao visto para o cilindro, que ocorre quando a sua geratriz é exatamente igual ao diâmetro da base. Ele é chamado de **cone equilátero**.

$$g = 2R$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule o valor da geratriz de um cone equilátero de volume $15\pi\ cm^3$ e altura $5\ cm$.

Resolução:

Para calcular o valor da geratriz do cone equilátero, basta encontrarmos primeiro o valor do raio de sua base. Como o exercício nos forneceu seu volume, temos:

$$V = \frac{1}{3}A_B.h$$

$$15\pi = \frac{1}{3}\pi.R^2.5$$

$$45 = R^2.5$$

$$R^2 = 9$$

$$R = 3\ cm$$

Logo, com o valor do raio, calculamos sua geratriz:

$$g = 2\ .\ R$$

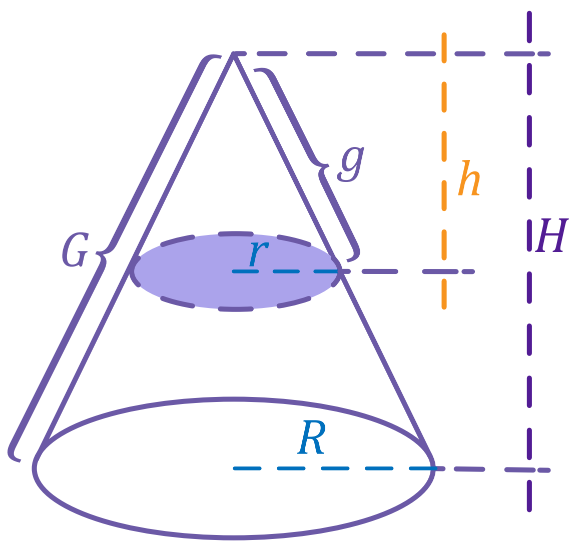
$$g = 2\ .\ 3$$

$$g = 6\ cm$$

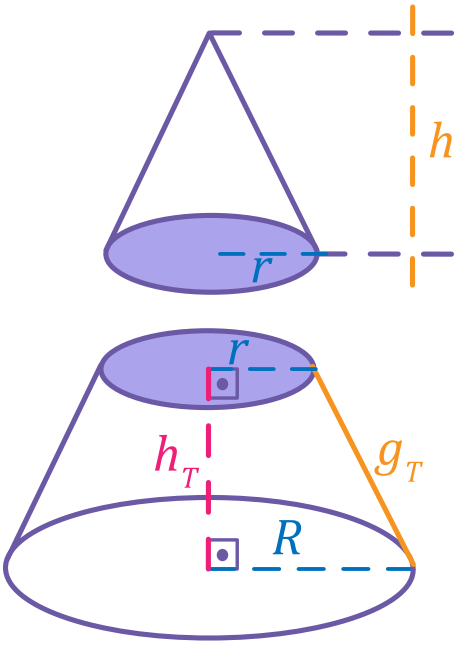
Assim, este cone equilátero possui uma geratriz com valor de $6\ cm$.

TRONCO DE CONE

Observe a figura abaixo, a qual ilustra-se um cone de altura H e raio da base R.



O tronco de cone é o sólido que resta ao realizarmos um "corte" na seção transversal do cone "inteiro". Este corte separa o tronco (parte de baixo) e um novo cone (parte de cima). Na figura abaixo, representamos o tronco de pirâmide obtido quando realizamos este corte na pirâmide da imagem anterior.



O novo cone e o cone maior anterior possuem algumas relações entre si:

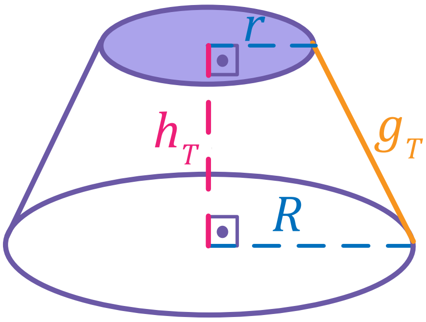
$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{g}{G}$$

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{g}{G}\right)^2$$

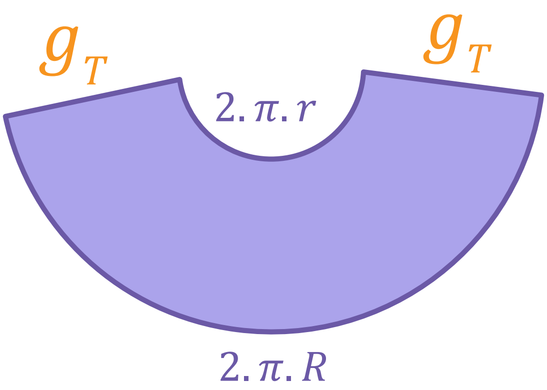
$$\frac{V_p}{V_{total}} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \left(\frac{g}{G}\right)^3$$

Onde A_b é a área da base do cone menor e A_B é a área da base do tronco (que coincide com a área da base do cone maior, anterior ao corte). Além disso, V_p é o volume do cone menor e V_{total} é o volume do cone maior (antes do corte).

Vamos examinar com mais detalhes a forma do tronco de cone. Representamos algumas grandezas importantes na figura abaixo.



Denotamos como h_T a altura do tronco de cone, R como o raio da base "maior" e r como o raio da base "menor". Além disso, este tronco possui uma geratriz que chamamos de g_T. Observe na figura abaixo que a lateral do tronco de cone é formada por uma coroa circular onde a circunferência de "dentro" possui raio r e circunferência de "fora" possui raio R:



Assim, para calcular a área lateral do tronco de cone, utilizamos a seguinte relação:

$$A_{lateral} = \pi.(r + R)g_T$$

Além disso, a área total do tronco é a soma da área lateral com as áreas das duas bases (de baixo e de cima):

$$A_{tronco} = A_{lateral} + A_b + A_B$$

Por fim, vamos estudar sobre o volume deste sólido. O tronco de cone possui um volume que pode ser calculado como o volume do cone total (antes do "corte" do tronco) subtraído do volume do cone menor obtido:

$$V_{tronco} = V_{total} - V_p$$

Calcula-se, através de algumas deduções, o volume do tronco de cone e chegamos no seguinte resultado:

$$V_{tronco} = \frac{h_T}{3}.(A_b + \sqrt{A_b.A_B} + A_B)$$

Obs.: este resultado é similar ao visto para o caso do tronco de pirâmide.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Considere um cone qualquer de volume igual a V. Se fizermos um corte na seção deste cone exatamente na metade da sua altura, qual será o volume do tronco de cone obtido após este corte?

Resolução:

Antes de calcular o volume do tronco de cone, sabemos que o volume do cone menor e do cone total se relacionam com a altura através da seguinte fórmula:

$$\frac{V_p}{V_{total}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Como a altura do cone menor é exatamente a metade da altura do cone total, temos:

$$\frac{V_p}{V_{total}} = \left(\frac{\frac{H}{2}}{H}\right)^3$$

$$\frac{V_p}{V_{total}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{V_p}{V_{total}} = \frac{1}{8}$$

$$V_p = \frac{1}{8}.V_{total} = \frac{1}{8}.V$$

É isso mesmo! Como o corte foi feito exatamente na metade da altura do cone maior, o cone menor possui apenas um oitavo do volume do cone maior.

Assim, calculamos o volume do tronco de cone:

$$V_{tronco} = V_{total} - V_p = V - \frac{1}{8}.V$$

$$V_{tronco} = \frac{7}{8}.V$$

Temos como resposta que o tronco de cone possui volume igual a $\frac{7}{8}.V$.