AULA 3
COMBINAÇÕES COMPLETAS, O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO e PERMUTAÇÕES CAÓTICAS

Vamos agora, aplicar o Princípio Fundamental da Contagem em problemas mais específicos de contagem. Vamos contar por retiradas, de uma forma mais eficiente. Contaremos o número de funções sobrejetoras, e vamos determinar o número de permutações caóticas.

COMBINAÇÕES COMPLETAS

Suponha que queremos determinar o número de soluções inteiras não negativas de :

$$X+Y=7$$

Neste caso podemos fazer por tentativas e encontrarmos um total de 8 pares ordenados (X,Y). E quando o número de variáveis e o número da soma forem muito grandes? o método das tentativas não é mais vantajoso, devemos determinar uma fórmula para tal acontecimento. Agora, se tivermos a equação:

$$X+Y+Z=7$$

Resolvendo por tentativas, o trabalho é muito grande, e resolveremos do seguinte modo: Vamos dividir 7 unidades em 3 partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual a zero, para isso consideremos: sete bolinhas que representarão as unidades

∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

e consideremos duas barras: | | .

Como queremos dividir as 7 unidades em 3 partes, vamos usar duas barras para fazer tal separação. Cada modo de dispormos as bolinhas e as barras dará origem a uma solução. Por exemplo;

i. ∘ ∘ ∘ | ∘ ∘ | ∘ ∘
ii. ∘ | ∘ ∘ ∘ ∘ | ∘ ∘
iii. ∘ ∘ | | ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

Em (i) a solução é $(X,Y,Z)=(3,2,2)$, (ii) $(X,Y,X)=(1,4,2)$ e em (iii) $(X,Y,Z)=(2,0,5)$.

Então neste caso o número de soluções inteiras não negativas é o número de maneiras de colocarmos em fila 7 bolinhas e duas barras que é :

$$\frac{9!}{7!\,2!}$$

Proposição 1. O número de soluções inteiras não negativas da equação abaixo: $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$

$$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Prova: Será resolvido em sala.

Exemplo 1. Em uma peixaria, vedem-se os seguintes tipos de peixe: **CARÁ**, **TUCUNARÉ**, **TRAÍRA**, **PARGO**, **PESCADA** e **CURIMATÃ**. De quantas maneiras podemos comprar dois peixes nesta peixaria?

Solução: Poderíamos de início pensar que a resposta é $\binom{6}{2}$. Mas, este número é o número de modos de comprarmos dois peixes distintos dentre estes 6. O nosso problema será resolvido com o auxílio das combinações completas.

Sejam: $\begin{cases} x \textit{ o número de caras} \\ y \textit{ o número de tucunarés} \\ z \textit{ o número de traíras} \\ w \textit{ o número de pargos} \\ l \textit{ o número de pescadas} \\ h \textit{ o número de curimatãs} \end{cases}$

Então queremos saber o número de soluções inteiras e não negativas para: $x+y+z+w+l+h=2$. Mas aplicando a proposição 3 teremos que a resposta é:

$$\frac{(2+6-1)!}{2!\,(6-1)!}=21.$$

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO EXCLUSÃO

Neste tópico estamos interessados na obtenção de uma fórmula que nos forneça o número total de elementos na união de um número finito de conjuntos.

Proposição 2. Sejam A , B e C conjuntos finitos, e $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Então temos

a) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

b) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

Prova. Será resolvido em sala.

Teorema 1. Sejam $A_1, A_2, A_3, .., A_n$ subconjuntos finitos de um conjunto E. Temos que:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < p} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)$$

Prova: Usaremos simplismente indução, visto que já provamos para os casos de $n = 2 \ e \ n = 3$. Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para n conjuntos quaisquer e provaremos que ela é verdadeira para $n + 1$ conjuntos. Sejam então $A_1, A_2, A_3, .., A_n \ e \ A_{n+1}$ conjuntos,então queremos $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n \cup A_{n+1})$

Observe os seguintes fatos;

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) \cup (A_{n+1})$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup .. \cup (A_n \cap A_{n+1})$$

Agora usando os fatos acima e a hipótese de indução temos:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n \cup A_{n+1}) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) + n(A_{n+1}) - n\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) \cap A_{n+1}\big) \ (*)$$

Agora vamos desenvolver $n\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) \cap A_{n+1}\big)$, temos que:

$$n\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) \cap A_{n+1}\big) = \sum_{1 \leq i \leq n} n(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} n\,(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + .. + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n+1}) \ (**)$$

Agora usando a hipótese de indução e os fatos de $(*)$ e $(**)$ termos que: $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n \cup A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{(n+1)-1} n(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \cap A_{n+1})$

O que prova o resultado.

Exemplo 2. Quantos são os inteiros entre 1 e 42000, inclusive, que não são divisíveis por 2, por 3 e nem por 7?

Solução: Vamos definir os seguintes conjuntos

$$\begin{cases} A = \{1,2,3,..,42000\} \\ A_1 = \{x \in A; x \text{ é } par\} \\ A_2 = \{x \in A; x \text{ é } múltiplo \ de \ 3\} \\ A_3 = \{x \in A; x \text{ é } múltiplo \ de \ 7\} \end{cases}$$

O probema pede para calcularmos $n(A) - n(A \cup B \cup C)$. Mas aplicando o teorema acima é fácil ver que a resposta é 12000.

PERMUTAÇÕES CAÓTICAS

Definição 1. Uma permutação caótica dos números $(1,2,3, \dots, n)$ é uma permutação quando nenhum número está em lugar primitivo. Por exemplo, as permutações (2143) e (4321) são caóticas enquanto que (3214) não o é.

Teorema 1. Seja D_n o número de permutações caóticas de $(1,2,3, \dots, n)$.Então temos a seguinte fórmula para $D_n \ para \ todo \ natural \ não \ nulo.$

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Prova. Será resolvido em sala.

Exemplo 3. Quantos anagramas podem formar com as letras da palavra AMOR de modo que não apareçam: na primeira posição, a letra A; na segunda, a letra M; na terceira, a letra O e na quarta, a letra R.

Solução: O problema pede para achar D_4, o que é fácil ver que $D_4 = 9$.

PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 3

1.Responda o que se pede:

a)Determine o número de soluções inteiras não negativas, de: $X + Y = 5$?

b)Determine número de soluções inteiras não negativas da equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

2.Sejam $A \ , B \ e \ C$ conjuntos finitos, e $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X.

Prove que:

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

3.Quantos são os angramas da palavra **AMOR**, de modo que nehuma letra fique na sua posicão original?

4.De quantas maneiras pode uma mãe distribuir 9 balas idênticas para seus três filhos, de modo que ca um receba pelo menos duas?

5.Ache o número de soluções inteiras não negativas da equação:$5 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$

6.Quantos números de n algarismos podemos formar com os algarismos 1,2 ou 3, de modo que em cada número figure um desses 3 algarismos pelo menos uma vez?

7.Quantas são as permutações de (1,2,3,4,5,6,7,8,9,) que têm exatamente cinco elementos no seu lugar primitivo?

8.(LUÍS FARIAS/2009) Em uma rua existem vinte casas, dez de um lado e dez do outro. As casas são numeradas de 1 a 20, de modo que a casa de número 1 está em frente à de número 11, a casa de número 2 está em frente à casa de número 12, e assim por diante. Queremos pintar estas dez casas usando dez cores diferentes, satisfazendo:

a)Cada casa deve ser pintada de uma cor, casas adjacentes devem ter cores distintas, de quantos modos podemos realizar tal pintura?

b)Cada casa deve ser pintada de uma cor, todas as casas de um mesmo lado devem ter cores distintas duas a duas, e casas opostas devem ter cores distintas. De quantos modos podemos realizar tal pintura?

9.(ITA/2014) Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 9.

10. Quantos são os inteiros entre 1 e 42000, inclusive, que não são divisíveis por 2, por 3 e nem por 7?

11.(ITA/2017) Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos respectivamente. Quantas funções sobrejetoras $f: B \to A$ existem?

12.(IME) Seja A um conjunto com n elementos. Quantas funções $f: A \to A$ para as quais a equação $f(x) = x$ não tem solução ? Quantas são as funções $f: A \to A$ bijetoras para quais a equação $f(x) = x$ não tem solução ?

13.(AIME) Determine o número de soluções inteiras positivas e ímpares de:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$$

14. 6 bandeiras distintas devem ser dispostas em 4 mastros distintos. Cada mastro comporta um número qualquer de bandeiras, e a ordem das bandeiras em um deles é relevante. Sabendo que todas as bandeiras devem ser utilizadas, mas que nem todos os mastros precisam ser utilizados, encontre o total possível de configurações.

15. De quantas maneiras podemos permutar as letras: **LLLFFFMMM** de tal modo que 3 letras iguais nunca sejam adjacentes ?

16. Quantos são os anagramas da palavra: **INSANAS** que não contém duas letras iguais juntas?

17. Quantos são os subconjuntos com quatro elementos $\{a, b, c, d\}$ contidos em {1,2,3,..,19,20} de modo que: $b - a \geq 2, c - b \geq 3$ e $d - c \geq 4$?

18. De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?

19. Uma caravana composta por 10 camelos dispostos em fila viaja pelo deserto. A viagem dura muitos dias e os "viajantes" consideram cansativos ter que ver sempre o mesmo camelo a sua frente. De quantas maneiras os camelos podem permutar entre si de modo que cada camelo seja precedido por um diferente daquele que o precedia na fila anterior?

20. Quantas soluções entre 1 e 9, inclusive, possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$?

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 3

1.Dada a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, calcule:

a)O número de soluções inteiras não negativas.

b)O número de soluções inteiras positivas.

2.Quantas soluções inteiras positivas, maiores que 5 possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$?

3.Quantas soluções inteiras possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$, satisfazendo as condições:

a) $x_1 > 5, \quad x_2 > 6, \quad x_3 > 7, \quad \text{e} \quad x_4 > 8$?

b) $x_1 \geq 5, \quad x_2 \geq 6, \quad x_3 \geq 7 \quad \text{e} \quad x_4 \geq 8$?

4.Quantos números inteiros entre 1 e 100000 têm a soma dos algarismos igual a 6?

5.Quantas são as soluções inteiras e maiores que 3 da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$?

6.Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, tais que:

a) $x_4 > 5$?

b) $x_3 > 6$ e $x_4 > 5$?

7.Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, nos seguintes casos:

a) com $x_1 > 6$.

b) com $x_1 > 6$ e $x_2 > 6$.

c) com $x_1 > 6$; $x_2 > 6$ e $x_3 > 6$.

8.Determine m sabendo que a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$ possui 28 soluções inteiras e positivas.

9.Determine o número de solução inteiras da equação $x + y + z + w = 48$, satisfazendo as condições: $x > 5;\ y > 6;\ z > 7 \ \text{e} \ w > 8$.

10.A fábrica X produz 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortido). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

11. De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

12. De quantos modos se pode comprar 5 maços de cigarros em um bar que só possui em estoque 4 marcas diferentes?

13. De quantos modos se pode colocar 20 bolas iguais em 10 urnas?

14. Numa urna há bolas verdes, azuis e vermelhas, em grande quantidade. De quantos modos se pode tirar 8 bolas de uma vez?

15. Uma sorveteria tem sorvetes de 11 sabores diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher 6 sorvetes, não necessariamente de sabores diferentes?

16. Quantos inteiros entre 1 e 1 000 000 têm soma de seus algarismos igual a 13?

17. Quantas são as soluções inteiras não negativas de

$$x + y + z + w < 6?$$

18. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$$

Nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas? Em quantas pelo menos três são nulas?

19. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x + y + z + w = 20$ nas quais $x > y$?

20. Quantos inteiros entre 1 e 100000, inclusive têm a propriedade: “ cada dígito é menor ou igual ao seu sucessor”

21.(CHEN CHUAN) Ache o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

22.(CHEN CHUAN) Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação:

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 77$$

23.(AIME) Quantos são os inteiros positivos de sete dígitos da forma:

$$\overline{x_1 x_2 \dots . x_7}$$

que satisfazem : $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_7$?

24. Quantas permutações de 7 letras A e 7 letras B, nas quais não há 3 letras A adjacentes, existem?

25. Sejam A e B conjuntos de números naturais com $n(A) = p$ e $n(B) = n$.

a)Quantas são as funções $f: A \to B$?

b)Quantas são as funções injetoras $f: A \to B$?

c)Quantas são as funções $f: A \to B$ estritamente crescente?

d)Quantas são as funções $f: A \to B$ não- decrescente ?

26. De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

27. Quantas são as permutações de (1,2,3,4,5,6,7) que têm exatamente três elementos no seu lugar primitivo?

28. Determine o número de permutações caóticas de (1,2,3,4,5,6,7,8) com a condição de que os quatro primeiros dígitos sejam transformados no conjunto {1,2,3,4} em alguma ordem.

29. Dois médicos devem examinar, durante uma mesma hora, seis pacientes, gastando dez minutos com cada paciente. Cada um dos seis pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?

30.(JIRI HERMAN) Certo carteiro atrapalhado se encontra em dos lados de uma rua que possui cinco casas deste lado. O carteiro tem cinco cartas para entregar nestas cinco casas.

a)Determine o número o número de maneiras de modo que o carteiro entregue todas as cinco cartas erradas nas cinco casas.

b)Determine o número de maneiras de modo que o carteiro entregue exatamente duas cartas certas nas cinco casas.

31. Quantos inteiros entre 1 e 33 000, inclusive, não são divisíveis por 3, por 5 e 11?

32. Quantos inteiros entre 1 e 1 000 000, inclusive, não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e nem quartas potências perfeitas?

33. Quantos inteiros entre 1 e 1 000 são divisíveis por 2, mas não são divisíveis por 3, por 5 e nem por 7?

34. Calcular o número de permutações das 8 letras *AABBCCDD*, onde duas letras iguais não sejam adjacentes.

35. De quantas maneiras se podem sentar, em fila, 3 ingleses, 3 franceses, e 3 belgas, de modo que não haja 3 compatriotas juntos?

36. Seja o número $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Quantos são os números inteiros positivos menores que *m* e primos com *m*?

37. Quantas soluções em inteiros positivos com $x_1 \leq 6$, $x_2 \leq 7$, $x_3 \leq 8$, $x_4 \leq 9$ possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$?

38. Calcular o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$, onde x_i é um número par, não superior a 10 $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

39. Uma bolsa contém 8 moedas de Cr$1,00, 7 de Cr$0,50, 4 de Cr$0,20, e 3 de Cr$0,10. De quantos modos diferentes podemos retirar 6 moedas dessa bolsa?

40. Consideremos um conjunto de 9 pessoas,sendo que todas sabem dirigir. De quantas maneiras estas 9 pessoas podem se agrupar para levar 4 carros da cidade A até a cidade B? (Não vamos considerar quem dirige no caso de duas ou mais estarem em um mesmo carro.)

GABARITO

1) a) 15 b) 36	11) 28	21) 31	31) 16000
2) 969	12) 56	22) 2700	32) 998910
3) a) 286 b) 680	13) $\binom{29}{9}$	23) $\binom{50}{3}$	33) 229
4) 210	14) 45	24) 1016	34) 864
5) 10	15) $\binom{16}{6}$	25) *	35) 283824
6) a) 728 b) 56	16) $\binom{18}{5}-6\binom{8}{5}$	26) 60480	36) 96
7) a) 286 b) 35 c) impossível	17) 126	27) 315	37) 217
8) m=9	18) a) 171 b) 3711	28) 36	38) 1686
9) $\binom{31}{8}$	19) 825	29) $6!\cdot D_6$	39) 70
10) $\binom{37}{30}$	20) 2001	30) a) D_5 b) $10.\,D_5$	40) 186480

25) a) n^p b) $\frac{n!}{(n-p)!}$ c) $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ d) $\frac{(n+p-1)!}{(n-p)!p!}$

SUGESTÕES E/OU RESOLUÇÕES

1) Solução:

Como $m=7$ e $p=3$, tem-se:

a) $C_{n-1}^{p-1}=C_{7-1}^{3-1}=C_6^2=15$

b) $C_{n+p-1}^{p-1}=C_{7+3-1}^{3-1}=C_9^2=36$

2) Solução:

Se em cada solução inteira da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=40$, satisfazendo as condições: $x_1>5,\ x_2>5,\ x_3>5,\ x_4>5$, subtrairmos 5 unidades de cada inteiro, obteremos uma solução inteira positiva da equação: $x_1+x_2+x_3+x_4=20$

$$(15,\ 6,\ 9,\ 10)\Leftrightarrow(10,\ 1,\ 4,\ 5)$$
$$(7,\ 7,\ 8,\ 10)\Leftrightarrow(2,\ 2,\ 3,\ 13)$$
$$(15,\ 13,\ 6,\ 6)\Leftrightarrow(10,\ 8,\ 1,\ 1)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Reciprocamente, se em cada solução inteira positiva da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ somarmos 5 unidades a cada inteiro, obteremos uma solução inteira da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=40$, satisfazendo as condições do problema.

3) Solução:

a) Fazendo um raciocínio análogo ao do problema anterior, devemos subtrair 5 unidades do 1.º inteiro, 6 unidades do 2.º, 7 unidades do 3.º e 8 unidades do 4.º, em cada solução inteira da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=40$, satisfazendo as condições dadas, obtendo, assim, uma solução inteira positiva da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=14$.

$$(10,\ 10,\ 10,\ 10)\Leftrightarrow(5,\ 4,\ 3,\ 2)$$
$$(6,\ 7,\ 8,\ 19)\Leftrightarrow(1,\ 1,\ 1,\ 11)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Portanto, o número de soluções inteiras tais que $x_1>5,\ x_2>6,\ x_3>7$ e $x_4>8$ da equação: $x_1+x_2+x_3+x_4=40$ é igual ao número de soluções inteiras positivas da equação: $x_1+x_2+x_3+x_4=14$, isto é:

$$C_{n-1}^{p-1}=C_{14-1}^{4-1}=C_{13}^3$$

b) Notando que $(x_1\geq 5; x_2\geq 6; x_3\geq 7;\ x_4\geq 8)$ implica $(x_1>4;\ x_2>5;\ x_3>6;\ x_4>7)$, basta calcular o número de soluções inteiras positivas da equação: $x_1+x_2+x_3+x_4=40-4-5-6-7=18$ isto é:

$$C_{n-1}^{p-1}=C_{18-1}^{4-1}=C_{13}^3$$

4) Solução:

Os números podem ser considerados números de 5 dígitos, ainda que começados por 0. Por exemplo, 231 pode ser considerado 00231. Chamando o número de $xyzwt$, devemos ter $x+y+z+w+t=6$, com x,y,z,w,t inteiros não-negativos . A restrição de serem menores que 10 é desnecessário, por ser consequência de a soma se 6. A resposta é $CR_5^6 = C_{10}^6 = 210$

10) Solução: Para formar uma caixa devemos selecionar 30 dentre 8 tipos. Valendo repetição na escolha.
A resposta é $CR_8^{30} = C_{37}^{30} = 10.295.472$

11) Solução: Seja x a quantidade de objetos que receberão a primeira cor, y a segunda e z a terceira.
$x, y, z = 6$
A resposta é $CR_5^6 = C_{10}^6 = 28$

16) Solução: Não levando em conta o inteiro 1 000 000, por não ter soma dos algarismos igual a 13, interpretemos os inteiros de 1 até 999 999 como tendo 6 algarismo.
Por exemplo, o número 7 426 pode ser escrito 007 426.
Representando os 6 algarismos por $x_1 + x_2 + ... + x_6$: o problema consiste em determinar o número de soluções inteiras não negativas, menores que 10, da equação $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 13$. Para isso, basta subtrair do número de soluções inteiras não negativas dessa equação aquelas em que $x_1 \geq 10,\ x_2 \geq 10,\ ...,\ x_6$.
O número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + ... + x_6 = 13$$

é C_{18}^5, e o número de soluções inteiras não negativas, com $x_1 \geq 10$, é C_8^5.
Sendo análogo o raciocínio para os casos $x_2 \geq 10,\ x_3 \geq 10,\ ...,$ concluímos que o número de inteiros entre 1 e 1000000 que têm soma dos algarismos igual a 13 é: $C_{18}^5 - 6C_8^5$.

17) Solução:A introdução a variável de folga (diferença entre o valor máximo que $x + y + z + w$ poderia ter e o valor que $x + y + z + w$ efetivamente tem) transforma a inequação na equação $x + y + z + w + f = 5$
A resposta é $CR_5^5 = C_9^5 = 126$.

18) Solução:
a)Inicialmente devemos escolher as incógnitas que assumirão o valor de zero. Isso pode ser feito de $C_6^3 = 20$ modos. Fixadas essas incógnitas que serão nulas, a equação transforma-se em uma equação do tipo $x + y + z = 20$, so que, agora nenhuma incógnita pode ser nula. Procedendo como na solução do exercício 3 ($x = 1 + a,\ y = 1 + b, z = 1 + c$), obtemos $a + b + c = 17$, com a, b, c inteiros não-negativos.
O número de soluções dessa equação é $CR_3^{17} = C_{19}^{17} = 171$.
A resposta é $20 \cdot 171 = 3420$.
b)Com três incógnitas nulas, há 3420 soluções, conforme foi visto no a). Com quatro incógnitas nulas, há $C_6^4 = 15$ modos de escolher as quatro incógnitas que assumirão o valor zero. Fixadas essas incógnitas que serão nulas, a equação transforma-se em uma equação do tipo $x + y = 20$, só que, agora, nenhuma incógnita pode ser nula. É fácil ver que há 19 soluções para esta equação. Portanto, com quatro incógnitas nulas, há $15 \cdot 19 = 285$ soluções. Com cinco incógnitas nulas, a outra incógnita deve valer 20. Há, evidentemente, 6 soluções, porque basta escolher a incógnita não-nula para que a solução fique determinada.
A resposta é $3420 + 285 + 6 = 3711$.

19) Solução: Contemos primeiramente o número de soluções em que $x = y$. A equação se transforma em $\mathbf{2x + z + w = 20}$. Se x=0, a equação se transforma em $z + w = 20$, que possui 21 soluções; se x=1, a equação transforma em $z + w = 18$ que possui 19 soluções; se x=2, a equação se transforma em $x + y = 16$, que possui 17 soluções; ...; se x=10, a equação se transforma em $z + w = 0$, que possui 1 solução. O número de soluções em que x=y é 21+19+17+...+1=121. Total de soluções de $x + y + z + w = 20$ é $CR_4^{20} = C_{23}^{20} = 1771$. Logo, há 1771-121=1650 soluções nas quais $x \neq y$. Em metade delas, $x > y$ e na outra metade $x < y$. Há portanto, 825 soluções nas quais $x > y$.

20) Solução: Podemos considerar os números como formados por 5 dígitos, ainda que tenhamos que colocar alguns dígitos) no início do número. Para formar um tal número, basta selecionar os 5 (não necessariamente distintos) dígitos, porque depois de selecionados eles devem ser arrumados em ordem crescente. O número de modos de selecionar os dígitos é $CR_{10}^5 = C_{14}^5 = 2002$. Há um problema aqui: contamos o número 00000 indevidamente aparentemente há um outro problema também: não contamos o número 100000, que não é número de cinco dígitos; mas esse não deveria mesmo ser contado,pois não tem os algarismo em ordem crescente .
A resposta é 2001.

24) Solução: Começamos formando uma fila com assim letras B, o que só pode ser feito de 1 modo. Em seguida, devemos colocar as letras A nos oitos espaços existentes entre as letras B, antes do primeiro B e depois do último. Para decidir quantas letras A colocaremos em cada espaço, devemos resolver a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 7$, com $x_1, x_2, \ldots, x_8 \in \{o, 1,2\}$. As soluções desta equação são:
i) três incógnitas iguais a 2, uma igual a 1 e quatro iguais a 0;
ii) duas incógnitas iguais a 2, três iguais a 1 e três iguais a 0;
iii) uma incógnitas igual a 2, cinco iguais 1 e duas iguais a 0;
iv) zero incógnitas igual a 2, sete iguais a 1 e uma igual a 0.
A resposta é $P_8^{4,3,1} + P_8^{3,3,2} + P_8^{5,2,1} + P_8^{7,1} = 280 + 560 + 168 + 8 = 1016$

25) Solução:
a)A imagem de cada elemento de A pode ser escolhido de n modos. A resposta é n^p.

b)Ovalor de $f(a_1)$ pode ser escolhido de n modos; o valor de $f(a_2)$, de $n-1$ modos;...; o de $f(a_p)$, de $(n-p+1)$ modos. A resposta é $n(n-1)\ldots(n-p+1)=\frac{n!}{(n-p)!}$.

c)O conjunto-imagem de f terá exatamente p elementos e pode ser escolhido deC_n^p modos. Escolhido o conjunto-imagem , há apenas um modo de formar a função: o menor elemento de A deve ter por imagem o menor elemento do conjunto-imagem, o segundo menor de A deve ter por imagem o segundo menor elemento do conjunto-imagem, etc.

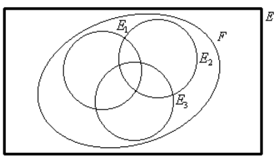
A resposta é $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

d)Basta escolher p elementos, não necessariamente distintos, no contradomínio para formarem a imagem da função, o que pode ser feito de $CR_n^p=C_{n+p-1}^p$ modos. Escolhidos os elementos, só há um modo de estabelecer a correspondência entre os elementos do domínio e os escolhidos no contradomínio: como a função e não –decrescente, o menor elemento do domínio terá por imagem o menor elemento escolhido no contradomínio, o segundo menor elemento do domínio terá por imagem o segundo menor elemento escolhido no contradomínio, etc. A resposta é $C_{n+p-1}^p=\frac{(n+p-1)!}{(n-p)!p!}$.

26) Solução: Primeiramente, devemos decidir quantos anéis haverá em cada dedo, o que equivale a resolver em inteiros não-negativos a equação $x_1+x_2+x_3+x_4=6$.
Há $CR_4^6=C_9^6=84$ soluções inteiras e não-negativas. Determinados os seis lugares, devemos, neles colocar os anéis, o que pode ser feito de $6!=720$ modos.
A resposta é $84\cdot 720=60480$.

31) Solução: Sejam os conjuntos e o diagrama:

$$E=\{1,2,3,\ldots,33\,000\}$$



$$E_1=\{x\in E\mid x=3k, k\in \mathbf{N}\}$$

$$E_1=\{x\in E\mid x=5k, k\in \mathbf{N}\}$$

O número pedido é:

$$y=n(E)-n(E_1\cup E_2\cup E_3)=n(E)-n(E_1)-n(E_2)-n(E_3)+n(E_1\cap E_2)+n(E_1\cap E_3)+$$
$$+n(E_2\cap E_3)-n(E_1\cap E_2\cap E_3).$$

Porém:

$$n(E)=33\,000,\quad n(E_1)=\left[\frac{33\,000}{3}\right]^*=11\,000,$$

$$n(E_2)=\left[\frac{33\,000}{5}\right]=6\,600,$$

$$n(E_3)=\left[\frac{33\,000}{11}\right]=3\,000,$$

$$n(E_1\cap E_2)=\left[\frac{33\,000}{15}\right]=2\,200,$$

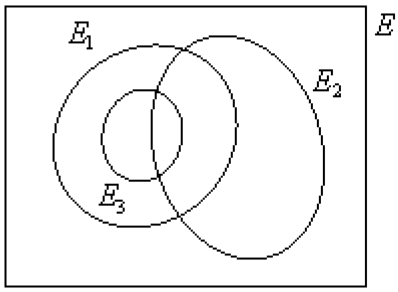
$$n(E_1\cap E_3)=\left[\frac{33\,000}{33}\right]=1000,$$

$$n(E_2\cap E_3)=\left[\frac{33\,000}{55}\right]=600,$$

$$n(E_1\cap E_2\cap E_3)=\left[\frac{33\,000}{165}\right]=200$$

Logo, y = 33 000 – 11 000 – 6 600 – 3 000 + 2 200 + 1 000 + 600 – 200 = 16 000.

32) Solução: Sejam os conjuntos e o diagrama:



$$E=\{1,2,3,\ldots,1\,000\,000\}$$

$$E_1=\{x\in E\mid x \text{ é quadrado perfeito}\}$$

$$E_2=\{x\in E\mid x \text{ é cubo perfeito}\}$$

$$E_1=\{x\in E\mid x \text{ é quarta potência perfeita}\}$$

Observemos que:

a) $a^4=(a^2)^2$, isto é, toda quarta potência é quadrado, o que acarreta

$$E_3\subset E_1\Rightarrow E_1\cup E_2\cup E_3=E_1\cup E_2\Rightarrow n(E_1\cup E_2\cup E_3)=n(E_1\cup E_2)$$

b) Se um número é quadrado e também cubo, então ele é sexta potência.
Posto isto, temos que o número pedido é:

$$y=n(E)-n(E_1\cup E_2\cup E_3)=n(E)-n(E_1\cup E_2)=n(E)-n(E_1)-(E_2)+n(E_1\cap E_2)$$

Porém: $n(E)=1\,000\,000=10^6$

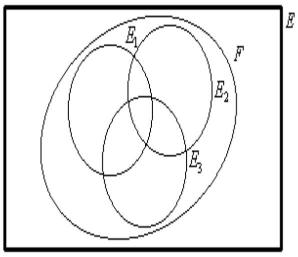
$$n(E_1)=\sqrt{10^6}=10^3=1000$$

$$n(E_2)=\sqrt[3]{10^6}=10^2=100$$

$$n(E_1\cap E_2)=\sqrt[6]{10^6}=10$$

Logo, $y=1\,000\,000-1000-100+10=998\,910$.

33) Solução:
Sejam os conjuntos e o diagrama:



$E=\{1,2,3,\ldots,1000\}$
$F=E\cap 2\mathbf{N}$
$E_1=F\cap 3\mathbf{N}=E\cap 6\mathbf{N}=$
$=\{x\in E\mid x=6k,\,k\in\mathbf{N}\}$
$E_2=F\cap 5\mathbf{N}=E\cap 10\mathbf{N}=$
$=\{x\in E\mid x=10k,\,k\in\mathbf{N}\}$
$E_3=F\cap 7\mathbf{N}=E\cap 14\mathbf{N}=$
$=\{x\in E\mid x=14k,\,k\in\mathbf{N}\}$

onde $2\mathbf{N}=\{0,2,4,6,\ldots\}$, $3\mathbf{N}=\{0,3,6,9,\ldots\}$, etc.

Portanto, o número pedido é:

$$y=n(F)-n(E_1\cup E_2\cup E_3)=n(F)-n(E_1)-n(E_2)-n(E_3)+n(E_1\cap E_2)+n(E_1\cap E_3)+$$
$$+n(E_2\cap E_3)-n(E_1\cap E_2\cap E_3)$$

Porém:

$n(F)=\left[\dfrac{1000}{2}\right]=500$, $\quad n(E_1)=\left[\dfrac{1000}{6}\right]=166$,

$n(E_2)=\left[\dfrac{1000}{10}\right]=100$, $n(E_3)=\left[\dfrac{1000}{14}\right]=71$,

$n(E_1\cap E_2)=\left[\dfrac{1000}{30}\right]=33$,

$n(E_1\cap E_3)=\left[\dfrac{1000}{42}\right]=23$,

$n(E_2\cap E_3)=\left[\dfrac{1000}{70}\right]=14$,

$n(E_1\cap E_2\cap E_3)=\left[\dfrac{1000}{210}\right]=4$.

Logo,
$y=500-166-100-71+33+23+14-4=229$.

34) Solução: Sejam os conjuntos:
$E=$ conjunto de todas permutações das letras *AABBCCDD*.
$E_1=$ conjunto das permutações que têm as duas letras *A* juntas.
$E_2=$ conjunto das permutações que têm as duas letras *B* juntas.
$E_3=$ conjunto das permutações que têm as duas letras *C* juntas.
$E_4=$ conjunto das permutações que têm as duas letras *D* juntas.
Portanto, o número pedido é:

$$y=n(E)-n(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)=n(E)-\sum_{i=1}^{4}n(E_i)+\sum_{1\le i<j}^{4}n(E_i\cap E_j)-$$
$$-\sum_{1\le i<j<k}^{4}n(E_i\cap E_j\cap E_k)+n(E_i\cap E_2\cap E_3\cap E_4).$$

Porém:

$$n(E)=P_4^{2\cdot2\cdot2\cdot2}$$

$$\underbrace{n(E_1)=n(E_2)=n(E_3)=n(E_4)}_{4=C_4^1\text{ termos}}=P_7^{2\cdot2\cdot2\cdot1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}n(E_1)=C_4^1\cdot P_7^{2\cdot2\cdot2\cdot1}$$

$$\underbrace{n(E_1\cap E_2)=n(E_1\cap E_3)=\ldots=n(E_3\cap E_4)}_{C_4^2\text{ termos}}=P_6^{2\cdot2\cdot1\cdot1}\Rightarrow\sum_{1\le i<j}^{4}n(E_i\cap E_j)=C_4^2\cdot P_6^{2\cdot2\cdot1\cdot1}$$

$$\underbrace{n(E_1\cap E_2\cap E_3)=\ldots=n(E_2\cap E_3\cap E_4)}_{C_4^3\text{ termos}}=P_5^{2\cdot1\cdot1\cdot1}\Rightarrow\sum_{1\le i<j<k}^{4}n(E_i\cap E_j\cap E_k)=C_4^3\cdot P_5^{2\cdot1\cdot1\cdot1}$$

$$n(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4)=P_4^{1\cdot1\cdot1\cdot1}=4!$$

Logo,

$$y=P_8^{2\cdot2\cdot2\cdot2}-C_4^1\cdot P_7^{2\cdot2\cdot2\cdot1}+C_4^2\cdot P_6^{2\cdot2\cdot1\cdot1}-C_4^3\cdot P_5^{2\cdot1\cdot1\cdot1}+4!$$

$$=2\,520-2\,520+1080-240+24=864$$

35) Solução: Sejam as pessoas $I_1I_2I_3F_1F_2F_3B_1B_2B_3$ e sejam os conjuntos:
$E=$ conjuntos das permutações das 9 pessoas.
$E_1=$ conjuntos das permutações das 9 pessoas com 3 ingleses juntos.
$E_2=$ conjuntos das permutações das 9 pessoas com 3 franceses juntos.
$E_3=$ conjuntos das permutações das 9 pessoas com 3 belgas juntos.
O número pedido é:

$$n(E)=9!$$

$$\underbrace{n(E_1)=n(E_2)=n(E_3)}_{C_3^2\text{ termos}}=7!3!\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}n(E_i)=C_3^1\cdot 7!3!$$

$$\underbrace{n(E_1\cap E_2)=n(E_1\cap E_3)=n(E_2\cap E_3)}_{C_3^2\text{ termos}}=5!(3!)^2\Rightarrow\sum_{1\le i<j}^{3}n(E_i\cap E_j)=C_3^2\cdot 5!(3!)^2$$

$n(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (3!)^4$

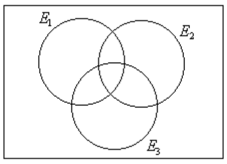
Logo,

$y = 9! - C_3^1 \cdot 7!3! + C_3^2 \cdot 5!(3!)^2 - (3!)^4 = 283824$

36) Solução: Indiquemos o número pedido por $\phi(m)$ e consideremos os conjuntos e o diagrama:

$E = \{1, 2, 3, ..., m\}$

$E_1 = \{x \in E \mid x \text{ é multiplo de } 2\}$



$E_2 = \{x \in E \mid x \text{ é multiplo de } 3\}$

$E_3 = \{x \in E \mid x \text{ é multiplo de } 5\}$

Então:

$$\phi(m) = n(E) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = n(E) - n(E_1) - n(E_2) - n(E_3) + n(E_1 \cap E_2) +$$
$$+ n(E_1 \cap E_3) + n(E_2 \cap E_3) - n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Porém:

$n(E) = m = 360$, $\quad n(E_1) = \dfrac{m}{2} = 180$,

$n(E_2) = \dfrac{m}{3} = 120$, $\quad n(E_3) = \dfrac{m}{5} = 72$,

$n(E_1 \cap E_2) = \dfrac{m}{2 \cdot 3} = 60$, $\quad n(E_1 \cap E_3) = \dfrac{m}{2 \cdot 5} = 36$,

$n(E_2 \cap E_3) = \dfrac{m}{3 \cdot 5} = 24$,

$n(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \dfrac{m}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 12$.

Logo,

$\phi(m) 360 - 180 - 120 - 72 + 60 + 36 + 24 - 12 = 96$

**Observação:* Se *p* é um fator do número *m*.

Então o número de múltiplos de *p* não superiores a *m* é $\dfrac{m}{p}$.

De fato, os múltiplos de *p* não superiores a *m* são: $p \cdot 1,\ p \cdot 2,\ p \cdot 3,\ p \cdot 4, ...,\ p \cdot \dfrac{m}{p}$.

37) Solução:

Sejam os conjuntos:

$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N^* \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20\}$

$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 > 6\}$,

$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_2 > 7\}$,

$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_3 > 8\}$,

$E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_4 > 9\}$.

O número pedido é:

$y = n(E) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$

$$y = n(E) - n(E_1) - n(E_2) - n(E_3) - n(E_4) + n(E_1 \cup E_2) + n(E_1 \cup E_3) + n(E_1 \cup E_4)$$
$$+ n(E_2 \cup E_3) + n(E_2 \cup E_4) + n(E_3 \cup E_4) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_4)$$
$$- n(E_1 \cup E_2 \cup E_4) - n(E_2 \cup E_3 \cup E_4) + n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$$

Mas:

$n(E) = C_{19}^3$, $\quad n(E_1) = C_{20-6-1}^3 = C_{13}^3$,

$n(E_2) = C_{20-7-1}^3 = C_{12}^3$, $\quad n(E_3) = C_{20-8-1}^3 = C_{11}^3$,

$n(E_4) = C_{20-9-1}^3 = C_{10}^3$, $\quad n(E_1 \cap E_2) = C_{20-6-7-1}^3 = C_6^3$,

$n(E_1 \cap E_3) = C_{20-6-8-1}^3 = C_5^3$,

$n(E_1 \cap E_4) = C_{20-6-9-1}^3 = C_4^3$,

$n(E_2 \cap E_3) = C_{20-7-8-1}^3 = C_4^3$,

$n(E_2 \cap E_4) = C_{20-7-9-1}^3 = C_3^3$,

$n(E_3 \cap E_4) = C_{20-8-9-1}^3 = C_2^3 = 0$.

Todos os outros termos são nulos. Logo,

$y = C_{19}^3 - C_{13}^3 - C_{12}^3 - C_{11}^3 - C_{10}^3 + C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 + C_4^3 + C_3^3$

$y = 969 - 286 - 220 - 165 - 120 + 20 + 10 + 4 + 4 + 1 = 217$

38) *Solução:*

Fazendo $x_i = 2y_i$, onde $1 \le y_i \le 5$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, a equação:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$ transforma-se em $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$.

Sejam os conjuntos:

$E = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \in N^{*6} \mid y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17\}$

$E_1 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \in E \mid y_1 > 5\}$

$E_2 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \in E \mid y_2 > 5\}$

....

$E_6 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \in E \mid y_6 > 5\}$

O número pedido é:

$$w = n(E) - n(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_6) = n(E) - \sum_{i=1}^{6} n(E_i) + \sum_{1 \le i < j}^{6} n(E_i \cap E_j) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k}^{6} n(E_i \cap E_j \cap E_k) + ... + n(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_4)$$

Porém:

$n(E) = C_{16}^5$

$$\underbrace{n(E_1) = n(E_2) = ... = n(E_6)}_{C_6^1 \text{ termos}} = C_{11}^5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} n(E_i) = C_6^1 \cdot C_{11}^5$$

$\underbrace{n(E_1 \cap E_2) = n(E_1 \cap E_3) = \ldots = n(E_5 \cap E_6)}_{C_6^2 \text{ termos}} = C_6^5 \Rightarrow \sum_{1 \le i < j}^{6} n(E_i \cap E_j) = C_6^2 \cdot C_6^5$

$n(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \ldots = n(E_4 \cap E_5 \cap E_6) = 0$

$n(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_6) = 0$.

Logo

$w = C_{16}^5 - C_6^1 \cdot C_{11}^5 + C_6^2 \cdot C_6^5 = 4368 - 2772 + 90 = 1686$

39) ***Solução:***

Sejam:

x_1: o número de moedas de Cr$1,00.

x_2: o número de moedas de Cr$0,50.

x_3: o número de moedas de Cr$0,20.

x_4: o número de moedas de Cr$0,10.

O problema consiste em calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, satisfazendo as condições: $x_1 \le 8$, $x_2 \le 7$, $x_3 \le 4$ e $x_4 \le 3$.

Sejam os conjuntos:

$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N^{*4} \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\}$

$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 \ge 9\}$

$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_2 \ge 8\}$,

$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_3 \ge 5\}$,

$E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_4 \ge 4\}$.

$y = n(E) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = n(E) - \sum_{i=1}^{4} n(E_i) + \sum_{1 \le i < j}^{4} n(E_i \cap E_j) -$

$- \sum_{1 \le i < j < k}^{4} n(E_i \cap E_j \cap E_k) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$

Porém:

$n(E) = C_9^3$

$n(E_1) = n(E_2) = 0$, pois a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ não admite soluções inteiras não negativas com $x_1 \ge 9$ e $x_2 \ge 8$. $n(E_3) = C_4^3$ e $n(E_4) = C_5^3$

$n(E_1 \cap E_2) = n(E_1 \cap E_3) = \ldots = n(E_3 \cap E_4) = 0$

$n(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \ldots = n(E_2 \cap E_3 \cap E_4) = 0$

$n(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_4) = 0$.

Logo, $y = C_9^3 - C_4^3 - C_5^3 = 84 - 4 - 10 = 70$.

40) Solução:

Como todo carro deve ter um chofer, este será igual ao número de funções sobrejetoras de um conjunto de 9 elementos num conjunto de 4 elementos. Usando a mesma ideia do problema 11 teremos que a resposta é:

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \cdot \binom{4}{i} \cdot (4-i)^9 = 186480.$$