MATEMÁTICA

CONJUNTOS E DETERMINANTES

07

01| Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

A pelo menos uma pessoa leu os dois livros.
B nenhuma pessoa leu os dois livros.
C pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.
D todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

02| Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

A 10.
B 11.
C 12.
D 13.
E 14.

03| Em uma consulta à comunidade acadêmica sobre a necessidade de melhorias na área física de um determinado campus do IFSul, foi obtido o seguinte resultado:

- 538 sugerem reformas nas salas de aula.
- 582 sugerem reformas na biblioteca.
- 350 sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca.
- 110 sugerem reformas em outras instalações.

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa consulta?

A 770
B 880
C 1.120
D 1.580

04| Sejam os conjuntos $A = \{x \in \square \mid 0 < x \leq 5\}$, $B = \{x \in \square \mid x \geq -5\}$ e $C = \{x \in \square \mid x \leq 0\}$. Pode-se afirmar que

A $(A - B) \cup C = C$
B $(A - C) \cap B = \varnothing$
C $(B \cup C) \cap A = \square$
D $(B \cap C) \cap A = A$

05| Três emissoras de TV apresentam programação infantil durante o dia. Na emissora A, o horário dessa programação vai de 11 h 40 min até 18 h 30 min. Na emissora B, vai de 9 h 30 min até 16 h 40 min e na emissora C vai de 10 h 50 min até 13 h 20 min e de 14 h 50 min até 17 h 10 min. O tempo em que as três emissoras apresentam essa programação simultaneamente é de:

A 3 h 20 min
B 3 h 30 min
C 3 h 40 min
D 3 h 50 min
E 4 h

06| Em uma família, sabe-se que três filhos fazem curso de inglês, dois praticam natação e só um deles faz as duas atividades. As mensalidades do curso de inglês e da natação são, respectivamente, R$ 240,00 e R$ 180,00 por pessoa. A despesa total dessa família apenas com essas atividades dos filhos é de:

A R$ 1.500,00
B R$ 1.080,00
C R$ 1.210,00
D R$ 1.380,00
E R$ 1.460,00

07| Maria, aluna da Fatec Mococa, para garantir a segurança das mensagens que pretende transmitir, criou um sistema de criptografia da seguinte forma:

- montou uma tabela de 2 linhas e 13 colunas para colocar as 26 letras do alfabeto, sem repetição de letra;

- nas cinco células iniciais da 1ª linha, da esquerda para a direita, escreveu, uma a uma, as letras $F, A, T, E, C,$ nessa ordem;

- ainda na 1ª linha, na 6ª célula, da esquerda para a direita, obedecendo a ordem alfabética (de A a Z), colocou a primeira letra ainda não utilizada nas células anteriores;

- da 7ª célula a 13ª célula da 1ª linha, inseriu sete letras, da esquerda para a direita, sem repetir letra, seguindo a ordem alfabética, começando pela primeira letra ainda não utilizada nas células anteriores;

- preencheu a 2ª linha, da esquerda para a direita, com as letras restantes do alfabeto, também em ordem alfabética e sem repetição de qualquer letra já utilizada anteriormente.

A tabela mostra o início do processo, com as seis primeiras letras.

F	A	T	E	C	B							

Tendo construído a tabela conforme o descrito, para criptografar uma mensagem, Maria substitui cada letra da 1ª linha pela que está na 2ª linha, na mesma coluna, e vice-versa. A acentuação, a pontuação e o espaço entre as palavras são desconsiderados.

Assim, para desejar $BOA\ PROVA$ para uma colega, que sabia fazer a decodificação, escreveu $RTNEBTHN$.

Para João, que também sabia decodificar a mensagem, Maria escreveu:

$\boxed{A\ G\ A\ Q\ N\ E\ N\ B\ P\ S\ P\ N\ E\ B\ P\ A\ S\ P\ B}$

A partir da decodificação, João entendeu que a mensagem de Maria foi

A Nunca pare de aprender

B Nunca deixe de estudar

C Nunca faça isso de novo

D Sempre tire boas notas

E Sempre faça boas ações

08| Dentre as equações abaixo, qual NÃO possui solução com x e y inteiros?

A $x^2 + y^2 = 1.$

B $x^2 + y^2 = 2.$

C $x^2 + y^2 = 3.$

D $x^2 + y^2 = 4.$

E $x^2 + y^2 = 5.$

09| Marque a alternativa **INCORRETA**.

A Todo número NATURAL é também INTEIRO.

B Todo número NATURAL é também RACIONAL.

C Todo número NATURAL é também IRRACIONAL.

D Todo número NATURAL é também REAL.

E Todo número IRRACIONAL é também REAL.

10| Rafaela e Henrique participaram de uma atividade voluntária que consistiu na pintura da fachada de uma instituição de caridade. No final do dia, restaram duas latas de tinta idênticas (de mesmo tamanho e cor). Uma dessas latas estava cheia de tinta até a metade de sua capacidade e a outra estava cheia de tinta até $\frac{3}{4}$ de sua capacidade. Ambos decidiram juntar esse excedente e dividir em duas partes iguais, a serem armazenadas nessas mesmas latas. A fração que representa o volume de tinta em cada uma das latas, em relação à sua capacidade, após essa divisão é:

A $\frac{1}{3}.$

B $\frac{5}{8}.$

C $\frac{5}{6}.$

D $\frac{4}{3}.$

E $\frac{5}{2}.$

11| Sendo a e b números reais, considere as afirmações a seguir.

I. Se $a < b$ então $-a > -b$.

II. Se $a > b$ então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

III. Se $a < b$ então $a^2 < b^2$.

Quais estão corretas?

A Apenas I.

B Apenas II.

C Apenas III.

D Apenas I e II.

E I, II e III.

12| Calcule o determinante da matriz A de ordem n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & K & 1 \\ M & M & M & M & M & O & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & K & 2n-1 \end{pmatrix}$$

A $\det(A) = \prod_{n=1}^{n-1} 2n$

B $\det(A) = \prod_{n=1}^{n} 2n-1$

C $\det(A) = \prod_{n=1}^{n-1} 2^n$

D $\det(A) = \prod_{n=1}^{n} 2^{n-1}$

E $\det(A) = 1$

13. (Uerj 2017) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

A 1

B 2

C 3

D 4

14| Uma matriz quadrada $X = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Se o determinante da matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$ é igual a 8, então, o valor da soma $x + y + z + w$ pode ser

A 9 ou 11.

B 9 ou 25.

C 11 ou 25.

D 9 ou 13.

15| Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz $A \cdot B$ é

A 4

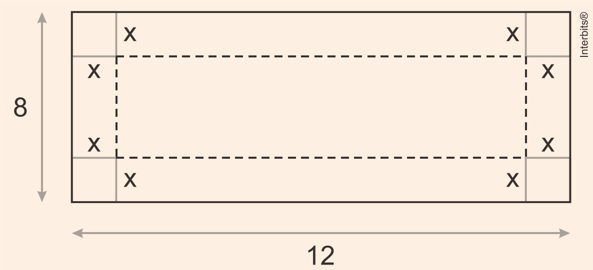
B 6

C 8

D 12

E 27

16| Partindo de um retângulo de dimensões 8 e 12, um garoto recorta, de cada canto, um quadrado de lado x, conforme a figura:



Dobrando nas linhas tracejadas, o garoto obtém uma caixa. A expressão que melhor representa o volume máximo dessa caixa é:

A $24 - 3x$.

B $8x - 2x^2$.

C $12x - 2x^2$.

D $4x^3 - 40x^2 + 96x$.

E $8x + 20$.

GABARITO

01| C

A única alternativa correta é a [C]. Se cinco pessoas leram o livro A e quatro pessoas distintas leram o livro B, há um total de 9 pessoas, sendo possível que ao menos uma pessoa não tenha lido nenhum dos livros.

02| E

Fazendo as multiplicações pertinentes entre x e y e desconsiderando os elementos repetidos, conclui-se que o número de elementos em C é 14.

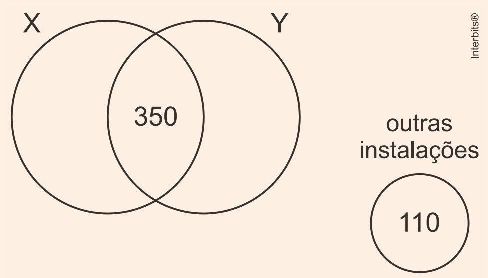
	-1	-2	-3	-4	-5
1	-1	-2	-3	-4	-5
2	~~-2~~	~~-4~~	-6	-8	-10
3	~~-3~~	~~-6~~	-9	-12	-15
4	~~-4~~	~~-8~~	~~-12~~	-16	-20
5	~~-5~~	~~-10~~	~~-15~~	~~-20~~	-25

03| B

Tome reforma nas salas de aula como x e reformas na biblioteca como y.

Sabendo que 350 pessoas sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca, ou seja, a intersecção entre x e y.

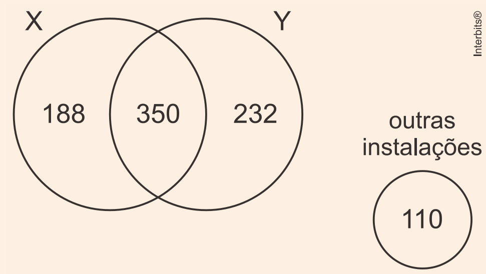
Logo, pode-se aplicar o Diagrama de Venn para tal situação da seguinte maneira:



Como 350 representa a intersecção entre reformas nas salas de aula e na biblioteca, basta achar a diferença da parte das duas partes com a parte em comum. Desta forma:

$538 - 350 = 188$ e $582 - 350 = 232$

Transcrevendo para o Diagrama de Venn, temos:

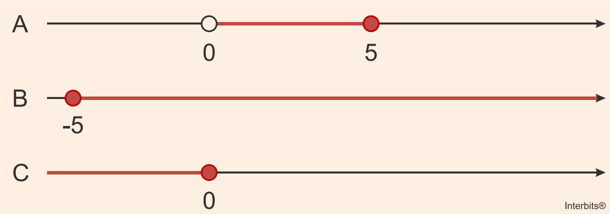


Para obter a quantidade de pessoas entrevistadas basta somar todos os valores. Note que a amostra possui 110 pessoas que opinaram reformas em outras instalações. Somando todos os valores:

$188 + 350 + 232 + 110 = 880$ pessoas.

04| A

Representamos os conjuntos A, B e C na reta numérica.



Análise das alternativas:

[A] Verdadeira: $(A - B) \cup C = \varnothing \cup C = C$

[B] Falsa: $(A - C) \cap B = A \cap B = A$

[C] Falsa: $(B \cup C) \cap A = \square \cap A = A$

[D] Falsa: $(B \cap C) \cap A = [-5, 0] \cap A = \varnothing$

05| B

O tempo em que as três emissoras apresentam a programação simultaneamente é dado por

$$(13\text{ h }20\text{min} - 11\text{ h }40\text{min}) + (16\text{ h }40\text{min} - 14\text{ h }50\text{min}) = 1\text{ h }40\text{min} + 1\text{ h }50\text{min} = 3\text{ h }30\text{min}.$$

06| B

O resultado pedido é $240 \cdot 3 + 180 \cdot 2 = \text{R\$ } 1.080,00.$

07| A

A tabela de Maria foi a seguinte:

F	A	T	E	C	B	D	G	H	I	J	K	L
M	N	O	P	Q	R	S	U	V	W	X	Y	Z

Logo, a mensagem que Maria escreveu para João é:

A G A Q N	E N B P	S P	N E B P A S P B	
N U N C A	P A R E	D E	A P R E N D E R	

08| C

Sabendo que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$ para quaisquer x e y inteiros, podemos concluir que $x^2 + y^2 = 3$ se, e somente se, $(x^2, y^2) \in \{(0, 3), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$. Porém, os inteiros 2 e 3 não são quadrados de nenhum inteiro e, assim, a equação $x^2 + y^2 = 3$ não possui solução com x e y inteiros.

09| C

[A] Correta. Os números inteiros são todos naturais mais seus simétricos negativos. Logo, todo natural também é inteiro

[B] Correta. Todo numero racional é obtido através da divisão de dois números inteiros. Logo, sabendo que todo natural é inteiro, todo natural é também racional.

[C] Incorreta. Número irracional é todo número que não pode obtido a partir da divisão de dois inteiros, logo, um natural nunca será um irracional.

[D] Correta. Números reais é a junção de todos os números racionais e irracionais, logo, todo natural é real, visto que os naturais são racionais.

[E] Correta. Números reais é a junção de todos os números racionais e irracionais.

10| B

O resultado é dado por $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}.$

11| A

[I] Verdadeira. $a < b\ (\cdot(-1)) \Rightarrow -a > -b$

[II] Falsa. $3 > -2 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{-2}$

[III] Falsa. $-5 < 2 \Rightarrow (-5)^2 > 2^2$

12| A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\ldots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1\ldots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1\ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1\ldots & 1 \\ .1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ , & . & . & . & . & . \\ , & . & . & . & \ldots. & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\ldots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ , & . & . & . & . & . \\ , & . & . & . & \ldots. & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2(n-1) \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot\ \ldots 2 \cdot (n-1) = \prod_{n=1}^{n-1} 2n$$

13| A

Tem-se que

$$\begin{vmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-4) + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow t(t-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1.$$

Portanto, como $1 > 0,$ segue que a resposta é $1.$

14| B

Se M é simétrica, então $x = 2,$ $z = 3$ e $w = y.$ Ademais, como o determinante de M é igual a $8,$ temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & y \\ 3 & y & 1 \end{vmatrix} = 8 \Leftrightarrow 1 + 6y + 6y - 9 - y^2 - 4 = 8$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 12y + 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = 10.$$

Em consequência, a soma $x + y + z + w$ pode ser $5 + 4 = 9$ ou $5 + 20 = 25.$

15| A

Pelo Teorema de Binet, $\det(AB) = \det A \cdot \det B,$ ou seja,

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\det(AB) = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1)$$
$$\det(AB) = -2 \cdot (-2)$$
$$\det(AB) = 4$$

16| D

Note que um dos lados da caixa a ser construída mede $12 - 2x,$ já que foi retirado x de cada extremidade. O segundo lado mede $8 - 2x,$ já que foi retirado x de cada extremidade. Observe também que, após o corte, a caixa terá altura $x.$

Sabendo que o volume da caixa é dado pelo produto entre área da base (A_b) pela altura $(h),$ temos:

$$A_b = (12 - 2x) \cdot (8 - 2x)$$
$$A_b = 96 - 24x - 16x + 4x^2$$
$$A_b = 4x^2 - 40x + 96$$

Calculando o volume temos:

$$V = (A_b).(h)$$
$$V = (4x^2 - 40x + 96) \cdot x$$
$$V = 4x^3 - 40x^2 + 96x$$