

Equações e Inequações Exponenciais

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é dita exponencial quando a variável se apresenta no expoente. Seja **a** um número real tal que $0 < a \neq 1$. Como a função exponencial é injetora, temos:

$$\text{Se } a^x = a^y, \text{ então } x = y.$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolver, em \mathbb{R} , a equação $32^x = 128$.

Resolução:

$$32^x = 128 \Rightarrow (2^5)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{5x} = 2^7 \Rightarrow$$

$$5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \frac{7}{5} \right\}.$$

02. Resolver, em \mathbb{R} , a equação $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$.

Resolução:

$$\text{Podemos escrever } 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{82}{9}.$$

Substituindo 3^x por **y**, temos:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{82}{9} \Rightarrow \frac{9y^2 + 9}{9y} = \frac{82y}{9y}$$

$$9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6\,400$$

$$y = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{9} \text{ ou } y = 9$$

$$\text{Para } y = \frac{1}{9}, \text{ temos } 3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Para } y = 9, \text{ temos } 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Portanto, } S = \{-2, 2\}.$$

03. Resolver, em \mathbb{R} , a equação $4^x - 2^x - 12 = 0$.

Resolução:

$$2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$$

$$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3 \text{ ou } y = 4$$

Para $y = -3$, temos $2^x = -3$ (absurdo).

Para $y = 4$, temos $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Toda desigualdade em que a variável aparece no expoente é uma inequação exponencial.

Exemplos:

1º) $7^x > 343$

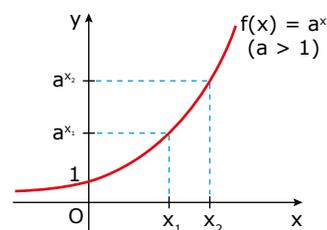
2º) $3^{x-4} \leq 81$

3º) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$

De modo geral, uma inequação deve ser resolvida colocando-se a mesma base **a** nos dois membros da inequação e considerando-se os seguintes casos:

1º caso: a > 1

Como a função $f(x) = a^x$ é crescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 > x_1$.



Portanto:

Se $a > 1$, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

- 08.** (ESPM-SP) Se $(4^x)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$, o valor de x^x é
- LWKA**
-  A) 27. C) $\frac{1}{4}$. E) $-\frac{1}{27}$.
- B) 4. D) 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS



- 01.** (UFJF-MG) A função $c(t) = 200 \cdot 3^{kt}$, com $k = \frac{1}{12}$, dá o crescimento do número **C**, de bactérias, no instante **t** em horas. O tempo necessário, em horas, para que haja, nessa cultura, 1 800 bactérias, está no intervalo:
- D1Q5**
-  A) [0, 4] D) [36, 72]
- B) [4, 12] E) [72, 108]
- C) [12, 36]

- 02.** (FGV-SP) A raiz da equação $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7$ é
- A) um número primo.
- B) um número negativo.
- C) um número irracional.
- D) um número maior ou igual a 1.
- E) um múltiplo de 5.

- 03.** (Mackenzie-SP) O conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $M^{x^2-1} \leq M^{x^2-1}$, com **M** real e $M > 1$, é:
- AN34**
-  A) $]-\infty; 1]$ D) $[-1; \infty[$
- B) $[1; \infty[$ E) $[0; \infty[$
- C) $[0; 1]$

- 04.** (ESPM-SP) A soma das raízes da equação $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$ é igual a
- E3VE**
-  A) 5. C) 8. E) 7.
- B) 3. D) 12.

- 05.** (FGV) A raiz da equação $3^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 22\sqrt{3}$ é um número
- A) inteiro positivo.
- B) inteiro negativo.
- C) irracional.
- D) racional positivo não inteiro.
- E) racional negativo não inteiro.

- 06.** (UFSJ-MG) A interseção dos gráficos das funções $h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a
- 65X0**
-  A) 2 e pertence à reta $y = x + 2$.
- B) 1 e pertence à reta $y = x + 1$.
- C) 2 e pertence à reta $y = x - 2$.
- D) 1 e pertence à reta $y = x - 1$.

- 07.** (UFSCar-SP) O par ordenado (x, y) , solução do sistema
- FYEN**
- 
$$\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$$
, é:

- A) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$
- B) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$
- C) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$
- D) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
- E) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

- 08.** (ESPM-SP) O valor de **x** na equação $4^x + 2 \cdot 8^x = 2^x$ é
- XDQA**
-  A) irracional.
- B) racional não inteiro positivo.
- C) racional não inteiro negativo.
- D) racional inteiro positivo.
- E) racional inteiro negativo.

- 09.** (UECE-2020) Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, então, o número de elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R}, \text{tais que } f(x) = 1\}$ é igual a
- 4BZM**
-  A) 0.
- B) 2.
- C) 1.
- D) 3.

- 10.** (FGV) Se $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível que é solução da equação exponencial $9^x - 9^{x-1} = 1\,944$, então, $m - n$ é igual a
- FYKU**
-  A) 2.
- B) 3.
- C) 4.
- D) 5.
- E) 6.

- 11.** (Mackenzie-SP-2018) Os valores de **x**, $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem as condições $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq 5^{-4x}$ e $x^2 \leq 5$, são:
- 7ZKI**
-  A) $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$
- B) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
- C) $0 \leq x \leq 4$
- D) $x \leq 0$ ou $x \geq 4$
- E) $-\sqrt{5} \leq x \leq 0$

12. (IFSul-2017) A equação $2^{x+1} - 24 = -\frac{64}{2^x}$ possui como solução:

- A) $x = 2$ e $x = 3$ C) $x = 3$ e $x = 6$
 B) $x = 2$ e $x = 6$ D) $x = 4$ e $x = 8$

13. (UEMG-2017) Considere o seguinte sistema:

NC6H 
$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot 3^y \end{cases}$$

Na solução desse sistema, tem-se $x = a$ e $y = b$. Assim, o valor da expressão $\frac{(a-3b)(b-a)}{3(b+a)}$ é

- A) -1. C) $\frac{1}{5}$.
 B) $-\frac{1}{2}$. D) $\frac{1}{3}$.

14. (UEL-PR) Um barco parte de um porto **A** com 2^k passageiros e passa pelos portos **B** e **C**, deixando em cada um metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um, $2^{\frac{k}{2}}$ novos passageiros. Se o barco parte do porto **C** com 28 passageiros e se **N** representa o número de passageiros que partiram de **A**, é correto afirmar que

- A) **N** é múltiplo de 7. D) **N** é divisor de 128.
 B) **N** é múltiplo de 13. E) **N** é primo.
 C) **N** é divisor de 50.

15. (EsPCEx-SP) O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$

A1MA  é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é:

- A) Ambos no primeiro quadrante.
 B) Um no quarto quadrante e o outro no eixo x.
 C) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
 D) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo y.
 E) Um no segundo quadrante e o outro no eixo x.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que **t** é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

- A) reduzida a um terço.
 B) reduzida à metade.
 C) reduzida a dois terços.
 D) duplicada.
 E) triplicada.

02. A pressão atmosférica **P**, em mmHg, é dada em função da altura **h** (em relação ao nível do mar) pela expressão $P(h) = 760 \cdot e^{\lambda h}$, sendo **e** o número neperiano, que vale aproximadamente 2,7182. Um alpinista, ao escalar uma elevação, verificou através de um barômetro (instrumento que mede a pressão atmosférica) que a pressão no ponto em que se encontrava era igual a 600 mmHg. Considerando o parâmetro $\lambda = -0,0002$, pode-se afirmar que a altura do alpinista, em relação ao nível do mar, é igual a

- Dados:** $e^{6,63} = 760$ e $e^{6,40} = 600$.
 A) 1 150 m.
 B) 1 370 m.
 C) 1 520 m.
 D) 2 240 m.
 E) 3 000 m.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP



GABARITO

Meu aproveitamento 

Aprendizagem

Acertei _____ Errei _____

01. C 03. D 05. B 07. D
 02. E 04. B 06. A 08. B

Propostos

Acertei _____ Errei _____

01. C 05. D 09. C 13. C
 02. D 06. A 10. D 14. D
 03. A 07. D 11. E 15. E
 04. A 08. E 12. A

Seção Enem

Acertei _____ Errei _____

01. D 02. A



Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %