MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

EAD – ITA/IME

AULAS 01 E 02

ASSUNTO: TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO, ARCOS NOTÁVEIS

Resumo Teórico

Razões Trigonométricas

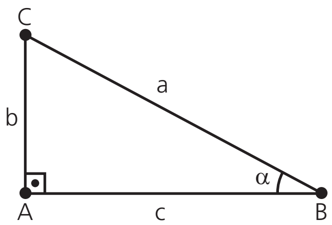
Se α é um ângulo de um triângulo retângulo, firmamos as definições a seguir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{m(cateto oposto)}}{\text{m(hipotenusa)}} \rightarrow (\operatorname{sen}\alpha)^{-1} = \operatorname{cossec}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{m(cateto adjacente)}}{\text{m(hipotenusa)}} \rightarrow (\cos\alpha)^{-1} = \sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{m(cateto oposto)}}{\text{m(cateto adjacente)}} \rightarrow (\operatorname{tg}\alpha)^{-1} = \operatorname{cotg}\alpha$$

Pondo em prática as definições acima, dispomos de:



a: hipotenusa
b: cateto oposto a α
c: cateto adjacente a α

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \operatorname{cossec}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \rightarrow \sec\alpha = \frac{a}{c}$$

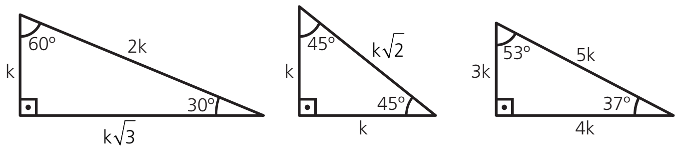
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} \rightarrow \operatorname{cot g}\alpha = \frac{c}{b}$$

Consequentemente,

- $b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Ângulos notáveis

Os ângulos agudos especiais de 30°, 37°, 45°, 53° e 60° têm razões trigonométricas cujos valores podem ser calculados de modo exato ou aproximado, a partir dos triângulos retângulos a seguir:



(ângulos exatos) (ângulos exatos) (ângulos aproximados)

Tabela Trigonométrica

Razões Trigonométricas	Notação	30°	37°	45°	53°	60°
seno	sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
tangente	tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
cotangente	cotg	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
secante	sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2
cossecante	cossec	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Exercícios

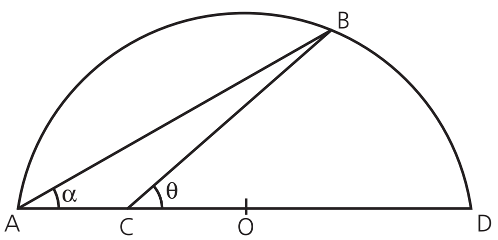
01. A área de um triângulo é dada pela fórmula $A = \frac{a^2 + b^2}{4}$ onde **a** e **b** são dois de seus lados. Determine (em graus) a medida do maior dos ângulos do triângulo.

A) 120°
B) 90°
C) 75°
D) 60°
E) 45°

02. Calcule o valor de $\text{cossec}^6\, 10° - \text{cotg}^6\, 10° - 3 \cdot \text{cossec}^2\, 10° \cdot \text{cotg}^2\, 10°$.

A) 1
B) –1
C) 2
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{1}{3}$

03. Observe a figura a seguir.



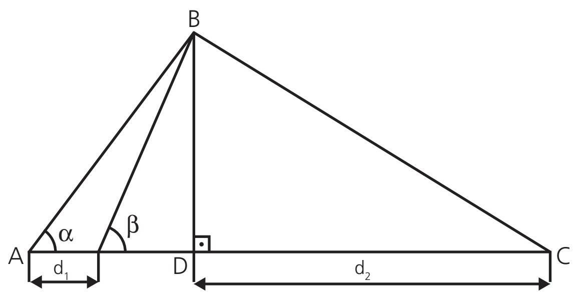
Nessa figura, O é o centro do semicírculo de diâmetro AD, AC = CO, BAD = α e BCD = θ.

Demonstre que $\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} + \frac{1}{\text{tg}\,2\alpha} = \frac{2}{\text{tg}\,\theta}$.

04. Considere o triângulo ABC de lados a = BC, b = AC e c = AB e ângulo internos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$, admite **c** como raiz dupla, pode-se afirmar que

A) $\alpha = 90°$
B) $\beta = 60°$
C) $\gamma = 60°$
D) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45°$.
E) O triângulo é retângulo e **b** é hipotenusa.

05. Considere a figura a seguir.



A área do triângulo BDC é

A) $\dfrac{d_1 + d_2}{\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta}$

B) $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2(\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)}$

C) $\dfrac{d_1 + d_2}{2(\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta)}$

D) $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2\,\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta}$

E) $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2(\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta)}$

06. Em um triângulo ABC retângulo em A, seja D a projeção de A sobre $\overline{CB}$. Sabendo que o segmento $\overline{BD}$ mede ℓ cm e que o ângulo $D\hat{A}C$ mede θ graus, então a área do triângulo ABC vale:

A) $\frac{\ell^2}{2}\sec\theta \cdot \text{tg}\,\theta$

B) $\frac{\ell^2}{2}\sec^2\theta \cdot \text{tg}\,\theta$

C) $\frac{\ell^2}{2}\sec\theta \cdot \text{tg}^2\,\theta$

D) $\frac{\ell^2}{2}\text{cossec}\,\theta \cdot \text{cotg}\,\theta$

E) $\frac{\ell^2}{2}\text{cossec}^2\,\theta \cdot \text{cotg}\,\theta$

07. Se em um quadrilátero convexo de área S, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\frac{\pi}{6}$ radianos, então o produto do comprimento dessas diagonais é igual a

A) S
B) 2S
C) 3S
D) 4S
E) 5S

08. Um triângulo ABC apresenta lados a, b e c. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, os ângulos opostos aos lados b e c, o valor de $\frac{\text{tg}\hat{B}}{\text{tg}\hat{C}}$ é

A) $\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \dfrac{c}{b}$

B) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$

C) $\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2}$

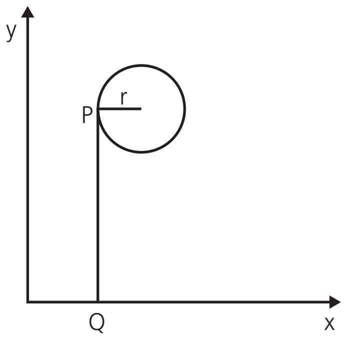
D) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \cdot \dfrac{c}{b}$

E) $\dfrac{b}{c}$

09. Em um triângulo de vértice A, B e C são dados $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{C} = \frac{\pi}{3}$ e o lado BC = 1 cm. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm², é

A) $\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$
B) $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$
C) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$
E) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$

10. Considere um ponto P em uma circunferência de raio **r** no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo **x**, como a figura a seguir, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo **x**, uma distância dada por

A) $r\left(1-\text{sen}\frac{d}{r}\right)$

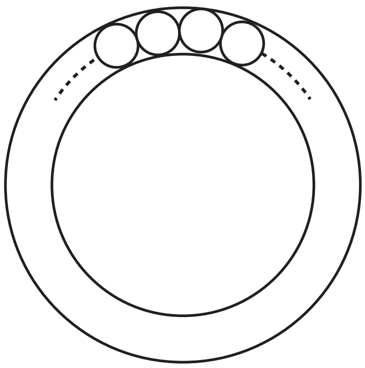
B) $r\left(1-\cos\frac{d}{r}\right)$

C) $r\left(1-\text{tg}\frac{d}{r}\right)$

D) $r\,\text{sen}\left(\frac{r}{d}\right)$

E) $r\cos\left(\frac{r}{d}\right)$

11. Em uma coroa circular (conforme a figura a seguir) estão inscritas **n** circunferências, cada uma tangente às duas vizinhas. Se o raio da circunferência interna da coroa mede 1, então o raio da circunferência externa da coroa mede



A) $\dfrac{1+\text{sen}\ \pi/n}{1-\text{sen}\ \pi/n}$

B) $\dfrac{1+\cos\ \pi/n}{1-\text{sen}\ \pi/n}$

C) $\dfrac{1+\text{sen}\ 2\pi/n}{1-\text{sen}\ 2\pi/n}$

D) $\dfrac{1+\cos 2\pi/n}{1-\cos 2\pi/n}$

E) $\dfrac{1+\cos\ 2\pi/n}{1-\text{sen}\ 2\pi/n}$

12. Em um triângulo retângulo ABC ($\hat{A} = 90°$), tem-se $\text{cotg}\hat{C} + \text{cotg}\hat{B} = 4$, então o valor de $16\text{sen}\ \hat{B} \cdot \text{sen}\ \hat{C} \cdot \cos\ \hat{B} \cdot \cos\ \hat{C}$ é igual a

A) $\frac{1}{2}$

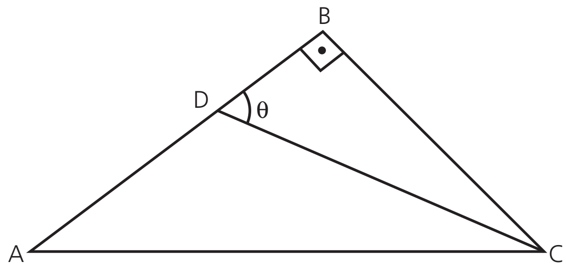
B) 1

C) 2

D) $\frac{1}{3}$

E) 3

13. Na figura a seguir, sabe-se que: AD = CD = a e AB = b.



Expresse $\text{cotg}\left(\frac{\theta}{4}\right)$ em função de a e b.

A) $\dfrac{b+\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab-b^2}}$

B) $\dfrac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab-b^2}}$

C) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

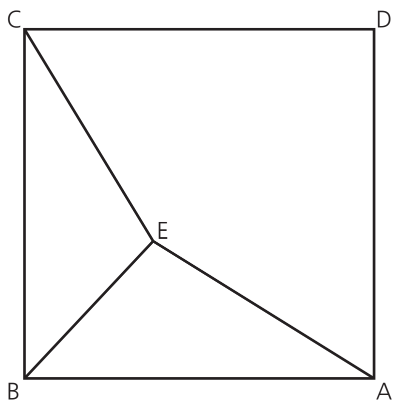
D) $\dfrac{b+\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}$

E) $\dfrac{b}{a}$

14. Se **x** é um ângulo agudo e $\dfrac{\sec(3x-15°)}{2} = \dfrac{\text{sen}10° + \text{sen}20° + \ldots + \text{sen}80°}{\cos 10° + \cos 20° + \ldots + \cos 80°}$, então **x** é igual a

A) 15°
B) 12,5°
C) 16°
D) 37°
E) 25°

15. Se ABCD é um quadrado, com $m(E\hat{B}A) = 53°$, $m(D\hat{C}E) = \alpha$, $m(B\hat{E}A) = 90°$, então o valor de $5\sqrt{10}\cdot\cos\alpha$ é



A) 18
B) 15
C) 12
D) 9
E) 6

Gabarito

01	02	03	04	05
B	A	E	E	E
06	07	08	09	10
B	D	B	D	B
11	12	13	14	15
A	B	A	E	D

– Demonstração

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA
Dig.: Aníbal – Rev.: SARAH