Capítulo 7
Sistemas lineares e determinantes

Para pensar

1. Tomando a, b e c como quantidade de ingressos vendidos dos setores A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 30.000 \\ 100a + 80b + 60c = 2.000.000 \Rightarrow \\ a = 2b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 4.000$, $b = 2.000$ e $c = 24.000$

Portanto, foram vendidos 24.000 ingressos para o setor C.

2. O valor dos ingressos pedido pode ser obtido por:

$4.000 \cdot 100,00 + 2.000 \cdot 80,00 = 560.000,00$

Logo, o valor arrecadado com a venda dos ingressos dos setores A e B é R$ 560.000,00.

Exercícios propostos

1. a) Para $x = 3$, temos: $3 \cdot 3 - 2y = 20 \Rightarrow y = -\frac{11}{2}$

b) Para $x = -7$, temos: $3 \cdot (-7) - 2y = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{41}{2}$

c) sim

d) infinitos

2. a) V, pois $-3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9$.

b) F, pois $2 \cdot 0 + 3 - (-2) = 5 \neq 1$.

c) V, pois $0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0$.

d) V, pois para cada valor atribuído a x obtemos y tal que o par (x, y) é solução da equação $x + 2y = 5$.

e) V, pois para qualquer valor inteiro atribuído a y obtemos um valor inteiro para x.

f) F, pois para quaisquer valores inteiros de x e y a soma $x + 2y$ é um número inteiro.

3. $(p, 2q, p + q)$ não é solução, pois

$2 \cdot p + 3 \cdot 2 \cdot q - (p + q) = p + 5q$

$(2p, p - q, q)$ não é solução, pois

$2 \cdot 2 \cdot p + 3 \cdot (p - q) - q = 7p - 4q$

$(p, q, 2p + 3q)$ é solução, pois $2 \cdot p + 3 \cdot q - (2p + 3q) = 0$

$(2p + q, p, 3q)$ não é solução, pois

$2 \cdot (2p + q) + 3 \cdot p - 3q = 7p - q$

$(2p - q, p, 3q)$ não é solução, pois

$2 \cdot (2p - q) + 3 \cdot p - 3q = 7p - 5q$

Alternativa **c**.

4. Resposta possível: Uma equação linear homogênea nas variáveis x, y e z é da forma $ax + by + cz = 0$, em que a, b e c são números reais. Para que o terno $(2, 4, -3)$ seja solução dessa equação, devemos ter:

$a \cdot 2 + b \cdot 4 + c \cdot (-3) = 0$

Atribuindo valores arbitrários aos coeficientes a e b, obtemos o valor de c; por exemplo, para $a = 3$ e $b = 6$, temos:

$3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + c \cdot (-3) = 0 \Rightarrow c = 10$

Assim, uma equação linear nas variáveis x, y e z que tem o terno ordenado $(2, 4, -3)$ como solução é $3x + 6y + 10z = 0$.

5. a) $5x + 10y + 20z = 100$

b) Resposta possível: (2, 1, 4), (4, 2, 3) e (6, 1, 3)

6. Indicando por E e C a massa de cada esfera e de cada cubo, respectivamente, temos:

$3E + 2C = 2E + 4C \Rightarrow E = 2C$

Logo, a massa de cada esfera é o dobro da massa de cada cubo.

Alternativa **a**.

7. Indicando por h e m os números de homens e de mulheres dessa comissão, respectivamente, temos:

$3h = 2m + 5 \Rightarrow h = \frac{2m + 5}{3}$

Como h e m devem ser números naturais, temos que o menor valor de h é obtido para $m = 2$, com o que obtemos:

$h = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} \Rightarrow h = 3$

Logo, 3 é o menor número possível de homens dessa comissão.

8. a) $2x + 4y + 4z = 20$, que é equivalente a $x = 10 - 2y - 2z$

b) Como x, y e z são números naturais não nulos, atribuímos a y e z valores naturais de modo a obter valores naturais não nulos para x. Assim, temos as possibilidades:

Número x de lápis pretos	Número y de lápis azuis	Número z de lápis vermelhos
6	1	1
4	1	2
2	1	3
4	2	1
2	2	2
2	3	1

c) Observamos na tabela construída no item **b** que o maior número possível de lápis azuis que o desenhista pode comprar é 3.

9. (8, 1, 0) não é solução, pois: $\begin{cases} 8 + 1 + 2 \cdot 0 = 9 \\ 8 + 2 \cdot 1 + 0 = 10 \neq 8 \\ 2 \cdot 8 + 1 + 0 = 17 \neq 7 \end{cases}$

(10, −1, 0) não é solução, pois: $\begin{cases} 10 - 1 + 2 \cdot 0 = 9 \\ 10 + 2 \cdot (-1) + 0 = 8 \\ 2 \cdot 10 - 1 + 0 = 19 \neq 7 \end{cases}$

(1, 2, 3) é solução, pois: $\begin{cases} 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ 1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8 \\ 2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7 \end{cases}$

(9, 0, 0) não é solução, pois: $\begin{cases} 9 + 0 + 2 \cdot 0 = 9 \\ 9 + 2 \cdot 0 + 0 = 9 \neq 8 \\ 2 \cdot 9 + 0 + 0 = 18 \neq 7 \end{cases}$

(1, 1, 1) não é solução, pois: $\begin{cases} 1 + 1 + 2 \cdot 1 = 4 \neq 9 \\ 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4 \neq 8 \\ 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4 \neq 7 \end{cases}$

Alternativa **c**.

10. $(-3, 2, 0)$ é solução, pois: $\begin{cases} -3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 1 \\ -3 + 3 \cdot 2 + 0 = 3 \end{cases}$

$(-7, 3, 1)$ é solução, pois: $\begin{cases} -7 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1 \\ -7 + 3 \cdot 3 + 1 = 3 \end{cases}$

$(-11, 4, 2)$ é solução, pois: $\begin{cases} -11 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 1 \\ -11 + 3 \cdot 4 + 2 = 3 \end{cases}$

$(1, 1, -1)$ é solução, pois: $\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 \\ 1 + 3 \cdot 1 - 1 = 3 \end{cases}$

$(3, -1, 0)$ não é solução, pois: $\begin{cases} 3 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1 \\ 3 + 3 \cdot (-1) + 0 = 0 \neq 3 \end{cases}$

Alternativa **e**.

11. a) Para que o terno $(k, k + 2, 2)$ seja solução do sistema, devemos ter:

$$\begin{cases} k + k + 2 + 3 \cdot 2 = 3 \\ 2k + 3(k + 2) - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{5}{2} \\ k = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Note, portanto, que, para que o terno $(k, k + 2, 2)$ seja solução da primeira equação do sistema, devemos ter $k = -\frac{5}{2}$ e, para que o terno seja solução da segunda equação, devemos ter $k = -\frac{3}{5}$. Logo, não existe um valor de k para que o terno seja solução das duas equações simultaneamente; portanto, não existe um valor de k para que o terno seja solução do sistema.

b) Para que o terno $(8 - 10p, 7p - 5, p)$ seja solução do sistema, devemos ter:

$$\begin{cases} 8 - 10p + 7p - 5 + 3p = 3 \\ 2(8 - 10p) + 3(7p - 5) - p = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Note que qualquer valor atribuído a p satisfaz as duas equações simultaneamente, pois elas independem de p. Assim, por exemplo, para $p = 5$, o terno ordenado $(8 - 10p, 7p - 5, p)$ é uma solução do sistema.

12. a) SPD, pois o sistema tem apenas uma solução, que é o par $(3, 1)$.

b) SI, pois não é possível obter dois resultados diferentes para uma mesma adição.

c) SPI, pois o sistema tem mais de uma solução; algumas delas são $(1, 3)$, $(2, 2)$ e $(3, 1)$.

d) SI, pois a equação $0x + 0y = 3$ não tem solução.

13. a) Para qualquer valor de k, com $k \neq 0$, temos $y = \frac{3}{k}$ e $x = \frac{5}{2} - \frac{9}{2k}$. Logo, para qualquer valor real não nulo de k o sistema é possível e determinado (SPD).

b) Para $k = 0$, qualquer par de números reais da forma $(x, x - 4)$ é solução do sistema.
Assim, para $k = 0$ o sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) Para $k = 0$, a segunda equação é impossível; portanto, o sistema é impossível (SI).

14. a) O sistema linear é homogêneo para $3k - 2 = 0$, ou seja, $k = \frac{2}{3}$.

b) Para $k = \frac{2}{3}$, temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{(I)} \\ 6x - 2y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Como as equações que compõem o sistema são equivalentes — multiplicando por 2 ambos os membros da primeira equação obtemos a segunda —, temos que toda solução de uma dessas equações também é solução da outra. Logo, o sistema é possível e indeterminado, pois tem infinitas soluções.

15. Vamos separar essa demonstração em dois casos:

I) $k \neq 0$

Se o par ordenado (α, β) é solução do sistema homogêneo $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$, então devemos ter:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta = 0 \\ c\alpha + d\beta = 0 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros de cada uma dessas equações pela constante não nula k, as igualdades se mantêm, isto é:

$$\begin{cases} k(a\alpha + b\beta) = k \cdot 0 \\ k(c\alpha + d\beta) = k \cdot 0 \end{cases}$$

Como essas últimas igualdades são equivalentes a $\begin{cases} a(k\alpha) + b(k\beta) = 0 \\ c(k\alpha) + d(k\beta) = 0 \end{cases}$, concluímos que o par $(k\alpha, k\beta)$ também é solução do sistema para qualquer valor não nulo da constante k.

II) $k = 0$

Se (α, β) é solução do sistema homogêneo e $k = 0$, então $(k\alpha, k\beta) = (0, 0)$ também é solução do sistema, pois todo sistema homogêneo admite a solução nula (trivial).

Por I e II concluímos que, se (α, β) é solução do sistema homogêneo, então $(k\alpha, k\beta)$ também é solução, para qualquer valor real de k.

16. No exercício anterior, vimos que, se o par ordenado (α, β) é solução de um sistema homogêneo em duas variáveis, então o par $(k\alpha, k\beta)$ também é solução do sistema. Logo, ele possui infinitas soluções, e dentre elas, tomando $k = 2$, temos o par $(6, 4)$ como solução do sistema.
Alternativa **c**.

17. a) SPD, pois é um sistema linear escalonado do 1º tipo:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 & \text{(I)} \\ \quad\;\; 4y + 5z = 19 & \text{(II)} \\ \qquad\quad\;\; 2z = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), temos: $z = 3$
Substituindo z por 3 em (II):
$4y + 5 \cdot 3 = 19 \Rightarrow y = 1$
Substituindo z por 3 e y por 1 em (I):
$x + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 \Rightarrow x = 2$
$\therefore S = \{(2, 1, 3)\}$

b) SPI, pois é um sistema linear escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 & \text{(I)} \\ y + 3z = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $y = 1 - 3z$
Substituindo y por $1 - 3z$ em (I):
$x - 5(1 - 3z) + 3z = 2 \Rightarrow x = 7 - 18z$
$\therefore S = \{(7 - 18z, 1 - 3z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

c) SPI, pois é um sistema escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 & \text{(I)} \\ 3z = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $z = 2$
Substituindo z por 2 em (I):

$$2x - y + 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{y - 7}{2}$$

$$\therefore S = \left\{\left(\frac{y - 7}{2}, y, 2\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\}$$

d) SPD, pois é um sistema linear escalonado do 1º tipo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{(I)} \\ 5y + z = 0 & \text{(II)} \\ z = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (III) em (II), obtemos:
$5y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$
Substituindo y e z por 0 na equação (I), obtemos:
$x - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$
Logo, $S = \{(0, 0, 0)\}$.

e) SPI, pois é um sistema linear escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 0 & \text{(I)} \\ y - z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $y = z$
Substituindo y por z na equação (I), obtemos:
$-x + 3z + z = 0 \Rightarrow x = 4z$
Logo, $S = \{(4z, z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$.

18. Indicando por x, y e z os totais de espectadores que entraram gratuitamente, que pagaram R$ 8,00 por ingresso e que pagaram R$ 16,00 por ingresso, respectivamente, temos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = 300 \\ 0x + 8y + 16z = 3.440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 300 \\ 0x + y + 2z = 430 \end{cases}$$

do qual obtemos: $y = 430 - 2z$ e $x = z - 130$. Como x, y e z devem ser números naturais não nulos, concluímos que o máximo valor possível de z é 214 e, consequentemente, o maior valor possível de x é 84. Logo, o número máximo possível de pessoas não pagantes que estiveram nessa sessão é 84.

19.
$$\begin{cases} x + 2y - t + 3z = 2 \\ y + t - 3z = 1 \end{cases}$$

$y = 1 - t + 3z \Rightarrow x + 2(1 - t + 3z) - t + 3z = 2$
$\therefore x = 3t - 9z$
Logo, o conjunto solução do sistema é
$S = \{(t, 3t - 9z, 1 - t + 3z, z), \text{ com } t, z \in \mathbb{R}\}$.

20. Para que os sistemas A e A′ sejam equivalentes, seus conjuntos soluções devem ser iguais. Como o conjunto solução de A é $S_A = \{(2, 1)\}$, temos:
$x + 2y = k \Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 = k = 4$
Assim, para $k = 4$, os sistemas A e A′ são equivalentes.

21. a)
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \quad (-2)\ (-3) \\ 2x + 5y - 5z = 7 \\ 3x + 7y - 6z = 12 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + z = 5 \quad (-1) \\ y + 3z = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(1, 3, 2)\}$
Classificação: SPD

b)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \quad (-3)\ (-4) \\ 3x + 8y - 2z = 7 \\ 4x + 10y - 3z = 9 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 4 \quad (-1) \\ 2y + z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

$\therefore S = \varnothing$
Classificação: SI

c)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \quad (-5)\ (-3) \\ 5x + 6y + 14z = 15 \\ 3x + 4y + 8z = 11 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - z = 5 \quad (-1) \\ y - z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(-3 - 4z, 5 + z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$
Classificação: SPI

d)
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \quad (-2)\ (-4) \\ 4x + 3y - 2z = 2 \\ 8x + 7y + 10z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 8z = 0 \quad (-1) \\ -y - 2z = -3 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 8z = 0 \\ 6z = -3 \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{\left(-\frac{11}{4}, 4, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Classificação: SPD

e)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \quad (-3)\ (-5) \\ 3x + 5y = 1 \\ 5x + 9y = 7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y = -8 \\ -y = -8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y = -8 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(-13, 8)\}$
Classificação: SPD

f) $\begin{cases}3x + 5y = 2\\ x + 2y = 5\\ 2x + 3y = 1\end{cases} \sim \begin{cases}x + 2y = 5 & (-3)\ (-2)\\ 3x + 5y = 2\\ 2x + 3y = 1\end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases}x + 2y = 5\\ -y = -13\\ -y = -9\end{cases}$

$\therefore\ S = \varnothing$

Classificação: SI

g) $\begin{cases}x + 3y = 0 & (-2)\\ 2x + y = 0\end{cases} \sim \begin{cases}x + 3y = 0\\ -5y = 0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x = 0$ e $y = 0$

$\therefore\ S = \{(0, 0)\}$

Classificação: SPD

h) $\begin{cases}x + 4y - z = 0 & (-3)\ (1)\\ 3x + y + z = 0\\ -x - 15y + 5z = 0\end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases}x + 4y - z = 0\\ -11y + 4z = 0\end{cases}$

Resolvendo, em função da variável livre z, obtemos $y = \dfrac{4z}{11}$ e $x = -\dfrac{5z}{11}$.

$\therefore\ S = \left\{\left(-\dfrac{5z}{11}, \dfrac{4z}{11}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

i) $\begin{cases}2x + y = 0\\ x + 2y = 0\\ x + y = 0 & (-1)\ (-2)\end{cases} \sim \begin{cases}-y = 0\\ y = 0\\ x + y = 0\end{cases}$

$\therefore\ x = 0$ e $y = 0$

$\therefore\ S = \{(0, 0)\}$

Classificação: SPD

j) $\begin{cases}x + 3y - 2z = 0 & (-3)\\ 3x + y = 0\end{cases} \sim \begin{cases}x + 3y - 2z = 0\\ -8y + 6z = 0\end{cases}$

Resolvendo, em função da variável livre z, obtemos $y = \dfrac{3z}{4}$ e $x = -\dfrac{z}{4}$.

$\therefore\ S = \left\{\left(-\dfrac{z}{4}, \dfrac{3z}{4}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

22. Indicando, respectivamente, por u, p e b os números de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas pelos atletas desse país, temos:

$$\begin{cases}u + p + b = 36\\ u = \dfrac{p + b}{2}\\ p = 2b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u + p + b = 36\\ 2u - p - b = 0\\ p - 2b = 0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluímos que $u = 12$, $p = 16$ e $b = 8$, isto é, os atletas desse país conquistaram 12 medalhas de ouro, 16 de prata e 8 de bronze.

23. Indicando por a, b e c as vazões, em litro por minuto, dos motores A, B e C, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases}a + b + c = 310\\ a + c = 200\\ b + c = 195\end{cases}$$

a partir do qual concluímos que $a = 115$, $b = 110$ e $c = 85$. Logo, as vazões produzidas pelos motores A, B e C são 115 L/min, 110 L/min e 85 L/min, respectivamente.

24. Sendo, respectivamente, x, y e z os preços, em real, por quilograma de arroz, feijão e açúcar, temos:

$$\begin{cases}2x + 3y + z = 21{,}70\\ 4x + 2y + 6z = 30{,}20\\ x + y + z = \alpha\end{cases} \sim \begin{cases}x + y + z = \alpha\\ 2x + 3y + z = 21{,}70\\ 4x + 2y + 6z = 30{,}20\end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases}x + y + z = \alpha\\ 0x + y - z = 21{,}70 - 2\alpha\\ 0x - 2y + 2z = 30{,}20 - 4\alpha\end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases}x + y + z = \alpha\\ 0x + y - z = 21{,}70 - 2\alpha\\ 0x + 0y + 0z = 2(21{,}70 - 2\alpha) + 30{,}20 - 4\alpha\end{cases}$$

Para que o sistema seja possível, devemos ter:

$2(21{,}70 - 2\alpha) + 30{,}20 - 4\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8\alpha + 73{,}60 = 0$

$\therefore\ \alpha = 9{,}20$

Logo, Neuza gastou R$ 9,20.

Alternativa **d**.

25. Sendo x, y e z as áreas dos três terrenos, em ordem decrescente, temos:

$$\begin{cases}x + y + z = 60\\ y = 2x - 45\\ x - z = 2y + 5\end{cases} \sim \begin{cases}x + y + z = 60\\ 2x - y = 45\\ x - 2y - z = 5\end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases}x + y + z = 60\\ -3y - 2z = -75\\ 3y + 2z = 55\end{cases}$$

equações incompatíveis

Como o sistema é impossível, concluímos que há erro nas informações.

26. a) Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases}y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3}\\ y = -4x + 6\end{cases}$$

Observando que as duas equações representam funções afins com coeficientes de x diferentes, concluímos que as retas representadas por essas funções são concorrentes.

b) Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases}y = -\dfrac{3x}{5} + \dfrac{1}{5}\\ y = -\dfrac{3x}{5} + \dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Observando que as duas equações representam funções afins com coeficientes iguais de x e termos independentes iguais, concluímos que as retas representadas por essas funções são paralelas coincidentes.

c) Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4} \\ y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{12} \end{cases}$$

Observando que as duas equações representam funções afins com coeficientes iguais de x e termos independentes diferentes, concluímos que as retas representadas por essas funções são paralelas distintas.

27. a) F, pois, para $a = 4$ e $b = 8$, obtemos o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$, que é impossível, uma vez que é equivalente ao sistema escalonado do terceiro tipo $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = -2 \end{cases}$

b) V, pois, para $a = 5$, obtemos o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 6y = b \end{cases}$, que é possível e determinado, uma vez que é equivalente ao sistema escalonado do primeiro tipo $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 3y = 25 - 2b \end{cases}$

c) V, pois, para $a = 4$ e $b = 10$, obtemos o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$, que é possível e indeterminado, uma vez que é equivalente ao sistema escalonado do segundo tipo $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

d) V, pois, para $a = 4$ e $b = 12$, obtemos o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$, que é impossível, uma vez que é equivalente ao sistema escalonado do terceiro tipo $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$

e) V, pois, para $a = 0$ e $b = 0$, obtemos o sistema escalonado do primeiro tipo $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 6y = 0 \end{cases}$

f) F, pois, para $a = 2$ e $b = 5$, obtemos o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$, que é possível e determinado, uma vez que é equivalente ao sistema escalonado do primeiro tipo $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 3y = 0 \end{cases}$

28. a) A reta r passa pelos pontos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$ e sua equação é da forma $y = ax + b$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-1) + b \\ 1 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 1$$

Portanto, a equação da reta r é $y = x + 1$.

A reta s passa pelos pontos $(2, 0)$ e $(0, 4)$ e sua equação é da forma $y = cx + d$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 0 = c \cdot 2 + d \\ 4 = c \cdot 0 + d \end{cases} \Rightarrow c = -2 \text{ e } d = 4$$

Portanto, a equação da reta s é $y = -2x + 4$.

b) Como as retas r e s são concorrentes, temos que o sistema formado por suas equações é possível e determinado (SPD).

c) Resolvendo o sistema formado pelas equações de r e s, temos:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = -2x + 4$$

$\therefore x = 1$

Substituindo x por 1 em qualquer uma das equações do sistema, por exemplo, na primeira, obtemos o valor de y:

$y = 1 + 1 = 2$

Assim, concluímos:

$r \cap s = (1, 2)$

29. a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 9 + 8 - 6 - 6 + 2 = 6$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 40 - 16 - 12 = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 5y - z = 1 \\ -14y + 4z = 1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 1 - 3 + 14 = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x - 7y + 3z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 5y - 2z = -3 \\ 0z = 2 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível (SI).

e) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -13$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 14 - 8 = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

30. Para que o sistema seja possível e determinado, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema deve ser não nulo; então:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -k - 6 \neq 0$$

$\therefore k \neq -6$

Logo, para $k \neq -6$, o sistema é SPD.

31. Para que o sistema seja compatível (possível) e determinado, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{1}{4}$$

Logo, o sistema é compatível e determinado para qualquer valor de k, com $k \neq \frac{1}{4}$.

32. Para que o sistema seja possível e determinado, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & k-1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 2 \text{ e } k \neq -3$$

Assim, o sistema é possível e determinado para qualquer valor de k, com $k \neq 2$ e $k \neq -3$.

Para $k = 2$, temos o sistema: $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$, que é equivalente ao sistema escalonado $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + y + 4z = 1 \end{cases}$

Como esse sistema escalonado é do segundo tipo, concluímos que, para $k = 2$, o sistema é possível e indeterminado.

Para $k = -3$, temos o sistema:

$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y - 4z = 4 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$, que é equivalente ao sistema escalonado $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases}$

Como esse sistema escalonado é do terceiro tipo, concluímos que, para $k = -3$, o sistema é impossível.

Resumindo:

a) o sistema é possível e determinado para qualquer valor de k, com $k \neq 2$ e $k \neq -3$.

b) o sistema é possível e indeterminado para $k = 2$.

c) o sistema é impossível para $k = -3$.

33. $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 2k$

O sistema homogêneo admite somente a solução trivial se, e somente se, é possível e determinado, ou seja, $D \neq 0$.

$10 - 2k \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$

Logo, o sistema admite apenas a solução trivial para qualquer valor real k, com $k \neq 5$.

34. $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = -52 - 13a$

O sistema homogêneo admite soluções além da trivial se, e somente se, é possível e indeterminado, ou seja, $D = 0$.

$-52 - 13a = 0 \Rightarrow a = -4$

Logo, o sistema admite soluções além da trivial para $a = -4$.

35. a) $\begin{vmatrix} x & 6 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x + 1) - 1 \cdot 6 = 0$

$\therefore x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$

$S = \{-3, 2\}$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & -1 & x \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow -x + 3x - x^2 - 1 = -1$

$\therefore x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$S = \{0, 2\}$

c) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & \frac{1}{4} \\ -2 & \cos x \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{sen } x \cos x + \frac{1}{2} = 1$

$\therefore \text{sen } x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x = 1$

$\therefore \text{sen } 2x = 1$

Fazendo a mudança de variável $2x = \alpha$, temos:

$\text{sen } \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Retornando à variável original, concluímos:

$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

36. a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ (SPD)

Logo, as retas r e s são concorrentes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = -3 \\ 0x + 0y = -2 \end{cases}$ (SI)

Logo, as retas são paralelas distintas.

c) As equações podem ser representadas por: (r) $4x - 2y = 6$ e (s) $2x - y = 3$. Assim, temos:

$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema:

$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

Logo, as retas r e s são coincidentes.

37. a) Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3k$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$6 - 3k \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Portanto: $k \neq 2 \Rightarrow$ SPD

Para $k = 2$, temos:

$\begin{cases} x + 3y = 1 & \times(-2) \\ 2x + 6y = 2 & + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim x + 3y = 1$

Portanto: $k = 2 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $k \neq 2 \Rightarrow$ SPD; $k = 2 \Rightarrow$ SPI

b) Seja: $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 5 + k$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$5 + k \neq 0 \Rightarrow k \neq -5$

Portanto: $k \neq -5 \Rightarrow$ SPD

Para $k = -5$, temos:

$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -5x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$

Portanto: $k = -5 \Rightarrow$ SI

Resumindo: $k \neq -5 \Rightarrow$ SPD; $k = -5 \Rightarrow$ SI

c) $D = \begin{vmatrix} k & 5 \\ 5 & k \end{vmatrix} = k^2 - 25$

Como o sistema é homogêneo, temos $D \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:

$k^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $k^2 - 25 = 0 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} k \neq 5 \text{ e } k \neq -5 \Rightarrow \text{SPD} \\ k = 5 \text{ ou } k = -5 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

38. a) Seja: $D = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3m + 3$

Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$3m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

Portanto: $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD

Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 1 & \times\ 2 \quad 5 \\ 2x + y + z = 2 & + \\ 5x + 2y + 5z = 7 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ -y + 5z = 4 & \times\ -3 \\ -3y + 15z = 12 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ -y + 5z = 4 \end{cases}$$

Portanto: $m = -1 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD; $m = -1 \Rightarrow$ SPI

b) Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 3 & 1 & 3 \\ m & -2 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$

Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$-m^2 + 3m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ e $m \neq 1$

Portanto: $m \neq 2$ e $m \neq 1 \Rightarrow$ SPD

Para $m = 2$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 & \times\ -3 \quad -2 \\ 3x + y + 3z = 1 & + \\ 2x - 2y + z = 1 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -8y - 3z = -2 \\ -8y - 3z = -1 \end{cases}$$ equações incompatíveis

Portanto: $m = 2 \Rightarrow$ SI

Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 & \times\ -3 \quad -1 \\ 3x + y + 3z = 1 & + \\ x - 2y + z = 1 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -8y = -2 \\ -5y = 0 \end{cases}$$ equações incompatíveis

Portanto: $m = 1 \Rightarrow$ SI

Resumindo: $m \neq 2$ e $m \neq 1 \Rightarrow$ SPD; $m = 2$ ou $m = 1 \Rightarrow$ SI

c) Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & m & m \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 15m - 30$

Como o sistema é homogêneo, temos $D \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:

$15m - 30 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $15m - 30 = 0 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} m \neq 2 \Rightarrow \text{SPD} \\ m = 2 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

39. a) Seja: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & 9 \end{vmatrix} = 18 - 3m$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$18 - 3m \neq 0 \Rightarrow m \neq 6$

Portanto: $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD

Para $m = 6$, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \times\ -3 \\ 6x + 9y = n & + \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = n - 3 \end{cases}$$

Logo: $n - 3 \neq 0 \Rightarrow$ SI

$n - 3 = 0 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} m \neq 6 \Rightarrow \text{SPD} \\ m = 6 \text{ e } n \neq 3 \Rightarrow \text{SI} \\ m = 6 \text{ e } n = 3 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

b) Seja: $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$-m^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ e $m \neq -1$

- Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x - y = 1 & \times\ -1 \\ x - y = n & + \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = 1 \\ 0x + 0y = n - 1 \end{cases}$$

Logo: $n - 1 \neq 0 \Rightarrow$ SI

$n - 1 = 0 \Rightarrow$ SPI

- Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x - y = 1 & \times\ 1 \\ x + y = n & + \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y = 1 \\ 0x + 0y = n + 1 \end{cases}$$

Logo: $n + 1 \neq 0 \Rightarrow$ SI

$n + 1 = 0 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} m \neq 1 \text{ e } m \neq -1 \Rightarrow \text{SPD} \\ m = 1 \text{ e } n \neq 1 \Rightarrow \text{SI} \\ m = 1 \text{ e } n = 1 \Rightarrow \text{SPI} \\ m = -1 \text{ e } n \neq -1 \Rightarrow \text{SI} \\ m = -1 \text{ e } n = -1 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

40. A reta r passa pelos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 4)$ e sua equação é da forma $y = ax + b$. Assim, para obter os valores de a e b, basta resolver o sistema $\begin{cases} 0 = a \cdot (-2) + b \\ 4 = a \cdot 0 + b \end{cases}$, do qual obtemos $a = 2$ e $b = 4$.

Assim, a equação da reta r é $y = 2x + 4$.

A discussão das possíveis posições relativas entre as retas r e s pode ser feita através da discussão do sistema:

$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = kx + 1 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ kx - y = -1 \end{cases}$.

As retas r e s serão concorrentes se esse sistema for possível e determinado. Para que isso ocorra, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema deve ser diferente de zero, isto é:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ k & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Para $k = 2$, temos que $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$, que é equivalente ao sistema escalonado $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$.

Como esse sistema é impossível, concluímos que para $k = 2$ as retas r e s são paralelas distintas.

Resumindo:

- Para $k \neq 2$, as retas são concorrentes.
- Para $k = 2$, as retas são paralelas distintas.

41. Indicando por x, y e z os preços de cada pacote de sulfite, de cada cartucho e de cada caneta, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 3y + 8z = 218 \\ 20x + 6y + 14z = 434 \\ 2kx + 3y + kz = 210 \end{cases}$$

Esse sistema deve ser possível, pois os pacotes de sulfite tiveram preços iguais, o mesmo acontecendo com os cartuchos de impressora e com as canetas. Assim, existe um terno ordenado (x, y, z) que satisfaz as três equações do sistema. Vamos obter, inicialmente, os valores de k para que o sistema seja possível e determinado.

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 20 & 6 & 14 \\ 2k & 3 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$$

Assim, o sistema é possível e determinado para $k \neq 5$.

Vejamos a classificação do sistema para $k = 5$:

$$\begin{cases} 10x + 3y + 8z = 218 \\ 20x + 6y + 14z = 434 \\ 10x + 3y + 5z = 210 \end{cases}$$, que é equivalente ao sistema

escalonado $$\begin{cases} 10x + 3y + 8z = 218 \\ 0x + 0y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases}$$

Como esse último sistema é impossível, pois é um sistema escalonado do terceiro tipo, concluímos que k não pode assumir o valor 5.

Alternativa **e**.

42. a) $$\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 2x + 6y + 4z = -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 0x + 0y + (4 - 2m)z = -3 \end{cases}$$

Logo: $4 - 2m \neq 0 \Rightarrow$ SPI

$4 - 2m = 0 \Rightarrow$ SI

$\therefore m \neq 2 \Rightarrow$ SPI; $m = 2 \Rightarrow$ SI

b) $$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + mz = 2m \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 0x + 0y + (m - 4)z = 2m - 8 \end{cases}$$

Logo:

$m - 4 \neq 0 \Rightarrow$ SPI

$m - 4 = 0 \Rightarrow$ SPI (pois $2m - 8$ também será igual a zero)

Assim, temos que o sistema é possível e indeterminado para qualquer valor real de m.

43. a) $$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = a \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 0x - 7y = 7 \\ 0x - 7y = 8 + a \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 0x - 7y = 7 \\ 0x + 0y = 1 + a \end{cases}$$

Logo: $1 + a = 0 \Rightarrow$ SPD

$1 + a \neq 0 \Rightarrow$ SI

$\therefore a = -1 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -1 \Rightarrow$ SI

b) $$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - y = 4 \\ 5x + ay = -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - 13y = -26 \\ 0x + (a - 10)y = -26 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \\ 0x + (a - 10)y = -26 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \\ 0x + 0y = -6 - 2a \end{cases}$$

Logo: $-6 - 2a = 0 \Rightarrow$ SPD

$-6 - 2a \neq 0 \Rightarrow$ SI

$\therefore a = -3 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -3 \Rightarrow$ SI

44. $$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + py - 6z = q \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 0x + (p - 9)y + 0z = q - 12 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $p - 9 \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado
- para $p - 9 = 0$ e $q - 12 = 0$, o sistema é possível e indeterminado
- para $p - 9 = 0$ e $q - 12 \neq 0$, o sistema é impossível

Resumindo:

- Para $p \neq 9$, o sistema é possível e indeterminado
- para $p = 9$ e $q = 12$, o sistema é possível e indeterminado
- Para $p = 9$ e $q \neq 12$, o sistema é impossível

45. Indicando, respectivamente, por x, y e z os preços dos modelos 1, 2 e 3, temos o sistema:

$$\begin{cases} 12x + 10y + 8z = 122 \\ 18x + 15y + 12z = 61k \end{cases}$$, que é equivalente ao sistema escalonado $$\begin{cases} 6x + 5y + 4z = 61 \\ 0x + 0y + 0z = 61k - 183 \end{cases}$$

Esse sistema deve ser possível, pois não houve variação de preço em nenhum dos três modelos de camiseta.

Assim, existe um terno ordenado (x, y, z) que satisfaz as três equações do sistema. Para que esse sistema seja possível, devemos ter:

$61k - 183 = 0 \Rightarrow k = 3$

46. a) $$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 8 = 10$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 40 + 2 + 30 + 4 = 76$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 2A_{21} + 0A_{31} + 2A_{41}$$

Calculando os cofatores A_{11}, A_{21} e A_{41}, temos:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 19 \text{ e}$$

$$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -24$$

Logo: $\det A = -3 + 38 + 0 - 48 = -13$

47. Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo esse determinante pelo teorema de Laplace aplicado à terceira linha, temos:

$$D = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & k & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = 18 + 6k$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$18 + 6k \neq 0 \Rightarrow k \neq -3$

Logo, $k \neq -3 \Rightarrow$ SPD

Para $k = -3$, temos $D = 0$, com o que podemos concluir que o sistema é possível e indeterminado, pois um sistema homogêneo nunca é impossível.

Resumindo: $\begin{cases} k \neq -3 \Rightarrow \text{SPD} \\ k = -3 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

48. a) $6a = 8b = 9c = 12d \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a = 8b \\ 6a = 9c \\ 6a = 12d \\ 9c = 12d \end{cases} \sim \begin{cases} 6a - 8b + 0c + 0d = 0 \\ 6a + 0b - 9c + 0d = 0 \\ 6a + 0b + 0c - 12d = 0 \\ 0a + 0b + 9c - 12d = 0 \end{cases}$$

b) $D = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 9 & -12 \end{vmatrix} = -8A_{12}$, em que:

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \\ 0 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $D = 0$ e, portanto, o sistema é possível e indeterminado.

49. a) Temos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Desenvolvendo o determinante de A pelo teorema de Laplace aplicado à primeira linha, temos:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{D_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{D_1}$$

Desenvolvendo D_1 pelo teorema de Laplace aplicado à primeira linha, temos:

$$D_1 = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{\Rightarrow}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{\Rightarrow} D_1 = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 60 = 120$$

Logo, $\det A = D_1 = 120$.

50. a) Pela P1, os determinantes de uma matriz quadrada e de sua transposta são iguais.

Logo: $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix} = 4$

b) Pela P3, permutando duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtém-se uma matriz B tal que $\det B = -\det A$.

Logo: $\begin{vmatrix} m & n & p \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -4$

c) Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 8$$

d) Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3m & 3n & 3p \\ 5x & 5y & 5z \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 60$$

e) Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 3a & 6b & 3c \\ m & 2n & p \\ x & 2y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 24$$

f) Aplicando sucessivamente as propriedades P4 e P1, temos:

$$\begin{vmatrix} a & 6m & -x \\ b & 6n & -y \\ c & 6p & -z \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot 4 = -24$$

g) $\begin{vmatrix} c & 5b & a \\ 2p & 10n & 2m \\ z & 5y & x \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} c & b & a \\ p & n & m \\ z & y & x \end{vmatrix} =$

$$= 10 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10 \cdot (-1) \cdot 4 = -40$$

51. a) Pela P2, se os elementos de uma fila são nulos, o determinante da matriz quadrada é nulo; logo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

b) Pela P5, se uma matriz quadrada tem duas filas paralelas iguais, seu determinante é nulo; logo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

c) Pela P6, se uma matriz quadrada tem duas filas paralelas múltiplas, seu determinante é nulo; logo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 & (2 \cdot 2) \\ 0 & 3 & 1 & (2 \cdot 3) \\ 1 & 4 & 2 & (2 \cdot 4) \\ 2 & 5 & 1 & (2 \cdot 5) \end{vmatrix} = 0$$

d) Pela P7, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal; logo:

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & 9 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 40$$

e) Pela P7, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 1 & 0 & 0 \\ 47 & 75 & 2 & 0 \\ 64 & 78 & 93 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

52. Pela P7, temos: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & x^2 - 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & x + 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2 - 1)(x + 2)(x - 4) = 0$

$\therefore x^2 - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$\therefore x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = 4$

Logo, $S = \{-2, -1, 1, 4\}$.

53. Efetuando a multiplicação das matrizes e igualando os elementos correspondentes, obtemos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 3r - 2s + 0t + u = 0 \\ 0r + (p + 1)s + 2t + 5u = 0 \\ 0r + 0s + (p^2 - 4)t + u = 0 \\ 0r + 0s + 0t + (p - 3)u = 0 \end{cases}$$

Esse sistema é possível e indeterminado, pois tem infinitas soluções (r, s, t, u); logo, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & p + 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & p^2 - 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p - 3 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a propriedade P7 dos determinantes (matriz triangular), concluímos:

$3(p + 1)(p^2 - 4)(p - 3) = 0 \Rightarrow p = -1$ ou $p = 2$ ou $p = -2$ ou $p = 3$

54. Pela P3, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Logo, $2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ e, portanto, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$.

55. Pela propriedade apresentada no exercício resolvido 20, temos:

a) $\det (3A) = 3^3 \cdot \det A \Rightarrow \det (3A) = 27 \cdot 5 = 135$

b) $\det (3B) = 36 \Rightarrow 3^n \cdot \det B = 36$

$\therefore 3^n \cdot 4 = 36 \Rightarrow 3^n = 9$

$\therefore n = 2$

c) $\det (3C) = 18 \Rightarrow 3^4 \cdot \det C = 18$

$\therefore 81 \cdot \det C = 18 \Rightarrow \det C = \frac{2}{9}$

56. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 4 & 9 & y \\ 1 & 6 & z \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 + 7 \\ 4 & 9 & 8 + 2 \\ 1 & 6 & 2 + 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 4 & 9 & y \\ 1 & 6 & z \end{vmatrix}$

Portanto, uma das infinitas soluções da equação é o terno ordenado (8, 10, 12).

Alternativa **a**.

57. Aplicando sucessivamente as propriedades P8 e P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & a & 2x + p \\ 1 & y & b & 2y + p \\ 1 & z & c & 2z + p \\ 1 & w & d & 2w + p \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & a & 2x \\ 1 & y & b & 2y \\ 1 & z & c & 2z \\ 1 & w & d & 2w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & a & p \\ 1 & y & b & p \\ 1 & z & c & p \\ 1 & w & d & p \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a & x \\ 1 & y & b & y \\ 1 & z & c & z \\ 1 & w & d & w \end{vmatrix} + p \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a & 1 \\ 1 & y & b & 1 \\ 1 & z & c & 1 \\ 1 & w & d & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 0 + p \cdot 0 = 0$

58. a) $A + B = \begin{bmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 3 \\ c & f & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & d & 4 \\ b & e & 6 \\ c & f & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2d & 5 \\ 2b & 2e & 9 \\ 2c & 2f & 7 \end{bmatrix}$

b) $\det (A + B) = \begin{vmatrix} 2a & 2d & 5 \\ 2b & 2e & 9 \\ 2c & 2f & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & d & 5 \\ b & e & 9 \\ c & f & 7 \end{vmatrix}$

Pela propriedade P8 dos determinates, temos:

$\det (A + B) = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & d & 5 \\ b & e & 9 \\ c & f & 7 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \left\{ \underbrace{\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 3 \\ c & f & 2 \end{vmatrix}}_{\det A} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & d & 4 \\ b & e & 6 \\ c & f & 5 \end{vmatrix}}_{\det B} \right\} =$$

$= 2 \cdot 2 \cdot \{7 + (-2)\} = 20$

59. a) Resposta possível: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 14 & 10 & 20 & 34 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) A segunda linha da matriz A é a seguinte combinação linear da primeira e da terceira linhas: a primeira linha foi multiplicada por 2 e a terceira por 4, adicionando-se as linhas assim obtidas.

c) Pela propriedade P9, temos que det A = 0.

60. a) $(-2) \quad (-3) \quad (-4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 12 & 6 \\ 3 & 8 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^2 \cdot (2 + 2) = 4$

b) $(-1)\quad(-3)\quad(-2)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 14 & 9 & 16 \\ 6 & 20 & 11 & 22 \\ 2 & 6 & 5 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 5 & 8 \\ 0 & 11 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 11 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot (-1)^2 \cdot (240 + 264 + 150 - 120 - 240 - 330) =$
$= 2 \cdot 1 \cdot (-36) = -72$

c) $(-5)\quad(-2)\quad(-3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 23 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^3 \cdot (-4 + 14) = -10$

61. Aplicando o teorema de Jacobi (propriedade P10), temos:

$(-4)\quad(-3)\quad(-2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 8 & 6 \\ 3 & 3 & x & 1 \\ 4 & 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & x-3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a propriedade P7 (matriz triangular), concluímos:
$1(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$
Logo, $S = \{2, 3, 4\}$.

62. Pela propriedade P11 (teorema de Cauchy), temos:
$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0$
Alternativa **b**.

63. Pelas propriedades P7 e P12, temos:

$$\begin{cases} \det A = 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 = -30 & \text{(I)} \\ \det (AB) = \det A \cdot \det B = 30 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:
$-30 \cdot \det B = 30 \Rightarrow \det B = -1$

64. $\det (A^3) = \det (A \cdot A \cdot A)$
Assim, pela propriedade P12, temos:
$\det (A^3) = \det A \cdot \det A \cdot \det A = (\det A)^3$
Logo:
$\det (A^3) = 6 \Rightarrow (\det A)^3 = 6$
$\therefore \det A = \sqrt[3]{6}$

65. Pela propriedade P12, temos:
$\det (A^2) + \det A = 0 \Rightarrow (\det A)^2 + \det A = 0$
$\therefore \det A (\det A + 1) = 0 \Rightarrow \det A = 0$ ou $\det A + 1 = 0$
$\therefore \det A = 0$ ou $\det A = -1$

66. a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 8 - 3 - 8 - 8 = -1$

Como $\det A \neq 0$, concluímos que A é invertível.
Calculando os cofatores dos elementos de A, temos:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 8) = 0$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 1) = 0$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 6) = -2$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$

Logo:

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, concluímos:

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\det A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1$; portanto, B é invertível.

Calculando os cofatores dos elementos de B, temos:

$B_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$B_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$B_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$B_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$B_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$B_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$B_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$B_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$

$B_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

Logo:

$$\text{cof } B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, concluímos:

$$B^{-1} = \frac{\overline{B}}{\det B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

67. A matriz A admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ m & 5 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

Alternativa **b**.

68. **a)** Pela regra de Sarrus, temos que $\det M = \cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$

Como $\det M \neq 0$, temos que existe M^{-1}, a qual podemos obter por meio do teorema $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \cdot \overline{M}$. A matriz dos cofatores de M é:

$$\text{cof } M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz adjunta de M é:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz M^{-1} é:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $MX = Y \Rightarrow M^{-1} \cdot MX = M^{-1} \cdot Y$

$\therefore X = M^{-1} \cdot Y$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \\ 3 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. Temos:

$$3x + 5y = 60 \Rightarrow y = \frac{60 - 3x}{5}$$

Como x e y devem ser números naturais, temos que x deve ser um número natural múltiplo de 5 e menor que 21, para que a fração $\dfrac{60 - 3x}{5}$ represente um número natural. Assim, obtemos as soluções (x, y), com $x, y \subset \mathbb{N}$, dispostas na tabela ao lado.

x	y
0	12
5	9
10	6
15	3
20	0

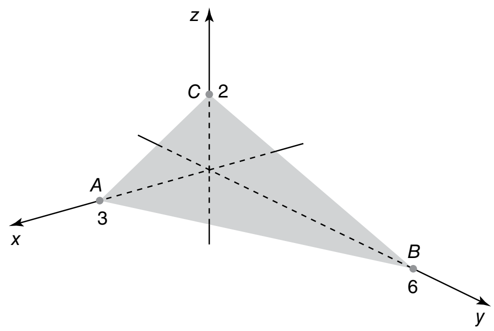
Logo, as soluções pedidas são: (0, 12), (5, 9), (10, 6), (15, 3) e (20, 0)

2. Para $y = 0$ e $z = 0$, temos que $x = 3$. Assim, um ponto desse plano é $A(3, 0, 0)$.

Para $x = 0$ e $z = 0$, temos que $y = 6$. Assim, outro ponto desse plano é $B(0, 6, 0)$.

Para $x = 0$ e $y = 0$, temos que $z = 2$. Assim, outro ponto desse plano é $C(0, 0, 2)$.

Representando o triângulo ABC no espaço cartesiano tridimensional, temos:



O plano que contém esse triângulo é o plano pedido.

3. Se (α_1, α_2) e (β_1, β_2) são soluções distintas da equação linear $ax + by = c$, então:

$$\begin{cases} a\alpha_1 + b\alpha_2 = c \\ a\beta_1 + d\beta_2 = c \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as igualdades acima, obtemos:

$$a(\alpha_1 + \beta_1) + b(\alpha_2 + \beta_2) = 2c$$

Dividindo por 2 ambos os membros dessa última igualdade, chegamos a:

$$a \cdot \frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{2} + b \cdot \frac{(\alpha_2 + \beta_2)}{2} = c$$

Assim, concluímos que $\left(\dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \dfrac{\alpha_2 + \beta_2}{2}\right)$ também é solução dessa equação $ax + by = c$.

4. **a)** (7, 1, 0)

b) (6, 1, 1)

c) (4, 1, 3)

5. Se (x, y, z) é uma PA de razão 1, então $x = y - 1$ e $z = y + 1$. Assim, temos:

$$\begin{cases} y - 1 + 2y + 3(y + 1) = 14 \\ 4(y - 1) + 5y + 6(y + 1) = 32 \\ 7(y - 1) + 8y + 9(y + 1) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 2 \\ 24y = a - 2 \end{cases}$$

Substituindo y por 2 na última equação, concluímos:

$24 \cdot 2 = a - 2 \Rightarrow a = 50$

Alternativa **c**.

6. **a)** V, pois, para $x = 2 - 3k$, $y = k - 1$ e $z = k$, temos:

$$\begin{cases} 2 - 3k + k - 1 + 2k = 1 \\ 3(2 - 3k) + 2(k - 1) + 7k = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

com o que concluímos que as duas equações do sistema são satisfeitas para qualquer valor de k. Portanto, $(2 - 3k, k - 1, k)$ é solução do sistema.

b) V, pois, para $x = p + 3$, $y = p - 4$ e $z = 2p - 5$, temos:

$$\begin{cases} p + 3 + p - 4 + 2(2p - 5) = 1 \\ 3(p + 3) + 2(p - 4) + 7(2p - 5) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ p = 2 \end{cases}$$

Portanto, para $p = 2$ as duas equações do sistema são satisfeitas, e 2 é o único valor de p que as satisfazem.

c) V, pois, para $x = q + 5$, $y = 2q$ e $x = q + 3$, temos:

$$\begin{cases} q + 5 + 2q + 2(q + 3) = 1 \\ 3(q + 5) + 2 \cdot 2q + 7(q + 3) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = -2 \\ q = -\dfrac{16}{7} \end{cases}$$

Portanto, para que o terno $(q + 5, 2q, q + 3)$ seja solução da primeira equação do sistema, devemos ter $q = -2$, e para que o terno seja solução da segunda equação, devemos ter $q = -\dfrac{16}{7}$. Logo, não existe um valor de p para que o terno seja solução das duas equações simultaneamente, portanto, não existe um valor de p para que o terno seja solução do sistema.

d) V, pois, resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 7z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 0y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{\left(x, -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \frac{x}{3}\right)\right\}$$

Substituindo x por um número irracional, por exemplo $\sqrt{2}$, temos:

$$S = \left\{\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$

e) F, pois, para $x = \beta_1$, $y = \beta_2$ e $z = \beta_3$, em que β_1, β_2 e β_3 são números negativos, temos, por exemplo, na primeira equação:

$$\underbrace{\beta_1}_{\text{negativo}} + \underbrace{\beta_2}_{\text{negativo}} + \underbrace{2\beta_3}_{\text{negativo}} = \underbrace{1}_{\text{positivo}}$$

o que é absurdo, visto que a soma de números negativos quaisquer é um número negativo.

7. Para $p \in \mathbb{R}^*$, as duas equações são possíveis e têm uma única solução comum. Logo, o sistema é possível e determinado para qualquer p real não nulo.

8. Para $m = 0$, a segunda equação não tem solução; portanto, para $m = 0$ o sistema é impossível.

9. Para $q = 0$, toda solução da primeira equação também será solução da segunda. Logo, para $q = 0$ o sistema é possível e indeterminado.

10. a) Substituindo x e y por -6 e 4, respectivamente, na segunda equação, temos:

$a \cdot (-6) + 6 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

b) A solução trivial desse sistema é (0, 0).

c) As equações do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$ são equivalentes. Logo, qualquer solução de uma delas é solução da outra. Atribuindo o valor 2 para x, obtemos $y = -\dfrac{4}{3}$, e atribuindo o valor 3 para x obtemos $y = -2$. Assim, duas outras soluções são $\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ e $(3, -2)$.

11. a) $\begin{cases} x + 3y - 2t + z = 5 \\ y + t - 2z = 4 \\ 2t - 5z = 4 \\ 3z = 12 \end{cases}$ Sistema escalonado do 1º tipo, SPD

- $3z = 12 \Rightarrow z = 4$
- $2t - 5 \cdot 4 = 4 \Rightarrow t = 12$
- $y + 12 - 2 \cdot 4 = 4 \Rightarrow y = 0$
- $x + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 12 + 4 = 5 \Rightarrow x = 25$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(12, 25, 0, 4)\}$.

b) $\begin{cases} a + 2b - c = 5 \\ c = 4 \end{cases}$ Sistema escalonado do 2º tipo, SPI

$c = 4 \Rightarrow a + 2b = 9$
$\therefore a = 9 - 2b$
Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(9 - 2b, b, 4), \text{ com } b \in \mathbb{R}\}$.

c) $\begin{cases} p + 2q + r - s = 3 \\ q - 2r + s = 1 \\ r - 3s = 0 \end{cases}$ Sistema escalonado do 2º tipo, SPI

- $r = 3s$
- $q - 2 \cdot 3s + s = 1 \Rightarrow q = 1 + 5s$
- $p + 2(1 + 5s) + 3s - s = 3 \Rightarrow p = 1 - 12s$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1 - 12s, 1 + 5s, 3s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\}$.

12. a) V, por definição de sistemas equivalentes.

b) V, pois, por definição, dois sistemas são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.

c) F, pois, por exemplo, os sistemas A: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ e A': $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ são equivalentes, a sequência (1, 0) é solução de A, a sequência $(3, -1)$ é solução de A' e, no entanto, $(1, 0) \neq (3, -1)$.

d) F, pois, por definição, dois sistemas são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.

e) F, pois se ambos forem impossíveis eles terão o mesmo conjunto solução e, portanto, serão equivalentes.

13. Sendo x e z os elementos que faltam nos retângulos, respectivamente, temos:

$$(x, p, z) = \left(k - 2, \frac{k}{2} + 1, 2k + 3\right) \Rightarrow \begin{cases} x = k - 2 & \text{(I)} \\ p = \dfrac{k}{2} + 1 & \text{(II)} \\ z = 2k + 3 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (II), obtemos $k = 2p - 2$.
Substituindo k por $2p - 2$ nas equações (I) e (III), chegamos a:
$x = 2p - 2 - 2 \Rightarrow x = 2p - 4$
$y = 2(2p - 2) + 3 \Rightarrow y = 4p - 1$
Assim, completando os retângulos, concluímos: $(2p - 4, p, 4p - 1)$

14. a) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 10 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + y - 14z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ 2x + 4y - z = 10 \\ 3x + y - 14z = 5 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ -2y - 5z = -4 \\ -8y - 20z = -16 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ -2y - 5z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\therefore S = \left\{\left(\dfrac{11z + 2}{2}, \dfrac{4 - 5z}{2}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + 3y + 2z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ -5y - 5z = -5 \\ -9y - 11z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ -5y - 5z = -5 \\ -10z = 50 \end{cases}$

$\therefore S = \{(-1, 6, -5)\}$

Classificação: SPD

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \\ 3x + 4y + 8z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ -14y - 34z = 3 \\ 14y + 34z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ -14y - 34z = 3 \\ 0 = 10 \end{cases}$

$\therefore S = \varnothing$

Classificação: SI

d) $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 7y + 8z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 13y + 12z = 1 \\ 13y + 12z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 13y + 12z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\therefore S = \left\{\left(\dfrac{8 - 5z}{13}, \dfrac{1 - 12z}{13}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

e) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -19y = -1 \\ -19y = -1 \end{cases}$

$\therefore S = \left\{\left(\dfrac{11}{19}, \dfrac{1}{19}\right)\right\}$

Classificação: SPD

f) $\begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2x + 4y + 5t - z = 4 \\ 3x + 3y + 7t + 2z = 10 \\ 6x + 6y - t + z = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2y + t - 3z = -4 \\ t - z = -2 \\ -13t - 5z = -10 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2y + t - 3z = -4 \\ t - z = -2 \\ -18z = -36 \end{cases}$

$\therefore S = \{(1, 1, 0, 2)\}$

Classificação: SPD

g) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -8y = 0 \end{cases}$

$\therefore S = \{(0, 0)\}$

Classificação: SPD

h) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -5y - 4z = 0 \\ -y - 16z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -5y - 4z = 0 \\ 76z = 0 \end{cases}$

$\therefore S = \{(0, 0, 0)\}$

Classificação: SPD

i) $\begin{cases} x + y = 0 & (-2)\ (-3) \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim x + y = 0$

$\therefore\ S = \{(-y, y), \text{ com } y \in \mathbb{R}\}$

Classificação: SPI

j) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 & (-2)\ (-4)\ (-5) \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \\ 5x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -3y + 10z = 0 & (-1)\ (-2) \\ -3y + 10z = 0 \\ -6y + 20z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 & \text{(I)} \\ -3y + 10z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo em função da variável livre z:

- De (II), temos: $y = \dfrac{10z}{3}$
- Substituindo y por $\dfrac{10z}{3}$ em (I), obtemos:

  $x = -\dfrac{11z}{3}$

$\therefore\ S = \left\{\left(-\dfrac{11z}{3}, \dfrac{10z}{3}, z\right), \text{ com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

15. Escalonando $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$, obtemos $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x - 3y + 3z = 0 \\ 0x + 0y + 3z = 2 \end{cases}$, que é um sistema linear escalonado do primeiro tipo e, portanto, possível e determinado. Logo, o sistema possui uma única solução.
Alternativa **b**.

16. Escalonando os sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (-\log 2)\ (-\log 4) \\ x \log 2 + y \log 20 - z \log 5 = -\log 50 \\ x \log 4 - y \log 25 + z \log 40 = -\log \dfrac{5}{2} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + y(\log 20 - \log 2) - z(\log 5 + \log 2) = -\log 50 - \log 2 \\ 0x - y(\log 25 + \log 4) + z(\log 40 - \log 4) = -\log \dfrac{5}{2} - \log 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + y \log 10 - z \log 10 = -\log 100 \\ 0x - y \log 100 + z \log 10 = -\log 10 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + y - z = -2 & (2) \\ 0x - 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + 0y - z = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -7, y = 3$ e $z = 5$

Logo, $S = \{(-7, 3, 5)\}$.

17. a) $\begin{cases} 2x - 5y + z = 0 & (-2) \\ 4x - 10y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 & (-5) \\ 5x - 2y + 3y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -17y + 8z = 0 \end{cases}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

18. Escalonando o sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + 7z = 7 \end{cases}$, chegamos a $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0x + y + 3z = 5 \end{cases}$, de onde obtemos a solução genérica $(6 - 5z, 5 - 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$.
Para obtermos a solução (a, b, c) em que $ab = 2c$, basta resolver a equação $(6 - 5z)(5 - 3z) = 2z$, da qual obtemos $z = 1$ ou $z = 2$.
Assim, há duas soluções (a, b, c) em que $ab = 2c$; são elas: $(1, 2, 1)$ e $(-4, -1, 2)$. Portanto, $a = 1$ ou $a = -4$.
Alternativa **b**.

19. **a)** F, pois como $abc \neq 0$, temos que a solução (a, b, c) é diferente da trivial (0, 0, 0). Logo, o sistema homogêneo é possível e indeterminado.

b) V, pois como o sistema é possível e indeterminado, temos que o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = -5$$

c) V, pois, para $k = -5$, temos $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x + 7y - 5z = 0 \end{cases}$,

que é equivalente ao sistema escalonado $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$, do qual obtemos a solução genérica $\left(\frac{z}{5}, \frac{3z}{5}, z\right)$, com $z \in \mathbb{R}$.

d) F, pois, se o terno de números reais (a, b, c), com $abc = 15$, é solução do sistema, então, pelo item anterior:

$$\frac{z}{5} \cdot \frac{3z}{5} \cdot z = 15 \Rightarrow z = 5$$

Assim, concluímos que existe um único terno de números reais (a, b, c) tal que $abc = 15$; é ele: (1, 3, 5).

e) F, pois, se o terno de números reais (m, n, p) é solução do sistema com $m > 0$, $n > 0$ e $q < 0$, então, pelo item **c**:

$$\begin{cases} \frac{z}{5} > 0 \\ \frac{3z}{5} > 0 \\ z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z > 0 \\ z < 0 \end{cases}, \text{ o que é um absurdo.}$$

Logo, o sistema não admite como solução um terno de números reais (m, n, p), com $m > 0$, $n > 0$ e $q < 0$.

20. Poderíamos resolver o sistema $\begin{cases} a + b = 1.200 \\ b + c = 1.100 \\ a + c = 1.500 \end{cases}$, obtendo os valores de a, b e c e calculando a soma $a + b + c$.

Porém, um caminho mais curto é somar, membro a membro, as três igualdades do sistema, obtendo: $2a + 2b + 2c = 3.800$, de onde concluímos que $a + b + c = 1.900$.

Alternativa **e**.

21. **a)** **I)** Indicando por r a reta de equação $x + 2y = 4$, temos:

- $x = 0 \Rightarrow y = 2$
- $y = 0 \Rightarrow x = 4$

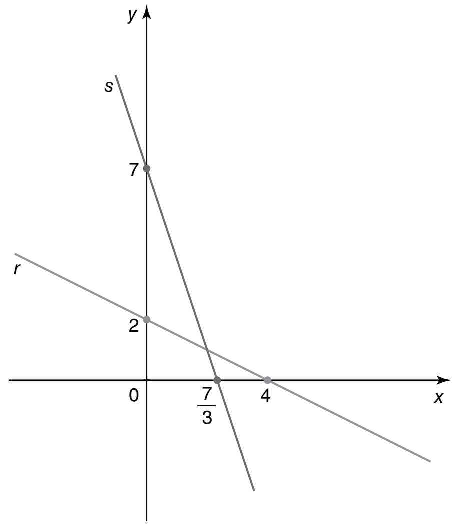
Logo, r passa pelos pontos (0, 2) e (4, 0).

II) Indicando por s a reta de equação $3x + y = 7$, temos:

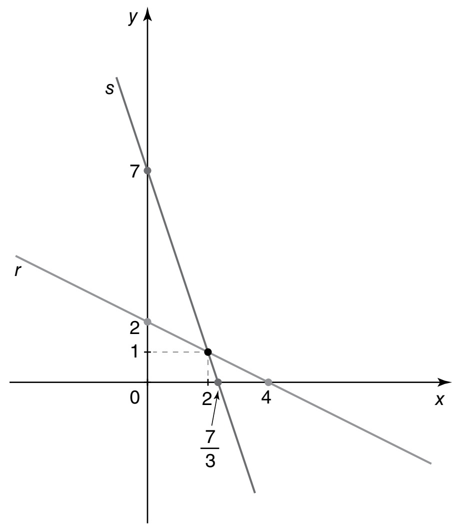
- $x = 0 \Rightarrow y = 7$
- $y = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$

Logo, s passa pelos pontos (0, 7) e $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

Por (I) e (II) concluímos que os gráficos de r e s são:



b) Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$, obtemos $x = 2$ e $y = 1$; logo, o ponto de intersecção das retas r e s representadas no item **a** é (2, 1). Assim, temos o gráfico:



22. **a)** Escalonando $\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$, obtemos o sistema escalonado possível e indeterminado $\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 0x + y + z = 3 \end{cases}$, cuja solução genérica é $(0, 3 - z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$.

Logo, o conjunto S que representa todos os pontos da reta r é $S = \{(0, 3 - z, z), \text{com } z \in \mathbb{R}\}$.

b) Atribuindo três valores reais distintos a z na solução genérica $(0, 3 - z, z)$, obtemos três pontos distintos da reta r; por exemplo:

- $z = 0 \Rightarrow (0, 3, 0)$
- $z = 1 \Rightarrow (0, 2, 1)$
- $z = 4 \Rightarrow (0, -1, 4)$

Assim, três pontos distintos de r são: (0, 3, 0), (0, 2, 1) e (0, −1, 4)

23. a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, assim, que ocorre apenas uma das alternativas: SPI ou SI. Para determinar qual delas ocorre, escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - \ \ y = 1 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, assim, que ocorre apenas uma das alternativas: SPI ou SI. Para determinar qual delas ocorre, escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} 3x - \ \ y = 5 \\ -9x + 3y = -15 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - \ \ y = 5 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$

Logo, o sistema é possível e determinado.

24. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 0$

Logo, o sistema homogêneo é possível e indeterminado.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$

Logo, o sistema é possível e determinado.

25. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & -3 & -5 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14m - 42$

O sistema admite uma única solução se, e somente se, $D \neq 0$, ou seja: $14m - 42 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$

26. $D = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 18 & k \end{vmatrix} = k^2 - 36$

Para que o sistema admita soluções próprias (soluções diferentes da trivial), devemos ter $D = 0$:
$k^2 - 36 = 0 \Rightarrow k = 6$ ou $k = -6$

27. $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2k^2 - 5k - 2$

Para que o sistema admita soluções diferentes da trivial, devemos ter $D = 0$:

$-2k^2 - 5k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$ ou $k = -\frac{1}{2}$

28. Como $a + b + c \neq 0$, temos que a solução (a, b, c) é diferente da trivial $(0, 0, 0)$. Logo, o sistema homogêneo é possível e indeterminado. Assim, temos que o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \text{sen}\,\alpha \\ 1 & 3 & \text{sen}\,\alpha \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0$$

$\therefore \alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$

29. O sistema possui uma única solução se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 & k-2 \\ 1 & k-2 & 1 \\ 1 & 1 & k-2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (k-2)^3 - (k-2)^2 - (k-2) + 1 \neq 0$
$\therefore (k-2)^2\,[(k-2) - 1] - [(k-2) - 1] \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow [(k-2) - 1][(k-2)^2 - 1] \neq 0$
$\therefore (k-2) - 1 \neq 0$ e $(k-2)^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$ e $k \neq 1$

Logo, o conjunto que representa os valores de k para os quais o sistema possui uma única solução é dado por: $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

Alternativa **a**.

30. Calculando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 6$$

Como esse determinante é diferente de zero, concluímos que o sistema é possível e determinado, não importando os valores de a, b e c.

Alternativa **a**.

31. Como é homogêneo, o sistema admite infinitas soluções se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} m & -2 & -1 \\ 1 & -m & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 2$$

Alternativa **c**.

32. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3a^2 & 3a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x - 3y \\ 3a^2x + 3ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ 3a^2x + 3ay = 2 \end{cases}$

Para que o sistema seja impossível, é necessário (mas não suficiente) que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3a^2 & 3a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = -2$$

Para $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{SI}$$

Para $a = -2$, temos:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ 12x - 6y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{SPI}$$

Portanto, para não existir a matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ devemos ter $a = 0$.

Alternativa **c**.

33. As retas r e s são concorrentes se, e somente se, o sistema formado por suas equações é possível e determinado. Para que isso ocorra, basta que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} 2 & p-1 \\ p & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow p \neq 4 \text{ e } p \neq -3$$

Assim, r e s são concorrentes se, e somente se, $p \neq 4$ e $p \neq -3$.

As retas r e s são paralelas distintas se, e somente se, o sistema formado por suas equações é impossível; e r e s são paralelas coincidentes se, e somente se, o sistema formado por suas equações é possível e indeterminado. Nesses dois casos, o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema será nulo.

De acordo com o item **a**, os valores de p que anulam D são 4 e -3. Substituindo p por cada um desses valores no sistema e escalonando-o, temos:

- Para $p = 4$

  $$\begin{cases} 2x + 3y = q \\ 4x + 6y = 2q \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = q \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

  Como esse sistema é possível e indeterminado para qualquer valor de q, concluímos que, para $p = 4$ e qualquer valor real de q, as retas r e s são paralelas coincidentes.

- Para $p = -3$

  $$\begin{cases} 2x - 4y = q \\ -3x + 6y = 2q \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 4y = q \\ 0x + 0y = 7q \end{cases}$$

  Para $q = 0$, esse sistema é possível e indeterminado; e para $q \neq 0$, esse sistema é impossível. Assim, temos que, para $p = -3$ e $q = 0$, as retas r e s são paralelas coincidentes; e para $p = -3$ e $q \neq 0$, as retas r e s são paralelas distintas.

Resumindo:

a) As retas r e s são concorrentes para $p \neq 4$ e $p \neq -3$.

b) As retas r e s são paralelas distintas para $p = -3$ e $q \neq 0$.

c) As retas r e s são coincidentes para $p = 4$ e qualquer número real q e também para $p = -3$ e $q = 0$.

34. Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{vmatrix} = 16 - a^2$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de a para que o sistema seja possível e determinado:

$16 - a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$ e $a \neq -4$

Logo, $a \neq 4$ e $a \neq -4 \Rightarrow$ SPD.

Para $a = 4$ ou $a = -4$, temos $D = 0$; nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. A classificação correta é revelada pelo escalonamento do sistema para cada um desses valores de a:

- Para $a = 4$, temos:

  $$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

  Logo, $a = 4 \Rightarrow$ SPI.

- Para $a = -4$, temos:

  $$\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ -4x + 8y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

  Logo, $a = -4 \Rightarrow$ SI.

Resumindo: $\begin{cases} a \neq 4 \text{ e } a \neq -4 \Rightarrow \text{SPD} \\ a = 4 \Rightarrow \text{SPI} \\ a = -4 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$

35. Para que o sistema seja impossível, é necessário (mas não suficiente) que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p = -6$$

Substituindo p por -6 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = m \\ 2x + 6y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = m \\ 0x + 0y = 2 - 2m \end{cases}$$

Esse sistema é impossível para $2 - 2m \neq 0$, isto é, $m \neq 1$.

Assim, concluímos que o sistema original é impossível para $p = -6$ e $m \neq 1$.

Alternativa **e**.

36. Para que o sistema seja impossível, é necessário (mas não suficiente) que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ou } a = -1$$

Substituindo a por 1 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \{x + y = 1$$

Logo, para $a = 1$ o sistema é possível e indeterminado.

Substituindo a por -1 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = -1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

Logo, para $a = -1$ o sistema é impossível.

Alternativa **d**.

37. Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & k \end{vmatrix} = 40 - 4k$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$40 - 4k \neq 0 \Rightarrow k \neq 10$

Logo, $k \neq 10 \Rightarrow$ SPD.

Para $k = 10$, temos $D = 0$; nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. A classificação correta é revelada pelo escalonamento do sistema para $k = 10$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 0y - z = 3 \\ x + 6y + 10z = 3 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 0x - 4y - 7z = -1 \\ 0x + 4y + 7z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 0x - 4y - 7z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Logo, $k = 10 \Rightarrow$ SPI.

Resumindo: $\begin{cases} k \neq 10 \Rightarrow \text{SPD} \\ k = 10 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

38. a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & p & -2 \\ p & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2p^2 - 4p + 2$

Como o sistema é homogêneo, temos:
$D \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:
$2p^2 - 4p + 2 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e
$2p^2 - 4p + 2 = 0 \Rightarrow$ SPI
Resolvendo a equação $2p^2 - 4p + 2 = 0$, obtemos a raiz 1; portanto:

$$\begin{cases} p \neq 1 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = 1 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$$

b) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ p & 2 & -1 \\ 8 & p & -5 \end{vmatrix} = p^2 + 7p - 44$

Como o sistema é homogêneo, temos:
$D \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:
$p^2 - 7p - 44 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $p^2 - 7p - 44 = 0 \Rightarrow$ SPI
Resolvendo a equação $p^2 - 7p - 44 = 0$, obtemos as raízes 11 e -4; portanto:

$$\begin{cases} p \neq -4 \text{ e } p \neq 11 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = -4 \text{ ou } p = 11 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$$

39. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & m & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6m + 4 + 12 - 6m - 4 - 12 = 0$

Com $D = 0$ para qualquer valor real de m, concluímos que o sistema é possível e indeterminado para todo m, com $m \in \mathbb{R}$.

40. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & p \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 5p + 2 - 5p - 20 - 1 = -9$

Com $D \neq 0$ para qualquer valor real de p, concluímos que o sistema é possível e determinado para todo p, com $p \in \mathbb{R}$.

41. Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema homogêneo, temos:

$D = \begin{vmatrix} k^2 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1$

Para $D \neq 0$, o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial, o que ocorre para $k \neq -1$.
Para $D = 0$, o sistema homogêneo é possível e indeterminado, o que ocorre para $k = -1$.
Alternativa **c**.

42. Como o sistema é possível e indeterminado, concluímos que o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, isto é:

$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 0$

Substituindo a por 0 (zero) no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 0x + y - z = 0 \\ x - 0y + z = 1 \\ x + y = b \end{cases} \sim \begin{cases} x - 0y + z = 1 \\ 0x + y - z = 0 \\ x + y = b \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - 0y + z = 1 \\ 0x + y - z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = b - 1 \end{cases}$$

Como o sistema é possível e indeterminado, temos que $b = 1$.
Concluímos, então: $a = 0$ e $b = 1$.
Alternativa **d**.

43. Para que o sistema seja impossível, devemos ter:

$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = -2$

Essa condição é necessária, mas não é suficiente para garantir que o sistema seja impossível. Devemos substituir α por -2 e escalonar o sistema, para verificar se este é impossível ou possível e indeterminado para esse valor de α:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 0x + 3y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Assim, concluímos que para $\alpha = -2$ o sistema é impossível.
Alternativa **e**.

44. Para que as retas sejam paralelas distintas, o sistema a seguir deve ser impossível:

$$\begin{cases} px - y = -2 \\ 3x - y = -q \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -p + 3$

Para o sistema ser impossível, é necessário que $D = 0$, ou seja: $-p + 3 = 0 \Rightarrow p = 3$.
Substituindo p por 3 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = -q \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 0y = 2 - q \end{cases}$$

Para esse sistema ser impossível, devemos ter $2 - q \neq 0$, ou seja, $q \neq 2$.
Concluímos, então, que as retas são paralelas distintas se, e somente se, $p = 3$ e $q \neq 2$.

45. Temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + ky + 2z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + y + kz = 3 \end{cases}$$

Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$D = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} = -2k^2 - 7k - 5$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para os quais o sistema é possível e determinado:

$D \neq 0 \Rightarrow k \neq -1$ e $k \neq -\dfrac{5}{2}$

Assim, $k \neq -1$ e $k \neq -\dfrac{5}{2} \Rightarrow$ SPD

Os valores -1 e $-\dfrac{5}{2}$ atribuídos a k anulam o determinante D; por isso, para cada um desses valores o sistema é impossível ou é possível e indeterminado. Para descobrir a classificação correta, substituímos k por cada um desses valores e escalonamos o sistema:

- Para $k = -1$, temos:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + y - z = 3 \end{cases}$$, que é equivalente ao sistema

escalonado $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 0x + 4y - 7z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \end{cases}$

Como esse sistema é impossível, concluímos:
$k = -1 \Rightarrow$ SI

- Para $k = -\frac{5}{2}$, temos

$$\begin{cases} x - \frac{5y}{2} + 2z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + y - \frac{5z}{2} = 3 \end{cases}$$, que é equivalente ao sistema

escalonado $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 4 \\ 0x + y - z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = -6 \end{cases}$

Como esse sistema é impossível, concluímos:

$k = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{SI}$

Temos, portanto:

a) A equação matricial admite uma única solução para $k \neq -1$ e $k \neq -\frac{5}{2}$.

b) Para nenhum valor de k a equação matricial admite infinitas soluções.

46. $$\begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ x + y + 2t - z = 1 \\ 3x + 4y + at - z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ -y + 3t - 2z = -4 \\ -2y + (a+3)t - 4z = -14 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ -y + 3t - 2z = -4 \\ (a-3)t = -6 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $a - 3 = 0$, o sistema é impossível;
- para $a - 3 \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado.

Resumindo:

$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow \text{SI} \\ a \neq 3 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

47. Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações obtemos $x = \frac{1}{3}$ e $y = 1$. Substituindo esses valores na última equação, temos:

$k \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow k = 9$

Como $3^2 = 9$, concluímos que, 9 é um quadrado perfeito.

Alternativa **a**.

48. Resolvendo o sistema formado pela primeira, terceira e quarta equação, obtemos: $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ e $z = \frac{13}{5}$.

Substituindo esses valores na segunda equação, concluímos:

$\frac{9}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{13}{5} = k \Rightarrow k = -\frac{22}{5}$

Logo, o sistema é possível e determinado para $k = -\frac{22}{5}$.

49. **01)** F, pois, para $n = 5$, temos:

$$\begin{cases} 6x + ky = 15 \\ mx + y = -3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Para que o sistema tivesse infinitas soluções, as retas representadas por suas equações deveriam ser coincidentes, o que não ocorre, pois, para qualquer valor de m, as duas últimas equações representam retas distintas.

02) F, pois, para $m = 2$, $n = -3$ e $k \neq 3$, as duas últimas equações do sistema representam retas paralelas coincidentes, que concorrem com a primeira reta; logo, existe um ponto comum às três retas representadas pelas equações do sistema.

04) V, pois, para $n = -3$, $m = 2$ e $k \neq 3$, escrevemos:

$$\begin{cases} 6x + ky = 15 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + ky = 15 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

Como $k \neq 3$, temos que o determinante da matriz dos coeficientes desse último sistema é diferente de zero, com o que concluímos que o sistema é possível e determinado; logo, possui uma única solução.

08) V, pois, para que o sistema fosse homogêneo, o termo independente das variáveis em cada equação deveria ser nulo, o que não ocorre.

16) F, pois o sistema não é homogêneo.

Assim, a soma dos números que antecedem as afirmações verdadeiras é 04 + 08 = 12.

50. Resolvemos o sistema formado pelas três primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 1 \text{ e } z = 1$$

Obtemos, então, o valor de m de modo que o terno (0, 1, 1) também seja solução da quarta equação:

$-2 \cdot 0 - 9 \cdot 1 + m \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = 9$

Assim, concluímos:

$\begin{cases} m = 9 \Rightarrow \text{SPD} \\ m \neq 9 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$

51. As retas terão um único ponto comum se, e somente se, o sistema abaixo for possível e determinado.

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = -1 \\ x - y = -k \end{cases}$$

Resolvemos o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 7$$

Obtemos, então, o valor de k de modo que o par (2, 7) também seja solução da última equação:

$2 - 7 = -k \Rightarrow k = 5$

Assim, concluímos que as retas terão um único ponto em comum para $k = 5$.

52. a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$

b) $\begin{vmatrix} \text{sen } \frac{\pi}{5} & -\cos \frac{\pi}{5} \\ \cos \frac{\pi}{5} & \text{sen } \frac{\pi}{5} \end{vmatrix} = \text{sen}^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 + 16 + 10 = 10$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{31} = 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-19) = -57$

53. $-1 \times$, $+$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \cos 5° & \text{sen } 5° & \text{sen } 5° \\ 0 & \text{sen } 5° & \cos 5° & \cos 5° \\ 1 & 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \cos 5° & \text{sen } 5° & \text{sen } 5° \\ 0 & \text{sen } 5° & \cos 5° & \cos 5° \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \cos 5° & \text{sen } 5° & \text{sen } 5° \\ \text{sen } 5° & \cos 5° & \cos 5° \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \cos^2 5° - \text{sen}^2 5° = \cos 10° \approx 0{,}9848$

Alternativa **a**.

54. Temos que:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

Logo, $\det (A + B) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3.840$

55. Para que o sistema seja possível e determinado, basta que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema seja não nulo, isto é:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow mA_{13} + 1 \cdot A_{23} \neq 0$, em que:

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$ e $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Assim:

$m \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$

Logo, o sistema é possível e determinado para qualquer valor real de m, com $m \neq \frac{1}{2}$.

56. Para que o sistema seja possível e indeterminado, basta que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema seja nulo, isto é:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2A_{24} + kA_{44} = 0$, em que:

$A_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ e $A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

Assim:

$-2A_{24} + kA_{44} = 0 \Rightarrow k = -2$

Logo, para $k = -2$, o sistema admite soluções diferentes da trivial.

57. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = 5A_{41} + pA_{44}$, em que:

$A_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$ e $A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -20$

Assim:
$D = 5A_{41} + pA_{44} = -20 - 20p$
Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de p para que o sistema seja possível e determinado:
$-20 - 20p \neq 0 \Rightarrow p \neq -1$
Logo, $p \neq -1 \Rightarrow$ SPD
Para $p = -1$, temos $D = 0$; nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado.
Substituindo p por -1 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \quad (-2)\ (-1)\ (-5) \\ 2x - y - t - z = 2 \\ x - 3y + t - 2z = 1 \\ 5x + 0y + 0t - z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \\ -5y - 5t - 3z = 0 \quad (-1)\ (-2) \\ -5y - t - 3z = 0 \\ -10y - 10t - 6z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \\ -5y - 5t - 3z = 0 \\ 4t + 0z = 0 \end{cases} \text{(SPI)}$$

Logo, $p = -1 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} p \neq -1 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = -1 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

58. Para $a_{ij} = j(i - 1)$, temos que para $i = 1$ (1ª linha) todos os elementos são nulos; pela P2, temos: det $A = 0$.

59. Temos que:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observando que a 1ª e a 2ª colunas da matriz produto são iguais, concluímos que det $(A \cdot B) = 0$.

60. Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4D \text{ e } \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = 3D$$

Então:
$4D = 3D \Rightarrow D = 0$
Logo, $D = 0$.

61. $A = -B \Rightarrow \det A = \det(-B)$
$\therefore \det A = \det(-1 \cdot B) \Rightarrow \det A = (-1)^n \cdot \det B$
Alternativa **e**.

62. Permutando-se as duas primeiras linhas da matriz A, obtém-se a matriz B; logo,
$\det B = -\det A = -10$.

63. Temos que cada elemento c_{ij} da matriz diferença $C = A - B$ é dado por $c_{ij} = (-1)^{i+j} - (-1)^{2i-j}$.
Observando que $c_{2j} = (-1)^{2+j} - (-1)^{4-j} = 0$, para qualquer valor de j, concluímos que a 2ª linha da matriz C é nula. Logo, det $(A - B) = 0$.

64. Pela P4, temos:
$\det(kA) = k^4 \cdot \det A$
Assim:
$245 = k^4 \cdot 5 \Rightarrow k^4 = 49$
$\therefore k = \pm\sqrt{7}$
Logo, $k = \pm\sqrt{7}$.

65. Pela P4, temos:
$\det(2A) = 2^n \det A \Rightarrow 2^n \det A = 32 \det A$
Como $\det A \neq 0$, temos:
$2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5$
Logo, $n = 5$.

66. Pela P4, temos: $\det(-B) = (-1)^4 \det B$
Assim:
$\det(-B) = \det B \Rightarrow \det B = 3$
Logo, $\det B = 3$.

67. Pela P4, temos: $\det(-C) = (-1)^3 \det C \Rightarrow \det(-C) = -\det C$
$\therefore\ 6 = -\det C \Rightarrow \det C = -6$
Logo, $\det C = -6$.

68. Temos que cada elemento da matriz diferença $C = A - B$ é dado por $c_{ij} = 0$, se $i \neq j$; e $c_{ij} = 2$, se $i = j$. Logo, pela propriedade da matriz triangular, concluímos que $\det(A - B) = 2^n$.
Alternativa **e**.

69. Temos que:

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} - 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 12$$

70. **a)** A coluna 4 é combinação linear das colunas 1 e 2. Essa combinação linear pode ser descrita por:
$a_{i4} = 2a_{i1} + a_{i2}$, com $1 \leqslant i \leqslant 4$

b) Pela propriedade P9, temos $\det A = 0$.

71. -1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Alternativa **b**.

72. -1

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & x & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & x \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & x & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & x \end{vmatrix} = 7$$

$-5 \quad -2 \quad -3$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & x & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & x \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x - 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & x - 10 \end{vmatrix} = 7$$

$$\therefore (x - 4) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & x - 10 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow (4 - x)(10 - x) = 7$$

$\therefore\ x^2 - 14x + 33 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 11$
Logo, $S = \{3, 11\}$.

73. $-2 \quad -1 \quad -3 \quad -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1) = 15$$

74.
$$A \cdot B^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot B^t = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

75. Pelo teorema de Binet, det (AB) = det $A \cdot$ det B.

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 94$$

$$\text{e } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 27$$

Logo, det $B = \dfrac{94}{27}$.

76. $A^2 = A \Rightarrow \det(A^2) = \det A$

$\therefore (\det A)^2 = \det A \Rightarrow (\det A)^2 - \det A = 0$

$\therefore \det A(\det A - 1) = 0 \Rightarrow \det A = 0$ ou $\det A - 1 = 0$

Logo, det $A = 0$ ou det $A = 1$.

Alternativa **c**.

77. $\det(A^2) = 6 + \det A \Rightarrow \det(A \cdot A) = 6 + \det A$

$\therefore \det A \cdot \det A = 6 + \det A \Rightarrow (\det A)^2 = 6 + \det A$

$\therefore (\det A)^2 - \det A - 6 = 0$

Fazendo a mudança de variável det $A = x$, obtemos:

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$

Retornando à variável original, chegamos a:

det $A = 3$ ou det $A = -2$

Como, por hipótese, det $A < 0$, temos que det $A = -2$.

Assim, concluímos:

$\det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot (-2) = -16$

78. a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -8$

Portanto, B é invertível, e sua inversa é dada por:

$B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \cdot \overline{B}$, em que $\overline{B}$ é a matriz adjunta.

Cálculo de $\overline{B}$:

$B_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ $\qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$ $\qquad B_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

$B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$B_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$ $\qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

Assim: $\overline{B} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ e, portanto:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$

Portanto, C é invertível, e sua inversa é dada por:

$C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} \cdot \overline{C}$

Cálculo de $\overline{C}$:

$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$ $\qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$ $\qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$

Assim: $\overline{C} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ e, portanto:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Logo, B não é invertível.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C$ é invertível

Calculando os cofatores dos elementos de C, temos:

$C_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -16$

$C_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$C_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2$

$C_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -3$

$C_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

$C_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$C_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 13$

$C_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -5$

$C_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$

Logo: $\text{cof } C = \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 13 & -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{C} = \begin{bmatrix} -16 & -3 & 13 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Concluímos, então:

$$C^{-1} = \frac{\overline{C}}{\det C} = \begin{bmatrix} -16 & -3 & 13 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

79. Para que uma matriz seja invertível, basta que seu determinante seja não nulo:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & x & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 5x + 15 \neq 0$

$\therefore x \neq -3$

Logo, para que A seja invertível, devemos ter $x \neq -3$.

80. Calculando o determinante da matriz, temos:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & x \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5(x+1) + 5x - 10x - 2 = 3$$

Como, independentemente de x, o determinante é não nulo, a matriz é invertível para qualquer valor de x.

81. Calculando o determinante da matriz, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & x+2 & 2 \\ 1 & x+5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 5 + 2 - x - 2 - 5 = 0$$

Assim, para qualquer valor de x, a matriz não admite inversa.

82. $\begin{cases} B = -2A \\ C = 3 \cdot B^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det B = \det(-2A) \\ \det C = \det(3 \cdot B^{-1}) \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \det B = (-2)^2 \cdot \det A \\ \det C = 3^2 \cdot \det(B^{-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det B = (-2)^2 \cdot 10 \\ \det C = 3^2 \cdot (\det B)^{-1} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \det B = (-2)^2 \cdot 10 \\ \det C = 3^2 \cdot \dfrac{1}{\det B} \end{cases} \Rightarrow \det C = \frac{9}{40}$$

Alternativa **d**.

83. $C = mA + nB = m \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2m - n & m + n \\ 3m & 5m + n \end{bmatrix}$

Para que a matriz C não seja invertível, devemos ter $\det C = 0$, isto é:

$(2m - n)(5m + n) - 3m(m + n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7m^2 - 6mn - n^2 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau na variável m, obtemos:

$$m = \frac{-(-6n) \pm \sqrt{(-6n)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-n^2)}}{14} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = n$ ou $m = -\dfrac{n}{7}$

Como $m \neq n$, então, $m = -\dfrac{n}{7}$.

Exercícios contextualizados

84. **a)** $3x + 5y + 10z = 48$

b) Resposta possível:

Para $x = 1$ e $y = 1$, temos:

$3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 10z = 48 \Rightarrow z = 4$

Para $x = 1$ e $y = 1$, temos:

$3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10z = 48 \Rightarrow z = 3$

Para $x = 11$ e $y = 1$, temos:

$3 \cdot 11 + 5 \cdot 1 + 10z = 48 \Rightarrow z = 1$

Para $x = 6$ e $y = 4$, temos:

$3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 10z = 48 \Rightarrow z = 1$

Assim, quatro soluções da equação são:

(1, 1, 4), (1, 3, 3), (11, 1, 1) e (6, 4, 1)

85. Sendo V e E, respectivamente, os números de vitórias e de empates dessa equipe, temos:

$3V + E = 12$

Os possíveis valores de V e E são dados nas linhas da tabela ao lado.

V	E
0	12
1	9
2	6
3	3
4	0

Logo, a equipe pode ter realizado 4, 6, 8, 10 ou 12 partidas.

86. Sendo x a massa do caminhão vazio e y a massa da carga, temos:

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2y \Rightarrow y = \dfrac{2x}{9}$

Logo, a massa da carga é $\dfrac{2}{9}$ da massa do caminhão vazio.

Alternativa **a**.

87. Considerando esse mês de crise, sejam x o número de sócios com menos de 60 anos e y o número de sócios com 60 anos ou mais. Assim, temos: $125x = 75y + 10.500$, sob as condições: $\{x, y\} \subset \mathbb{N}^*$ e $x + y < 100$.

Isolando x na equação linear, chegamos a:

$x = \dfrac{3y}{5} + 84$

Como x e y devem ser números naturais não nulos, temos que y só pode assumir valores múltiplos de 5 não nulos:

- Para $y = 5$, temos $x = 87$.
- Para $y = 10$, temos $x = 90$ (não convém, pois, no mês de crise, o clube tinha menos de 100 sócios, isto é, $x + y < 100$).

Observando que, atribuindo-se a y valores múltiplos de 5 maiores que 5, obtém-se $x + y \geqslant 100$, concluímos que y só pode assumir o valor 5. Portanto, o número de sócios nesse mês de crise era $5 + 87$, isto é, 92.

88. Sendo x, y e z os números de unidades de frascos de *shampoo*, de sabonetes e de tubos de creme dental adquiridos por Camila, respectivamente, temos:

$10x + 2y + z = 30 \Rightarrow z = 30 - 10x - 2y$

Como x, y e z devem ser números naturais não nulos, temos as seguintes possibilidades:

x	y	z
1	1	18
1	2	16
1	3	14
1	4	12
1	5	10
1	6	8
1	7	6
1	8	4
1	9	2
2	1	8
2	2	6
2	3	4
2	4	2

Observando os valores da 2ª coluna, constatamos que o maior número possível de sabonetes é 9, o que ocorre em uma única linha. Assim, concluímos que Camila comprou 1 frasco de *shampoo*, 9 sabonetes e 2 tubos de creme dental.

89. Sendo x e y os números de atrações de que pai e filho usufruíram, respectivamente, temos:

$$50 + 10x + 30 + 8y = 178 \Rightarrow x = \frac{49 - 4y}{5}$$

Como x e y devem ser números naturais maiores que 2, concluímos que a única possibilidade ocorre para $y = 6$, para a qual temos que $x = 5$. Assim, o pai usufruiu de 5 atrações e o filho usufruiu de 6 atrações.

90. Indicando por v, d e e os números de vitórias, derrotas e empates dessa equipe, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} v + d + e = J \\ 3v + e = P \\ d = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + d + d = J \\ 3v + d = P \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} v + 2d = J & \text{(I)} \\ d = P - 3v & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos que: $v = \dfrac{2P - J}{5}$

Alternativa **a**.

91. Indicando, respectivamente, por c e a as massas, em grama, do copo vazio e da água, quando o copo está cheio, temos:

$$\begin{cases} c + a = 325 \\ c + a - \dfrac{a}{2} = 180 \end{cases} \Rightarrow a = 290 \text{ e } c = 35$$

Logo, a massa do copo vazio é 35 g.
Alternativa **c**.

92. Indicando, respectivamente, por A e F as quantidades, em tonelada, de arroz e feijão dessa safra, temos:

$$\begin{cases} F + A = 80 \\ 0{,}2F + 0{,}3A = 18 \end{cases} \Rightarrow F = 60 \text{ e } A = 20$$

Logo, a quantidade de arroz dessa safra foi de 20 t.
Alternativa **d**.

93. Indicando por a, b e c os preços dos ingressos para os setores A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a = \dfrac{b}{2} + 20 \\ c = b + 30 \\ 210a + 180b + 50c = 45.900 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2a - b = 40 \\ c - b = 30 \\ 210a + 180b + 50c = 45.900 \end{cases} \cdot (-105) \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2a - b + 0c = 40 \\ 0a - b + c = 30 \\ 0a + 285b + 50c = 41.700 \end{cases} \cdot 285 \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2a - b + 0c = 40 & \text{(I)} \\ 0a - b + c = 30 & \text{(II)} \\ 0a + 0b + 335c = 50.250 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), obtemos $c = 150$.
Substituindo c por 150, em (II), chegamos a $b = 120$.
Substituindo b por 120, em (I), concluímos que $a = 80$.
Logo, os ingressos para os setores A, B e C custam R$ 80,00, R$ 120,00 e R$ 150,00, respectivamente.

94. Indicando por x, y e z os números de cédulas de dez, cinquenta e cem dólares, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 10x + 50y + 100z = 1.950 \\ x = 2z \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 45 \\ x + 0y - 2z = 0 \\ x + 5y + 10z = 195 \end{cases} \cdot (-1) \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 45 \\ 0x - y - 3z = -45 \\ 0x + 4y + 9z = 150 \end{cases} \cdot 4 \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 45 & \text{(I)} \\ 0x - y - 3z = -45 & \text{(II)} \\ 0x + 0y - 3z = -30 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), obtemos: $z = 10$
Substituindo z por 10, em (II), chegamos a $y = 15$.
Substituindo z por 10 e y por 15, em (I), concluímos que $x = 20$.
Logo, o número de cédulas de cem dólares foi 10 e, portanto, o valor recebido pela agência, nessa venda, em cédulas de cem dólares foi de 1.000 dólares.
Alternativa **d**.

95. a) Indicando por a, c e p as quantidades, em quilograma, de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará, em cada lata, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + c + p = 0{,}5 \\ 5a + 20c + 16p = 5{,}75 \\ c = \dfrac{a + p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c + p = 0{,}5 \\ 5a + 20c + 16p = 5{,}75 \\ a - 3c + p = 0 \end{cases}$$

b) Escalonando o sistema obtido no item anterior, obtemos:

$$\begin{cases} a + p + c = 0{,}5 \\ 0a + 11p + 15c = 3{,}25 \\ 0a + 0p + 4c = 0{,}5 \end{cases}$$

de onde concluímos que: $a = 0{,}25$; $c = 0{,}125$ e $p = 0{,}125$. Logo, em cada lata há 0,25 kg de amendoim, 0,125 kg de castanha de caju e 0,125 kg de castanha-do-pará, o que equivale a: 250 g de amendoim, 125 g de castanha de caju e 125 g de castanha-do-pará.

96. Indicando por J, M e A as quantias iniciais de João, Maria e Antônia, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} J + M + A = 100.000 \\ 1{,}1A = 11.000 + 2 \cdot 1{,}1J \\ 1{,}1 \cdot 1{,}1A = 1{,}1 \cdot 1{,}1M + 1{,}1 \cdot 1{,}1J \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} J + M + A = 100.000 \\ A = 10.000 + 2J \\ A = M + J \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} J + M + A = 100.000 \\ 2J + 0M - A = 210.000 \\ J + M - A = 0 \end{cases} \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} J + M + A = 100.000 & \text{(I)} \\ 0J - 2M - 3A = -210.000 & \text{(II)} \\ 0J + 0M - 2A = -100.000 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), obtemos: $A = 50.000$
Substituindo A por 50.000, em (II), chegamos a $M = 30.000$.
Substituindo A por 50.000 e M por 30.000, em (I), concluímos que $J = 20.000$.
Logo, a quantia inicial de João era de R$ 20.000,00.
Alternativa **a**.

97. $\begin{cases} \dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1{,}2 \\ \dfrac{NV}{2NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{NV}{NF} = 0{,}4$ e $\dfrac{NA}{NV} = 0{,}8$

Adicionando 1 a ambos os membros da igualdade $\dfrac{NA}{NV} = 0{,}8$, obtemos:

$\dfrac{NA + NV}{NV} = 1{,}8$

Como $NA + NV = 3.600$, temos:

$\dfrac{3.600}{NV} = 1{,}8 \Rightarrow NV = 2.000$

Substituindo NV por 2.000 na equação $\dfrac{NV}{NF} = 0{,}4$, concluímos:

$\dfrac{2.000}{NV} = 0{,}4 \Rightarrow NF = 5.000$

Alternativa **c**.

98. Indicando, respectivamente, por L, S e E as quantidades, em porções de 100 gramas, de granola light, simples e especial que o fabricante deve produzir, temos:

$\begin{cases} 80L + 60S + 60E = 18.000 \\ 10L + 40S + 20E = 6.000 \\ 10L + 0S + 20E = 2.000 \end{cases}$

Dividindo por 20 ambos os membros da primeira equação e por 10 ambos os membros das outras equações e, a seguir, permutando as duas primeiras equações assim obtidas, temos:

$\begin{cases} L + 4S + 2E = 600 \\ 4L + 3S + 3E = 900 \\ L + 0S + 2E = 200 \end{cases} \sim \begin{cases} L + 4S + 2E = 600 & \text{(I)} \\ 0L - 13S - 5E = -1.500 & \text{(II)} \\ 0L - 4S + 0E = -400 & \text{(III)} \end{cases}$

De (III), obtemos: $S = 100$

Substituindo S por 100, em (II), chegamos a $E = 40$.

Substituindo S por 100 e E por 40, em (I), temos $L = 120$.

Como cada um dos valores L, S e E representa o número de porções de 100 g, concluímos que o fabricante deve produzir 12.000 g, ou seja, 12 kg, de granola light; 10.000 g, ou seja, 10 kg, de granola simples; e 4.000 g, ou seja, 4 kg, de granola especial.

99. Indicando, respectivamente, por a, b e c as quantidades, em porções de 100 gramas, dos complementos alimentares A, B e C, temos:

$\begin{cases} 2a + 12b + 8c = 35 \\ 28a + 60b + 80c = 242 \\ 2a + 9b + 5c = 26 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a + 12b + 8c = 35 \\ 0a - 108b - 32c = -248 \\ 0a - 3b - 3c = -9 \end{cases}$

Dividindo por -3 ambos os membros da terceira equação e permutando as duas últimas equações, obtemos:

$\begin{cases} 2a + 12b + 8c = 35 \\ 0a + b + c = 3 \\ 0a - 108b - 32c = -248 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a + 12b + 8c = 35 & \text{(I)} \\ 0a + b + c = 3 & \text{(II)} \\ 0a + 0b + 76c = 76 & \text{(III)} \end{cases}$

De (III), obtemos $c = 1$.

Substituindo c por 1, em (II), chegamos a $b = 2$.

Substituindo c por 1 e b por 2, em (I), temos $a = 1{,}5$.

Como cada um dos valores a, b e c representa o número de porções de 100 g, concluímos que a mistura deve ser composta por 150 g do complemento A, 200 g do complemento B e 100 g do complemento C.

100. Sendo a, b e c, respectivamente, os valores, em reais, aplicados nos fundos A, B e C, sob as condições estabelecidas, temos:

$\begin{cases} a + b + c = 50.000{,}00 \\ b = c + 2.000{,}00 \end{cases} \Rightarrow c = 24.000{,}00 - \dfrac{a}{2}$

Como a, b e c são valores positivos, então $c < 24.000{,}00$.

Alternativa **c**.

101. Sendo x, y e z, respectivamente, os números de atletas classificados com 18, 19 e 20 pontos, temos:

$\begin{cases} 18x + 19y + 20z = 116 & \text{(I)} \\ y + z = 4 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvemos o sistema em função da variável livre z:

- De (II), obtemos: $y = 4 - z$
- Substituindo y por $4 - z$ em (I), obtemos:

  $18x + 19(4 - z) + 20z = 116 \Rightarrow x = \dfrac{40 - z}{18}$

Como x, y e z são números naturais, com $y \leqslant 4$ e $z \leqslant 4$, o único valor possível para z é 4.

$z = 4 \Rightarrow x = \dfrac{40 - 4}{18} = 2$

Substituindo x e z por 2 e 4, respectivamente, em (I), obtemos: $18 \cdot 2 + 19y + 20 \cdot 4 = 116 \Rightarrow y = 0$

Logo, o número de atletas classificados é dado por: $2 + 0 + 4 = 6$

102. Indicando por L, B e C os preços unitários da caixa de lenços, do boné e da camiseta, temos:

$\begin{cases} L + 2B + 3C = 127 \\ 3L + 4B + 5C = 241 \end{cases}$

Subtraindo, membro a membro, as duas equações, obtemos:

$2L + 2B + 2C = 114$

Dividindo por 2, ambos os membros, concluímos:

$L + B + C = 57$

Logo, a quantia a ser desembolsada na compra de uma caixa de lenços, um boné e uma camiseta é R$ 57,00.

Alternativa **d**.

103. Indicando por G, E e D as vendas, em hectolitro, de gasolina, etanol e diesel, respectivamente, temos:

$\begin{cases} 15G + 30E + 45D = 17.850 \\ 24G + 24E + 48D = 19.608 \\ 18G + 27E + 45D = 16.470 \end{cases} \sim \begin{cases} G + 2E + 3D = 1.190 \\ G + E + 2D = 817 \\ 2G + 3E + 5D = 1.830 \end{cases}$

Escalonando o sistema, obtemos:

$\begin{cases} G + 2E + 3D = 1.190 \\ 0G - E - D = -373 \\ 0G + 0E + 0D = -177 \end{cases}$

Como esse sistema é impossível, conclui-se que os dados apresentados na tabela são incompatíveis; portanto, o proprietário tinha razão.

104. Temos: $\dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 18y \\ 2x = 18z \\ 2y = 6z \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 3y = 0 & \text{(I)} \\ 3y - 9z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (II), obtemos $y = 3z$. Substituindo y por $3z$ em (I), obtemos: $x = 9z$

Concluímos, então, que todos os ternos ordenados de números reais positivos que satisfazem o sistema do item **a** são da forma $(9z, 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}_+^*$.

105. A distância d entre os carros em qualquer instante do período considerado é dada por:

$$d = |280x + 40 - (280x + k)| = |40 - k|$$

a) Para que a distância d, calculada acima, seja diferente de zero (um carro à frente do outro), o parâmetro k deve assumir um valor diferente de 40, com o que concluímos que os gráficos das equações do sistema são segmentos de reta paralelos distintos.

b) Para que a distância d, calculada acima, seja nula (carros empatados), o parâmetro k deve assumir o valor 40, com o que concluímos que os gráficos das equações do sistema são segmentos de reta coincidentes.

106. a) Para que as retas sejam paralelas distintas, o sistema abaixo deve ser impossível:

$$\begin{cases} 0{,}05x - y = -5.000 \\ (k - 0{,}05)x - y = 5.000 \end{cases}$$

Uma condição necessária para que esse sistema seja impossível é que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo:

$$\begin{vmatrix} 0{,}05 & -1 \\ k - 0{,}05 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 0{,}1$$

Substituindo k por 0,1 no sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 0{,}05x - y = -5.000 \\ 0{,}05x - y = 5.000 \end{cases} \text{ equações incompatíveis}$$

Logo, para $k = 0{,}1$ o sistema é impossível e, portanto, as retas são paralelas distintas.

b) $L(x) > 0 \Rightarrow (0{,}1 - 0{,}05)x - 5.000 > 0$

$\therefore\ 0{,}05x > 5.000 \Rightarrow x > 100.000$

Logo, o fabricante ganhará algum dinheiro se forem vendidas mais de 100.000 garrafas.

107. Indicando por p, m e g os preços, em real, dos pacotes pequeno, médio e grande, respectivamente; e sendo a, b e c, as receitas apuradas nos dias 1, 2 e 3, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 12p + 10m + 6g = a \\ 16p + 9m + 8g = b \\ 2kp + 10m + kg = c \end{cases}$$

Como os preços das rações se mantiveram nesses três dias, temos que existe um terno (p, m, g) que satisfaz as três equações acima, com o que concluímos que o sistema é possível. Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 6 \\ 16 & 9 & 8 \\ 2k & 10 & k \end{vmatrix} =$$

$$= 108k + 960 + 160k - 108k - 960 - 160k = 0$$

Como o sistema é possível e o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, concluímos que o sistema é possível e indeterminado. Logo, não é possível determinar o preço do pacote de cada tipo de ração.

108. a) Como a velocidade foi constante, temos:

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3k} = \dfrac{z}{2k}$ e, portanto:

$$\begin{cases} 3kx - 4y = 0 \\ 2kx - 4z = 0 \\ 2ky - 3kz = 0 \end{cases}$$

b) $D = \begin{vmatrix} 3k & -4 & 0 \\ 2k & 0 & -4 \\ 0 & 2k & -3k \end{vmatrix} = 0$

Como $D = 0$, o sistema homogêneo é possível e indeterminado para qualquer valor real positivo de k.

109. Sendo x e y, respectivamente, os preços por quilograma do café e do açúcar, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + ny = 15 \\ 3x + (n + 1)y = 22 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ (n - 4)y = -1 \\ (n - 5)y = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \dfrac{-1}{n - 4} \\ y = \dfrac{-2}{n - 5} \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter:

$$\frac{-1}{n - 4} = \frac{-2}{n - 5} \Rightarrow n = 3$$

Alternativa **c**.

110. a) Temos:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = \frac{d}{k} \Rightarrow \begin{cases} 5a + (-6)b + 0c + 0d = 0 \\ 0a + 8b + (-5)c + 0d = 0 \\ 0a + 0b + kc + (-8)d = 0 \\ ka + 0b + 0c + (-6)d = 0 \end{cases}$$

b) Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & k & -8 \\ k & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 0 & k & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-6) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & k & -8 \\ k & 0 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^2 \cdot (-48k) + (-6) \cdot (-1)^3 \cdot (40k) =$$

$$= -240k + 240k = 0$$

Como o sistema é homogêneo e $D = 0$, concluímos que o sistema é possível e indeterminado (SPI).

111. Sendo p, m, g e e os preços dos pacotes de tamanhos pequeno, médio, grande e extragrande, respectivamente, e r_1, r_2, r_3 e r_4 as receitas obtidas nos dias 1, 2, 3 e 4, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 12p + 7m + 2g + 4e = r_1 \\ 15p + 8m + g + 3e = r_2 \\ 10p + 6m + 2g + ke = r_3 \\ 13p + 7m + g + ke = r_4 \end{cases}$$

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 7 & 2 & 4 \\ 15 & 8 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & k \\ 13 & 7 & 1 & k \end{vmatrix} = 4A_{14} + 3A_{24} + kA_{34} + kA_{44},$$

em que:

$A_{14} = 0$; $A_{24} = 0$; $A_{34} = 0$; $A_{44} = 0$

Portanto: $D = \begin{vmatrix} 12 & 7 & 2 & 4 \\ 15 & 8 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & k \\ 13 & 7 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$

Logo, o sistema é possível e indeterminado e, portanto, não é possível saber o preço de cada tipo de pacote de sabão em pó a partir desses dados.

Pré-requisitos para o capítulo 8

1. **a)** A página é composta por 25 fileiras horizontais de quadrículas e 20 fileiras verticais de quadrículas; logo, o número de quadrículas é dado por $25 \cdot 20 = 500$.

b) O número de quadrículas de todo o caderno é dado por $100 \cdot 25 \cdot 20 = 50.000$.

2. O número de cadeiras de cada salão é o produto do número de mesas pelo número de cadeiras que rodeiam cada mesa. Assim, o número n de cadeiras nos dois salões é dado por:

$$n = 20 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 170$$

3. Indicando por A o conjunto dos alunos com mais de 16 anos e por B o conjunto dos alunos com menos de 18 anos, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 30 = 20 + 15 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 5$

Logo, 5 alunos têm mais de 16 e menos de 18 anos.

4. **a)** AB, BA, AC, CA, BC, CB

b) $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$

5. $\{4, 6\}, \{4, 7\}, \{4, 9\}, \{6, 7\}, \{6, 9\}, \{7, 9\}$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Das informações das tabelas, obtemos o custo C de entrega, dado por $C = 3x + 2y + 1t + 4z$, e o sistema:

$$\begin{cases} x + y + t + z = 14 \\ x + y = 8 \\ t + z = 6 \\ x + t = 9 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

que na forma escalonada é

$$\begin{cases} x + y + t + z = 14 \\ 0x + y + 0t + z = 5 \\ 0x + 0y + t + z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em função de z, obtemos a solução genérica $(6 - z, 3 + z, 5 - z, z)$, considerando a ordem alfabética das variáveis (t, x, y, z).

Substituindo a solução genérica na função custo $C = 3x + 2y + 1t + 4z$, chegamos a:

$C = 3(3 + z) + 2(5 - z) + 6 - z + 4z \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 25 + 4z$

Logo, o valor mínimo de C é obtido para $z = 0$, com o qual se obtém a quadra $(t, x, y, z) = (3, 5, 6, 0)$. Concluímos, então, que o custo mínimo de entrega é obtido para $t = 3$, $x = 5$, $y = 6$ e $z = 0$.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno cometeu um erro ao admitir que a variável b pode assumir qualquer valor real, pois b representa o número de gols, portanto, b deve ser um número natural.

Resolução correta:

Indicando por a, b e c os números de gols marcados pelos jogadores A, B e C, respectivamente, sem considerar o último jogo, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 25 & \text{(I)} \\ a = c + 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$c + 1 + b + c = 25 \Rightarrow 2c = 24 - b$

$\therefore c = \dfrac{24 - b}{2} = 12 - \dfrac{b}{2}$ (III)

Como a, b e c devem ser números naturais, concluímos da equação (III) que b é natural par menor ou igual a 24. Atribuindo a b esses possíveis valores, temos:

b	c	a
0	12	13
2	11	12
4	10	11
6	9	10
8	8	9
10	7	8
12	6	7
14	5	6
16	4	5
18	3	4
20	2	3
22	1	2
24	0	1

Observando a tabela, constatamos que com apenas um gol só poderia ocorrer empate nas cinco primeiras linhas numéricas dessa tabela, e em qualquer uma delas o jogador A seria um dos artilheiros.

Alternativa **a**.