
VESTIBULARES
2021
ITA
Estratégia
Vestibulares

Sumário

Apresentação

Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

SOBRE O BIZUÁRIO: Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

Instruções Gerais

Análise Combinatória é o calcanhar de Aquiles de muita gente. Compondo 9% da prova do ITA nos últimos 20 anos, é possível afirmar que, todos os anos, certamente cairá uma questão de combinatória no vestibular. Em se tratando de análise combinatória, é sabido que a prova do ITA se distancia muito da prova do IME, no sentido de que o IME cobra raciocínios muito mais pesados ou questões com uma quantidade de casos para serem analisados muito maior que no ITA, tendo em vista o maior tempo para resolver cada questão. Como esse é um bizuário para o ITA, focarei nos aspectos importantes paraa essa prova, tanto nas questões de bizus quanto no direcionamento de estudos. Sabendo disso, vamos para a aula!

Quanto à questão de como estudar o Bizuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.

- "Sangue no olho" e "faca nos dentes" são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

Observação: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

Análise da aula

Essa Disciplina no Vestibular

❖ Para muitos alunos, análise combinatória é a matéria que causa mais dor de cabeça na hora do vestibular. O fato de não existir "uma fórmula" ou um único método de resolução para atacar as questões desse assunto ajuda a chegarmos nesse fato. Porém, para se dar bem em combinatória não tem segredo, o aluno deve fazer MUITOS exercícios. A combinatória é uma matéria de muitas técnicas, as quais vêm disfarçadas nos problemas contextualizados propostos no vestibular. É ai que está a importância de fazer muitos exercícios para ficar bom em combinatória, pois com o tempo você vai começar a identificar padrões nas questões. "Para esse tipo de questão uso essa técnica e não aquela outra", e por aí vai. É isso que estamos procurando aqui. Na seção de bizus vou comentar algumas questões e descrever técnicas extras que vão ajudar. Mas não se atente em decorar, pois combinatória é uma matéria de raciocínio, logo exige muito que você junte fatos e analise casos, o que pode parecer difícil no começo, mas irá se tornar natural com o tempo. O perfil descrito aqui é bastante aplicável no ITA, porém saiba que a combinatória do IME, em geral, é bem mais difícil que a do ITA, então exige um estudo mais intenso de técnicas mais sofisticadas. Sabendo disso, vamos para a aula.

Roteiro da Aula

- Esse capítulo **1** é bem introdutório, caso você já tenha estudado essa matéria antes e já tenha feito algumas questões do ITA, pode pulá-lo.
- Começamos a aula com o princípio fundamental da contagem. Esse princípio afirma que é possível obter o número de possibilidades de uma determinada sequência de eventos multiplicando a quantidade de vezes em que cada etapa do evento ocorre. Isso é muito forte e será usado em quase todas as questões de combinatória.
- No capítulo **2**, temos as permutações e dois subtópicos, que são as permutações com elementos repetidos e permutações circulares. As permutações com elementos repetidos aparecem bem mais que as permutações circulares, por exemplo. Porém, ambas são fundamentais para a prova, em especial as permutações circulares são um ótimo meio de resolver um tipo de questão que cai frequentemente no ITA, que são as questões envolvendo pinturas de poliedros regulares.
- No final do tópico **2.1** o professor apresenta uma generalização da permutação com repetição como $P_n^r = \frac{n!}{r!}$. Em outras palavras, se A é um conjunto de n elementos em que i elementos repetem α_i vezes, o número de permutações diferentes é $P = \frac{n!}{\alpha_1\,!\alpha_2\,!\ldots\,\alpha_{i-1}\,!\alpha_i\,!}$.
- Em permutações circulares, o bizu é saber que ela acontece toda vez que, somente girando algum objeto, você obtém novas possibilidades.
- Logo em seguida na aula temos os **arranjos** e as **combinações**. A diferença entre os dois é que nos arranjos a ordem entre os elementos importa, já nas combinações ela não importa.
- **4.1** é um tópico que cai muito, tanto no ITA quanto no IME. Não tente decorar as fórmulas, pois você corre o risco de errar. É muito melhor aprender o método do "pau e bola" para calcular uma combinação completa. Sendo assim, tente resolver a questão que abre o tópico com o método do pau e bola.
- **4.1.1** temos um jeito muito bom de revolver esse tipo de questão. Dada a questão: quantas são as soluções inteiras não negativas da inequação abaixo?

$$x + y + z \leq 4$$

Para resolver isso, podemos escrever a seguinte equação

$$x + y + z + w = 4$$

Em que w é chamada de **variável de folga.** Pensemos o seguinte: para cada solução {x, y, z} existe uma "folga" w em relação à 4, tal que $0 \leq w \leq 4$, o que remete à solução da equação para quatro variáveis. Com isso, basta resolver a seguinte equação

$$x + y + z + w = 4$$

para achar a solução. Por pau e bola, sabemos que a solução dessa equação é 35. Legal, não? ☺

- ❖ Em **4.1.2** temos mais uma ideia interessante, muito útil para esse tipo de equação em que se pede o número de soluções e possuem restrições do tipo $variável \geq a$, em que a é um número natural.
- ❖ No capítulo **5** temos o princípio aditivo. Esse princípio é bastante usado quando o problema envolve muitas restrições, como as questões de permutação em que são considerados casos de permutações específicas. Quando isso acontece, você usa o princípio aditivo para calcular todas as possibilidades. Aparece em várias outras questões, mas não se preocupe em decorar ou gastar muito tempo nesse capítulo, pois esse princípio será internalizado conforme você for fazendo as questões.
- ❖ O princípio da inclusão-exclusão (capítulo **6**) no vestibular do ITA, até o presente momento, tem duas principais aplicações. Uma é na resolução de questões do tipo "Calcule a quantidade de números entre 1 e 10000 tais que não sejam divisíveis por 5 nem por 6" Outro tipo de aplicação é no cálculo do número de funções sobrejetoras. Para o princípio da inclusão-exclusão não é bom decorar fórmula alguma! O interessante é aprender como usa o princípio e o que ele pode trazer de resultado. Na seção de bizus passarei mais aplicações desse princípio. Veja o capítulo e anote tudo, assim você vai absorver melhor o conteúdo.
- ❖ Na combinatória existem alguns tipos de permutações específicas que são resolvidas com métodos específicos, e a permutação caótica é uma delas. O ITA poderia muito bem cobrar uma questão de permutação caótica no vestibular visando o conhecimento da técnica do aluno. O bizu desse capítulo é basicamente decorar a fórmula final de D_n, que é

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right), \forall n \geq 2$$

- ❖ No capítulo 8, temos os lemas de Kaplasnky. Para a prova do ITA, é interessante você prestar atenção nesse capítulo porque já caiu questão no ITA em que era possível usar o segundo lema de Kaplansky para resolver. Apesar de ser uma questão que dava para resolver sem usar o lema, saía mais facilmente se usasse. Portanto, é bom que você tenha essa carta na manga. Quanto a como estudar esse capítulo, você pode tentar ler e entender as demonstrações umas duas vezes, mas o mais importante é saber a fórmula.
- ❖ Binômio de Newton (capítulo **9**) é, com certeza, uma questão que você deve fazer na prova. É a parte da combinatória mais analítica (com mais contas) e o estilo de questão que cai no vestibular não costuma ter muitas variações. Geralmente são cobradas questões pedindo o termo independente de x, o coeficiente do termo de x elevado a uma determinada potência e o termo máximo no desenvolvimento do binômio.

❖ Em **9.2** temos relações muito importantes. Aprenda todas as relações e os teoremas do triângulo de Pascal. Se você quiser, anote cada uma delas em um post-it ou algum caderno de bizus e circule a aplicação dos teoremas no triângulo de Pascal. Isso vai ajudar a fixar e lembrar os teoremas. Além dos que foram ensinados, existe mais uma soma binomial interessante que é:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}\binom{n}{k}$$

Para calcular essa soma, vamos imaginar que existe um grupo de 2n pessoas, e que nesse grupo de 2n pessoas existam n homens e n mulheres. A soma pedida é o número de forma de escolher n-1 PESSOAS entre as 2n, pois a soma pedida é o mesmo que:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}\binom{n}{n-k}$$

Sendo assim,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}\binom{n}{k} = \binom{2n}{n-1}$$

Essa é a ideia de "homens e mulheres", em que você troca um problema de combinatória por outro mais fácil de calcular. Caiu uma soma parecida na prova do ITA de 2019, o que viabiliza esse raciocínio no vestibular.

❖ O polinômio de Leibniz é uma fórmula que com certeza você não deve ir para a prova sem saber. É aplicado para potências de polinômios de grau maior que dois quando se pede o coeficiente de um determinado termo. Já caiu no ITA, no IME e na AFA. Realmente bem importante.

❖ Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar com exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Se você já tem experiência no vestibular do ITA, tente fazer as questões de forma ligeira. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula mais ou menos a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizadamente possível. Você que já é mais experiente pode seguir as questões na ordem em que aparecerem.

Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Análise Combinatória e Probabilidade que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

Fáceis	Médias	Difíceis
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 23 até 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 109	12, 18, 19, 20, 21, 22, 37, 41, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 69, 71, 73, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 100, 103	54, 55, 67, 68, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 85

Bizus

❖ **Soma de números binomiais com complexos**:

Como você calcularia a seguinte soma: $S = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \cdots + \binom{n}{3[n/3]}$?

Para resolver isso, considere 1, w e w^2 as raízes de $z^3 = 1$. Sabemos, dos números complexos, que $1 + w + w^2 = 0$. Com isso, vamos analisar o desenvolvimento de $(1+1)^n$, $(1+w)^n$ e $(1+w^2)^n$.

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots$$

$$(1+w)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} w + \binom{n}{2} w^2 + \binom{n}{3} w^3 + \binom{n}{4} w^4 \dots$$

$$(1+w^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} w^2 + \binom{n}{2} w^4 + \binom{n}{3} w^6 + \binom{n}{4} w^8 \dots$$

Somando as equações, temos que:

$$(1+1)^n+(1+w)^n+(1+w^2)^n$$
$$=3\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(1+w+w^2)+\binom{n}{2}(1+w^2+w^4)+\binom{n}{3}(1+w^3+w^6)+\binom{n}{4}(1+w^4+w^8)\ldots$$

Porém, como $w^3=1$, $(1+w^2+w^4)=(1+w^2+w^1)=0$, o mesmo acontecendo para $(1+w^4+w^8)$. Indutivamente, podemos concluir que:

$$(1+1)^n+(1+w)^n+(1+w^2)^n=3\binom{n}{0}+3\binom{n}{3}+3\binom{n}{6}+\cdots$$
$$2^n+(-w^2)^n+(-w)^n=3\binom{n}{0}+3\binom{n}{3}+3\binom{n}{6}+\cdots$$
$$2^n+(-1)^n cis\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+(-1)^n cis\left(\frac{4n\pi}{3}\right)=3\binom{n}{0}+3\binom{n}{3}+3\binom{n}{6}+\cdots$$
$$2^n+(-1)^n 2\cos(n\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+(-1)^n 2\,\mathrm{sen}(n\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=3\binom{n}{0}+3\binom{n}{3}+3\binom{n}{6}+\cdots$$
$$\frac{2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}=\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots$$

Que é o que queríamos calcular!

Veja que é uma ideia difícil, mas algebricamente viável. O ITA poderia cobrar esse tipo de questão como item (a) e (b), em que no item (a) a questão poderia pedir pra você calcular as raízes de $z^3=1$ e expressar a expansão binomial de $(1+w)^n$, por exemplo, e no item (b) poderia pedir a soma de binomiais que acabamos de calcular.

❖ **Recorrência em combinatória**:

(IME/2014)

Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode se organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas)

Resposta: Aqui irei representar o conceito de recorrência em questões de combinatória.

Recorrências são bem úteis e resolvem, em 90% dos casos, as questões de forma mais rápida. O mais difícil é encontrar a recorrência certa para o problema! Porém, com treino nesse assunto você será capaz de identificar as questões que são cabíveis de ter recorrência. Agora, vamos para a questão.

Suponha que temos n alunos na sala. Existem a_n formas desses alunos se organizarem. Agora vamos supor que o aluno n+1 entre na sala. Esse aluno pode fazer sozinho, o que implicaria que a entrada dele seria irrelevante na quantidade total de possibilidades, pois não há interação com outros alunos. Caso ele decida fazer em dupla, existem n alunos para ele escolher e, após isso, haverá a_{n-1} formas do resto dos estudantes se organizarem. Com isso, a nossa recorrência fica:

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$$

Dos casos iniciais, temos que $a_2 = 2$ e $a_3 = 4$.

$$a_4 = 4 + 3.2 = 10$$

$$a_5 = 10 + 4.4 = 26$$

$$a_6 = 26 + 5.10 = 76$$

$$a_7 = 76 + 6.26 = 232$$

$$a_8 = 232 + 7.76 = 764$$

$$a_9 = 764 + 8.232 = 2620$$

Com isso achamos o nosso a_9. Algo do tipo poderia cair no ITA de forma mais simplificada, mas com o raciocínio de recorrência. De forma geral esse assunto não cai no ITA, mas é bom estarmos preparados para tudo. É muito importante deixar claro que, caso uma questão não saia com recorrência, você deve buscar outras formas de resolver, geralmente elas existem e são mais intuitivas, apenas mais trabalhosas. A vantagem da recorrência é o tempo de resolução ser menor e ter mais uma carta na manga na hora de resolver as questões de combinatória.

❖ **Cálculo do número de funções:**

Injetoras: Para calcular o número de funções injetoras devemos saber que, quando uma função é injetora, cada elemento do contradomínio recebe apenas uma “flecha”, ou seja, se f(x) = f(y), então x = y. Sendo assim, quando o contradomínio tem n elementos e o domínio m elementos, o número de funções injetoras é:

$$n_f = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Pois podemos encolher m elementos do contradomínio de n elementos em que a ordem desses elementos escolhidos importa.

Sobrejetoras:

O número de funções sobrejetoras é o mais complicado de calcular. Para isso, usaremos o princípio da inclusão-exclusão.

Calcular diretamente esse valor é muito difícil. Vamos tentar calcular indiretamente, ou seja, calcular o número de funções que, com certeza, não são sobrejetoras e depois subtrair do número total de funções.

Para calcular o número de funções que não são sobrejetoras, vamos imaginar o contradomínio. Se não contabilizarmos um determinado elemento do contradomínio na função, com certeza todas as funções desse tipo que eu calcular não serão sobrejetoras. Logo, poderemos calcular todas as funções que não são sobrejetoras fazendo o número de funções total $(n_f) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n)$, em que A_i é o conjunto das funções em que o elemento i do contradomínio não aparece. Sendo assim, se B é um contradomínio com n elementos e A é um domínio com m elementos, o número total de funções de A em B é n^m.

Usando o princípio da inclusão-exclusão aprendido em aula, podemos calcular o valor de $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots A_n)$. Vamos calcular S_1. Para calcular S_1, primeiramente, devemos escolher o elemento do contradomínio que vai ficar fora da contagem, que pode ser feito de $\binom{n}{1}$ maneiras. Depois, calculamos o número de funções, que pode ser feito de $(n-1)^m$ maneiras.

O valor de S_2, S_3 e assim por diante podem ser calculados de forma completamente análoga. Com isso, temos que o número de funções sobrejetoras é:

$$n_f = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1)^m$$

Ou, de forma reduzida, temos que:

$$n_f = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$$

Crescentes:

Para determinar o número de funções crescentes, devemos saber que cada elemento do contradomínio pode receber mais de uma flecha. Mas a grande sacada dessa questão é saber que, uma vez determinada uma possível sequência de setas que saem do domínio para o contradomínio e que satisfazem a condição do problema, também se determina uma função que satisfaz isso.

Dessa forma, temos que:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

Em que de x_1 até x_n temos o número de flechas que cada elemento do contradomínio recebe e m o número de elementos do domínio.

Para resolver isso, devemos usar combinação completa, o que vocês já estão bizurados!

A resposta fica:

$$n_f = \binom{n+m-1}{m}$$

Estritamente crescentes:

Caso completamente análogo ao de funções injetoras. A única diferença é que agora não importa a permutação entre os elementos escolhidos no contradomínio pois, dado um certo conjunto de elementos escolhidos no contradomínio, já está determinada uma ordem crescente de elementos do domínio que tem flechas nesses elementos do contradomínio. Sendo assim, temos que:

$$n_f = \binom{n}{m}$$

em que n é o número de elementos do contradomínio e m o número de elementos do domínio.

❖ (ITA/88) Considere (P) um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de (P) determinem 2n triângulos, cujos lados não são lados de (P). O valor de n é:

a) 6

b) 8

c) 10

d) 20

e) Não existe este polígono

Resposta: Como a questão quer que não tenha triângulo em que um dos lados seja também lado do polígono, temos que escolher três vértices do polígono em que não apareçam 3 vértices consecutivos, e isso é o segundo lema de Kaplansky!

Pelo segundo lema de Kaplansky, temos:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$$

Da questão, temos que $g(n,p) = 2n$ e $p = 3$.

Com isso, segue que:

$$2n = \frac{n}{n-3} C_{n-3,3}$$

De onde tiramos que $n = 8$.

Por isso que é interessante ter esses lemas de Kaplansky na manga, nunca se sabe quando você pode usá-lo em uma prova, como foi o caso dessa questão que caiu no ITA!


SE LIGA
NO BIZU