Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Exercício 01 ====================================

Para a primeira dízima, temos que a unidade de repetição é o “215”, então vamos chamar nossa fração de x e multiplicar por 1000 para isolar a unidade de repetição:

$$0,215215215... = x$$
$$215,215215215... = 1.000x$$

Agora, subtrair um do outro para encontrar a relação e a fração no final:

$$215,215215215... = 1.000x$$
$$-0,215215215... = -x$$
$$215 = 999x$$
$$x = \frac{215}{999}$$

Para os próximos itens, o processo braçal é exatamente igual, então vamos um pouquinho mais rápido

No segundo item, a unidade de repetição já está exposta, é o “21”

$$3,212121... = x$$
$$321,212121... = 100x$$

$$321,212121... = 100x$$
$$-3,212121... = -x$$
$$318 = 99x$$
$$x = \frac{318}{99}$$

No terceiro item, a unidade de repetição é o “45”, e fazendo o processo todo teremos:

$$0,4454545... = x$$
$$44,5454545... = 100x$$

$$44,5454545... = 100x$$
$$-0,4454545... = -x$$
$$44,1 = 99x$$
$$441 = 990x$$
$$x = \frac{441}{990}$$

Por fim, teremos um processo um pouquinho mais cansativo na Letra D, mas o processo é o mesmo, a unidade de repetição vai ser “973”:

$$5,02973973... = x$$
$$5029,73973... = 1.000x$$

$$5029,73973... = 1.000x$$
$$-5,02973973... = -x$$
$$5024,71 = 999x$$
$$502471 = 99.900x$$
$$x = \frac{502.471}{99.900}$$

Exercício 02 ====================================

Os dois primeiros itens são bem diretos, basta fazer a propriedade distributiva (chuveirinho) ou lembrar da fórmula de trinômio quadrado perfeito:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Já para as letras C e D, não tem muita saída além de fazer distributiva, a não ser que você saiba decorado a fórmula para cubo da soma de dois termos, o que é incomum.

$$(a+2b)^2 =$$
$$(a+2b)(a+2b) =$$
$$a^2 + 2ab + 2ab + 4b^2 =$$
$$a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$\left(a-\sqrt{b}\right)^2 =$$
$$\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) =$$
$$a^2 - a\sqrt{b} - a\sqrt{b} + b =$$
$$a^2 - 2a\sqrt{b} + b$$

$$(3a+5)^3 =$$
$$(3a+5)(3a+5)(3a+5) =$$
$$\left(9a^2 + 15a + 15a + 25\right)(3a+5) =$$
$$\left(9a^2 + 30a + 25\right)(3a+5) =$$
$$27a^3 + 45a^2 + 90a^2 + 150a + 75a + 125 =$$
$$27a^3 + 135a^2 + 225a + 125$$

$$\left(\sqrt{a}-2b\right)^3 =$$
$$\left(\sqrt{a}-2b\right)\left(\sqrt{a}-2b\right)\left(\sqrt{a}-2b\right) =$$
$$\left(a - 2b\sqrt{a} - 2b\sqrt{a} + 4b^2\right)\left(\sqrt{a}-2b\right) =$$
$$\left(a - 4b\sqrt{a} + 4b^2\right)\left(\sqrt{a}-2b\right) =$$
$$a\sqrt{a} - 2ab - 4ab + 8b^2\sqrt{a} + 4b^2\sqrt{a} - 8b^3 =$$
$$a\sqrt{a} - 6ab + 12b^2\sqrt{a} - 8b^3$$

Um trabalhinho meio maçante, mas é importante ter muita atenção nas contas para não errar os sinais.

Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Exercício 03 ====================================

Pegando a expressão $(3x + 2y)^2$ e desenvolvendo, nós teremos:

$$(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

Com isso, o enunciado já disse que

$$9x^2 + 4y^2 = 25$$

Então teremos, substituindo isso na equação original:

$$(3x+2y)^2 = 25 + 12xy$$

Mas o enunciado também disse que xy = 2, então também podemos substituir:

$$(3x+2y)^2 = 25 + 12(2)$$
$$(3x+2y)^2 = 25 + 24$$
$$(3x+2y)^2 = 49$$

E ficamos com a **Letra D.**

Exercício 04 ====================================

O melhor jeito de sair dessa questão sem precisar calcular dois quadrados gigantescos, é notar que a expressão que o enunciado deu é uma diferença de quadrados, portanto pode ser fatorada usando a forma:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$525^2 - 523^2 =$$
$$(525-523)(525+523) =$$
$$(2)(1048) =$$
$$2096$$

Fazendo a soma dos algarismos então teremos:

$$2+0+9+6 = 17$$

Letra C.

Exercício 05 ====================================

Antes de querer julgar qualquer coisa sobre o número k, vamos tentar trabalhar um pouco essa soma de frações juntando-as:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$$
$$\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} =$$
$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$

Agora, dá para cortar a raiz de 3 com menos raiz de 3, e embaixo a gente tem um produto da soma pela diferença de dois termos, que resulta numa diferença de quadrados, como a gente viu na questão 4:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} =$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{2-3} =$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2} \cong -2{,}8$$

E ficamos com a **Letra B.** Não pode ser a letra A porque o resultado não é inteiro, não pode ser a C porque não é racional, e não pode ser a D porque não é maior que 2.

Exercício 06 ====================================

Produtos Notáveis

Revisão de Conceitos:

A revisão de conceitos envolvida neste item será bem breve, visto que apenas temos de abordar os conceitos relacionados à Diferença de Quadrados, da parte de Produtos Notáveis.

Então, vamos lá, o que é essa diferença de quadrados?

Costumamos dar nome para esses produtos notáveis, e, esse é um dos exemplos. Mas, calma lá, eu falei de dar nomes… e "produto notável", o que é isso?

Basicamente, quando dizemos que temos um produto "notável", estamos nos referindo a um produto "famoso", isto é, não somente um produto recorrente, mas, um produto que é bom ser entendido e memorizado.

Vou exemplificar com o produto básico ensinado, o quadrado da soma:

$$(a+b)^2$$

Podemos fazer tanto sem saber o produto notável, da seguinte forma:

$$(a+b)\cdot(a+b)=a^2+a\cdot b+b\cdot a+b^2$$

Bem como podemos fazer já sabendo o produto notável "decorado":

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot ab+b^2$$

Enfim, vamos agora ao nosso produto de interesse, a Diferença de Quadrados.

Esse produto é como segue:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Sabendo apenas isso, sobre os conceitos de produto notável e a construção da Diferença de Quadrados, você consegue resolver a questão.

Resolução:

i) Numerador

Bom, vamos chamar 3^2 de a e 5^2 de b, vejam como fica:

$$M=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a\cdot b)^2}$$

Então, no numerador, temos uma diferença de quadrados.

E, aplicando o produto notável da diferença de quadrados, temos:

$$M=\frac{((a+b)+(a-b))\cdot((a+b)-(a-b))}{(a\cdot b)^2}$$

$$M=\frac{(2a)\cdot(2b)}{(a\cdot b)^2}$$

$$M=\frac{4ab}{(ab)^2}$$

ii) Agora, simplificando essa fração

$$M=\frac{4}{ab}$$

Aqui, já podemos marcar como resposta a letra e, mas, vamos seguir para a substituição.

iii) Substituindo a e b por seus valores

$$M=\frac{4}{3^2\cdot 5^2}$$

$$M=\frac{4}{9\cdot 25}=\frac{4}{225}$$

Resposta: Letra D

Exercício 07 ===================================

Produtos Notáveis

Revisão de Conceitos:

Olha, se você não viu a Revisão de Conceitos do Item 6, sugiro fortemente que o faça, pois lá eu abordo alguns conceitos introdutórios, como o Quadrado da Soma, que vamos utilizar nesta questão.

Enfim, vamos revisar mais uma vez esse produto.

Basicamente, podemos demonstrar esse Quadrado da Soma da seguinte forma:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)$$

$$(a+b)^2=a^2+a\cdot b+b\cdot a+b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot ab+b^2$$

Et voilà, o Quadrado da Soma.

Agora, sabendo isso, vamos à resolução.

Resolução:

Aplicando o Quadrado da Soma em M

$$M=\left(a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}+b\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

$$M=\left(a^2\cdot\frac{a}{b}+2\cdot a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot b\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+b^2\cdot\frac{b}{a}\right)$$

$$M=\left(\frac{a^3}{b}+2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{ab}{ba}}+\frac{b^3}{a}\right)$$

$$M=\left(\frac{a^3}{b}+2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{1}+\frac{b^3}{a}\right)$$

$$M=\left(\frac{a^3}{b}+2ab+\frac{b^3}{a}\right)$$

$$M=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+2ab$$

Resposta: Letra E

Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Exercício 08 ==================================

Produtos Notáveis

Revisão de Conceitos:

Para a revisão de conceitos desta questão, visite a Revisão de Conceitos da Questão 06, pois abordaremos os mesmos conceitos de Diferença de Quadrados.

Resolução:

i) Interpretando o enunciado

Bom, o enunciado nos faz procurar um número, que chamaremos de x, que somado a 456.788^2, resulta em 456.789^2.

Ou seja, temos a seguinte equação:

$$x + 456.788^2 = 456.789^2$$

ii) Reescrevendo a equação em função de x

$$x = 456.789^2 - 456.788^2$$

Hmm, que interessante, não? Temos justamente uma diferença de quadrados!

iii) Calculando o valor de x, a partir da diferença de quadrados

$$x = (456.789 + 456.788) \cdot (456.789 - 456.788)$$

$$x = (456.789 + 456.788) \cdot (1)$$

Agora, ficamos na dúvida entre as alternativas d e e.

No entanto, como sabemos que essa soma terminará em 7, pois 9 + 8 = 17, podemos marcar a Letra e, sem realizar essa soma.

Vejam, de fato, a soma dá isso:

x = 913.577

Resposta: Letra E

Exercício 09 ==================================

Produtos Notáveis

Resolução:

Para resolver esse exercício, a estratégia que adotei foi realizá-lo da direita para a esquerda, isto é, ao invés de começar multiplicando raiz de 2 por raiz de (2 + raiz de 2), comecei multiplicando os dois fatores mais da direita.

E, por que fiz isso? Bom, porque consegui enxergar a diferença de quadrados, que é a dica fornecida pelo exercício.

Então, vamos lá:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

i) Multiplicando os 2 termos mais da direita

Para facilitar o entendimento, vou lhes fazer uma pergunta.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Tudo bem isso com vocês?

Vamos usar isso aqui agora para fazer a Diferença de Quadrados.

Então, partindo para a multiplicação, temos:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Que é, nessa escrita mostrada:

$$\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

Agora, vamos fazer a Diferença de Quadrados dentro dessa raiz, obtendo o seguinte:

$$\sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\sqrt{4 - \left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$\sqrt{4-2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Ótimo, então, nossa expressão atual é:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

ii) Multiplicando os 2 termos mais da direita da expressão atual

Agora, temos outra Diferença de Quadrados, vejam essa multiplicação da direita:

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Portanto, ela será:

$$\sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

E, então, nossa expressão atual fica:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

iii) Fazendo a última multiplicação

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Portanto, nossa resposta será 2.

Resposta: Letra A

Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Exercício 10 ===================================

Exponenciação (e Radiciação), Produtos Notáveis e Fração Geratriz

Revisão de Conceitos:

Bom, essa é uma questão mais geral, e, então, temos 3 conceitos para revisar:

1. Exponenciação
2. Produtos Notáveis
3. Fração Geratriz

1 - Exponenciação, como foi conteúdo de listas MB (Matemática Básica) passadas, não entraremos muito a fundo aqui na seção de Revisão, e, então, deixarei para explicar diretamente os conceitos que for usar, na própria Resolução.

2 - Nessa questão, os conhecimentos de Produtos Notáveis que estão sendo cobrados são apenas os relacionados à Diferença de Quadrados. E, de fato, esse é um Produto Notável muito usado até mesmo em aplicações de Cálculo Mental.

Enfim, para ver essa Revisão de Conceitos, basta acessar a Revisão de Conceitos da Questão 06.

Além disso, esse conhecimento é abordado no Item 02, e, se vocês prestarem atenção, a questão e a resolução são as mesmas da Questão 08.

3 - Agora, para a parte de Frações Geratrizes, vamos escrever mais em matematiquês.

Bom, transformar uma dízima periódica na sua fração geratriz pode ocorrer de diversas formas diferentes.

Geralmente, na minha cabeça eu sigo um algoritmo, que é o seguinte:

- Primeiro eu checo se a dízima periódica possui um período de um só dígito, ou seja, se a dízima é bonita, por exemplo: 0,3333... ou também 1,8888....

  Se esse é o caso, sai bem rapidamente a fração: ela terá 9 como denominador.

  Como eu sei disso?

  Bom, 0,1111 é 1/9. Portanto, qualquer valor que seja x,yyyyy podemos escrever como sendo (9x+y)/9.

  Mas, calma, não precisam saber essa fórmula não, chegar ao resultado é mais intuitivo que isso.

  Vamos pensar no 0,3333. Bom, é natural e intuitivo que, como 0,1111 é 1/9, podemos falar que 0,3333... será a fração 3/9.

  O mesmo funciona para o 1,8888. Ele será 1 + 0,8888..., que é 9/9 + 8/9. Ou seja, ele é (9.1+8)/9, que é igual a 17/9.

  Viram? Se esse é o caso, é bem fácil chegar à fração geratriz sem pensar muito em fórmulas ou processos mais complexos.

- Segundo, caso a análise do primeiro caso tenha falhado, ou seja, a dízima não seja algo muito bonito, por exemplo: 0,303030..., aí eu parto para esse.

  Nesse caso, temos de dar um jeito de cortar a parte periódica, e, fazemos isso multiplicando o número por 10 elevado ao tamanho do período.

  Nosso período é o 30, e, portanto, nosso período possui 2 algarismos.

  Sendo assim, multiplicaremos a nossa dízima (vamos chamá-la de x) por $10^2 = 100$.

  E, isso nos resultará nas seguintes equações:

  $$x = 0{,}303030...$$

  $$100x = 30{,}303030...$$

  Agora, podemos simplesmente subtrair a segunda da primeira, ficando com o seguinte:

  $$99x = 30$$

  $$x = \frac{30}{99}$$

  $$x = \frac{10}{33}$$

Et voilà, assim, com esse processo conseguimos descobrir qualquer fração geratriz.

No caso do nosso Item 03, usaremos somente o Primeiro Caso descrito.

Resolução:

Vamos resolver item a item.

01) Exponenciação

Vamos chamar (x - y) de k.

Então, reescrevendo o item, temos:

$$A = k^5 + (-k)^5$$

Agora, sabemos que -k = (-1).k.

Então, podemos reescrever, novamente, como:

$$A = k^5 + (-1 \cdot k)^5$$

E, agora, chegamos ao resultado, pois:

$$A = k^5 - 1 \cdot k^5$$

$$A = k^5 - k^5$$

$$A = 0$$

Resposta: Correto

Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

02) Diferença de Quadrados

Faremos a mesma coisa que fizemos no Item 08 e nas diversas Revisões de Conceitos que abordaram esse tópico.

$$N = 1501^2 - 1500^2$$

$$N = (1501+1500)\cdot(1501-1500)$$

$$N = (3001)\cdot(1) = 3001$$

Resposta: Correto

03) Exponenciação e Fração Geratriz

i) Achando a Fração Geratriz de 1,7777...

Como é uma dízima bonitinha (período com um algarismo), podemos aplicar o Primeiro passo descrito na Revisão de Conceitos, isto é, podemos relacionar com a fração 1/9.

Sendo assim, temos que 1,7777... = 1 + 0,7777...

Ou seja, 1,7777.... = 9/9 + 7/9 = 16/9.

ii) Reescrevendo o enunciado

$$M = \sqrt{\frac{16}{9}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + 8^{\frac{2}{3}}$$

$$M = \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + 8^{\frac{2}{3}}$$

iii) Aplicando as propriedades de exponenciação

$$M = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \sqrt[3]{8^2}$$

$$M = \frac{6}{3} + 2^2$$

$$M = \frac{6}{3} + 4$$

$$M = 2 + 4$$

$$M = 6$$

E, 6 é um número racional.

Resposta: Errado

04) Exponenciação e Conjuntos

Como um número elevado a 0 é igual a 1, temos:

$$\frac{10}{4^0} = \frac{10}{1} = 10$$

E, 10 pertence aos Inteiros (Z).

Como a resposta fala que 10 pertence ao Conjunto dos Racionais Positivos fora do Inteiros, o item está errado.

Resposta: Errado

Exercício 11 ====================================

O primeiro passo aqui é pegar cada uma das dízimas periódicas da questão e transformá-la na sua fração geratriz.

<u>0,243243243...</u>

$$0{,}243243243... = x \text{ (I)}$$

(multiplicando por 1000)

$$243{,}243243243... = 1000\cdot x \text{ (II)}$$

Subtraindo (I) de (II) e continuando os cálculos:

$$243{,}243243243... = 1000x$$

$$-\ \ 0{,}243243243... = x$$

$$243 = 999x$$

$$999x = 243$$

$$x = \frac{243}{999}$$

$$x = \frac{81}{333} = \frac{27}{111} = \frac{9}{37}$$

<u>0,656565...</u>

$$0{,}656565... = x \text{ (III)}$$

$$65{,}656565... = 100\cdot x \text{ (IV)}$$

Subtraindo (III) de (IV) e continuando os cálculos:

$$65{,}656565... = 100x$$

$$-\,0{,}656565... = x$$

$$65 = 99x$$

$$99x = 65$$

$$x = \frac{65}{99}$$

<u>1,353535...</u>

$$1{,}353535... = x \text{ (V)}$$

$$135{,}353535... = 100\cdot x \text{ (VI)}$$

Subtraindo (V) de (VI) e continuando os cálculos:

$$135{,}353535... = 100x$$

$$-\ \ 1{,}353535... = x$$

$$134 = 99x$$

$$99x = 134$$

$$x = \frac{134}{99}$$

0,383838...

$0,383838... = x\ (VII)$

$38,383838... = 100 \cdot x\ (VIII)$

Subtraindo (VII) de (VIII) e continuando os cálculos:

$38,383838... = 100x$

$-\ 0,383838... = x$

$38 = 99x$

$99x = 38$

$x = \frac{38}{99}$

Reescrevendo a expressão do enunciado substituindo todas as dízimas e número decimais por frações:

$$\frac{\frac{37}{3}\cdot\left(\frac{9}{37}\div\frac{18}{10}\right)+\frac{65}{99}\cdot\frac{66}{10}}{\frac{11}{8}\cdot\left(\frac{134}{99}-\frac{38}{99}\right)}$$

Resolvendo essa expressão:

$$\frac{\frac{37}{3}\cdot\left(\frac{9}{37}\div\frac{18}{10}\right)+\frac{65}{99}\cdot\frac{66}{10}}{\frac{11}{8}\cdot\left(\frac{134}{99}-\frac{38}{99}\right)} =$$

$$\frac{\frac{37}{3}\cdot\left(\frac{9}{37}\cdot\frac{10}{18}\right)+\frac{13}{3}\cdot\frac{2}{2}}{\frac{11}{8}\cdot\left(\frac{96}{99}\right)} =$$

$$\frac{\frac{37}{3}\cdot\left(\frac{1}{37}\cdot\frac{10}{2}\right)+\frac{13}{3}\cdot 1}{\frac{11}{8}\cdot\frac{32}{33}} =$$

$$\frac{\frac{37}{3}\cdot\left(\frac{1}{37}\cdot\frac{5}{1}\right)+\frac{13}{3}}{\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{3}} =$$

$$\frac{\frac{37}{3}\cdot\frac{5}{37}+\frac{13}{3}}{\frac{4}{3}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{1}+\frac{13}{3}}{\frac{4}{3}} =$$

$$\frac{\frac{5}{3}+\frac{13}{3}}{\frac{4}{3}} =$$

$$\frac{\frac{18}{3}}{\frac{4}{3}} =$$

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$$

A expressão vale 4,5

Resposta: Letra E.

Exercício 12 ==================================

Resolvendo cada uma das expressões de cada ficha para cada aluno:

<u>Ficha 1:</u>

Lucas:

$$A = \left[\frac{0,777...+\frac{2}{9}+\left(\frac{5}{4}\right)^0}{-0,5-4^{\frac{3}{2}}-2^{-1}}\right]^{-1}$$

$0,777... = x$

$7,777... = 10x$

$-(0,777... = x)$

$7 = 9x$

$x = \frac{7}{9}$

$$A = \left[\frac{\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\left(\frac{5}{4}\right)^0}{-0,5-4^{\frac{3}{2}}-2^{-1}}\right]^{-1}$$

$$A = \left[\frac{\frac{9}{9}+1}{-\frac{1}{2}-\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$A = \left[\frac{2}{-1-2^3}\right]^{-1}$$

$$A = \left[\frac{2}{-1-8}\right]^{-1}$$

$$A = \left[-\frac{2}{9}\right]^{-1}$$

$$A = -\frac{9}{2}$$

Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Mateus:

$$C=\frac{(0,333...)^3\cdot 1\frac{4}{5}+2,2}{-1,1333...}$$

$$C=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{9}{5}+\frac{22}{10}}{-1,1333...}$$

$1,1333...=x$

$11,333...=10x$

$113,333...=100x$

$-(11,333...=10x)$

$102=90x$

$$x=\frac{102}{90}=\frac{17}{15}$$

$$C=\frac{\frac{1}{27}\cdot\frac{9}{5}+\frac{11}{5}}{-\frac{17}{15}}$$

$$C=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{11}{5}}{-\frac{17}{15}}$$

$$C=\frac{\frac{1}{15}+\frac{11\cdot 3}{5\cdot 3}}{-\frac{17}{15}}$$

$$C=\frac{\frac{1}{15}+\frac{33}{15}}{-\frac{17}{15}}$$

$$C=\frac{\frac{34}{15}}{-\frac{17}{15}}$$

$$C=-\frac{34}{17}$$

$C=-2$

Ficha 2:

Lucas:

$$B=\frac{8^{0,666...}+4^{\frac{3}{2}}-2^{\sqrt{9}}+9^{0,5}}{-\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$B=\frac{8^{\frac{2}{3}}+4^{\frac{3}{2}}-2^3+9^{\frac{1}{2}}}{-(49)^{\frac{1}{2}}}$$

$$B=\frac{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}-2^3+\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}}{-\left(7^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$B=\frac{2^{3\cdot\frac{2}{3}}+2^{2\cdot\frac{3}{2}}-2^3+3^{2\cdot\frac{1}{2}}}{-7^{2\cdot\frac{1}{2}}}$$

$$B=\frac{2^2+2^3-2^3+3^1}{-7^1}$$

$$B=\frac{4+8-8+3}{-7}$$

$$B=\frac{7}{-7}$$

$B=-1$

Mateus:

$$D=\left[\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}\cdot 0,666...\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^0-\frac{1}{1,33...}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D=\left[\left(6^3\cdot\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D=\left[\left(216\cdot\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D=\left[\left(72\cdot\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D=\left[(144)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D=\left[\sqrt{144}+\sqrt{\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D=\left[12+\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Resolução – Matemática Básica
S07.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

$$D = \left[\frac{24}{2} + \frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D = \left[\frac{25}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D = \left[\frac{2}{25}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$D = \sqrt{\frac{2}{25}}$$

$$D = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Resumindo os números achados:

$A = -\frac{9}{2}$

$B = -1$

$C = -2$

$D = \frac{\sqrt{2}}{5}$

Com isso, analisando cada uma das afirmações abaixo:

$A \in T$

$-\frac{9}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}_+$

(Verdade)

$B \in W$

$-1 \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_+^*$

(Verdade)

$C \in X$

$-2 \in \mathbb{Q}_-^* \cap \mathbb{R}_-^*$

(Verdade)

$D \in T$

$\frac{\sqrt{2}}{5} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}_+$

(Verdade)

Com isso, tanto Lucas e Mateus acertaram as correspondências entre os números calculados e os conjuntos.

Resposta: Letra A.

Exercício 13 ===================================

Sabemos que $x^3 = x + 2$

Elevando os dois lados da equação ao cubo:

$$\left(x^3\right)^3 = (x+2)^3$$

O lado direito da equação é um produto notável da forma:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (I)}$$

ou

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \text{ (II)}$$

Continuando a conta utilizando (I)

$$\left(x^3\right)^3 = (x+2)^3$$

$$x^9 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$$

$$x^9 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Mas $x^3 = x + 2$, e substituindo na equação acima:

$$x^9 = \left[x^3\right] + 6x^2 + 12x + 8$$

$$x^9 = [x+2] + 6x^2 + 12x + 8$$

$$x^9 = 6x^2 + 13x + 10$$

Multiplicando os dois lado por x:

$$x^9 \cdot x = \left(6x^2 + 13x + 10\right) \cdot x$$

$$x^{10} = 6x^3 + 13x^2 + 10x$$

Mais um vez substituindo $x^3 = x + 2$:

$$x^{10} = 6\left[x^3\right] + 13x^2 + 10x$$

$$x^{10} = 6[x+2] + 13x^2 + 10x$$

$$x^{10} = 6x + 12 + 13x^2 + 10x$$

$$x^{10} = 13x^2 + 16x + 12$$

Resposta: Letra C.

Exercício 14 ====================================

$$\frac{1}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

Primeiro passo, multiplicando o numerador e denominador pelo conjugado de $\left(\sqrt{2}+1\right)$ que é $\left(\sqrt{2}-1\right)$

$$\frac{1}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\right.}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left.\left(\sqrt{2}-1\right)\right]}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)(2-1)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)}$$

Segundo passo, multiplicando o numerador e denominador por $\left(\sqrt[4]{2}-1\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left[\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\right.}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}{\left.\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\right]}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\left(\sqrt[4]{2}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$\frac{\underline{\underline{\left(\sqrt{2}-1\right)}}\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\underline{\underline{\left(\sqrt{2}-1\right)}}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)}$$

Terceiro passo, multiplicando o numerador e denominador por $\left(\sqrt[8]{2}-1\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left[\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\right.}\cdot\frac{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\left.\left(\sqrt[8]{2}-1\right)\right]}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\left(\sqrt[8]{2}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2^2}-1\right)}=$$

$$\frac{\underline{\underline{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}}\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\underline{\underline{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)}$$

Quarto passo, multiplicando o numerador e denominador por $\left(\sqrt[16]{2}-1\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left[\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\right.}\cdot\frac{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}{\left.\left(\sqrt[16]{2}-1\right)\right]}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\left(\sqrt[16]{2}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2^2}-1\right)}=$$

$$\frac{\underline{\underline{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}}\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\underline{\underline{\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2}+1\right)}$$

Quinto passo, multiplicando o numerador e denominador por $\left(\sqrt[32]{2}-1\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left[\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\right.}\cdot\frac{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}{\left.\left(\sqrt[32]{2}-1\right)\right]}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\left(\sqrt[32]{2}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\left(\sqrt[32]{2^2}-1\right)}=$$

$$\frac{\underline{\underline{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}}\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\underline{\underline{\left(\sqrt[16]{2}-1\right)}}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)}$$

Sexto e último passo, multiplicando o numerador e denominador por $\left(\sqrt[64]{2}-1\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[64]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2}-1\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)\left(\sqrt[64]{2}-1\right)}{\left(\left(\sqrt[64]{2}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)\left(\sqrt[64]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[64]{2^2}-1\right)}=$$

$$\frac{\cancel{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}\left(\sqrt[64]{2}-1\right)}{\cancel{\left(\sqrt[32]{2}-1\right)}}=$$

$$\sqrt[64]{2}-1$$

Resposta: $\sqrt[64]{2}-1$.

Exercício 15 ===================================

Sabemos que $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ e também é raiz de $x^3+3x-4=0$.

Supondo que o que está dentro da raiz cúbica seja uma expressão cúbica perfeito, isso facilita nossos cálculos, pois bastaria cortar o expoente 3 da expressão cúbica com o índice da raiz.

Mas como descobrimos qual a expressão cúbica perfeita relacionada à $2+\sqrt{5}$ ou $2-\sqrt{5}$? Provavelmente deve ser um número da forma $\left(a+b\sqrt{5}\right)^3$ ou $\left(a-b\sqrt{5}\right)^3$.

Começamos chutando o mais simples que conseguimos imaginar: $\left(1+\sqrt{5}\right)^3$ onde a = 1 e b = 1.

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^3=$$

Lembrando que $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3$$

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^3=1+3\sqrt{5}+3\cdot1\cdot5+\sqrt{5^3}$$

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^3=1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}$$

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^3=16+8\sqrt{5}$$

Colando em evidência o 8:

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^3=8\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)$$

Chegamos onde queríamos: $2+\sqrt{5}$

$$2+\sqrt{5}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{8}$$

$$2+\sqrt{5}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{2^3}$$

$$2+\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

Analogamente, fazendo para $\left(1-\sqrt{5}\right)^3$:

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^3=$$

Lembrando que $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^3=1^3-3\cdot1^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^3$$

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^3=1-3\sqrt{5}+3\cdot1\cdot5-\sqrt{5^3}$$

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^3=1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}$$

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^3=16-8\sqrt{5}$$

Colando em evidência o 8:

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^3=8\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)$$

Chegamos onde queríamos: $2-\sqrt{5}$

$$2-\sqrt{5}=\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}{8}$$

$$2-\sqrt{5}=\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}{2^3}$$

$$2-\sqrt{5}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

Substituindo essas expressões achada em α :

$$\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{2}{2} = 1$$

Substituindo $\alpha = 1$ na equação $x^3 + 3x - 4 = 0$:

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \rightarrow 1^3 + 3\cdot 1 - 4 = 0$$

$$1 + 3 - 4 = 0 \rightarrow 4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

Fica demonstrado.

<u>Outra resolução:</u>

Essa questão poderia também ter sido feita no que chamamos de força bruta, que é basicamente a substituição direta.

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \rightarrow \alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

$$\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 +$$

$$+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) +$$

$$+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

Continuando as contas:

$$2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} +$$

$$+3\left(\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) +$$

$$+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$4 + 3\left(\sqrt[3]{2^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) +$$

$$+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$4 + 3\left(\sqrt[3]{4-5}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) +$$

$$+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$4 + 3\left(\sqrt[3]{-1}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$4 + 3\cdot(-1)\cdot\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

$$4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$