CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

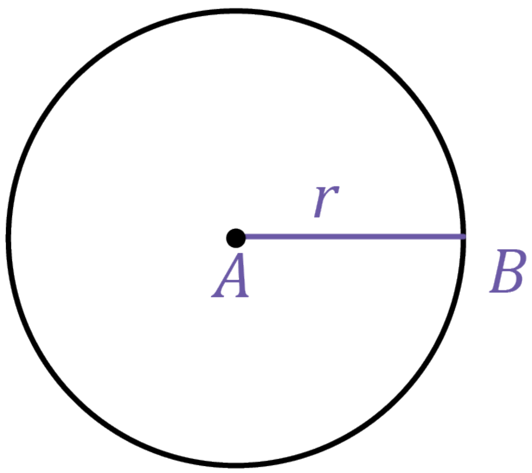
O formato “redondo” está muito presente em nossas vidas, desde a invenção da roda até o emocionante jogo de futebol, quando surge a bola. Estamos a todo momento envolvidos e, portanto, familiarizados com objetos que possuem esta característica. Em duas dimensões, com a ajuda de um compasso, sabemos como desenhar um objeto redondo de modo relativamente fácil. Na geometria plana podemos falar em dois objetos redondos: a circunferência e o círculo. Agora, você sabe qual a definição de circunferência? E a de círculo? E não, eles **não são** o mesmo objeto geométrico! Vamos começar pela circunferência.

CIRCUNFERÊNCIA

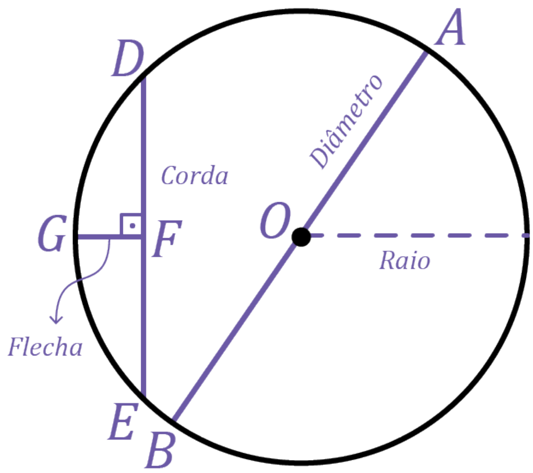
Definição e seus Elementos

Suponha um ponto A. Definimos uma circunferência de centro A como o conjunto de todos os pontos B equidistantes (mesma distância) do ponto A. O valor de $\overline{AB}$ é denominado **raio** da circunferência.

Observe a imagem abaixo, que ilustra a definição de circunferência.



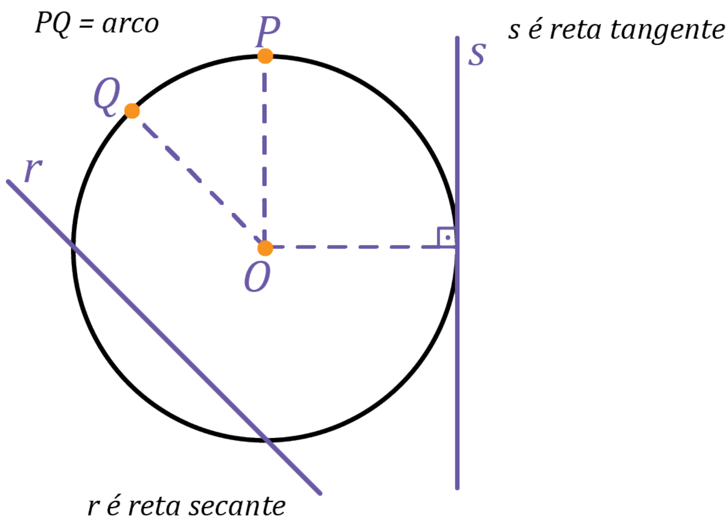
As circunferências possuem alguns elementos importantes. Além do raio, podemos falar da **corda** da circunferência, que é qualquer segmento de reta que une dois de seus pontos. O **diâmetro** da circunferência é uma corda que passe pelo centro (ele possui o dobro do comprimento do raio). Por fim, a **flecha** é o segmento de reta perpendicular à uma corda, que possui uma extremidade no ponto médio dessa corda e a outra extremidade na circunferência. Estes elementos estão representados na figura abaixo.



Observação: o diâmetro é a **maior** corda circunferência.

Há ainda três conceitos importantes que precisamos destacar. Dizemos que uma reta é **tangente** à uma circunferência se ela intercepta a mesma em um único ponto. Neste caso, o raio da circunferência é perpendicular à reta tangente. Já, uma reta é **secante** à uma circunferência quando intercepta a mesma em exatamente dois pontos. Por fim, dados dois pontos distintos da circunferência, a porção da circunferência compreendida entre estes pontos (incluindo-os) é chamada de **arco de circunferência**. A figura abaixo mostra um exemplo de reta tangente s, da reta secante r e do arco PQ.

Observação: a notação para arco é $arco(PQ)$; com P e Q sendo os extremos do arco.



Observação: Em uma circunferência de raio R, podemos calcular o seu comprimento através da expressão $2\pi R$.

Já estudamos ângulos em apostilas anteriores de geometria e já sabemos sua definição. Dependendo da posição do vértice do ângulo em relação à circunferência, esse ângulo recebe uma denominação especial e forma "fechada" para encontrar sua medida.

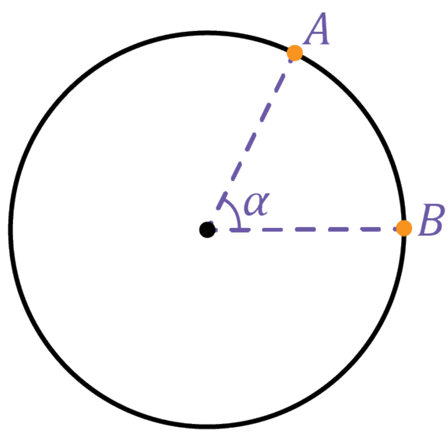
ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Numa circunferência, podemos falar de quatro tipos de ângulos: o **ângulo central**, o **ângulo inscrito**, o **ângulo excêntrico interior** e o **ângulo excêntrico exterior**. Vamos aprofundar nossos estudos em cada um deles.

Ângulo Central

Dizemos que o ângulo central α é a região existente entre dois segmentos de reta com uma extremidade em dois pontos A e B distintos da circunferência e outra extremidade no centro da circunferência.

Observe o ângulo α na imagem a seguir, com origem no centro da circunferência.



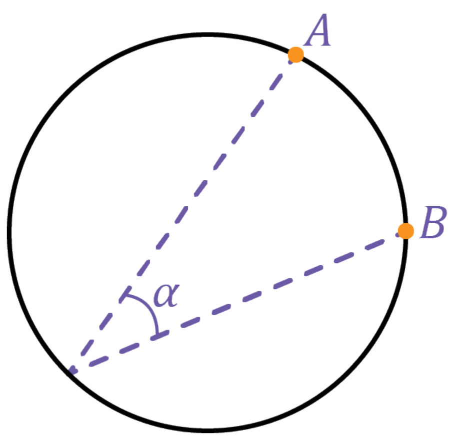
Este ângulo α gera um arco na circunferência, cujas medidas coincidem:

$$\alpha = arco(AB)$$

Ângulo Inscrito

Dizemos que o ângulo inscrito α é a região existente entre dois segmentos de reta com uma extremidade em dois pontos A e B distintos da circunferência e outra extremidade em um mesmo outro ponto da circunferência.

Observe o ângulo α na imagem a seguir, com origem em um ponto da circunferência.



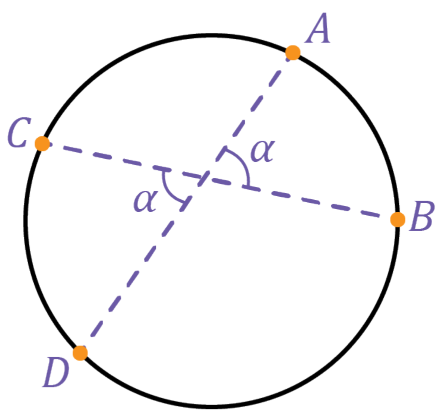
Este ângulo α gera um arco na circunferência, cujas medidas se relacionam através do seguinte:

$$\alpha = \frac{arco(AB)}{2}$$

Ângulo Excêntrico Interior

Dizemos que o ângulo excêntrico interior é a região obtida através de ângulos opostos pelo vértice, com esse vértice estando no interior da circunferência, mas não coincidindo com o seu centro.

Observe o ângulo α na imagem a seguir.



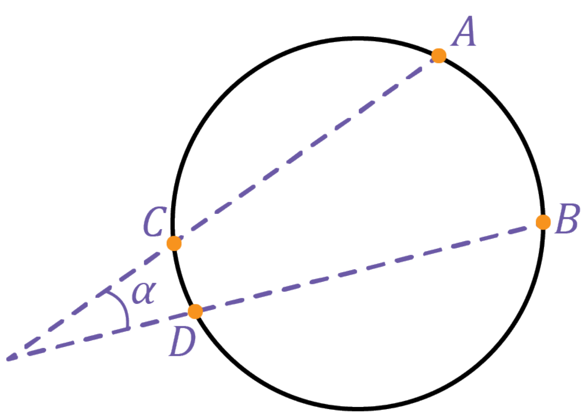
Estes ângulos α geram arcos na circunferência, cujas medidas se relacionam através do seguinte:

$$\alpha = \frac{arco(AB) + arco(CD)}{2}$$

Ângulo Excêntrico Exterior

Dizemos que o ângulo excêntrico exterior é a região existente entre dois segmentos de reta com uma extremidade em dois pontos A e B distintos da circunferência e outra extremidade em um mesmo outro ponto externo à circunferência.

Observe o ângulo α na imagem a seguir.



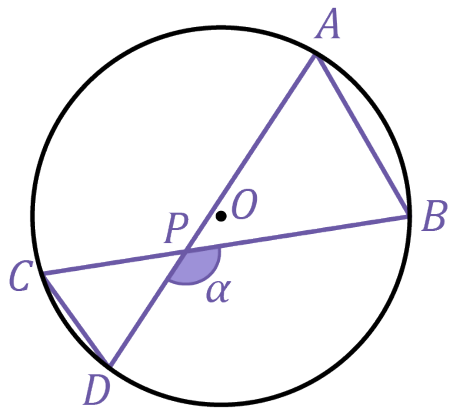
O ângulo α gera dois arcos na circunferência, cujas medidas se relacionam através do seguinte:

$$\alpha = \frac{arco(AB) - arco(CD)}{2}$$

Vamos praticar um pouco.

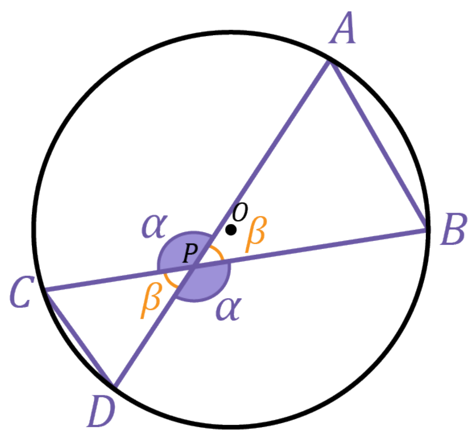
EXERCÍCIO RESOLVIDO

O arco(AB) e o arco(CD) medem, respectivamente, 60° e 50°. Ainda, as cordas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se interceptam no ponto P considerado. Qual é a medida do ângulo $B\hat{P}D$?



Solução:

Pela análise da figura, sabemos que os ângulos $A\hat{P}B$ e $C\hat{P}D$ são ângulos excêntricos interiores da circunferência. Podemos então calcular quanto valem estes ângulos, redesenhando a figura.



Assim:

$$\beta = \frac{arco(AB) + arco(CD)}{2}$$

$$\beta = \frac{60° + 50°}{2}$$

$$\beta = 55°$$

Uma vez que temos este ângulo, sabemos que:

$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\alpha = 180° - 55°$$

$$\alpha = 125°$$

Logo, temos como solução que o ângulo $B\hat{P}D$ vale 125°.

Agora que sabemos bastante sobre a circunferência, vamos falar um pouco sobre o círculo!

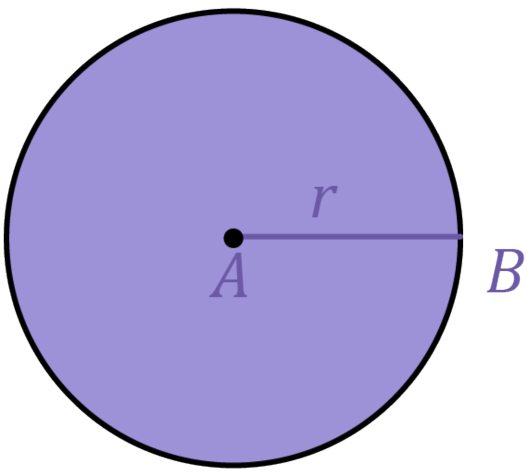
CÍRCULO

Primeiro, é necessário verificarmos o que diferencia o círculo da circunferência, através da sua definição.

Definição

Suponha uma circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$. O círculo de centro A e raio $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos C tais que a distância entre A e C seja menor ou igual à distância entre A e B.

Assim, de maneira simples, um círculo é a região limitada por uma circunferência. Observe abaixo.



Elementos do Círculo e suas Áreas

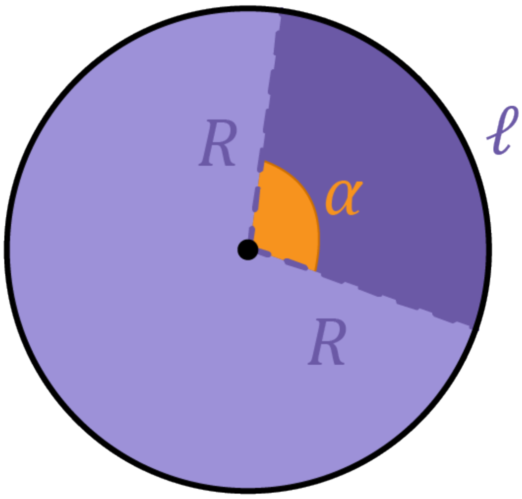
Como o círculo é um objeto plano, certamente podemos pensar qual deve ser a área que ele possui. Se considerarmos um círculo de raio R, a sua área pode ser calculada através de:

$$A = \pi R^2.$$

Em um círculo também é possível falarmos de **setor circular**.

O setor circular é a região delimitada por um ângulo central do círculo.

Observe a figura abaixo, a qual ilustramos um setor circular de um círculo de raio R.



Esta região possui uma área que pode ser calculada de duas formas.

1. Se sabemos o valor do ângulo α, calculamos a área do setor circular pela regra de três abaixo.

$$360° - \pi R^2$$

$$\alpha - A_{setor}$$

2. Se sabemos o valor do comprimento l do arco da circunferência que compreende o setor circular, calculamos sua área pela regra de três abaixo.

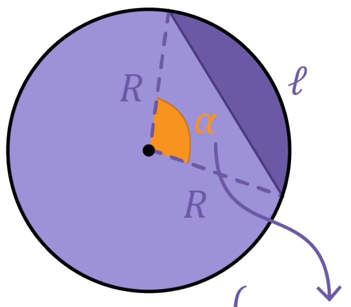
$$2\pi R - \pi R^2$$

$$l - A_{setor}$$

Pensemos agora no **segmento circular**.

O **segmento circular** é a região compreendida entre a corda com extremos em 2 pontos da circunferência e o arco da circunferência delimitado por esses mesmos 2 pontos.

Observe na figura abaixo um segmento circular de um círculo de raio R.



$$\begin{cases} A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot sen\alpha \\ A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\alpha \end{cases}$$

A área deste segmento é calculada da seguinte forma:

$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{triângulo}$$

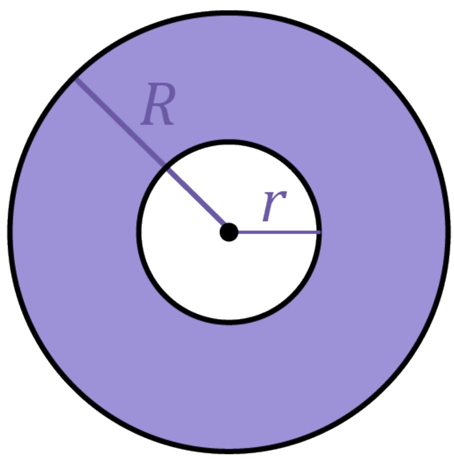
$$A_{segmento} = A_{setor} - \frac{1}{2} R^2 \, sen \, \alpha$$

Por fim, chegou a hora de falarmos da **coroa circular**.

Você já percebeu que a face da moeda de 1 real se diferencia das demais? Ela possui uma "borda" dourada, que em outras moedas não existe. Esta "borda" é a coroa circular do círculo.

Dizemos que dados dois círculos concêntricos (que possuem o mesmo centro), a coroa circular é a região compreendida entre o interior do círculo de maior raio e o exterior do círculo de menor raio.

Observe na figura abaixo uma coroa circular delimitada por um círculo de raio R e um círculo de raio r.



Assim como no setor circular e segmento circular, também é possível calcularmos a área de uma coroa circular! Este valor é obtido pela diferença da área do círculo maior pela área do círculo menor:

$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi_r^2$$

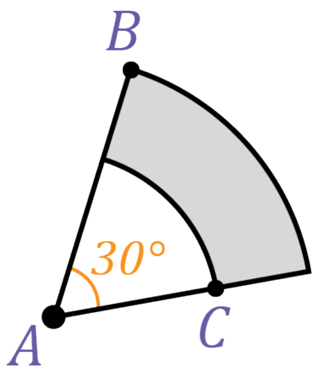
$$A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A_{coroa} = \pi(R + r)(R - r)$$

Vamos resolver um exercício sobre estes assuntos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Na figura abaixo, sabendo que $\overline{AB}$ mede 6 cm, $\overline{AC}$ mede 4 cm e que a região cinza faz parte de uma coroa circular, encontre o valor de sua área.



Solução:

Para encontrar a área desejada (cor cinza), podemos fazer a subtração da área do setor circular maior (de raio 6 cm) pela área do setor circular menor (de raio 4 cm).

Vamos primeiro encontrar a área do setor circular maior através da regra de três abaixo:

$$360° \; - \pi 6^2$$

$$30° \; - A_{setor\ maior}$$

$$A_{setor\ maior} = \frac{36\pi.30°}{360°}$$

$$A_{setor\ maior} = \frac{\pi.30°}{10°}$$

$$A_{setor\ maior} = 3\pi\ cm^2$$

Agora, encontramos a área do setor circular menor através da regra de três abaixo:

$$360° \quad - \pi 4^2$$

$$30° \quad - A_{setor\ menor}$$

$$A_{setor\ menor} = \frac{16\pi . 30°}{360°}$$

$$A_{setor\ menor} = \frac{16\pi}{12}$$

$$A_{setor\ menor} = \frac{4}{3}\pi\ cm^2$$

Finalmente, calculamos a área desejada:

$$A_{cinza} = \left(3\pi - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$A_{cinza} = \left(3 - \frac{4}{3}\right)\pi$$

$$A_{cinza} = \left(\frac{9-4}{3}\right)\pi$$

$$A_{cinza} = \frac{5}{3}\pi\ cm^2$$

Assim, temos como solução que a área cinza vale $\frac{5}{3}\pi\ cm^2$.

Finalizamos assim o nosso estudo sobre circunferência e seus elementos, círculos e áreas de suas regiões.

ANOTAÇÕES