Capítulo 7
Polinômios

Para pensar

Resposta possível: como os pontos (0, 80), (20, 65) e (60, 0) pertencem ao gráfico da função $P(x) = ax^2 + bx + c$, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} P(0) = 80 \\ P(20) = 65 \\ P(60) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 80 \\ a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 65 \\ a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c = 80 \\ 400a + 20b + c = 65 \\ 3.600a + 60b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{7}{480},\ b = -\frac{11}{24} \text{ e } c = 80$$

Exercícios propostos

1. A única expressão que tem todos os expoentes naturais é: $9ix^3 - \frac{5x^9}{7} - \sqrt{7}$

Alternativa **e**.

2. Para que o polinômio $P(x)$ seja identicamente nulo, devemos ter $P(x) \equiv 0$, ou seja, todos os coeficientes devem valer zero. Assim:

$P(x) \equiv 0 \Rightarrow (2a + 3b)x^4 - (a - b + 5)x^2 \equiv 0$

$$\therefore \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ -(a - b + 5) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \text{ e } b = 2$$

Concluímos que os números complexos a e b são -3 e 2, respectivamente.

3. a) $P(x) \equiv -2x^7 + 6x^3 + 3x^2 + 3$

Logo, $P(x)$ é do 7º grau.

b) $Q(t) \equiv 4t^3 + (-1 + 1)t^6 - 2it^5 - 6 \equiv -2it^5 + 4t^3 - 6$

Logo, $Q(t)$ é do 5º grau.

c) $T(x) \equiv 8x + 7x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8$

Logo, $T(x)$ é do 8º grau.

4. a) O grau de um polinômio não identicamente nulo é o maior expoente da variável entre os termos de coeficientes não nulos. Assim, para que o polinômio P tenha grau 7, o coeficiente de x^7 deve ser diferente de zero, isto é:

$k^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$ e $k \neq -5$

Logo, o polinômio P tem grau 7 para qualquer número complexo k, com $k \neq 5$ e $k \neq -5$.

b) O grau de um polinômio não identicamente nulo é o maior expoente da variável entre os termos de coeficientes não nulos. Assim, para que o polinômio Q tenha grau 4, o coeficiente de x^5 deve ser igual a zero e o coeficiente de x^4 deve ser diferente de zero, isto é:

$$\begin{cases} k^2 - 9 = 0 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 3 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

Logo, o polinômio Q tem grau 4 para $k = 3$ ou $k = -3$.

5. Dado $P(x) \equiv x^3 + (a + 4)x^2 + 1$, temos:

$P(-2) = 5 \Rightarrow (-2)^3 + (a + 4) \cdot (-2)^2 + 1 = 5$

$\therefore a = -1$

Concluímos que o número complexo a é -1.

6. Do enunciado, temos:

$P(x) \equiv (a - b)x^4 + ax^2 + 2x - b - 1$;

$P(2) = 18$ e $P(1) = 5$

Assim:

$$\begin{cases} (a - b) \cdot 2^4 + a \cdot 2^2 + 2 \cdot (2) - b - 1 = 18 \\ (a - b) \cdot 1^4 + a \cdot 1^2 + 2 \cdot (1) - b - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20a - 17b = 15 \\ 2a - 2b = 4 \end{cases}$$

$\therefore a = -\frac{19}{3}$ e $b = -\frac{25}{3}$

Logo: $P(x) \equiv 2x^4 - \frac{19}{3}x^2 + 2x + \frac{22}{3}$

Assim: $P(2i) = 2(2i)^4 - \frac{19}{3}(2i)^2 + 2 \cdot 2i + \frac{22}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2i) = \frac{194}{3} + 4i$

7. Do enunciado: $P(0) = 2$, $P(1) = 3$ e $P(2) = 8$

Indicando o polinômio do 2º grau por $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -1 \text{ e } c = 2$$

$\therefore P(x) \equiv 2x^2 - x + 2$

8. Temos: $b = a + 3$, $c = a + 6$, $d = a + 9$ e $P(1) = 38$.

Logo:

$a \cdot 1^5 + (a + 3) \cdot 1^3 + (a + 6) \cdot 1 + a + 9 = 38 \Rightarrow a = 5$

Concluímos, então, que: $P(x) \equiv 5x^5 + 8x^3 + 11x + 14$

9. a) Temos:

- no ponto A passam 100 carros por hora; logo, nesse ponto passam $100t$ carros em t horas;
- no ponto B passam $50t^2$ carros em t horas;
- no ponto C passam $40t^3$ carros em t horas.

Logo: $P(t) \equiv 40t^3 + 50t^2 + 100t$

b) $P(3)$ é o número de veículos que passaram pelos três pontos nas três primeiras horas de monitoramento.

c) O total de veículos que passaram pelos três pontos durante as 4 horas de monitoramento é dado por:

$P(4) = 40 \cdot 4^3 + 50 \cdot 4^2 + 100 \cdot 4 = 3.760$

Logo, passaram 3.760 automóveis pelos três pontos no período monitorado.

10. a) Representamos, genericamente, um polinômio P de coeficientes reais e grau menor que 4:

$P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$

Como o gráfico de P passa pelos pontos (1, 3), (2, 4), (3, 2) e (0, 5), temos que $P(1) = 3$, $P(2) = 4$, $P(3) = 2$ e $P(0) = 5$, isto é:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3 & \times (-8) \quad \times (-27) \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 & + \\ 27a + 9b + 3c + d = 2 & + \\ 0a + 0b + 0c + d = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 0a - 4b - 6c - 7d = -20 & \times 9 \\ 0a - 18b - 24c - 26d = -79 & \times (-2) \quad + \\ 0a + 0b + 0c + d = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c + d = 3 & \text{(I)} \\ 0a - 4b - 6c - 7d = -20 & \text{(II)} \\ 0a + 0b - 6c - 11d = -22 & \text{(III)} \\ 0a + 0b + 0c + d = 5 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (IV), obtemos: $d = 5$

Substituindo $d = 5$ em (III), obtemos: $c = -\frac{11}{2}$

Substituindo $d = 5$ e $c = -\frac{11}{2}$ em (II), obtemos: $b = \frac{9}{2}$

Substituindo $d = 5$, $c = -\frac{11}{2}$ e $b = \frac{9}{2}$ em (I), obtemos: $a = -1$

Concluímos, então, que: $P(x) \equiv -x^3 + \frac{9x^2}{2} - \frac{11x}{2} + 5$

b) $P(2{,}5) = -(2{,}5)^3 + \frac{9 \cdot (2{,}5)^2}{2} - \frac{11 \cdot 2{,}5}{2} + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2{,}5) = 3{,}75$

Assim, o número estimado de células cancerosas na região analisada, 2,5 semanas após o início do estudo, é 3.750.

11. a) $2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Assim, as raízes de P(x) são 1 e $-\frac{1}{2}$.

b) $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\therefore x + 1 = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore x = -1$ ou $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$ ou $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$

Logo, as raízes de Q(x) são -1, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$ e $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$.

c) Fatorando T(x), temos:

$T(x) \equiv x(x^2 + 1) - 4(x^2 + 1) \Rightarrow T(x) \equiv (x - 4)(x^2 + 1)$

$\therefore (x - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = i$ ou $x = -i$

Assim, as raízes de T(x) são 4, i e $-i$.

12. Pelo enunciado, sabemos que:

$P(x) \equiv (2a - b)x^4 + ax^3 + (3b - 2a)x^2 + 1$ e que 1 e -1 são raízes.

- Se 1 é raiz, então $P(1) = 0$
- Se -1 é raiz, então $P(-1) = 0$

Assim:

$$\begin{cases} (2a - b) \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 + (3b - 2a) \cdot 1^2 + 1 = 0 \\ (2a - b) \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + (3b - 2a) \cdot (-1)^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -a + 2b = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 0$ e $b = -\frac{1}{2}$.

13. Sabemos que, para que dois polinômios sejam idênticos, os coeficientes da variável com expoentes iguais têm de ser iguais. Assim, na identidade $(a^2 - 1)x^3 + (4a - 2)x^2 + x + 6 = 0x^3 + 2x^2 + x + 6$, temos:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ 4a - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Logo, o valor de a que satisfaz as duas equações simultaneamente é $a = 1$.

14. Se os polinômios $P(x) \equiv 3x^2 + 5$ e $Q(x) \equiv (a^2 - 1)x^2 + (a - 2b)x + ab + 3$ obedecem à condição $P(\alpha) = Q(\alpha)$ para qualquer número complexo α, temos:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 3 & \text{(I)} \\ a - 2b = 0 & \text{(II)} \\ ab + 3 = 5 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I), temos $a = 2$ ou $a = -2$.

- Substituímos a por 2 em (II) e (III):

$$\begin{cases} 2 - 2b = 0 \\ 2b + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

- Substituímos a por -2 em (II) e (III):

$$\begin{cases} -2 - 2b = 0 \\ -2b + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

Assim, temos $a = 2$ e $b = 1$ ou $a = -2$ e $b = -1$.

15. a) Os polinômios $s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$ e $8 + 4t + 6t^2$ são idênticos em $\mathbb{R}_+$. Assim, temos:

$s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2 \equiv 8 + 4t + 6t \Rightarrow$

$\Rightarrow s_0 = 8, v_0 = 4$ e $a = 12$

Ou seja, o espaço inicial s_0 é 8 m, a velocidade inicial v_0 é 4 m/s e a aceleração a é 12 m/s².

b) O espaço s, em metro, após 5 segundos do início da marcação de tempo é o valor numérico do polinômio $s = 8 + 4t + 6t^2$ para $t = 5$, isto é:

$s(5) = 8 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 = 178$

Ou seja, o espaço, após 5 segundos do início da marcação de tempo, é 178 m.

c) Quando o espaço s é 18 m, temos:

$8 + 4t + 6t^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 1$ ou $t = -\frac{5}{3}$ (não convém)

Logo, o espaço s é 18 m no instante 1 s.

16. Temos $P(x) \equiv 3x^3 + 2x^2 - 4x$, $Q(x) \equiv x^2 + 3x - 1$ e $T(x) \equiv 4x - 2$; então:

a) $P(x) + Q(x) \equiv (3 + 0)x^3 + (2 + 1)x^2 + (-4 + 3)x + 0 - 1$

$\therefore P(x) + Q(x) \equiv 3x^3 + 3x^2 - x - 1$

b) $P(x) - Q(x) \equiv (3 - 0)x^3 + (2 - 1)x^2 + (-4 - 3)x + [0 - (-1)]$

$\therefore P(x) - Q(x) \equiv 3x^3 + x^2 - 7x + 1$

c) $4P(x) \equiv 4 \cdot 3x^3 + 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot (-4x)$

$\therefore 4P(x) \equiv 12x^3 + 8x^2 - 16x$

d) $2P(x) - 5Q(x) \equiv 6x^3 + 4x^2 - 8x - 5x^2 - 15x + 5$

$\therefore 2P(x) - 5Q(x) \equiv 6x^3 - x^2 - 23x + 5$

e) $Q(x) \cdot T(x) + P(x) \equiv (x^2 + 3x - 1) \cdot (4x - 2) + 3x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow Q(x) \cdot T(x) + P(x) \equiv$

$\equiv 4x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 6x - 4x + 2 + 3x^3 + 2x^2 - 4x$

$\therefore Q(x) \cdot T(x) + P(x) \equiv 7x^3 + 12x^2 - 14x + 2$

f) $[Q(x)]^2 \equiv Q(x) \cdot Q(x) \equiv (x^2 + 3x - 1) \cdot (x^2 + 3x - 1) \equiv$

$\equiv x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x^3 + 9x^2 - 3x - x^2 - 3x + 1$

$\therefore [Q(x)]^2 \equiv x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

17. Temos $Q(x) \equiv 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1$, $T(x) \equiv x^3 + 2x + 4$ e $P(x) + 3Q(x) \equiv 2T(x)$; então $P(x) \equiv 2T(x) - 3Q(x)$. Assim:

$P(x) \equiv 2x^3 + 4x + 8 - 6x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 3$

$\therefore P(x) \equiv -6x^4 + 14x^3 - 9x^2 + 4x + 11$

18. $(x^3 + x + 1)(ax + b) + 4x^2 - 3x - 1 \equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + ax^2 + bx + ax + b + 4x^2 - 3x - 1 \equiv$

$\equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2$

$\therefore ax^4 + bx^3 + (a + 4)x^2 + (a + b - 3)x + b - 1 \equiv$

$\equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2$

Assim:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a + 4 = 6 \\ a + b - 3 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ a + b = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Verificando que, para $a = 2$ e $b = 1$, $a + b = 3$ é uma sentença verdadeira, concluímos que, na identidade, $a = 2$ e $b = 1$.

19. **a)** $C(x) = x\left(\frac{x}{40} + 2\right) \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{40} + 2x$

b) $R(x) = x(430 - x) \Rightarrow R(x) = 430x - x^2$

c) $L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 430x - x^2 - \left(\frac{x^2}{40} + 2x\right)$

$\therefore L(x) = -\frac{41x^2}{40} + 428x$

20. Em um cone circular reto de geratriz g e raio da base r, a área lateral A_L e a área da base B são dadas por: $A_L = \pi rg$ e $B = \pi r^2$.
Assim, para a superfície cônica construída pelo aluno, temos:
$A_L = \pi(3x + 1)(4x + 5) = 12\pi x^2 + 19\pi x + 5\pi$
e
$B = \pi(3x + 1)^2 = 9\pi x^2 + 6\pi x + \pi$
Concluímos, então, que a área total A_T é dada por:
$A_T = A_L + B \Rightarrow A_T = 21\pi x^2 + 25\pi x + 6\pi$

21. $P(x) \equiv (k^2 - 9)x^5 + kx^3 + 2x + 4$ e $Q(x) \equiv -3x^3 + 2x + 4$

a) $P(x) + Q(x) \equiv (k^2 - 9)x^5 + (k - 3)x^3 + 4x + 8$

b)
- Se $k^2 - 9 \neq 0$, então $gr(P + Q) = 5$, ou seja, se $k \neq 3$ e $k \neq -3$, $gr(P + Q) = 5$.
- Se $k^2 - 9 = 0$ e $k - 3 \neq 0$, então $gr(P + Q) = 3$. Logo, se $k = -3$, $gr(P + Q) = 3$.
- Se $k^2 - 9 = 0$ e $k - 3 = 0$, então $gr(P + Q) = 1$, ou seja, para $k = 3$, $gr(P + Q) = 1$.

Assim, concluímos:
- se $k \neq 3$ e $k \neq -3$, $gr(P + Q) = 5$
- se $k = -3$, $gr(P + Q) = 3$
- se $k = 3$, $gr(P + Q) = 1$

22. **a)** $P(x) \equiv (x^4 - 5x^3 + x - 2)(4x^3 + 3x^2 - 5x + 8)$
Pelo teorema do grau do polinômio produto, temos: $gr(P) = 4 + 3$
Portanto, $gr(P) = 7$.

b) $Q(x) \equiv (2x^5 + 3x^2 + 4)(x^3 + x^2 - x + 3) + 5x^6$
Pelo teorema do grau do polinômio produto, temos que o grau do produto
$(2x^5 + 3x^2 + 4)(x^3 + x^2 - x + 3)$ é $5 + 3 = 8$.
Como $5x^6$ tem grau 6, concluímos que $gr(Q) = 8$.

c) $T(x) \equiv (x^7 - 2x^3 + 4x^2 + 1)(x^2 - 3x + 5) + 3x^{10}$
Temos que o grau do produto
$(x^7 - 2x^3 + 4x^2 + 1)(x^2 - 3x + 5)$ é $7 + 2 = 9$,
mas o grau do monômio $3x^{10}$ é 10.
Concluímos, então, que $gr(T) = 10$.

23. Como os três polinômios, $P(x)$, $Q(x)$ e $H(x)$, são tais que $gr(P) = 5$, $gr(H) = 7$ e $P(x) \cdot Q(x) \equiv H(x)$, temos:
$gr(P) + gr(Q) = gr(H) \Rightarrow 5 + gr(Q) = 7$
$\therefore gr(Q) = 2$

24. Temos $P(x) \equiv x^4 + 2x - 1$,
$Q(x) \equiv 3x^5 + 2x^4 + 6x^2 + x - 2$ e $P(x) \cdot H(x) \equiv Q(x)$.
Logo: $gr(P) + gr(H) = gr(Q) \Rightarrow 4 + gr(H) = 5$
$\therefore gr(H) = 1$
Assim, $H(x)$ pode ser escrito como $H(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.
Logo, na identidade polinomial $P(x) \cdot H(x) \equiv Q(x)$, temos:
$(x^4 + 2x - 1)(ax + b) \equiv 3x^5 + 2x^4 + 6x^2 + x - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow ax^5 + bx^4 + 2ax^2 + 2bx - ax - b \equiv$
$\equiv 3x^5 + 2x^4 + 6x^2 + x - 2$
$\therefore ax^5 + bx^4 + 2ax^2 + (2b - a)x - b \equiv$
$\equiv 3x^5 + 2x^4 + 6x^2 + x - 2$
Assim:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ 2a = 6 \\ 2b - a = 1 \\ -b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 2$$

Portanto, $H(x) \equiv 3x + 2$.

25. **a)** O grau do polinômio é dado pela soma $2 + 4 + 1 + 1$, ou seja, $gr(P) = 8$.

b) As raízes do polinômio $P(x)$ são as raízes da equação $P(x) = 0$, ou seja:
$(x - 5)^2(x + 3)^4(x - i)(x + 2i) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 5)^2 = 0$ ou $(x + 3)^4 = 0$ ou $x - i = 0$ ou $x + 2i = 0$
$\therefore x = 5$ ou $x = -3$ ou $x = i$ ou $x = -2i$

26. Todo polinômio de menor grau possível, tendo como raízes apenas os números 1, 2 e 5, pode ser representado na forma:
$P(x) \equiv a(x - 1)(x - 2)(x - 5)$, com $a \neq 0$
Como o coeficiente dominante do polinômio é 1, temos:
$P(x) \equiv (x - 1)(x - 2)(x - 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \equiv (x^2 - 3x + 2)(x - 5)$
$\therefore P(x) \equiv x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

27. Temos que AB é a medida de cada aresta da base do prisma; logo, a medida CD é tal que:
$6(4x + 3) \cdot (CD) = 24x^2 + 66x + 36$
Deduzimos, então, que CD é representado por um polinômio do primeiro grau $ax + b$, na variável x.
Assim, obtemos a identidade:
$6(4x + 3) \cdot (ax + b) = 24x^2 + 66x + 36$
$\therefore 24ax^2 + (24b + 18a)x + 18b = 24x^2 + 66x + 36$
Logo:

$$\begin{cases} 24a = 24 \\ 24b + 18a = 66 \\ 18b = 36 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 2$$

Concluímos, então, que: $CD = x + 2$

28. Pelo teorema do grau do polinômio produto, o grau do polinômio $P(x)$ é dado por $6n$. Como a soma dos coeficientes de $P(x)$ é 512, determinamos o valor de n:
$(4 + 2 + 1 - 5)^n = 512 \Rightarrow 2^n = 512$
Como $512 = 2^9$, temos: $2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$
Se $n = 9$, então $6n = 54$.
Concluímos, então, que o grau de $P(x)$ é 54.

29. Vamos resolver esta questão de dois modos.

1º modo

Se $P(x + 2) \equiv x^2 + 3x - 5$, então $P(x) \equiv x^2 + bx + c$.

Assim:

$P(x + 2) \equiv (x + 2)^2 + b(x + 2) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x + 2) \equiv x^2 + 4x + 4 + bx + 2b + c$

$\therefore P(x + 2) \equiv x^2 + (4 + b)x + 2b + c + 4$

Logo:

$x^2 + (4 + b)x + 2b + c + 4 \equiv x^2 + 3x - 5$

Pela definição de identidade de polinômios, obtemos:

$$\begin{cases} 4 + b = 3 \\ 2b + c + 4 = -5 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \text{ e } c = -7$$

Concluímos, então, que $P(x) \equiv x^2 - x - 7$.

2º modo

Fazendo a mudança de variável $x + 2 = t$, temos $x = t - 2$. Assim:

$P(t) \equiv (t - 2)^2 + 3(t - 2) - 5 \Rightarrow P(t) \equiv t^2 - t - 7$

Como a variável do polinômio pode ser representada por qualquer letra, concluímos:

$P(x) = x^2 - x - 7$

30. Pela definição da divisão de polinômios, temos:

$E(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$\therefore E(x) \equiv (2x^2 - 1)(2x^2 - 1) + x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(x) \equiv 4x^4 - 4x^2 + 1 + x + 2$

$\therefore E(x) \equiv 4x^4 - 4x^2 + x + 3$

31. a) $E(x) \equiv 4x^4 + 2x^3 + 11x + 6$ e $D(x) \equiv 2x^3 + 3$

I. Inicialmente, determinamos o grau de $Q(x)$ e o maior grau possível de $R(x)$:

$gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 4 - 3 = 1$

Como $gr(R)$, se existe, deve ser menor que $gr(D)$, deduzimos que o maior grau possível do resto é 2.

II. Formamos os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ de acordo com os graus obtidos em (I) e com coeficiente a determinar:

$Q(x) \equiv ax + b$ e $R(x) \equiv cx^2 + dx + e$

III. Como $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax + b)(2x^3 + 3) + cx^2 + dx + e \equiv$

$\equiv 4x^4 + 2x^3 + 11x + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^4 + 3ax + 2bx^3 + 3b + cx^2 + dx + e \equiv$

$\equiv 4x^4 + 2x^3 + 11x + 6$

$\therefore 2ax^4 + 2bx^3 + cx^2 + (3a + d)x + 3b + e \equiv$

$\equiv 4x^4 + 2x^3 + 11x + 6$

Assim, pela definição de identidade de polinômios:

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2b = 2 \\ c = 0 \\ 3a + d = 11 \\ 3b + e = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1, c = 0, d = 5 \text{ e } e = 3$$

Assim, concluímos: $Q(x) \equiv 2x + 1$ e $R(x) \equiv 5x + 3$

b) $E(x) \equiv 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x - 3$ e $D(x) \equiv 2x^2 + 3x - 1$

I. $gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 4 - 2 = 2$

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, o maior grau possível do resto é 1.

II. De acordo com (I), temos:

$Q(x) \equiv ax^2 + bx + c$ e $R(x) \equiv dx + e$

III. Como $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax^2 + bx + c)(2x^2 + 3x - 1) + dx + e \equiv$

$\equiv 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^4 + 3ax^3 - ax^2 + 2bx^3 + 3bx^2 - bx +$

$+ 2cx^2 + 3cx - c + dx + e \equiv 2x^4 + 3x^3 +$

$+ 5x^2 + 9x - 3$

$\therefore 2ax^4 + (3a + 2b)x^3 + (-a + 3b + 2c)x^2 +$

$+ (-b + 3c + d)x + (-c + e) \equiv 2x^4 + 3x^3 +$

$+ 5x^2 + 9x - 3$

Assim, pela definição de identidade de polinômios:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 3 \\ -a + 3b + 2c = 5 \\ -b + 3c + d = 9 \\ -c + e = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0, c = 3, d = 0 \text{ e } e = 0$$

Concluímos, então, que $Q(x) \equiv x^2 + 3$ e $R(x) \equiv 0$.

c) $E(x) \equiv 4x^3 + 24x^2 + 5x + 38$ e $D(x) \equiv 4x^2 + 5$

I. $gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 3 - 2 = 1$

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, o maior grau possível do resto é 1.

II. De acordo com (I), temos:

$Q(x) \equiv ax + b$ e $R(x) \equiv cx + d$

III. Como $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax + b)(4x^2 + 5) + cx + d \equiv$

$\equiv 4x^3 + 24x^2 + 5x + 38 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4ax^3 + 5ax + 4bx^2 + 5b + cx + d \equiv$

$\equiv 4x^3 + 24x^2 + 5x + 38$

$\therefore 4ax^3 + 4bx^2 + (5a + c)x + 5b + d \equiv$

$\equiv 4x^3 + 24x^2 + 5x + 38$

Assim, pela definição de identidade de polinômios:

$$\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b = 24 \\ 5a + c = 5 \\ 5b + d = 38 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 6, c = 0 \text{ e } d = 8$$

Concluímos, então, que $Q(x) \equiv x + 6$ e $R(x) \equiv 8$.

32. Do enunciado, temos:

$2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv D(x) \cdot (2x^2 - 1) + 5$

Temos ainda:

$gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(D) = 4 - 2 = 2$

Então: $D(x) \equiv ax^2 + bx + c$

Logo:

$2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv (ax^2 + bx + c)(2x^2 - 1) + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv$

$\equiv 2ax^4 - ax^2 + 2bx^3 - bx + 2cx^2 - c + 5$

$\therefore 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv$

$\equiv 2ax^4 + 2bx^3 + (-a + 2c)x^2 - bx - c + 5$

Assim:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 6 \\ -a + 2c = -1 \\ -b = -3 \\ -c + 5 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \text{ e } c = 0$$

Concluímos, então, que $D(x) \equiv x^2 + 3x$.

33. a)
$$\begin{array}{r|l} 8x^4+4x^3+10x^2+14x-1 & 2x^2+3 \\ \cline{2-2} 8x^4 \qquad +12x^2 \qquad\qquad & \underbrace{4x^2+2x-1}_{\text{Quociente}} \\ \cline{1-1} 4x^3-2x^2+14x-1 & \\ 4x^3 \qquad\quad +6x \qquad & \\ \cline{1-1} -2x^2+8x-1 & \\ -2x^2 \qquad\quad -3 & \\ \cline{1-1} \underbrace{8x+2}_{\text{Resto}} & \end{array}$$

Concluímos, então, que $Q(x) \equiv 4x^2 + 2x - 1$ e $R(x) \equiv 8x + 2$.

b)
$$\begin{array}{r|l} x^5+x^4+3x^3+x^2+4x+2 & x^3+2x-1 \\ \cline{2-2} x^5 \qquad +2x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2+x+1 \\ \cline{1-1} x^4+x^3+2x^2+4x+2 & \\ x^4 \qquad +2x^2-x \qquad & \\ \cline{1-1} x^3+0x^2+5x+2 & \\ x^3 \qquad\quad +2x-1 & \\ \cline{1-1} 3x+3 & \end{array}$$

Concluímos, então, que $Q(x) \equiv x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 3x + 3$.

c)
$$\begin{array}{r|l} 2x^6+4x^5+8x^4+2x^3+0x^2+0x-16 & x^4+x-2 \\ \cline{2-2} 2x^6 \qquad\qquad +2x^3-4x^2 \qquad\qquad & 2x^2+4x+8 \\ \cline{1-1} 4x^5+8x^4+0x^3+4x^2+0x-16 & \\ 4x^5 \qquad\qquad +4x^2-8x \qquad & \\ \cline{1-1} 8x^4+0x^3+0x^2+8x-16 & \\ 8x^4 \qquad\qquad\qquad +8x-16 & \\ \cline{1-1} 0x^4 \qquad\qquad\qquad +0x+0 & \end{array}$$

Concluímos, então, que $Q(x) \equiv 2x^2 + 4x + 8$ e $R(x) \equiv 0$.

d)
$$\begin{array}{r|l} x^4+0x^3+0x^2+0x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^4-x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3+x^2+x+1 \\ \cline{1-1} x^3+0x^2+0x-1 & \\ x^3-x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1} x^2+0x-1 & \\ x^2-x \qquad & \\ \cline{1-1} x-1 & \\ x-1 & \\ \cline{1-1} 0x+0 & \end{array}$$

Concluímos, então, que $Q(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 0$.

34. a) Efetuando a divisão pelo método da chave, temos:
$$\begin{array}{r|l} x^4-7x^3+8x^2+28x-48 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} x^4-5x^3+6x^2 \qquad\qquad\quad & \underbrace{x^2-2x-8}_{\text{Quociente}} \\ \cline{1-1} -2x^3+2x^2+28x-48 & \\ -2x^3+10x^2-12x \qquad & \\ \cline{1-1} -8x^2+40x-48 & \\ -8x^2+40x-48 & \\ \cline{1-1} \underbrace{0}_{\text{Resto}} & \end{array}$$

Como o resto é zero, concluímos que $E(x)$ é divisível por $D(x)$.

b) Pela divisão do item a temos:
$x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x - 48 \equiv$
$\equiv (x^2 - 2x - 8)(x^2 - 5x + 6)$
Assim:
$x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x - 48 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x - 8)(x^2 - 5x + 6) = 0$
Pela propriedade do produto nulo, temos:
$x^2 - 2x - 8 = 0$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$
Ou seja, $x = 4$ ou $x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 3$.
Logo: $S = \{4, -2, 2, 3\}$

35. Efetuando a divisão pelo método da chave, temos:
$$\begin{array}{r|l} 8x^5+0x^4-4x^3-4x^2+0x+k & 2x^3-1 \\ \cline{2-2} 8x^5 \qquad\qquad\qquad -4x^2 \qquad\qquad & 4x^2-2 \\ \cline{1-1} -4x^3+0x^2+0x+k & \\ -4x^3 \qquad\qquad\qquad +2 & \\ \cline{1-1} k-2 & \end{array}$$

Como a divisão é exata, concluímos que $k - 2 = 0$, ou seja, $k = 2$.

36. $(2x + 1)(4x + 1)(CH) = 8x^3 + 22x^2 + 13x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (8x^2 + 6x + 1)(CH) = 8x^3 + 22x^2 + 13x + 2$
Assim, deduzimos que CH é o quociente de $8x^3 + 22x^2 + 13x + 2$ por $8x^2 + 6x + 1$. Efetuando a divisão pelo método da chave, temos:
$$\begin{array}{r|l} 8x^3+22x^2+13x+2 & 8x^2+6x+1 \\ \cline{2-2} 8x^3+6x^2+x \qquad & x+2 \\ \cline{1-1} 16x^2+12x+2 & \\ 16x^2+12x+2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Concluímos, então, que: $CH = x + 2$

37. Sendo v o volume de cada cubinho, temos:
$(4x + 2)v = 8x(2x + 1)(5x + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (4x + 2)v = 80x^3 + 88x^2 + 24x$
Assim, v é o quociente de $80x^3 + 88x^2 + 24x$ por $4x + 2$. Efetuando a divisão pelo método da chave, temos:
$$\begin{array}{r|l} 80x^3+88x^2+24x & 4x+2 \\ \cline{2-2} 80x^3+40x^2 \qquad\quad & 20x^2+12x \\ \cline{1-1} 48x^2+24x & \\ 48x^2+24x & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Concluímos, então, que: $v = 20x^2 + 12x$

38. a) $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} \equiv \dfrac{6x-4}{x^2-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a(x-1) + bx}{x(x-1)} \equiv \dfrac{6x-4}{x^2-x}$

$\therefore \dfrac{ax + bx - a}{x^2 - x} \equiv \dfrac{6x-4}{x^2-x} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ -a = -4 \end{cases}$

$\therefore a = 4$ e $b = 2$

b) $\frac{c}{x-3} + \frac{d}{x+4} \equiv \frac{4x+23}{x^2+x-12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c(x+4)+d(x-3)}{(x-3)(x+4)} \equiv \frac{4x+23}{x^2+x-12}$

$\therefore \frac{(c+d)x+4c-3d}{x^2+x-12} \equiv \frac{4x+23}{x^2+x-12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c+d=4 \\ 4c-3d=23 \end{cases}$

$\therefore c = 5$ e $d = -1$

39. $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{8x^2-x-1}{x^3-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} =$

$= \frac{8x^2-x-1}{x^3-x}$

$\therefore \frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x^3-x} = \frac{8x^2-x-1}{x^3-x}$

Essa igualdade é uma identidade para $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$ se, e somente se:

$\begin{cases} a+b+c=8 \\ a-c=-1 \\ -b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=1$ e $c=4$

40. Antes da negociação, o valor de cada prestação mensal era $\frac{1.200}{n}$; após a negociação, a prestação passou a ser $\frac{1.200}{n+2}$. Assim, temos:

$\frac{1.200}{n+2} = \frac{1.200}{n} - 30 \Rightarrow 30n^2 + 60n - 2.400 = 0$

$\therefore n^2 + 2n - 80 = 0 \Rightarrow n = 8$ ou $n = -10$ (não convém)

Concluímos, então, que o valor p da prestação conseguida por essa negociação é dada por:

$p = \frac{1.200}{8+2} = 120$

Ou seja, a prestação mensal, após a negociação, passou a ser R$ 120,00.

41. Sendo n o número de pessoas que seriam indenizadas inicialmente, temos que o valor, em real, pago a cada uma delas seria $\frac{24.000}{n}$. Porém, 5 pessoas renunciaram à indenização; logo, o valor pago a cada uma das demais passou a ser $\frac{24.000}{n-5}$. Assim, temos:

$\frac{24.000}{n-5} = \frac{24.000}{n} + 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow 400n^2 - 2.000n - 120.000 = 0$

$\therefore n^2 - 5n - 300 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 20$ ou $n = -15$ (não convém)

Concluímos, então, que o número de pessoas que receberam indenização foi 20 − 5, ou seja, 15.

42. Do enunciado, temos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x+4 \\ \cline{2-2} 0 & Q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} Q_1(x) & x-4 \\ \cline{2-2} 0 & 2x^3-x+1 \end{array}$$

Portanto:

$\begin{cases} P(x) = (x+4) \cdot Q_1(x) + 0 & \text{(I)} \\ Q_1(x) = (x-4) \cdot (2x^3 - x + 1) + 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$P(x) \equiv (x+4) \cdot (x-4) \cdot (2x^3 - x + 1) + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) \equiv (x^2 - 16)(2x^3 - x + 1) + 0$

Concluímos, assim, que o quociente de $P(x)$ por $x^2 - 16$ é $(2x^3 - x + 1)$ e o resto é zero.

43. Do enunciado, temos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-3 \\ \cline{2-2} 13 & Q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} Q_1(x) & x-2 \\ \cline{2-2} 3 & x^2+3 \end{array}$$

Portanto:

$\begin{cases} P(x) = (x-3) \cdot Q_1(x) + 13 & \text{(I)} \\ Q_1(x) = (x-2) \cdot (x^2+3) + 3 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$P(x) \equiv (x-3) \cdot [(x-2) \cdot (x^2+3) + 3] + 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) \equiv (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 3) + 3x + 4$

Assim, concluímos que o quociente da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 5x + 6$ é $x^2 + 3$ e o resto é $3x + 4$.

44. Temos: $gr(R_1) < 3$, $gr(R_2) < 3$ e

$\begin{cases} E(x) \equiv (x^2+1)(x^3+2) + R_1(x) \\ E(x) \equiv (x^2+1)(x^3-5) + R_2(x) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+1)(x^3+2) + R_1(x) \equiv (x^2+1)(x^3-5) + R_2(x)$

$\therefore (x^2+1)(x^3+2) - (x^2+1)(x^3-5) \equiv R_2(x) - R_1(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+1)(x^3+2-x^3+5) \equiv R_2(x) - R_1(x)$

$\therefore 7x^2 + 7 \equiv R_2(x) - R_1(x)$

Como $gr(R_1) < 3$, $gr(R_2) < 3$ e $gr(R_2 - R_1) = 2$, concluímos que pelo menos um dos polinômios, $R_1(x)$ ou $R_2(x)$, é do 2º grau.

Alternativa **d**.

45. a) $P(x) \equiv 4x^3 + 2x - 4$ e $D(x) \equiv x - 2$

Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é igual a $P(2)$; logo:

$R = P(2) = 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - 4 \Rightarrow R = 32$

b) $P(x) \equiv x^4 + x^2 - 2x - 7$ e $D(x) \equiv x - 3$

Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é igual a $P(3)$; logo:

$R = P(3) = 3^4 + 3^2 - 2 \cdot 3 - 7 \Rightarrow R = 77$

c) $P(x) \equiv 2x^5 - 4x^3 - 2x - 1$ e $D(x) \equiv x + 1$

Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é igual a $P(-1)$; logo:

$R = P(-1) = 2(-1)^5 - 4(-1)^3 - 2(-1) - 1 \Rightarrow R = 3$

46. Se, ao dividir $P(x) \equiv x^3 - 2x^2 + kx - 5$ por $x - 3$, obtemos resto 1, então, pelo teorema do resto, temos:

$P(3) = 1 \Rightarrow 3^3 - 2 \cdot 3^2 + k \cdot 3 - 5 = 1$

$\therefore k = -1$

47. Se, ao dividir $P(x) \equiv x^4 + 2x^2 + ax + b$ por $x - 1$, obtemos resto −3 e por $x + 2$ obtemos resto 9, então, pelo teorema do resto, temos:

$\begin{cases} P(1) = -3 \\ P(-2) = 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1^4 + 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = -3 \\ (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 9 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a + b = -6 \\ -2a + b = -15 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, concluímos que $a = 3$ e $b = -9$.

48. Pelo teorema do resto, temos:

$$\begin{cases} P(k) = R \\ P(k) + 2R = 24 \end{cases} \Rightarrow R = 8$$

49. Sendo $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, de acordo com o enunciado e pelo teorema do resto, temos:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -4 \\ P(2) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -4 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 11 \end{cases}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = -4 \\ 4a + 2b + c = 11 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 2 \text{ e } c = -5$$

Concluímos, então, que $P(x) \equiv 3x^2 + 2x - 5$.

50. Seja $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c$; ao dividi-lo por $x - 1$, $x - 2$ e $x + 1$, obtemos restos -1, 12 e -3, respectivamente. Pelo teorema do resto, temos:

$$\begin{cases} P(1) = -1 \\ P(2) = 12 \\ P(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1 \\ 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 12 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -3 \end{cases}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ a - b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 0 \text{ e } c = -4$$

Concluímos, assim, que $P(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 4$.

51. a) V, pois:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + 7 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

b) V, pois:

$P(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^3 + 7(-1)^2 + 4(-1) - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(-1) = 0$

c) F, pois:

$P(3) = 2 \cdot 3^4 + 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(3) = 260 \neq 0$

d) V, pois:

$P(2i) = 2 \cdot (2i)^4 + (2i)^3 + 7 \cdot (2i)^2 + 4 \cdot 2i - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(2i) = 0$

52. $P(x) \equiv x^5 - x^3 + kx + 4$ é divisível por $x - 2$ se, e somente se, $P(2) = 0$. Assim:
$P(2) = 2^5 - 2^3 + k \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow P(2) = 2k + 28 = 0$
$\therefore 2k + 28 = 0 \Rightarrow k = -14$

53. Pelo teorema de D'Alembert, temos:
$P(a) = 0 \Rightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0$
$\therefore a^2 = -4$ ou $a^2 = 1 \Rightarrow a = 2i$ ou $a = -2i$ ou $a = 1$ ou $a = -1$

54. Pelo teorema de D'Alembert, temos:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 2 - 2 = 0 \\ 8a + 4b + 4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{1}{2}$$

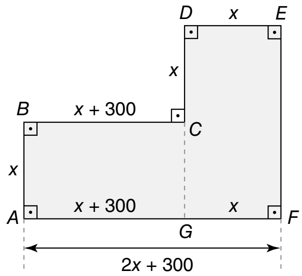
Alternativa **c**.

55. Como $P(x) \equiv x^4 + ax^2 + b$ é divisível por $x - 2$, então, pelo teorema de D'Alembert, temos $P(2) = 0$. Logo:
$2^4 + a \cdot 2^2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -16 \quad$ (I)
$P(x) \equiv x^4 + ax^2 + b$ deixa resto -5 na divisão por $x - i$; então, pelo teorema do resto, temos $P(i) = -5$. Assim:
$i^4 + a \cdot i^2 + b = -5 \Rightarrow -a + b = -6 \quad$ (II)
De (I) e (II), temos o sistema:

$$\begin{cases} 4a + b = -16 \\ -a + b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ e } b = -8$$

56. Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, $P(-1) = 0$. Assim, devemos ter: $(-1)^n - 1 = 0$, ou seja, $(-1)^n = 1$
Como $n \in \mathbb{N}$, deduzimos que essa igualdade ocorre se, e somente se, n é par.
Logo, $P(x) \equiv x^n - 1$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, n é um número natural par não nulo.

57. a) Prolongando o lado $\overline{DC}$, obtemos os retângulos $BCGA$ e $DEFG$, conforme mostra a figura abaixo.



Assim:
$S(x) \equiv (x + 300)x + x \cdot 2x \Rightarrow S(x) \equiv 3x^2 + 300x$

b) Para que $S(x)$ seja divisível por $x + k$, devemos ter $S(-k) = 0$. Assim:
$3(-k)^2 + 300 \cdot (-k) = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $k = 100$
Apenas $k = 100$ convém como solução.

58. Em cada caso, seja $Q(x)$ o quociente e R o resto de $E(x)$ por $D(x)$. Então:

a) $E(x) \equiv 2x^5 + 0x^4 - 40x^3 - 48x^2 + 0x + 2$ e
$D(x) \equiv x - 5$

5	2	0	−40	−48	0	2
	2	10	10	2	10	52

Portanto:
$Q(x) \equiv 2x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 2x + 10$ e $R = 52$

b) $E(x) \equiv x^3 + 5x^2 + 6x + 9$ e $D(x) \equiv x + 3$

−3	1	5	6	9
	1	2	0	9

Portanto:
$Q(x) \equiv x^2 + 2x$ e $R = 9$

c) $E(x) \equiv x^6 + 2x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 - 48x + 1$ e
$D(x) \equiv x + 1$

−1	1	2	0	−4	0	−48	1
	1	1	−1	−3	3	−51	52

Portanto:
$Q(x) \equiv x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 51$ e $R = 52$

d) $E(x) \equiv ix^5 + 2x^4 + 0x^3 + 5x^2 + 0x + 4$ e $D(x) \equiv x - i$

i	i	2	0	5	0	4
	i	1	i	4	4i	0

Portanto:
$Q(x) \equiv ix^4 + x^3 + ix^2 + 4x + 4i$ e $R = 0$

59. a) 1 é raiz de $P(x) \equiv x^5 - 1$ se, e somente se, $P(1) = 0$.
Temos:
$P(1) = 1^5 - 1 \Rightarrow P(1) = 0$
Concluímos, então, que 1 é raiz de $P(x)$.

b) Como 1 é raiz de
$P(x) \equiv x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$,
então, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

1	1	0	0	0	0	−1
	1	1	1	1	1	0

Ou seja, ao dividir $P(x)$ por $x - 1$, obtemos como quociente $Q(x) \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e como resto $R = 0$.
Portanto, $P(x) \equiv (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

60. a) $P(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = 0$; logo, -1 é raiz de $P(x)$.

b) Dividindo $P(x)$ por $x + 1$, obtemos:

−1	1	−4	1	6
	1	−5	6	0

Logo, $P(x) \equiv (x^2 - 5x + 6)(x + 1)$.

c) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 5x + 6)(x + 1) = 0$
$\therefore\ x^2 - 5x + 6 = 0$ ou $x + 1 = 0$
$\therefore\ x = 3$ ou $x = 2$ ou $x = -1$
Concluímos, então, que o conjunto solução S da equação é dado por: $S = \{3, 2, -1\}$

61. a) $E(x) \equiv 6x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 6x + 9$ e
$D(x) \equiv 2x - 2$
Como $2x - 2 \equiv 2(x - 1)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - 1$ e, a seguir, dividir o quociente obtido por 2.
Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - 1$, temos:

1	6	0	0	3	−6	9
	6	6	6	9	3	12

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $E(x)$ por $x - 1$ são:
$Q_1(x) \equiv 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ e $R_1 = 12$
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $2x - 2$ são:
$Q(x) \equiv \dfrac{Q_1(x)}{2} \equiv 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + \dfrac{9x}{2} + \dfrac{3}{2}$ e
$R = R_1 = 12$

b) $E(x) \equiv 3x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 1$ e $D(x) \equiv 3x - 2$
Como $3x - 2 \equiv 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - \dfrac{2}{3}$ e, a seguir, dividir o quociente obtido por 3.
Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - \dfrac{2}{3}$, temos:

$\frac{2}{3}$	3	1	4	−1	1
	3	3	6	3	3

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $E(x)$ por $\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$ são:
$Q_1(x) \equiv 3x^3 + 3x^2 + 6x + 3$ e $R_1 = 3$
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $3x - 2$ são:
$Q(x) \equiv \dfrac{Q_1(x)}{3} \equiv x^3 + x^2 + 2x + 1$ e $R = R_1 = 3$

c) $E(x) \equiv 4x^3 + 3x^2 + 0x + 0$ e $D(x) \equiv 2x + 1$
Como $2x + 1 \equiv 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$, podemos dividir $E(x)$ por $x + \dfrac{1}{2}$ e, a seguir, dividir o quociente obtido por 2.
Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x + \dfrac{1}{2}$, temos:

$-\frac{1}{2}$	4	3	0	0
	4	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Assim, na divisão de $E(x)$ por $x + \dfrac{1}{2}$, temos quociente $Q_1(x) \equiv 4x^2 + x - \dfrac{1}{2}$ e resto $R_1 = \dfrac{1}{4}$.
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $2x + 1$ são:
$Q(x) \equiv \dfrac{Q_1(x)}{2} \equiv 2x^2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ e $R = R_1 = \dfrac{1}{4}$

d) $E(x) \equiv 4ix^3 + 5x^2 + ix + 1$ e $D(x) \equiv 2x - i$
Como $2x - i \equiv 2\left(x - \dfrac{i}{2}\right)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - \dfrac{i}{2}$ e, a seguir, dividir o quociente obtido por 2.
Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - \dfrac{i}{2}$, temos:

$\frac{i}{2}$	4i	5	i	1
	4i	3	$\frac{5i}{2}$	$-\frac{1}{4}$

Assim, na divisão de $E(x)$ por $x - \dfrac{i}{2}$, temos quociente $Q_1(x) \equiv 4ix^2 + 3x + \dfrac{5i}{2}$ e resto $R_1 = -\dfrac{1}{4}$.
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R na divisão de $E(x)$ por $2x - i$ são:
$Q(x) \equiv \dfrac{Q_1(x)}{2} \equiv 2ix^2 + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{5i}{4}$ e $R = R_1 = -\dfrac{1}{4}$

62. a) Sendo $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ e $Q_4(x)$ os respectivos quocientes das divisões de $P(x)$ por $(x - 2)$, de $Q_1(x)$ por $(x - 2)$, de $Q_2(x)$ por $(x - 2)$ e de $Q_3(x)$ por $(x - 2)$, devemos mostrar que essas quatro divisões são exatas. Aplicando, sucessivamente, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

2	1	−8	23	−24	−8	32	−16
2	1	−6	11	−2	−12	8	0
2	1	−4	3	4	−4	0	
2	1	−2	−1	2	0		
	1	0	−1	0			

Assim, concluímos que $P(x) \equiv (x^2 - 1)(x - 2)^4$; logo, $P(x)$ é divisível por $(x - 2)^4$.

b) Pelo item **a**, deduzimos que a equação $x^6 - 8x^5 + 23x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 32x - 16 = 0$ pode ser representada na forma:
$(x^2 - 1)(x - 2)^4 = 0$
Assim, pela propriedade do produto nulo, obtemos:
$x^2 - 1 = 0$ ou $(x - 2)^4 = 0$
$\therefore\ x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$
Logo, o conjunto solução S da equação é dado por: $S = \{1, -1, 2\}$

63. Sendo $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ e $Q_3(x)$ os respectivos quocientes das divisões de $P(x)$ por $(x - 2)$, de $Q_1(x)$ por $(x - 2)$, e de $Q_2(x)$ por $(x - 2)$, devemos mostrar que as duas primeiras divisões são exatas e que a terceira não é exata. Aplicando, sucessivamente, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

2	1	0	−4	−8	0	32
2	1	2	0	−8	−16	0
2	1	4	8	8	0	
	1	6	20	48		

Concluímos, então, que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)^2$ e não é divisível por $(x - 2)^3$.

64. Seja R o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ em cada um dos casos.

a) $P(x) \equiv 54x^3 + 9x^2 + 6x - 1$ e $D(x) \equiv 3x - 1$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$$R = P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow R = 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{3} - 1$$
$\therefore\ R = 4$

b) $P(x) \equiv 16x^4 + 4x^2 - 3x - 2$ e $D(x) \equiv 2x + 1$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$$R = P\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2$$
$\therefore\ R = \frac{3}{2}$

c) $P(x) \equiv 8x^3 - 12x^2 + 4x - 6$ e $D(x) \equiv 2x - 3$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$$R = P\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} - 6$$
$\therefore\ R = 0$

d) $P(x) \equiv 9x^6 + 2x^3 - x^2 + 2$ e $D(x) \equiv 7x - 0$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$R = P(0) \Rightarrow R = 9 \cdot 0^6 + 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 2$
$\therefore\ R = 2$

65. Se na divisão de $P(x) \equiv 6x^3 - 5x^2 + kx - 4$ por $2x - 1$ o resto é -1, então, pela extensão do teorema do resto, temos que $P\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. Assim:
$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + k \cdot \frac{1}{2} - 4 = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{5}{4} + \frac{k}{2} = 3$$
$$\therefore\ \frac{k}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow k = 7$$
Concluímos, então, que $k = 7$.

66. Se as divisões de um polinômio do 2º grau, $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, por $2x - 1$, $3x + 1$ e $x - 1$ apresentam restos 10, 4 e 40, respectivamente, então, pelo teorema do resto e sua extensão, temos:
$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \\ P\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 \\ P(1) = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + c = 10 \\ a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + c = 4 \\ a + b + c = 40 \end{cases}$$
que é equivalente a:
$$\begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 10 \\ \frac{a}{9} - \frac{b}{3} + c = 4 \\ a + b + c = 40 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{198}{5},\ b = \frac{3}{5} \text{ e } c = -\frac{1}{5}$$
Assim, concluímos que $P(x) \equiv \frac{198x^2}{5} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{5}$.

67. Temos: $P(x) \equiv (8x^2 + 2x + k)(16x^3 - 5) + 4x^2 - 3k$. Como o resto da divisão de $P(x)$ por $2x - 1$ é 10, deduzimos que $P\left(\frac{1}{2}\right) = 10$, ou seja:
$$\left[8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + k\right] \cdot \left[16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\right] +$$
$$+ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3k = 10 \Rightarrow k = -3$$

68. Como na divisão de $P(x)$ por $3x - 5$ o resto é 3, então, pela extensão do teorema do resto, temos $P\left(\frac{5}{3}\right) = 3$. Da mesma forma, como na divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ o resto é 5, temos $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$.
Assim, na divisão de $P(x)$ por $(3x - 5)(2x + 1)$, temos:
$$\begin{array}{l|l} P(x) & (3x - 5)(2x + 1) \\ \cline{2-2} R(x) & \quad Q(x) \end{array}$$
$\therefore\ P(x) \equiv (3x - 5)(2x + 1) \cdot Q(x) + R(x)$
Sabendo que $gr(R)$ é no máximo 1 ou $R \equiv 0$, temos $R(x) \equiv ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{C}$.
Logo:
$P(x) \equiv (3x - 5)(2x + 1) \cdot Q(x) + ax + b$
$P\left(\frac{5}{3}\right) = 3$; então:
$$\left(3 \cdot \frac{5}{3} - 5\right)\left(2 \cdot \frac{5}{3} + 1\right) \cdot Q\left(\frac{5}{3}\right) + a \cdot \frac{5}{3} + b = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5a}{3} + b = 3 \quad \text{(I)}$$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$; então:

$$\left[3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 5\right]\left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right] \cdot Q\left(-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b = 5 \Rightarrow -\frac{a}{2} + b = 5 \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{5a}{3} + b = 3 \\ -\frac{a}{2} + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{12}{13} \text{ e } b = \frac{59}{13}$$

Assim, concluímos que $R(x) \equiv -\frac{12x}{13} + \frac{59}{13}$.

69. a) V, pois:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

b) F, pois:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \neq 0$$

c) V, pois:

$$P\left(\frac{i}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{i}{2}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{i}{2}\right) = 0$$

d) V, pois:

$$P\left(-\frac{i}{2}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{i}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{i}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{i}{2}\right) = 0$$

70. O polinômio $P(x)$ é divisível por $2x - a$ se, e somente se, $P\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, ou seja:

$$2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 + a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + 2a = 0 \Rightarrow a^3 - a = 0$$

$\therefore a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1$

Logo, o maior valor possível de a é 1.

71. O polinômio $P(x)$ é divisível por $4x - 2i$ se, e somente se, $P\left(\frac{i}{2}\right) = 0$, ou seja:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^4 + k\left(\frac{i}{2}\right)^3 + \frac{5\left(\frac{i}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{i}{2}}{2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow k = -2$$

72. $P(x) \equiv 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ é divisível por $2x + 1$ e por $x - 2$ se $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ e $P(2) = 0$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 +$$

$$+ a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

$P(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 2 = 0$

Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a - 2b = 8 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = -3$$

Concluímos, então, que, para $a = 2$ e $b = -3$, o polinômio $P(x)$ é divisível por $2x + 1$ e por $x - 2$.

73. Como o polinômio $P(x) \equiv 3x^4 - 4x^3 + x^2 + ax + b$ é divisível por $3x - 1$, então, pela extensão do teorema de D'Alembert, temos:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + a \cdot \frac{1}{3} + b = 0$$

$$\therefore \frac{a}{3} + b = 0 \quad \text{(I)}$$

O polinômio $P(x)$ deixa resto 4 na divisão por $x - 1$; então, pelo teorema do resto, temos:

$P(1) = 4 \Rightarrow 3 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 1^2 + a \cdot 1 + b = 4$

$\therefore a + b = 4 \quad \text{(II)}$

De (I) e (II), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 0 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 6 \text{ e } b = -2$$

74. Como $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 2)(x + 3)$, deduzimos que $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x + 3$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, temos que $P(2) = 0$ e $P(-3) = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^3 + k \cdot 2^2 + 2 + m = 0 \\ 2 \cdot (-3)^3 + k \cdot (-3)^2 + (-3) + m = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 15 \text{ e } m = -78$$

75. Se $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 2i)(x + 1)$, então $P(x)$ é divisível por $x - 2i$ e por $x + 1$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, $P(2i) = 0$ e $P(-1) = 0$.

Logo, como $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + 4x + b$, temos:

$$\begin{cases} (2i)^3 + a \cdot (2i)^2 + 4 \cdot 2i + b = 0 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a + b = 0 \\ a + b = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1$ e $b = 4$.

76. Temos $x^2 - 4 \equiv (x + 2)(x - 2)$.

Se $P(x)$ é divisível pelo produto $(x + 2)(x - 2)$, então $P(x)$ é divisível por $x + 2$ e por $x - 2$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, $P(-2) = 0$ e $P(2) = 0$.

Logo, como $P(x) \equiv \frac{x^5}{16} - \frac{3x^4}{8} - 2x^3 + ax + b$, temos:

$$\begin{cases} \frac{(-2)^5}{16} - \frac{3 \cdot (-2)^4}{8} - 2 \cdot (-2)^3 + a \cdot (-2) + b = 0 \\ \frac{2^5}{16} - \frac{3 \cdot 2^4}{8} - 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -8 \\ 2a + b = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 7 \text{ e } b = 6$$

77. Como $x^2 + 1 \equiv (x + i)(x - i)$, temos que, se $P(x)$ é divisível por $x^2 + 1$, então $P(x)$ é divisível por $x + i$ e por $x - i$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, devemos ter $P(i) = 0$ e $P(-i) = 0$.

$$\begin{cases} i^4 + ki \cdot i^3 + 2mi^2 + 2i \cdot i + 1 = 0 \\ (-i)^4 + ki(-i)^3 + 2m(-i)^2 + 2i \cdot (-i) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k - 2m = 0 \\ -k - 2m = -4 \end{cases} \Rightarrow k = 2 \text{ e } m = 1$$

78. Como os binômios $2x - 3$ e $x - 5$ têm raízes diferentes, temos que o polinômio $P(x)$ é divisível pelo produto $(2x - 3)(x - 5)$ se, e somente se, $P(x)$ for divisível por $2x - 3$ e por $x - 5$.

Alternativa **d**.

79. a) F, pois podemos ter $P(x) \equiv (x-1)^2(x-2)$, que é divisível por $Q(x) \equiv x-1$ e por $T(x) \equiv (x-1)^2$, mas não é divisível por $Q(x) \cdot T(x) \equiv (x-1)^3$.

b) V, pois, se $P(x)$ é divisível pelo produto $Q(x) \cdot T(x)$, então existe o polinômio $S(x)$ tal que $P(x) \equiv S(x) \cdot Q(x) \cdot T(x)$. Concluímos, portanto, que: $P(x)$ é divisível por $Q(x)$, resultando no quociente $S(x) \cdot T(x)$; e $P(x)$ é divisível por $T(x)$, resultando no quociente $S(x) \cdot Q(x)$.

c) F, pois podemos ter $P(x) = x - 5$, que é divisível por $Q(x) \equiv x - 5$, mas não é divisível por $[Q(x)]^2 \equiv (x-5)^2$.

d) V, pois, na justificativa do item **b**, basta substituir $T(x)$ por $Q(x)$.

e) F, pois podemos ter $P(x) \equiv (x-2)(x-3)$ e $Q(x) \equiv$ $\equiv x - 3$; assim, 2 é raiz de $P(x)$ e 2 não é raiz de $Q(x)$.

f) V, pois, se $P(x)$ é divisível por $Q(x)$, então existe o polinômio $T(x)$ tal que $P(x) \equiv T(x) \cdot Q(x)$; e, se k é raiz de $Q(x)$, então $Q(k) = 0$. Assim, concluímos que $P(k) = T(k) \cdot Q(k) = T(k) \cdot 0 = 0$, ou seja, k é raiz de $P(x)$.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. Se $P(x) \equiv x^4 + 4x^2 - 2x + 1$, então:

a) $P(2) = 2^4 + 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow P(2) = 29$

b) $P(-2) = (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(-2) = 37$

c) $P(0) = 0^4 + 4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow P(0) = 1$

d) $P(i) = i^4 + 4i^2 - 2i + 1 \Rightarrow P(i) = -2 - 2i$

e) $P(-i) = (-i)^4 + 4(-i)^2 - 2(-i) + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(-i) = -2 + 2i$

f) $P(1+i) = (1+i)^4 + 4(1+i)^2 - 2(1+i) + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(1+i) = -5 + 6i$

2. Temos:

$$\begin{cases} a + b + c = d + e + f \\ c = f = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = d + e$$

$\therefore a + b - (d + e) = 0$

Alternativa **a**.

3. Do enunciado, temos:

$P(x) \equiv (2m + n)x^5 + (n + 6)x^4 - x^2 + 1$; $P(-1) = 0$ e $P(2) = P(0) - 4$

$$\begin{cases} (2m+n) \cdot (-1)^5 + (n+6) \cdot (-1)^4 - (-1)^2 + 1 = 0 \\ (2m+n) \cdot 2^5 + (n+6) \cdot 2^4 - 2^2 + 1 = 1 - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -6 \end{cases}$$

$\therefore P(x) \equiv 0x^5 + 0x^4 - x^2 + 1$

Concluímos que o polinômio $P(x) \equiv -x^2 + 1$ tem grau 2.

4. De acordo com o enunciado, $P(x)$ tem coeficiente dominante 1 e gr(P) = 3. Assim, podemos dizer que:

$P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c$

Do enunciado, também temos: $P(0) = 5$, $P(1) = 7$ e $P(-1) = 9$.

Assim:

$$\begin{cases} 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \\ 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 7 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\therefore P(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

Logo:

$P(2) \equiv 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 \Rightarrow P(2) = 21$

5. $P(2) = 5 + \sum_{n=1}^{20} 2^n = 5 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

Como a expressão $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$ é a soma dos 20 termos da P.G. de razão 2 e primeiro termo 2, temos:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} = \frac{2(1 - 2^{20})}{1 - 2} = 2.097.150$$

Concluímos, então, que:

$P(2) = 5 + 2.097.150 = 2.097.155$

6. a) $S(x) \equiv 3x^3 + 5x^2 - 2x \Rightarrow S(x) \equiv x(3x^2 + 5x - 2)$

Assim:

$x(3x^2 + 5x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -2$

Portanto, as raízes de $S(x)$ são -2, 0 e $\frac{1}{3}$.

b) $U(x) \equiv x^3 - 2x^2 + x - 2$

Fatorando $U(x)$, temos:

$U(x) \equiv x(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow U(x) \equiv (x - 2)(x^2 + 1)$

Assim:

$(x - 2)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = i$ ou $x = -i$

Portanto, as raízes de $U(x)$ são 2, i e $-$i.

c) $V(x) \equiv x^4 - 16$

Fatorando $V(x)$, temos:

$V(x) \equiv (x^2 + 4)(x^2 - 4)$

Assim:

$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$

$\therefore x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 2i$ ou $x = -2i$

Logo, as raízes de $V(x)$ são 2, -2, 2i e -2i.

7. Temos:

$p(1 + i) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1 + i)^4 + 2 \cdot (1 + i)^2 + 1 + i + a = 0$

$\therefore 2 \cdot [(1 + i)^2]^2 + 2 \cdot (1 + i)^2 + 1 + i + a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot [2i]^2 + 2 \cdot 2i + 1 + i + a = 0$

$\therefore -8 + 4i + 1 + i + a = 0 \Rightarrow a = 7 - 5i$

8. a) Sendo $P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots +$ $+ a_1x + a_0$ um polinômio qualquer de coeficientes complexos, temos:

$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \dots +$ $+ a_1 \cdot 1 + a_0 \Rightarrow P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots +$ $a_1 + a_0$

Logo, a soma dos coeficientes do polinômio $P(x)$ é igual a $P(1)$.

b) Pelo item **a**, temos que a soma dos coeficientes do polinômio $Q(x)$ é igual a $Q(1)$. Se essa soma é zero, então $Q(1) = 0$; portanto, 1 é raiz do polinômio $Q(x)$.

c) Sendo $T(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots +$ $+ a_1x$ um polinômio qualquer de coeficientes complexos, com termo independente igual a zero, temos:

$T(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_{n-2} \cdot 0^{n-2} + \dots +$ $+ a_1 \cdot 0 \Rightarrow T(0) = 0$

Logo, o número 0 (zero) é raiz de $T(x)$.

9. A soma dos coeficientes de $p(x)$ é igual a $p(1)$; logo, $p(1) = 32$. Sabemos ainda que $p(0) = 0$ e $p(-1) = 0$; assim, temos:

$$\begin{cases} (a - 2b + c + 1)^5 = 32 \\ c + 1 = 0 \\ a + 2b + c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b + c + 1 = 2 \\ c + 1 = 0 \\ a + 2b + c + 1 = 0 \end{cases}$$

$\therefore a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = -1$

Logo: $a + b + c = -\frac{1}{2}$

Alternativa **a**.

10. As raízes comuns aos polinômios $P(x) \equiv 2x^6 - x^2 + 1$ e $Q(x) \equiv x^6 + 4x^4 - 3$ também são raízes da equação $P(x) = Q(x)$.
Assim:
$2x^6 - x^2 + 1 = x^6 + 4x^4 - 3 \Rightarrow x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = 0$
Fatorando o primeiro membro, temos:
$(x^4 - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$
Fatorando novamente:
$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$ ou $(x + 2)(x - 2) = 0$
$\therefore$ $x = i$ ou $x = -i$ ou $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$
Para descobrir as que são comuns, temos de verificar se valem as seguintes condições: $P(1) = Q(1) = 0$, $P(-1) = Q(-1) = 0$, $P(i) = Q(i) = 0$, $P(-i) = Q(-i) = 0$, $P(2) = Q(2) = 0$ e $P(-2) = Q(-2) = 0$.
Verificando:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \cdot 1^6 - 1^2 + 1 \neq 0 \\ Q(1) = 1^6 + 4 \cdot 1^4 - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1 não é raiz comum

$$\begin{cases} P(-1) = 2 \cdot (-1)^6 - (-1)^2 + 1 \neq 0 \\ Q(-1) = (-1)^6 + 4 \cdot (-1)^4 - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ -1 não é raiz comum

$$\begin{cases} P(i) = 2i^6 - i^2 + 1 = 0 \\ Q(i) = i^6 + 4i^4 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ i é raiz comum

$$\begin{cases} P(-i) = 2(-i)^6 - (-i)^2 + 1 = 0 \\ Q(-i) = (-i)^6 + 4(-i)^4 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $-i$ é raiz comum

$$\begin{cases} P(2) = 2 \cdot 2^6 - 2^2 + 1 \neq 0 \\ Q(2) = 2^6 + 4 \cdot 2^4 - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 2 não é raiz comum

$$\begin{cases} P(-2) = 2 \cdot (-2)^6 - (-2)^2 + 1 \neq 0 \\ Q(-2) = (-2)^6 + 4 \cdot (-2)^4 - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

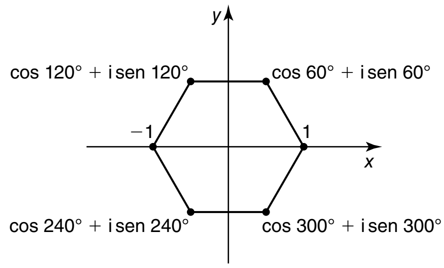
$\Rightarrow$ -2 não é raiz comum
Concluímos que as raízes comuns aos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são i e $-i$.

11. **1º modo**
Sendo $P(x) \equiv x^6 - 1$, as raízes desse polinômio são as soluções da equação $x^6 - 1 = 0$. Assim:
$x^6 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2)^3 - 1^3 = 0$
$\therefore (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) = 0$
$\therefore (x^2 - 1)[(x^2 + 1)^2 - x^2] = 0$
$\therefore (x^2 - 1)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = 0$
Logo, $x^2 - 1 = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$.
Resolvendo cada uma das equações do 2º grau, obtemos:

- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$
  $\therefore x = 1$ ou $x = -1$
- $x^2 - x + 1 = 0$
  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$
  $\therefore x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$
- $x^2 + x + 1$
  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$
  $\therefore x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$

Logo, as raízes complexas de $P(x)$ são:
$1, -1, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$ e $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$

2º modo
A equação é equivalente a $x^6 = 1$. Assim, as soluções da equação são as raízes sextas de 1.



Logo, as raízes da equação $x^6 - 1 = 0$ são:
$1, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}, -1, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$ e $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$

12. Do enunciado, temos que $P(x) \equiv (2a^2 - 1)x^5 + x^3 + 10$ e $Q(x) \equiv 17x^5 + (a - 2)x^3 + a + b$ têm de ser idênticos.
Assim:

$$\begin{cases} 2a^2 - 1 = 17 \\ a - 2 = 1 \\ a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \text{ ou } a = -3 \\ a = 3 \\ a + b = 10 \end{cases}$$

Observamos que o valor de a que satisfaz as duas primeiras equações simultaneamente é 3.
Assim, para $a = 3$ temos:
$3 + b = 10 \Rightarrow b = 7$
Portanto, os polinômios são idênticos para $a = 3$ e $b = 7$.

13. Para que os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ fossem idênticos, deveríamos ter:

$$P(x) \equiv Q(x) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4 = 5 & \text{(I)} \\ a + 1 = -1 & \text{(II)} \\ a - 1 = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Porém, essas equações são incompatíveis; por exemplo, de (II) obtemos $a = -2$ e de (III) obtemos $a = 2$. Logo, esse sistema de equações é impossível. Concluímos, então, que não existe uma constante complexa a tal que $P(x) \equiv Q(x)$, ou seja, para qualquer constante complexa a tem-se que $P(x) \not\equiv Q(x)$.

14. **a)** $Q(x) + T(x) \equiv (1 + 0)x^2 + (3 + 4)x + (-1 - 2)$
$\therefore Q(x) + T(x) \equiv x^2 + 7x - 3$
b) $Q(x) - T(x) - P(x) \equiv (0 - 0 - 3)x^3 +$
$+ (1 - 0 - 2)x^2 + (3 - 4 + 4)x + (-1 + 2 - 0)$
$\therefore Q(x) - T(x) - P(x) \equiv -3x^3 - x^2 + 3x + 1$
c) $P(x) \cdot Q(x) \equiv (3x^3 + 2x^2 - 4x) \cdot (x^2 + 3x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \cdot Q(x) \equiv 3x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 2x^4 +$
$+ 6x^3 - 2x^2 - 4x^3 - 12x^2 + 4x$
$\therefore P(x) \cdot Q(x) \equiv 3x^5 + 11x^4 - x^3 - 14x^2 + 4x$
d) $[T(x)]^2 \equiv T(x) \cdot T(x) \equiv (4x - 2)(4x - 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow [T(x)]^2 \equiv 16x^2 - 8x - 8x + 4$
$\therefore [T(x)]^2 \equiv 16x^2 - 16x + 4$

e) $P(x) + [T(x)]^3 \equiv 3x^3 + 2x^2 - 4x + [T(x)]^2 \cdot T(x)$

No item **d** vimos que $[T(x)]^2 \equiv 16x^2 - 16x + 4$; assim:

$P(x) + [T(x)]^3 \equiv$

$\equiv 3x^3 + 2x^2 - 4x + (16x^2 - 16x + 4)(4x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) + [T(x)]^3 \equiv 3x^3 + 2x^2 - 4x +$

$+ 64x^3 - 32x^2 - 64x^2 + 32x + 16x - 8$

$\therefore P(x) + [T(x)]^3 \equiv 67x^3 - 94x^2 + 44x - 8$

f) $[T(x)]^4 \equiv [T(x)]^2 \cdot [T(x)]^2$

No item **d** vimos que $[T(x)]^2 \equiv 16x^2 - 16x + 4$; assim:

$[T(x)]^4 \equiv (16x^2 - 16x + 4)(16x^2 - 16x + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow [T(x)]^4 \equiv 256x^4 - 256x^3 + 64x^2 - 256x^3 +$

$+ 256x^2 - 64x + 64x^2 - 64x + 16$

$\therefore [T(x)]^4 \equiv 256x^4 - 512x^3 + 384x^2 - 128x + 16$

g) $[P(x)]^2 + 3T(x) - 2Q(x) \equiv (3x^3 + 2x^2 - 4x)(3x^3 +$

$+ 2x^2 - 4x) + 12x - 6 - 2x^2 - 6x + 2 \equiv 9x^6 +$

$+ 6x^5 - 12x^4 + 6x^5 + 4x^4 - 8x^3 - 12x^4 - 8x^3 +$

$+ 16x^2 + 6x - 2x^2 - 4$

$\therefore [P(x)]^2 + 3T(x) - 2Q(x) \equiv$

$\equiv 9x^6 + 12x^5 - 20x^4 - 16x^3 + 14x^2 + 6x - 4$

15. $(x - 1)^2(ax + b) + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

Como $(x - 1)^2 \equiv x^2 - 2x + 1$, temos:

$(x^2 - 2x + 1)(ax + b) + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 6x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 - 2ax^2 - 2bx + ax + b + cx + d \equiv$

$\equiv x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

$\therefore ax^3 + (b - 2a)x^2 + (a - 2b + c)x + b + d \equiv$

$\equiv x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

Para que haja identidade, devemos ter:

$$\begin{cases} a = 1 & \text{(I)} \\ b - 2a = -3 & \text{(II)} \\ a - 2b + c = 6 & \text{(IV)} \\ b + d = -3 & \text{(V)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$b - 2 \cdot 1 = -3 \Rightarrow b = -1$ (III)

Substituindo (I) e (III) em (IV), temos:

$1 - 2 \cdot (-1) + c = 6 \Rightarrow c = 3$

Substituindo (III) em (V), temos:

$-1 + d = -3 \Rightarrow d = -2$

Concluímos, então, que $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$ e $d = -2$.

16. A lei de associação da função f é da forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim temos:

$f(x + 1) - f(x) = 6x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - (ax^2 + bx + c) = 6x - 2$

$\therefore 2ax + a + b = 6x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ a + b = -2 \end{cases}$

$\therefore a = 3$ e $b = -5$

Deduzimos, assim, que: $f(x) = 3x^2 - 5x + c$

O menor valor de $f(x)$ ocorre quando x é a abscissa do vértice da parábola, isto é: $x = -\dfrac{(-5)}{2 \cdot 3} = \dfrac{5}{6}$

Alternativa **c**.

17. $ax^3 + bx^2 + cx + d =$

$= (x^2 + x - 2)(x - 4) - (x + 1)(x^2 - 5x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = x^2 - 4x + 5$

$\therefore a = 0$, $b = 1$, $c = -4$ e $d = 5$

Concluímos, então, que: $b + d = 1 + 5 = 6$

Alternativa **d**.

18. a) $H(x) \equiv (3x^4 + 2x^3 + 5x - 4)(2x^2 - x + 1) + 6x^6$

Pelo teorema do grau do polinômio produto, sabemos que o grau do produto $(3x^4 + 2x^3 + 5x - 4)(2x^2 - x + 1)$ é 6; como o grau do monômio $6x^6$ também é 6 e o monômio de grau 6 do produto não é o oposto de $6x^6$, concluímos que $gr(H) = 6$.

b) $G(x) \equiv (x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 6)^5$

Pelo teorema do grau do polinômio produto, sabemos que o grau do polinômio $G(x)$ é:

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

$\therefore gr(G) = 20$

c) $T(x) \equiv (3x^5 - x^3 + 2x + 5)^2(7x^2 - x + 1)^3$

Pelo teorema do grau do polinômio produto, sabemos que o grau de $T(x)$ é:

$5 + 5 + 2 + 2 + 2 = 16$

$\therefore gr(T) = 16$

19. Se três polinômios, $P(x)$, $Q(x)$ e $T(x)$, são tais que $gr(P) = 8$, $gr(Q) = 2$ e $gr(T) = 2$, então, dentre as afirmações, a que pode ser falsa é: "o grau do polinômio $Q(x) + T(x)$ é 2", pois, sendo $Q(x) = ax^2 + bx + c$ e $T(x) = dx^2 + ex + f$, se $a = -d$, então o polinômio $Q(x) + T(x)$ não terá grau 2.

Alternativa **e**.

20. Sendo $P(x) \equiv 2x^3 + 1$, $Q(x) \equiv 8x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ e $P(x) \cdot H(x) \equiv Q(x)$, sabemos que, para determinar $H(x)$, temos de, primeiro, descobrir seu grau. Assim, pelo teorema do grau do polinômio produto, o grau de $H(x)$ deve ser 2, pois:

$gr(P) + gr(H) = gr(Q) \Rightarrow 3 + gr(H) = 5$

$\therefore gr(H) = 2$

Assim, $H(x)$ pode ser escrito como:

$H(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

Logo, na identidade polinomial $P(x) \cdot H(x) \equiv Q(x)$, temos:

$(2x^3 + 1)(ax^2 + bx + c) \equiv$

$\equiv 8x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^5 + 2bx^4 + 2cx^3 + ax^2 + bx + c \equiv$

$\equiv 8x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1$

Para haver identidade:

$$\begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 4 \\ 2c = -2 \\ a = 4 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = 2 \text{ e } c = -1$$

Assim, concluímos que $H(x) \equiv 4x^2 + 2x - 1$.

21. Se a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) \equiv (2x^4 - x^3 + x + 1)^n \cdot (x^5 + x^4 + 2x - 1)^{n+1}$ é 243, então:

$(2 - 1 + 1 + 1)^n \cdot (1 + 1 + 2 - 1)^{n+1} = 243 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{2n+1} = 3^5$

$\therefore 2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$

Concluímos que o número natural n é 2.

22. Todo polinômio de menor grau possível, tendo como raízes apenas os números -2, 3 e 4, pode ser representado na forma:

$P(x) \equiv a(x + 2)(x - 3)(x - 4)$, com $a \neq 0$

Como o coeficiente dominante é 1, concluímos:

$P(x) \equiv (x + 2)(x - 3)(x - 4) \Rightarrow P(x) \equiv (x^2 - x - 6)(x - 4)$

$\therefore P(x) \equiv x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

23. Segundo o enunciado, temos:

$$\begin{array}{l|l} E(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} E(x) & x^2 + x + 2 \\ \hline 3x - 1 & 3x - 1 \end{array}$$

Assim, pela definição da divisão de polinômios, temos:

$E(x) \equiv (x^2 + x + 2)(3x - 1) + 3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(x) \equiv 3x^3 - x^2 + 3x^2 - x + 6x - 2 + 3x - 1$

$\therefore E(x) \equiv 3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$

24. a) $E(x) \equiv 6x^5 + 12x^4 - 17x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ e $D(x) \equiv 6x^3 + x + 2$

I. $gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 5 - 3 = 2$

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, o maior grau possível do resto é 2.

II. De acordo com (I), temos:

$Q(x) \equiv ax^2 + bx + c$ e $R(x) \equiv dx^2 + ex + f$

III. Sendo $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax^2 + bx + c)(6x^3 + x + 2) + dx^2 + ex + f \equiv$

$\equiv 6x^5 + 12x^4 - 17x^3 + 4x^2 + 2x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6ax^5 + ax^3 + 2ax^2 + 6bx^4 + bx^2 + 2bx +$

$+ 6cx^3 + cx + 2c + dx^2 + ex + f \equiv$

$\equiv 6x^5 + 12x^4 - 17x^3 + 4x^2 + 2x - 2$

$\therefore 6ax^5 + 6bx^4 + (a + 6c)x^3 + (2a + b + d)x^2 +$

$+ (2b + c + e)x + 2c + f \equiv$

$\equiv 6x^5 + 12x^4 - 17x^3 + 4x^2 + 2x - 2$

Assim:

$$\begin{cases} 6a = 6 \\ 6b = 12 \\ a + 6c = -17 \\ 2a + b + d = 4 \\ 2b + c + e = 2 \\ 2c + f = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \\ d = 0 \\ e = 1 \\ f = 4 \end{cases}$$

Logo:

$Q(x) \equiv x^2 + 2x - 3$ e $R(x) \equiv x + 4$

b) $E(x) \equiv x^7 + 3x^6 + x + 3$ e $D(x) \equiv x^6 + 1$

I. $gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 7 - 6 = 1$

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, o maior grau possível do resto é 5.

II. De acordo com (I), temos:

$Q(x) \equiv ax + b$ e

$R(x) \equiv cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$

III. Sendo $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax + b)(x^6 + 1) + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx +$

$+ h \equiv x^7 + 3x^6 + x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^7 + ax + bx^6 + b + cx^5 + dx^4 + ex^3 +$

$+ fx^2 + gx + h \equiv x^7 + 3x^6 + x + 3$

$\therefore ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 +$

$+ (a + g)x + b + h \equiv x^7 + 3x^6 + x + 3$

Assim:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \\ a + g = 1 \\ b + h = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

Logo:

$Q(x) \equiv x + 3$ e $R(x) \equiv 0$

c) $E(x) \equiv x^3 - 8$ e $D(x) \equiv x - 2$

I. $gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 3 - 1 = 2$

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, o maior grau possível do resto é 0.

II. De acordo com (I), temos:

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ e $R(x) = d$

III. Sendo $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax^2 + bx + c)(x - 2) + d \equiv x^3 - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 - 2ax^2 + bx^2 - 2bx + cx - 2c + d \equiv$

$\equiv x^3 - 8$

$\therefore ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c + d \equiv$

$\equiv x^3 - 8$

Assim:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ -2c + d = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}$$

Logo:

$Q(x) \equiv x^2 + 2x + 4$ e $R(x) \equiv 0$

d) $E(x) \equiv x^3 + 2ix^2 + (2 - i)x + 2 + i$ e $D(x) \equiv x + 2i$

I. $gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 3 - 1 = 2$

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, o maior grau possível do resto é 0.

II. De acordo com (I), temos:

$Q(x) \equiv ax^2 + bx + c$ e $R(x) \equiv d$

III. Sendo $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$, temos:

$(ax^2 + bx + c)(x + 2i) + d \equiv$

$\equiv x^3 + 2ix^2 + (2 - i)x + 2 + i \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 + 2aix^2 + bx^2 + 2bix + cx + 2ci + d \equiv$

$\equiv x^3 + 2ix^2 + (2 - i)x + 2 + i$

$\therefore ax^3 + (2ai + b)x^2 + (2bi + c)x + 2ci + d \equiv$

$\equiv x^3 + 2ix^2 + (2 - i)x + 2 + i$

Assim:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2ai + b = 2i \\ 2bi + c = 2 - i \\ 2ci + d = 2 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 - i \\ d = -3i \end{cases}$$

Logo:

$Q(x) = x^2 + 2 - i$ e $R(x) = -3i$

25. Temos: $E(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Como $R \equiv 0$ ou $gr(R) < gr(D)$, temos:

$gr(E) = gr(D) + gr(Q) \Rightarrow gr(Q) = 4 - 3 = 1$

Logo, sendo $Q(x) \equiv R(x) \equiv dx + e$, temos:

$E(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow ax^4 + bx^2 + 3x + c \equiv$

$\equiv (x^3 + 2x) \cdot (dx + e) + (dx + e)$

$\therefore ax^4 + bx^2 + 3x + c \equiv$

$\equiv dx^4 + ex^3 + 2dx^2 + (2e + d)x + e$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a = d \\ e = 0 \\ b = 2d \\ 3 = 2e + d \\ c = e \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 0, d = 3, e = 0$$

Portanto, $E(x) \equiv 3x^4 + 6x^2 + 3x$.

26. a)

$$\begin{array}{rl}
x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \multicolumn{1}{|l}{x + 1} \\ \cline{2-2}
\ominus\; x^5 + x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
-x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \\
\ominus\; -x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \\
\ominus\; x^3 + x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 0x + 1 & \\
\ominus\; -x^2 - x \qquad & \\ \cline{1-1}
x + 1 & \\
\ominus\; x + 1 & \\ \cline{1-1}
0x + 0 &
\end{array}$$

Logo, $Q(x) \equiv x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e $R(x) \equiv 0$.

b)

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + x^3 + 8x^2 + 0x + 2 & \multicolumn{1}{|l}{3x^2 + x + 4} \\ \cline{2-2}
\ominus\; 6x^4 + 2x^3 + 8x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} \\ \cline{1-1}
-x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & \\
\ominus\; -x^3 - \frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} \qquad & \\ \cline{1-1}
\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{3} + 2 & \\
\ominus\; \frac{x^2}{3} + \frac{x}{9} + \frac{4}{9} & \\ \cline{1-1}
\frac{11x}{9} + \frac{14}{9} &
\end{array}$$

Logo, $Q(x) \equiv 2x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$ e

$R(x) \equiv \frac{11x}{9} + \frac{14}{9}$.

c)

$$\begin{array}{rl}
2ix^3 + x^2 + 8ix + 0 & \multicolumn{1}{|l}{2x + 3i} \\ \cline{2-2}
\ominus\; 2ix^3 - 3x^2 \qquad\qquad & ix^2 + 2x + i \\ \cline{1-1}
4x^2 + 8ix + 0 & \\
\ominus\; 4x^2 + 6ix \qquad & \\ \cline{1-1}
2ix + 0 & \\
\ominus\; 2ix - 3 & \\ \cline{1-1}
0x + 3 &
\end{array}$$

Logo, $Q(x) \equiv ix^2 + 2x + i$ e $R(x) \equiv 3$.

d)

$$\begin{array}{rl}
8ix^4 + 4x^3 + 0x^2 + ix - 2 & \multicolumn{1}{|l}{4x^2 + i} \\ \cline{2-2}
\ominus\; 8ix^4 \qquad - 2x^2 \qquad\qquad & 2ix^2 + x + \frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
4x^3 + 2x^2 + ix - 2 & \\
\ominus\; 4x^3 \qquad\quad + ix \qquad & \\ \cline{1-1}
2x^2 + 0x - 2 & \\
\ominus\; 2x^2 \qquad + \frac{i}{2} & \\ \cline{1-1}
-2 - \frac{i}{2} &
\end{array}$$

Logo, $Q(x) \equiv 2ix^2 + x + \frac{1}{2}$ e $R(x) \equiv -2 - \frac{i}{2}$.

27. Aplicando o método da chave na divisão de $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ por $D(x) = x^2 - 2x + 1$, temos:

$$\begin{array}{rl}
x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 1 & \multicolumn{1}{|l}{x^2 - 2x + 1} \\ \cline{2-2}
\ominus\; x^4 - 2x^3 + x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2x + 5 \\ \cline{1-1}
2x^3 + x^2 + 0x + 1 & \\
\ominus\; 2x^3 - 4x^2 + 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
5x^2 - 2x + 1 & \\
\ominus\; 5x^2 - 10x + 5 & \\ \cline{1-1}
8x - 4 &
\end{array}$$

Concluímos, então, que o resto da divisão é: $8x - 4$

Alternativa **e**.

28. Do enunciado, temos:

$$\begin{array}{ll}
A(x) & \multicolumn{1}{|l}{B(x)} \\ \cline{2-2}
R(x) & Q(x)
\end{array}$$

Ou seja:

$$\begin{array}{rl}
2x^6 + 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 2 & \multicolumn{1}{|l}{x^4 - x + 1} \\ \cline{2-2}
\ominus\; 2x^6 \qquad\qquad - 2x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + 4x \\ \cline{1-1}
4x^5 + 0x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 2 & \\
\ominus\; 4x^5 \qquad\qquad\quad - 4x^2 + 4x \qquad & \\ \cline{1-1}
2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 &
\end{array}$$

$\therefore\ Q(x) \equiv 2x^2 + 4x$ e $R(x) \equiv 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$

Calculando $R(-2)$, temos:

$R(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) + 2 \Rightarrow R(-2) = 0$

29. Se o polinômio $E(x) \equiv 2x^5 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ é divisível pelo polinômio $D(x) \equiv x^2 + k$, então o resto dessa divisão é zero. Assim:

$$\begin{array}{rl}
2x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 2 & \multicolumn{1}{|l}{x^2 + k} \\ \cline{2-2}
\ominus\; 2x^5 \qquad + 2kx^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^3 + (5 - 2k)x + 2 \\ \cline{1-1}
(5 - 2k)x^3 + 2x^2 + 3x + 2 & \\
\ominus\; (5 - 2k)x^3 + (5k - 2k^2)x & \\ \cline{1-1}
2x^2 + (2k^2 - 5k + 3)x + 2 & \\
\ominus\; 2x^2 \qquad\qquad\qquad + 2k & \\ \cline{1-1}
(2k^2 - 5k + 3)x - 2k + 2 &
\end{array}$$

$\therefore\ Q(x) \equiv 2x^3 + (5 - 2k)x + 2$ e

$R(x) \equiv (2k^2 - 5k + 3)x - 2k + 2$

Como o resto é zero, temos:

$$R(x) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} 2k^2 - 5k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \text{ ou } k = 1 \\ -2k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \end{cases}$$

Logo, $k = 1$ é o único valor que satisfaz as duas equações simultaneamente.

30. Se o polinômio $E(x) \equiv 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + m$ é divisível por $D(x) \equiv x^3 + x + n$, então o resto dessa divisão é zero. Assim:

$$\begin{array}{rl}
2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + m & \multicolumn{1}{|l}{x^3 + x + n} \\ \cline{2-2}
\ominus\; 2x^5 \qquad + 2x^3 + 2nx^2 \qquad\qquad & 2x^2 + 3x + 1 \\ \cline{1-1}
3x^4 + x^3 + (-2n + 5)x^2 + 4x + m & \\
\ominus\; 3x^4 \qquad\qquad + 3x^2 + 3nx \qquad & \\ \cline{1-1}
x^3 + (-2n + 2)x^2 + (4 - 3n)x + m & \\
\ominus\; x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad + x + n & \\ \cline{1-1}
(-2n + 2)x^2 + (3 - 3n)x + m - n &
\end{array}$$

$\therefore\ Q(x) \equiv 2x^2 + 3x + 1$ e

$R(x) \equiv (-2n + 2)x^2 + (3 - 3n)x + m - n$

Como o resto é zero, temos:
$(-2n + 2)x^2 + (3 - 3n)x + m - n \equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2n + 2 = 0 \\ 3 - 3n = 0 \\ m - n = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $n = 1$ e $m = 1$.

31. Aplicando o método da chave na divisão de $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $D(x) = x^2 - 1$, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & -x^3 & -3x^2 & +x+2 & x^2 - 1 \\ \cline{5-5} -x^4 & & +x^2 & & x^2 - x - 2 \\ \cline{1-4} & -x^3 & -2x^2 & +x+2 & \\ & +x^3 & & -x & \\ \cline{2-4} & & -2x^2 & +0x+2 & \\ & & +2x^2 & -2 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Assim, temos: $f = (x^2 - x - 2)(x^2 - 1)$.
Decompondo os fatores de f em polinômios do 1º grau, chegamos a:
$f = (x - 2)(x + 1)(x + 1)(x - 1)$
O produto de quaisquer fatores de f é um divisor de f; logo, o produto $(x + 1)(x + 1)$, ou seja, $(x + 1)^2$, é um divisor de f.
Alternativa **c**.

32. Deduzimos, do enunciado, que o quociente de $P(x)$ por $(x - 1)(x^2 + 4)$ é $x + k$. Observando que $(x - 1)(x^2 + 4) = x^3 - x^2 + 4x - 4$, efetuamos a divisão de $P(x)$ por $x^3 - x^2 + 4x - 4$:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 & x^3 - x^2 + 4x - 4 \\ \cline{2-2} -x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x & x + 3 \\ \cline{1-1} \quad 3x^3 - 3x^2 + 12x - 12 & \\ \quad -3x^3 + 3x^2 - 12x + 12 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Concluímos, então, que $k = 3$.
Alternativa **e**.

33. $\dfrac{x + 3}{x^2 - 2} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x + 3}{x^2 - 1} = \dfrac{(A + B)x + A - B}{x^2 - 1}$

$\therefore \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 2$ e $B = -1$

Alternativa **e**.

34. $\dfrac{1}{(x + 2)(2x + 1)} = \dfrac{A}{x + 2} + \dfrac{B}{2x + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x + 2)(2x + 1)} = \dfrac{(2A + B)x + A + 2B}{(x + 2)(2x + 1)}$

$\therefore \begin{cases} 2A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3}$ e $B = \dfrac{2}{3}$

Logo: $A + B = \dfrac{1}{3}$

Alternativa **d**.

35. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{x - 2} = \dfrac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 - 3x^2 + 2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A(x^2 - 3x + 2) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 - x)}{x^3 - 3x^2 + 2x} =$

$= \dfrac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

$\therefore \dfrac{(A + B + C)x^2 + (-3A - 2B - C)x + 2A}{x^3 - 3x^2 + 2x} =$

$= \dfrac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

$\therefore \begin{cases} A + B + C = 3 \\ -3A - 2B - C = -9 \\ 2A = 8 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $A = 4$, $B = -2$ e $C = 1$.

36. $\dfrac{1}{x^3 - 1} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$

$= \dfrac{(A + B)\,x^2 + (A - B + C)\,x + A - C}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$

$\therefore \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{3}$ e $C = -\dfrac{2}{3}$

37. Do enunciado, temos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x + 2 \\ \cline{2-2} \;\;0 & \begin{array}{l|l} Q_1(x) & x - 2 \\ \cline{2-2} \;\;0 & x^3 - x + 1 \end{array} \end{array}$$

Portanto:

$\begin{cases} P(x) = (x + 2) \cdot Q_1(x) + 0 & \text{(I)} \\ Q_1(x) = (x^3 - x + 1) \cdot (x - 2) + 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), obtemos:
$P(x) = (x + 2) \cdot (x^3 - x + 1) \cdot (x - 2) + 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 - x + 1) + 0$
Concluímos, então, que o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 4$ são $x^3 - x + 1$ e zero, respectivamente.

38. **a)** $P(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ e $D(x) \equiv x + 5$
Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x + 5$ é igual a $P(-5)$; logo:
$R = P(-5) = (-5)^3 - 2(-5)^2 + 3(-5) + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow R = -189$

b) $P(x) \equiv 7x^8 + 4x^5 - 9x + 6$ e $D(x) \equiv x$
Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por x é igual a $P(0)$; logo:
$R = P(0) = 7 \cdot 0^8 + 4 \cdot 0^5 - 9 \cdot 0 + 6 \Rightarrow R = 6$

c) $P(x) \equiv 5x^6 + 2x^4 - 3x^3 + 2$ e $D(x) \equiv x - i$
Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - i$ é igual a $P(i)$; logo:
$R = P(i) = 5i^6 + 2i^4 - 3i^3 + 2 \Rightarrow R = -1 + 3i$

d) $P(x) \equiv x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ e $D(x) \equiv x + 2i$
Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x + 2i$ é igual a $P(-2i)$; logo:
$R = P(-2i) = (-2i)^4 - 3(-2i)^2 + 2(-2i) + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 33 - 4i$

39. Pela definição de divisão de polinômios, temos:
$P(x) \equiv (3x^2 + 1)(2x^2 - 3x + 1) + (-x + 2)$
Pelo teorema do resto, concluímos que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é $P(1)$, ou seja:
$P(1) = (3 \cdot 1^2 + 1)(2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1) + (-1 + 2) = 1$
Alternativa **b**.

40. Se, ao dividir o polinômio $P(x) \equiv 2x^2 - kx + 5$ por $x - 2$ e por $x - 1$, obtemos o mesmo resto R, então, pelo teorema do resto, temos:
$\begin{cases} P(2) = R \\ P(1) = R \end{cases} \Rightarrow P(1) = P(2)$
$\therefore\ 2 \cdot 1^2 - k \cdot 1 + 5 = 2 \cdot 2^2 - k \cdot 2 + 5 \Rightarrow k = 6$
Assim, temos:
$P(x) \equiv 2x^2 - 6x + 5$
As raízes de $P(x)$ são as raízes da equação $P(x) = 0$.
Assim:
$P(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0$
$\therefore\ x = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ ou $x = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$
Concluímos que as raízes de $P(x)$ são $\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ e $\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$.

41. Seja $P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$ o polinômio do 3º grau. Sabemos que as divisões de $P(x)$ por x, $x - 1$, $x + 2$ e $x - 3$ apresentam restos 0, 6, -6 e 84, respectivamente. Pelo teorema do resto, temos:
$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 6 \\ P(-2) = -6 \\ P(3) = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 6 \\ a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -6 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot (3) + d = 84 \end{cases}$$
Assim, obtemos o sistema:
$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 6 \\ -8a + 4b - 2c + d = -6 \\ 27a + 9b + 3c + d = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$
Concluímos que $P(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 + x$.

42. O resto $R(x)$ da divisão de $P(x)$ pelo polinômio $D(x) \equiv (x - 4)(x - 3)$ é da forma $R(x) \equiv ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. Assim, sendo $Q(x)$ o quociente dessa divisão, temos:
$P(x) \equiv Q(x) \cdot (x - 4)(x - 3) + ax + b$
Pelo teorema do resto, chegamos a:
$\begin{cases} P(3) = 4 \\ P(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 4 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$
$\therefore\ a = -1$ e $b = 7$
Logo, $R(x) \equiv -x + 7$.

43. O resto $R(x)$ da divisão de $P(x)$ pelo polinômio $D(x) \equiv x(x - 1)(x + 2)$ é da forma $R(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$. Assim, sendo $Q(x)$ o quociente dessa divisão, temos:
$P(x) \equiv Q(x) \cdot x(x - 1)(x + 2) + ax^2 + bx + c$
Pelo teorema do resto, chegamos a:
$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 3 \\ P(-2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = -1 \end{cases}$$
$\therefore\ a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$ e $c = 1$
Logo, $R(x) \equiv \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + 1$.

44. Pelo teorema de D'Alembert, temos:
$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + p \cdot (-2) + 2 = 0$
$\therefore\ p = -13$
Alternativa **b**.

45. Pelo teorema de D'Alembert, $P(3 - i) = 0$. Assim:
$(3 - i)^3 + m(3 - i)^2 + 2 \cdot (3 - i) - 6 + 2i = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (8 - 6i) \cdot (3 - i) + m(8 - 6i) = 0$
$(8 - 6i)(3 - i + m) = 0$
$\therefore\ 3 - i + m = 0 \Rightarrow m = -3 + i$

46. Se $P(x) \equiv x^4 + ax^3 + 3x^2 - 3x + b$ é divisível por $x - 1$ e $x - 2$, então, pelo teorema de D'Alembert:
$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^4 + a \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + b = 0 \\ 2^4 + a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + b = 0 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} a + b = -1 \\ 8a + b = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$
Concluímos que as constantes a e b são -3 e 2, respectivamente.

47. Na divisão, sendo $Q(x)$ o quociente e $R(x)$ o resto, temos:
$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x - 2)(x - 3) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow$$
$\Rightarrow P(x) \equiv (x - 2)(x - 3) \cdot Q(x) + R(x)$
Como $P(x)$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$, então o resto é zero.
Assim: $P(x) \equiv (x - 2)(x - 3) \cdot Q(x)$
Para mostrar que $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e $x - 3$, basta mostrar, pelo teorema de D'Alembert, que $P(2) = 0$ e $P(3) = 0$.
Temos:
$P(2) = (2 - 2)(2 - 3) \cdot Q(2) \Rightarrow P(2) = 0$
$P(3) = (3 - 2)(3 - 3) \cdot Q(3) \Rightarrow P(3) = 0$
Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x - 3$.

48. Pelo teorema de D'Alembert temos que $P(3) = 0$. Assim:
$\begin{cases} P(3) = 0 \\ P(P(3)) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases}$
$\therefore\ b = -5$ e $c = 6$
Logo, $P(x) \equiv x^2 - 5x + 6$.
O resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é $P(1)$, isto é:
$R = P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2$
Alternativa **b**.

49. a) $E(x) \equiv 3x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 2x - 12$ e $D(x) \equiv x - 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 3 & -5 & 0 & 2 & -12 \\ \hline & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}$$

Logo:
$Q(x) \equiv 3x^3 + x^2 + 2x + 6$ e $R = 0$

b) $E(x) \equiv x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ e $D(x) \equiv x - 1$

$$\begin{array}{c|ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Logo:
$Q(x) \equiv x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $R = 0$

c) $E(x) \equiv x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ e $D(x) \equiv x + 1$

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Logo:
$Q(x) \equiv x^3 - x^2 + x - 1$ e $R = 0$

d) $E(x) \equiv 2ix^4 + 3x^3 + 2ix^2 + 5x - 5i$ e
$D(x) \equiv x - 2i$

2i	2i	3	2i	5	−5i
	2i	−1	0	5	5i

Logo:
$Q(x) \equiv 2ix^3 - x^2 + 5$ e $R = 5i$

50. Como o polinômio
$P(x) \equiv x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 35x + 30$ pode ser fatorado na forma $P(x) \equiv (x - 1)(x - 2)(x + 3) \cdot Q(x)$, efetuaremos divisões sucessivas por $x - 1$, $x - 2$ e $x + 3$.
Vamos obter $T_1(x)$, em que $P(x) = T_1(x) \cdot (x - 1)$:

1	1	0	−2	6	−35	30
	1	1	−1	5	−30	0

Logo, $T_1(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 30$.
Dividindo $T_1(x)$ por $x - 2$, obtemos $T_2(x)$, em que $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot T_2(x)$. Assim:

2	1	1	−1	5	−30
	1	3	5	15	0

Logo, $T_2(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 15$.
Dividindo $T_2(x)$ por $x + 3$ obtemos $Q(x)$, em que $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3) \cdot Q(x)$. Assim:

−3	1	3	5	15
	1	0	5	0

Logo, $Q(x) \equiv x^2 + 5$.

51. a) $E(x) \equiv 64x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ e $D(x) \equiv 2x - 1$
Como $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ e, a seguir, dividir o quociente obtido, $Q_1(x)$, por 2. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - \frac{1}{2}$, temos:

$\frac{1}{2}$	64	0	0	0	0	0	−1
	64	32	16	8	4	2	0

Assim, temos o quociente
$Q_1(x) \equiv 64x^5 + 32x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 4x + 2$ e o resto $R_1 = 0$.
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R na divisão de $E(x)$ por $2x - 1$ são:
$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{2} \equiv 32x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$
e $R = R_1 = 0$

b) $E(x) \equiv 2x^5 - 7x^4 + 0x^3 + x^2 - 60x - 1$
e $D(x) \equiv 4 - x$
Como $4 - x = -(x - 4)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - 4$ e, a seguir, dividir o quociente obtido, $Q_1(x)$, por -1. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $f(x)$ por $x - 4$, temos:

4	2	−7	0	1	−60	−1
	2	1	4	17	8	31

Assim, temos o quociente
$Q_1(x) \equiv 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 17x + 8$ e o resto $R_1 = 31$.
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $4 - x$ são:
$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{-1} \equiv -2x^4 - x^3 - 4x^2 - 17x - 8$ e
$R = R_1 = 31$

c) $E(x) \equiv x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + i$ e $D(x) \equiv i - x$
Como $i - x = -(x - i)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - i$ e, a seguir, dividir o quociente obtido, $Q_1(x)$, por -1. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - i$, temos:

i	1	0	0	0	0	i
	1	i	−1	−i	1	2i

Assim, temos o quociente
$Q_1(x) \equiv x^4 + ix^3 - x^2 - ix + 1$ e o resto $R_1 = 2i$.
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R na divisão de $E(x)$ por $i - x$ são:
$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{-1} \equiv -x^4 - ix^3 + x^2 + ix - 1$ e
$R = R_1 = 2i$

d) $E(x) \equiv (1 - i)x^4 - 2x^3 - 2ix^2 - 2x + 2i - 2$ e $D(x) \equiv 3x - 3 - 3i$
Como $3x - 3 - 3i = 3(x - 1 - i)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - 1 - i$ e, a seguir, dividir o quociente obtido, $Q_1(x)$, por 3. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - 1 - i$, temos:

1 + i	1 − i	−2	−2i	−2	2i − 2
	1 − i	0	−2i	−2i	0

Assim, temos o quociente
$Q_1(x) \equiv (1 - i)x^3 - 2ix - 2i$ e o resto $R_1 = 0$.
Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R na divisão de $E(x)$ por $3x - 3 - 3i$ são:
$Q(x) \equiv \frac{Q_1}{3} = \left(\frac{1}{3} - \frac{i}{3}\right)x^3 - \frac{2ix}{3} - \frac{2i}{3}$ e $R = R_1 = 0$

52. a) $P(2) \equiv 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$; logo, 2 é raiz de $P(x)$.
$P(-1) \equiv (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 6 = 0$; logo, -1 é raiz de $P(x)$.

b) Como 2 e -1 são raízes de $P(x)$, temos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x + 1$. Assim, dividindo $P(x)$ por $x - 2$, obtemos um quociente $Q_1(x)$ e resto zero, e, dividindo $Q_1(x)$ por $x + 1$, obtemos um quociente $Q_2(x)$ e resto zero, tal que:
$P(x) \equiv Q_2(x) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$
Efetuando essas divisões pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

2	1	−5	5	5	−6
−1	1	−3	−1	3	0
	1	−4	3	0	

Logo: $P(x) \equiv (x^2 - 4x + 3)(x + 1)(x - 2)$

c) Pelo item **b**, temos que a equação $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ pode ser representada na forma:
$(x^2 - 4x + 3)(x + 1)(x - 2) = 0$
Assim, pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:
$x^2 - 4x + 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 1$ ou $x = 3$ ou $x = -1$ ou $x = 2$
Concluímos, então, que o conjunto solução S da equação é dado por: $S = \{1, 3, -1, 2\}$

53. Sendo $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ e $Q_4(x)$ os respectivos quocientes das divisões de $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, de $Q_1(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, de $Q_2(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ e de $Q_3(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, devemos mostrar que as três primeiras divisões são exatas e que a quarta não é exata. Aplicando, sucessivamente, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

$\frac{1}{2}$	8	−12	14	−13	6	−1
$\frac{1}{2}$	8	−8	10	−8	2	0
$\frac{1}{2}$	8	−4	8	−4	0	
$\frac{1}{2}$	8	0	8	0		
	8	4	10			

Concluímos, então, que $P(x)$ é divisível por $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$ e não é divisível por $\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$.

54. a) $P(x) \equiv x^5 - 4x^3 + 2x + 2$ e $D(x) \equiv 5x + 5$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$R = P(-1) \Rightarrow R = (-1)^5 - 4(-1)^3 + 2 \cdot (-1) + 2$
$\therefore\ R = 3$

b) $P(x) \equiv 2ix^4 + 5x^3 - 3ix^2 + x + i$ e $D(x) \equiv 2x - i$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$$R = P\left(\frac{i}{2}\right) \Rightarrow R = 2i\left(\frac{i}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{i}{2}\right)^3 - 3i\left(\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{i}{2} + i$$
$$\therefore\ R = \frac{i}{8} - \frac{5i}{8} + \frac{3i}{4} + \frac{i}{2} + i \Rightarrow R = \frac{7i}{4}$$

c) $P(x) = 3ix^3 + x^2 + 4ix + 1$ e $D(x) = 3x + 2i$
Pela extensão do teorema do resto, temos:
$$R = P\left(-\frac{2i}{3}\right) = 3i\left(-\frac{2i}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2i}{3}\right)^2 + 4i\left(-\frac{2i}{3}\right) + 1$$
$$\therefore\ R = \frac{7}{3}$$

55. a) Da primeira divisão, temos:
$P(x) \equiv (3x^2 + 3x + 5)(3x^2 - x + k) + 8x - 2k$
Da segunda divisão temos, pelo teorema do resto:
$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{41}{9}$$
Assim, deduzimos que:
$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{41}{9} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 5\right]\left[3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + k\right] +$$
$$+ 8 \cdot \frac{2}{3} - 2k = \frac{41}{9}$$
$$\therefore\ k = -1$$

b) $P(x) \equiv (3x^2 + 3x + 5)(3x^2 - x - 1) + 8x - 2 \cdot (-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \equiv 9x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 3$

c) Temos $3x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$.
Inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - \frac{2}{3}$ e, a seguir, dividimos o quociente obtido por 3.
Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $P(x)$ por $x - \frac{2}{3}$, temos:

$\frac{2}{3}$	9	6	9	0	−3
	9	12	17	$\frac{34}{3}$	$\frac{41}{9}$

Assim, o quociente $Q_1(x)$ da divisão de $P(x)$ por $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ é $Q_1(x) \equiv 9x^3 + 12x^2 + 17x + \frac{34}{3}$.
Logo, o quociente $Q(x)$ de $P(x)$ por $(3x - 2)$ é dado por $Q(x) = \frac{Q_1(x)}{3}$, ou seja:
$$Q(x) \equiv 3x^3 + 4x^2 + \frac{17x}{3} + \frac{34}{9}$$

56. Se $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c$ é o polinômio unitário do 3º grau cujas divisões por $2x - 2$, $2x + 1$ e $x + 1$ apresentam restos 16, $-\frac{1}{8}$ e 6, respectivamente, então, pelo teorema do resto e pela sua extensão, temos:
$$\begin{cases} P(1) = 16 \\ P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \\ P(-1) = 6 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 16 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + c = -\frac{1}{8} \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6 \end{cases}$$
Assim, obtemos o sistema:
$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 0 \\ a - b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$$
Concluímos que $P(x) \equiv x^3 + 12x^2 + 4x - 1$.

57. Se, ao dividir $P(x) \equiv 2x^3 + kx^2 + mx - 5$ por $2x - 2$ e por $2x - 1$, obtemos restos 6 e $-\frac{7}{4}$, respectivamente, então, pela extensão do teorema do resto, temos:
$$\begin{cases} P(1) = 6 \\ P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1^3 + k \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 5 = 6 \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m \cdot \frac{1}{2} - 5 = -\frac{7}{4} \end{cases}$$
Assim, obtemos o sistema:
$$\begin{cases} k + m = 9 \\ \frac{k}{4} + \frac{m}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 6 \\ m = 3 \end{cases}$$
Concluímos que as constantes k e m são 6 e 3, respectivamente.

58. Se $P(x) \equiv \sum_{j=1}^{20}(3j)x^j$, então, para calcular o resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 2$ basta, pela extensão do teorema do resto, encontrar $P(-1)$. Assim:

$P(-1) \equiv \sum_{j=1}^{20}(3j)(-1)^j \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-1) = -3 + 6 - 9 + 12 - 15 + ... - 57 + 60$

Logo, observamos que os 10 termos $(-3, -9, -15, ..., -57)$ formam uma P.A. de razão -6, 1º termo $a_1 = -3$ e 10º termo $a_{10} = -57$, cuja soma é:

$\frac{(-3 - 57) \cdot 10}{2} = -300$

Também observamos que os 10 termos $(6, 12, 18, ..., 60)$ formam uma P.A. de razão 6, 1º termo $b_1 = 6$ e 10º termo $b_{10} = 60$, cuja soma é:

$\frac{(6 + 60) \cdot 10}{2} = 330$

Assim: $P(-1) = -300 + 330 \Rightarrow P(-1) = 30$

Concluímos, então, que o resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 2$ é 30.

59. Pela extensão do teorema de D'Alembert, temos $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Fazendo $x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, ou seja, $x = 1$, no polinômio $P\left(x - \frac{3}{2}\right) \equiv x^5 + 4x^3 - 2x + k$, temos:

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow P\left(1 - \frac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore 1^5 + 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + k = 0 \Rightarrow k = -3$

60. A área $A(x)$ do setor é dada por:

$A(x) \equiv \frac{(3x - 5) \cdot R(x)}{2}$

Assim:

$\frac{(3x - 5) \cdot R(x)}{2} \equiv 6x^2 - kx + k + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3x - 5) \cdot R(x) \equiv 12x^2 - 2kx + 2k + 4$

Dessa identidade, concluímos que o polinômio $P(x) \equiv 12x^2 - 2kx + 2k + 4$ é divisível por $3x - 5$; logo, $P\left(\frac{5}{3}\right) = 0$, ou seja:

$12 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2k \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + 2k + 4 = 0 \Rightarrow k = 28$

61. Se $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + 1$ é divisível por $2x + 3i$, então, pela extensão do teorema de D'Alembert, temos:

$P\left(-\frac{3i}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3i}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{3i}{2}\right)^2 - \frac{3i}{2}b + 1 = 0$

$\therefore 8 - 18a + (27 - 12b)i = 0 + 0i$

Na igualdade entre os números complexos acima, temos:

$\begin{cases} 8 - 18a = 0 \\ 27 - 12b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$

Concluímos que as constantes a e b são $\frac{4}{9}$ e $\frac{9}{4}$, respectivamente.

62. Observando a forma fatorada de $P(x)$, concluímos que $\frac{i}{2}$ é uma de suas raízes. Então, temos:

$P\left(\frac{i}{2}\right) = 0 \Rightarrow 8\left(\frac{i}{2}\right)^3 + a\left(\frac{i}{2}\right)^2 + b\left(\frac{i}{2}\right) - 1 = 0$

$\therefore -i - \frac{a}{4} + \frac{bi}{2} - 1 = 0 \Rightarrow -\frac{a}{4} - 1 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)i = 0 + 0i$

$\therefore \begin{cases} -\frac{a}{4} - 1 = 0 \\ \frac{b}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \text{ e } b = 2$

63. Sendo $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(5x - 7)(9x - 1)$, respectivamente, temos $R(x) \equiv 0$, pois, por hipótese, $P(x)$ é divisível por $(5x - 7)(9x - 1)$. Logo:

$P(x) = (5x - 7)(9x - 1) \cdot Q(x)$

Observando que:

- $P\left(\frac{7}{5}\right) = \left(5 \cdot \frac{7}{5} - 7\right)\left(9 \cdot \frac{7}{5} - 1\right) \cdot Q\left(\frac{7}{5}\right) = 0$
- $P\left(\frac{1}{9}\right) = \left(5 \cdot \frac{1}{9} - 7\right)\left(9 \cdot \frac{1}{9} - 1\right) \cdot Q\left(\frac{1}{9}\right) = 0$

concluímos, pela extensão do teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $5x - 7$ e por $9x - 1$.

64. Se $P(x)$ é divisível pelo produto $x(x - 1)$, então $P(x)$ é divisível por x e por $x - 1$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, temos $P(0) = 0$ e $P(1) = 0$. Logo, como $P(x) \equiv x^5 + 3x^4 + 2x^2 + kx + m$, temos:

$\begin{cases} 0^5 + 3 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 + k \cdot 0 + m = 0 \\ 1^5 + 3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ k = -6 \end{cases}$

Concluímos que as constantes k e m são -6 e 0, respectivamente.

65. Fatorando $x^2 + 3x + 2$, temos $(x + 1)(x + 2)$.

Se $P(x)$ é divisível pelo produto $(x + 1)(x + 2)$, então $P(x)$ é divisível por $x + 1$ e por $x + 2$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, temos $P(-1) = 0$ e $P(-2) = 0$.

Como $P(x) \equiv 2x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 6$, temos:

$\begin{cases} 2 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + b \cdot (-1) - 6 = 0 \\ 2 \cdot (-2)^4 + a \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + b \cdot (-2) - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 8a + 2b = 30 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos $a = 6$ e $b = -9$.

66. Se $P(x)$ é divisível pelo produto $(2x - 2)(2x + 1)$, então $P(x)$ é divisível por $2x - 2$ e por $2x + 1$. Assim, pela extensão do teorema de D'Alembert, temos:

$P(1) = 0$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Como $P(x) \equiv 4x^5 + ax^4 + ax^3 + bx^2 + ax - 2$, temos:

$\begin{cases} 4 \cdot 1^5 + a \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 2 = 0 \\ 4\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + b\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0 \end{cases}$

Assim, obtemos o sistema:

$\begin{cases} 3a + b = -2 \\ -\frac{1}{8} + \frac{a}{16} - \frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{a}{2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -2 \\ -9a + 4b = 34 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos $a = -2$ e $b = 4$.

67. Pelo teorema de D'Alembert, se $P(2) = 0$ e $P(3) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$ e por $(x - 3)$. Como esses binômios têm raízes diferentes, concluímos que $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 2)(x - 3) \equiv$ $\equiv x^2 - 5x + 6$.

Alternativa **c**.

68. a) F, conforme a justificativa a seguir.
As abscissas dos pontos em que o gráfico cruza o eixo das abscissas são as raízes reais do polinômio $P(x)$. Assim, as raízes reais do polinômio são 1, 3 e 5; logo, $P(x)$ é divisível por $(x - 1)$, por $(x - 3)$ e por $(x - 5)$. Como o número real -5 não é raiz do polinômio, $P(x)$ não é divisível por $(x + 5)$.
b) V, de acordo com a justificativa do item **a**.
c) V, conforme a justificativa a seguir.
No item **a**, mostramos que $P(x)$ é divisível por $(x - 3)$ e por $(x - 5)$. Como as raízes desses binômios são diferentes, concluímos que $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 3)(x - 5)$.
d) V, conforme a justificativa a seguir.
No item **a**, mostramos que $P(x)$ é divisível por $(x - 1)$, por $(x - 3)$ e por $(x - 5)$. Como as raízes desses binômios são diferentes, concluímos que $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 1)(x - 3)(x - 5)$.
e) F, pois $P(0) \neq 0$.
f) F, pois $P(0) = -5$; logo, o termo independente é -5.

69. Pelo gráfico, temos que $P(-2) = Q(-2)$ e $P(2) = Q(2)$. Assim, deduzimos que:
$D(-2) = P(-2) - Q(-2) = 0$
e
$D(2) = P(2) - Q(2) = 0$
Logo, -2 e 2 são raízes de $D(x)$. Portanto, pelo teorema de D'Alembert, $D(x)$ é divisível por $(x + 2)$ e por $(x - 2)$. Como esses binômios têm raízes diferentes, concluímos que $D(x)$ é divisível pelo produto $(x + 2)(x - 2) \equiv x^2 - 4$.
Alternativa **b**.

Exercícios contextualizados

70. a) Se $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$ é a quantidade de água remanescente no reservatório após t horas do início do esvaziamento, então, após 30 minutos, ou $\frac{1}{2}$ hora, temos:
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$
Concluímos que, após 30 minutos, havia 0,375 m^3 de água no reservatório.
b) Toda a água terá sido utilizada para $f(t) = 0$, ou seja:
$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \text{ (não convém)} \end{cases}$$
Concluímos que, para $t = 1$, ou seja, após 1 hora, toda a água do reservatório terá sido utilizada.

71. a) Como os pontos (0, 80), (20, 65) e (60, 0) pertencem ao gráfico da função $P(x) = ax^2 + bx + c$, temos:
$$\begin{cases} P(0) = 80 \\ P(20) = 65 \\ P(60) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 80 \\ a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 65 \\ a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 0 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} c = 80 \\ 400a + 20b + c = 65 \\ 3.600a + 60b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -\frac{7}{480},\ b = -\frac{11}{24} \text{ e } c = 80$$
Logo, $P(x) = -\dfrac{7x^2}{480} - \dfrac{11x}{24} + 80$.
b) Para $x = 30$, temos:
$$P(30) = -\frac{7 \cdot (30)^2}{480} - \frac{11 \cdot (30)}{24} + 80 \Rightarrow P(30) = 53{,}125$$
Concluímos, então, que serão construídos 53 apartamentos.

72. a) Para o final de 2018, temos $x = 10$.
Logo:
$f(10) = 10^2 - 120 \cdot 10 + 2.000 \Rightarrow f(10) = 900$
Concluímos, então, que, ao final de 2018, haverá 900 espécimes desse animal.
b) Se a tendência observada se mantiver, a população dessa espécie será extinta na primeira vez em que $f(x) = 0$, ou seja:
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 120x + 2.000 = 0$
$\therefore x = 20$ ou $x = 100$
Assim, a população desse animal será extinta 20 anos após 2008, ou seja, ao final de 2028.

73. O volume do filtro é representado pelo polinômio $V(x)$ tal que:
$V(x) \equiv \pi(x + 4)^2 \cdot x - \pi x^2 \cdot x \Rightarrow V(x) \equiv 8\pi x^2 + 16\pi x$

74. O comprimento, a largura e a altura do bloco original têm medidas $x + 2$, x e x, respectivamente. Como a razão de semelhança desse bloco para cada paralelepípedo retirado é 4, o comprimento, a largura e a altura de cada paralelepípedo retirado têm medidas $\frac{x + 2}{4}$, $\frac{x}{4}$ e $\frac{x}{4}$.
Assim, o volume do sólido remanescente é representado pelo polinômio $V(x)$ tal que:
$$V(x) \equiv (x + 2) \cdot x \cdot x - 8 \cdot \frac{x + 2}{4} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V(x) \equiv \frac{7x^3}{8} + \frac{7x^2}{4}$$

75. O volume da peça remanescente é representado pelo polinômio $V(x)$ tal que: $V(x) \equiv (3x)^3 - 2^3$
Fatorando a diferença de cubos do segundo membro dessa identidade, concluímos que:
$V(x) \equiv (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$
Alternativa **c**.

76. Sendo $A(x)$ o polinômio que representa a área de uma face perpendicular à aresta de medida $x + 1$, temos que o polinômio que representa o volume $V(x)$ é dado por: $V(x) \equiv A(x) \cdot (x + 1)$, ou seja:
$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 \equiv A(x) \cdot (x + 1)$
Assim, deduzimos que o polinômio $A(x)$ é o quociente de $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ por $x + 1$.
Efetuando a divisão pelo método da chave, temos:
$$\begin{array}{rl|l} \ominus & x^3 + 7x^2 + 14x + 8 & x + 1 \\ & x^3 + x^2 & \overline{x^2 + 6x + 8} \\ \hline \ominus & 6x^2 + 14x + 8 & \\ & 6x^2 + 6x & \\ \hline \ominus & 8x + 8 & \\ & 8x + 8 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$
Logo, $A(x) \equiv x^2 + 6x + 8$.
Alternativa **e**.

77. O volume $V(x)$ do tronco é calculado por:

$$V(x) \equiv \pi(x + 3)^2 \cdot \frac{7x + 2 + P(x)}{2}$$

Logo:

$$5\pi x^3 + 32\pi x^2 + 57\pi x + 18\pi \equiv \pi(x + 3)^2 \cdot \frac{7x + 2 + P(x)}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 10x^3 + 64x^2 + 114x + 36 \equiv (x + 3)^2[7x + 2 + P(x)]$

Dividindo $10x^3 + 64x^2 + 114x + 36$ por $(x + 3)^2$, obtemos $7x + 2 + P(x)$. Efetuando essa divisão pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
10x^3 & + 64x^2 & + 114x & + 36 & x^2 + 6x + 9 \\
\ominus\ 10x^3 & + 60x^2 & + 90x & & \overline{10x + 4} \\
\hline
 & 4x^2 & + 24x & + 36 & \\
 & \ominus\ 4x^2 & + 24x & + 36 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Assim:

$10x + 4 \equiv 7x + 2 + P(x) \Rightarrow P(x) \equiv 3x + 2$

78. a) Temos:

$v = 200.000$

$q = 150.000$

$c = 16.000$

Logo:

$$i = \frac{150.000 \cdot 16.000}{0{,}8 \cdot 200.000} \Rightarrow i = 15.000$$

Ou seja, a indenização paga pela companhia de seguros foi de R\$ 15.000,00.

b) Temos:

$q = v - 50.000$

$c = 0{,}1v$

$i = 16.250$

Logo:

$$16.250 = \frac{(v - 50.000) \cdot (0{,}1v)}{0{,}8v} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0{,}1v^2 - 18.000v = 0$

$\therefore v = 0$ (não convém) ou $v = 180.000$

Ou seja, o valor de mercado da residência é R\$ 180.000,00.

79. Indicando por t o tempo, em hora, de viagem na rodovia A, temos que o tempo de viagem na rodovia B foi $5 - t$. Assim, obtemos as equações abaixo, em que V_A e V_B representam as velocidades médias do caminhão nas rodovias A e B, respectivamente.

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{80}{t} \\ V_B = \dfrac{270}{5 - t} \\ V_B = V_A + 50 \end{cases} \Rightarrow \frac{270}{5 - t} = \frac{80}{t} + 50$$

$\therefore 50t^2 + 100t - 400 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$

$\therefore t = -4$ (não convém) ou $t = 2$

Concluímos, então, que as velocidades médias V_A e V_B são dadas por:

$$V_A = \frac{80}{2} \text{ km/h} = 40 \text{ km/h}$$

e

$$V_B = \frac{270}{5 - 2} \text{ km/h} = 90 \text{ km/h}$$

80. Temos:

$V(x) \equiv C(x) \cdot L(x) \cdot H(x) \Rightarrow V(x) \equiv C(x) \cdot L(x) \cdot (x - 3)$

Deduzimos, então, que $V(x)$ é divisível por $x - 3$, ou seja, $V(3) = 0$. Assim, concluímos:

$V(3) = 0 \Rightarrow 3^2 - 5 \cdot 3 + k = 0$

$\therefore k = 6$

Pré-requisitos para o capítulo 8

1. a) $(x - 1)(x + 2)(x - i) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - i = 0$

$\therefore x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = i$

Concluímos, então, que o conjunto solução S da equação é dado por: $S = \{1, -2, i\}$

b) $(x - 4)^2(x + 5)^3 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 0$ ou $(x + 5)^3 = 0$

$\therefore x = 4$ ou $x = -5$

Concluímos, então, que o conjunto solução S da equação é dado por: $S = \{4, -5\}$

2. Verdadeira, pois toda equação do 2º grau de variável complexa e coeficientes complexos pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Nessas condições, para quaisquer que sejam os coeficientes a, b e c, existem as raízes quadradas do discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$; logo, existem as raízes x_1 e x_2 da equação, dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essas raízes serão iguais se $\Delta = 0$ ou serão distintas se $\Delta \neq 0$.

3. a) As raízes do polinômio $P(x)$ são dadas por:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Logo, uma fatoração de $P(x)$ é:

$$P(x) \equiv 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

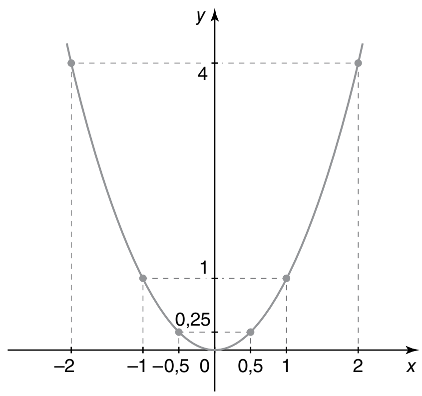
b) As raízes do polinômio $Q(x)$ são dadas por:

$4x^2 + 4ix + 8 = 0 \Rightarrow x = i$ ou $x = -2i$

Logo, uma fatoração de $Q(x)$ é:

$Q(x) \equiv 4(x - i)(x + 2i)$

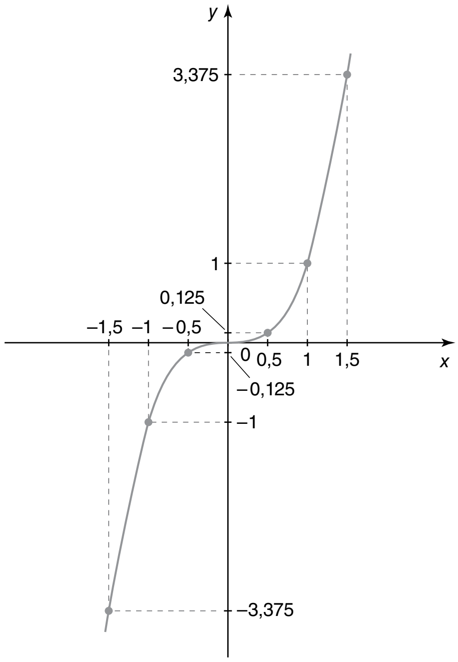
4. I. a) Esboçando o gráfico de $P(x)$, observamos que:



- a única raiz de $P(x)$ é 0 (zero);
- para qualquer valor de x à esquerda de zero, temos que $P(x)$ é positivo; e, para qualquer valor de x à direita de zero, temos que $P(x)$ é positivo.

Assim, concluímos que o gráfico de $P(x)$ não cruza o eixo das abscissas.

b) Esboçando o gráfico de Q(x), observamos que:



- a única raiz de Q(x) é 0 (zero);
- para qualquer valor de x à esquerda de zero, temos que Q(x) é negativo; e, para qualquer valor de x à direita de zero, temos que Q(x) é positivo.

Assim, concluímos que o gráfico de Q(x) cruza o eixo das abscissas no ponto de abscissa 0 (zero).

c) Podemos extrapolar as ideias apresentadas nos itens **a** e **b**, sem a construção do gráfico.
Observamos que:

- a única raiz de S(x) é 0 (zero);
- para qualquer valor de x à esquerda de zero, temos que S(x) é positivo; e, para qualquer valor de x à direita de zero, temos que S(x) é positivo.

Assim, concluímos que o gráfico de S(x) não cruza o eixo das abscissas.

d) Podemos extrapolar as ideias apresentadas nos itens **a** e **b**, sem a construção do gráfico.
Observamos que:

- a única raiz de T(x) é 0 (zero);
- para qualquer valor de x à esquerda de zero, temos que T(x) é negativo; e, para qualquer valor de x à direita de zero, temos que T(x) é positivo.

Assim, concluímos que o gráfico de T(x) cruza o eixo das abscissas no ponto de abscissa 0 (zero).

II. a) O gráfico do polinômio $D(x) \equiv x^n$ cruza o eixo das abscissas se o número natural n for ímpar.

b) O gráfico do polinômio $E(x) \equiv x^m$ não cruza o eixo das abscissas se o número natural m for par.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Resolvendo o sistema, obtemos: $a_0 = \frac{12}{5}$, $a_1 = -\frac{11}{14}$ e $a_2 = \frac{3}{14}$.

2. De acordo com os coeficientes obtidos no item **a**, deduzimos que a função polinomial de ajuste é dada por $f(x) = \frac{3x^2}{14} - \frac{11x}{14} + \frac{12}{5}$. Assim, a previsão de inflação para o mês 6 é calculada por:

$$f(6) = \frac{3 \cdot 6^2}{14} - \frac{11 \cdot 6}{14} + \frac{12}{5} = 5{,}4$$

Conclui-se, então, que, se a tendência inflacionária indicada pelos cinco pontos do gráfico inicial se mantiver, a inflação no ano seguinte deverá ser próxima de 5,4%.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno cometeu um erro ao afirmar que "se o polinômio P(x) é divisível pelos polinômios S(x) e T(x), então P(x) é divisível pelo produto S(x) · T(x)", pois essa propriedade só é válida se as raízes de S(x) e de T(x) forem distintas.

Resolução correta:
Se os polinômios S e T têm raiz comum, então o grau do produto S · T pode ser maior que o grau do polinômio P, conforme mostra o exemplo a seguir.
Sendo $P(x) \equiv (x - 1)^4$, $S(x) \equiv (x - 1)^3$ e $T(x) \equiv (x - 1)^2$, temos que P(x) é divisível pelos polinômios S e T e gr(S · T) > gr(P), ou seja, n pode ser maior que m.
Alternativa **c**.