POTÊNCIAS DE UM PONTO

Nesta apostila vamos estudar a potência de um ponto P qualquer em relação à uma circunferência C qualquer de centro O e raio R. Temos dois casos possíveis:

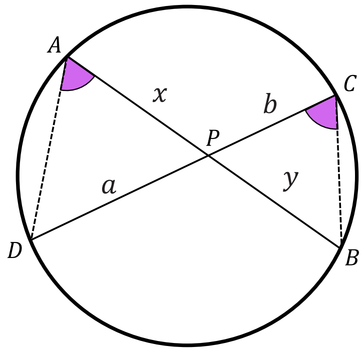
- P é interior à C;
- P é exterior à C.

Caso 1: P é interior à C

Considere a circunferência C com duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que se cruzam no ponto P. Então

$$\overline{AP}\cdot\overline{PB}=\overline{CP}\cdot\overline{PD}$$

A figura abaixo mostra um exemplo.

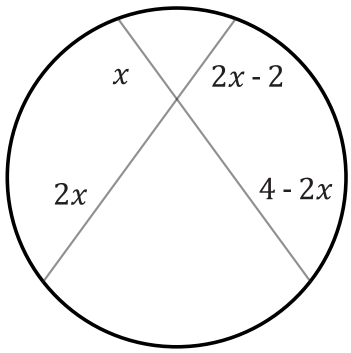


Neste caso, pelo que foi visto anteriormente, temos $x\cdot y=a\cdot b$.

Vamos agora resolver um exemplo sobre este assunto.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

A circunferência abaixo possui duas cordas que se cruzam. Determine o comprimento da menor corda.



Solução:

Pelo conteúdo visto anteriormente, podemos escrever o seguinte:

$$x.(4-2x) = 2x.(2x-2)$$

$$-2x^2 + 4x = 4x^2 - 4x$$

$$6x^2 - 8x = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = {}^{4}/_{3}$$

Como um dos segmentos possui comprimento x, certamente $x = 0$ não é um valor válido pois não existe comprimento nulo. Logo, $x = {}^{4}/_{3}$ é o valor correto. Desta maneira, calculamos os comprimentos das duas cordas:

$$x + (4-2x) = 4 - x = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$2x + (2x-2) = 4x - 2 = 4.\frac{4}{3} - 2 = \frac{16-6}{3} = \frac{10}{3}$$

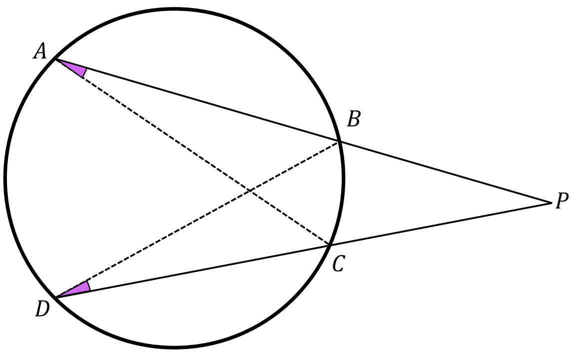
Logo, a corda de menor comprimento mede ${}^{8}/_{3}\, u.c$

Observação: $u.c$ significa unidades de comprimento.

Agora, o que acontece no 2º caso? É o que veremos a seguir.

Caso 2: P é exterior à C

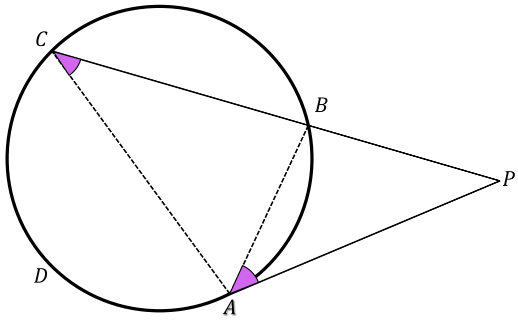
Se considerarmos o ponto P de modo que ele seja **externo** à circunferência, temos também uma relação entre os segmentos que ligam a circunferência ao ponto P externo. Observe na figura abaixo.



A relação entre os segmentos é formulada a seguir:

$$\overline{PB}.\overline{PA} = \overline{PC}.\overline{PD}$$

Neste segundo caso, há ainda mais dois casos específicos. O primeiro acontece quando **um dos segmentos de reta tangencia** a circunferência e nós temos uma figura como mostrada a seguir.

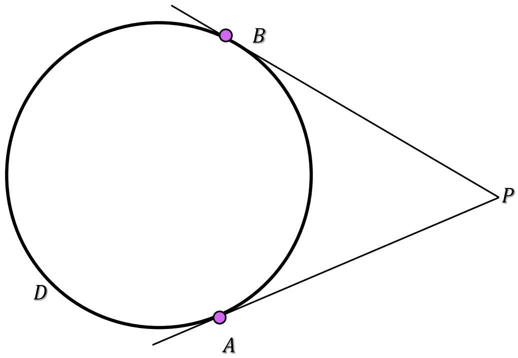


Quando acontece essa tangência por um dos segmentos, a relação que obtemos é a seguinte:

$$\overline{PA}.\overline{PA} = \overline{PB}.\overline{PC}$$

$$(\overline{PA})^2 = \overline{PB}.\overline{PC}$$

O segundo caso ocorre quando **os dois segmentos de reta tangenciam** a circunferência, conforme mostrado a seguir.



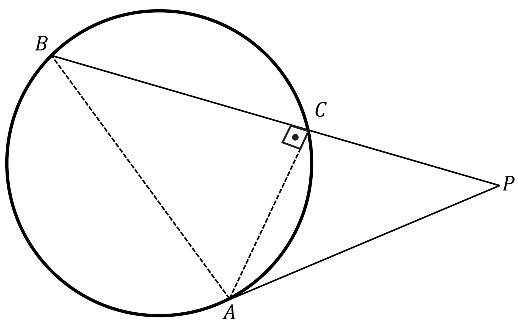
Desta vez, a relação é simplificada como mostrada abaixo:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Vamos resolver mais um exemplo!

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Duas crianças estão paradas nos pontos A e B, sinalizados na figura abaixo, à uma distância de 5 m uma da outra. As duas decidem apostar uma corrida até o ponto P. A criança que estava no ponto B percorreu 20 m até chegar no ponto P desejado, passando pelo ponto C. Se o ponto C se encontra a 3 m de distância do ponto A, qual foi a distância que a criança do ponto A percorreu até chegar em P?

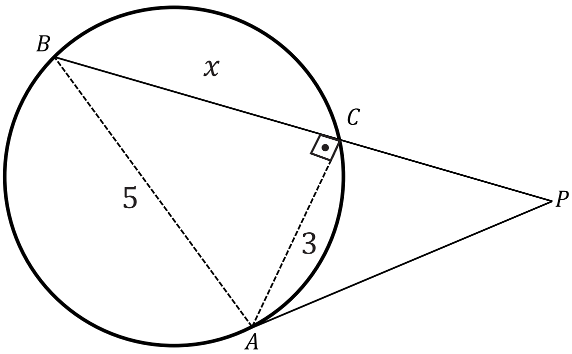


Solução:

Primeiramente, nota-se que o exercício pede para encontrarmos a distância entre A e P(que foi a distância que a segunda criança correu). Como o segmento $\overline{AP}$ tangencia a circunferência, podemos utilizar a relação abaixo:

$$(\overline{PA})^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PB}$$

Porém, antes, é necessário encontrar a distância entre C e P. Para isso, redesenhamos a figura de maneira a verificar o triângulo retângulo abaixo:



Então:

$$3^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow x = 4$$

Assim, a medida de $\overline{BC}$ vale 4 m. Logo, como $\overline{PB}$ tem comprimento 20 m:

$$\overline{PC} = \overline{PB} - \overline{BC} = 20 - 4 = 16\ m$$

Podemos, agora, descobrir quanto vale a medida de $\overline{PA}$:

$$(\overline{PA})^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PB}$$

$$(\overline{PA})^2 = 16.20$$

$$\overline{PA} = \sqrt{16.20} \Rightarrow \overline{PA} = 8\sqrt{5}\ m$$

Logo, a criança que estava no ponto A percorreu $8\sqrt{5}m \approx 17{,}9\ m.$

Finalizamos então o nosso estudo a respeito de potências de um ponto.

ANOTAÇÕES