

## Equações e Inequações Exponenciais

### EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é dita exponencial quando a variável se apresenta no expoente. Seja **a** um número real tal que  $0 < a \neq 1$ . Como a função exponencial é injetora, temos:

$$\text{Se } a^x = a^y, \text{ então } x = y.$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01.** Resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $32^x = 128$ .

**Resolução:**

$$32^x = 128 \Rightarrow (2^5)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{5x} = 2^7 \Rightarrow$$

$$5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \frac{7}{5} \right\}.$$

**02.** Resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$ .

**Resolução:**

$$\text{Podemos escrever } 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{82}{9}.$$

Substituindo  $3^x$  por **y**, temos:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{82}{9} \Rightarrow \frac{9y^2 + 9}{9y} = \frac{82y}{9y}$$

$$9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6\,400$$

$$y = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{9} \text{ ou } y = 9$$

$$\text{Para } y = \frac{1}{9}, \text{ temos } 3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Para } y = 9, \text{ temos } 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Portanto, } S = \{-2, 2\}.$$

**03.** Resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $4^x - 2^x - 12 = 0$ .

**Resolução:**

$$2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Substituindo  $2^x$  por **y**, temos:

$$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$$

$$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3 \text{ ou } y = 4$$

Para  $y = -3$ , temos  $2^x = -3$  (absurdo).

Para  $y = 4$ , temos  $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$ .

Portanto,  $S = \{2\}$ .

### INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Toda desigualdade em que a variável aparece no expoente é uma inequação exponencial.

**Exemplos:**

**1º)**  $7^x > 343$

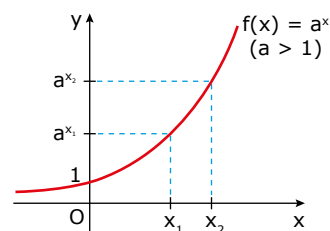
**2º)**  $3^{x-4} \leq 81$

**3º)**  $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$

De modo geral, uma inequação deve ser resolvida colocando-se a mesma base **a** nos dois membros da inequação e considerando-se os seguintes casos:

**1º caso: a > 1**


Como a função  $f(x) = a^x$  é crescente, observamos que, se  $a^{x_2} > a^{x_1}$ , então  $x_2 > x_1$ .




Portanto:

Se  $a > 1$ , devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.




- 08.** (ESPM-SP) Se  $(4^x)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$ , o valor de  $x^x$  é
- LWKA**
-  A) 27.                      C)  $\frac{1}{4}$ .                      E)  $-\frac{1}{27}$ .
- B) 4.                      D) 1.

- 07.** (UFSCar-SP) O par ordenado  $(x, y)$ , solução do sistema
- FYEN**
-  
$$\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$$
, é:


- A)  $(5, \frac{3}{2})$
- B)  $(5, -\frac{3}{2})$
- C)  $(3, \frac{2}{3})$
- D)  $(1, \frac{3}{2})$
- E)  $(1, \frac{1}{2})$


## EXERCÍCIOS PROPOSTOS




- 01.** (UFJF-MG) A função  $c(t) = 200 \cdot 3^{kt}$ , com  $k = \frac{1}{12}$ , dá o crescimento do número **C**, de bactérias, no instante **t** em horas. O tempo necessário, em horas, para que haja, nessa cultura, 1 800 bactérias, está no intervalo:
- D1Q5**
-  A) [0, 4]                      D) [36, 72]
- B) [4, 12]                      E) [72, 108]
- C) [12, 36]


- 02.** (FGV-SP) A raiz da equação  $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7$  é
- A) um número primo.
- B) um número negativo.
- C) um número irracional.
- D) um número maior ou igual a 1.
- E) um múltiplo de 5.


- 03.** (Mackenzie-SP) O conjunto solução, em  $\mathbb{R}$ , da inequação  $M^{x^2-1} \leq M^{x^2-1}$ , com **M** real e  $M > 1$ , é:
- AN34**
-  A)  $]-\infty; 1]$                       D)  $[-1; \infty[$
- B)  $[1; \infty[$                       E)  $[0; \infty[$
- C)  $[0; 1]$


- 04.** (ESPM-SP) A soma das raízes da equação  $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$  é igual a
- E3VE**
-  A) 5.                      C) 8.                      E) 7.
- B) 3.                      D) 12.


- 05.** (FGV) A raiz da equação  $3^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 22\sqrt{3}$  é um número
- A) inteiro positivo.
- B) inteiro negativo.
- C) irracional.
- D) racional positivo não inteiro.
- E) racional negativo não inteiro.

- 06.** (UFSJ-MG) A interseção dos gráficos das funções  $h(x) = 2^x + 1$  e  $s(x) = 2^{x+1}$  é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a
- 65X0**
-  A) 2 e pertence à reta  $y = x + 2$ .
- B) 1 e pertence à reta  $y = x + 1$ .
- C) 2 e pertence à reta  $y = x - 2$ .
- D) 1 e pertence à reta  $y = x - 1$ .

- 08.** (ESPM-SP) O valor de **x** na equação  $4^x + 2 \cdot 8^x = 2^x$  é
- XDQA**
-  A) irracional.
- B) racional não inteiro positivo.
- C) racional não inteiro negativo.
- D) racional inteiro positivo.
- E) racional inteiro negativo.

- 09.** (UECE-2020) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ , então, o número de elementos do conjunto  $\{x \in \mathbb{R}, \text{tais que } f(x) = 1\}$  é igual a
- 4BZM**
-  A) 0.
- B) 2.
- C) 1.
- D) 3.


- 10.** (FGV) Se  $\frac{m}{n}$  é a fração irredutível que é solução da equação exponencial  $9^x - 9^{x-1} = 1\,944$ , então,  $m - n$  é igual a
- FYKU**
-  A) 2.
- B) 3.
- C) 4.
- D) 5.
- E) 6.

- 11.** (Mackenzie-SP-2018) Os valores de **x**,  $x \in \mathbb{R}$ , que satisfazem as condições  $(\frac{1}{5})^{x^2} \leq 5^{-4x}$  e  $x^2 \leq 5$ , são:
- 7ZKI**
-  A)  $x \leq -\sqrt{5}$  ou  $x \geq \sqrt{5}$
- B)  $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
- C)  $0 \leq x \leq 4$
- D)  $x \leq 0$  ou  $x \geq 4$
- E)  $-\sqrt{5} \leq x \leq 0$

12. (IFSul-2017) A equação  $2^{x+1} - 24 = -\frac{64}{2^x}$  possui como solução:

- A)  $x = 2$  e  $x = 3$                       C)  $x = 3$  e  $x = 6$   
 B)  $x = 2$  e  $x = 6$                       D)  $x = 4$  e  $x = 8$

13. (UEMG-2017) Considere o seguinte sistema:

NC6H  
 
$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot 3^y \end{cases}$$


Na solução desse sistema, tem-se  $x = a$  e  $y = b$ . Assim, o valor da expressão  $\frac{(a-3b)(b-a)}{3(b+a)}$  é

- A) -1.    C)  $\frac{1}{5}$ .  
 B)  $-\frac{1}{2}$ .    D)  $\frac{1}{3}$ .

14. (UEL-PR) Um barco parte de um porto **A** com  $2^k$  passageiros e passa pelos portos **B** e **C**, deixando em cada um metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um,  $2^{\frac{k}{2}}$  novos passageiros. Se o barco parte do porto **C** com 28 passageiros e se **N** representa o número de passageiros que partiram de **A**, é correto afirmar que

- A) **N** é múltiplo de 7.                      D) **N** é divisor de 128.  
 B) **N** é múltiplo de 13.                      E) **N** é primo.  
 C) **N** é divisor de 50.

15. (EsPCEx-SP) O conjunto solução do sistema  $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$

A1MA  
 é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é:

- A) Ambos no primeiro quadrante.  
 B) Um no quarto quadrante e o outro no eixo  $x$ .  
 C) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.  
 D) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo  $y$ .  
 E) Um no segundo quadrante e o outro no eixo  $x$ .

## SEÇÃO ENEM

01. (Enem) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que **t** é o tempo, em hora, e  $p(t)$  é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

- A) reduzida a um terço.  
 B) reduzida à metade.  
 C) reduzida a dois terços.  
 D) duplicada.  
 E) triplicada.

02. A pressão atmosférica **P**, em mmHg, é dada em função da altura **h** (em relação ao nível do mar) pela expressão  $P(h) = 760 \cdot e^{\lambda h}$ , sendo **e** o número neperiano, que vale aproximadamente 2,7182. Um alpinista, ao escalar uma elevação, verificou através de um barômetro (instrumento que mede a pressão atmosférica) que a pressão no ponto em que se encontrava era igual a 600 mmHg. Considerando o parâmetro  $\lambda = -0,0002$ , pode-se afirmar que a altura do alpinista, em relação ao nível do mar, é igual a

**Dados:**  $e^{6,63} = 760$  e  $e^{6,40} = 600$ .

- A) 1 150 m.  
 B) 1 370 m.  
 C) 1 520 m.  
 D) 2 240 m.  
 E) 3 000 m.

## SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP



### GABARITO

Meu aproveitamento 

#### Aprendizagem

Acertei \_\_\_\_\_ Errei \_\_\_\_\_

01. C     03. D     05. B     07. D  
 02. E     04. B     06. A     08. B

#### Propostos

Acertei \_\_\_\_\_ Errei \_\_\_\_\_

01. C     05. D     09. C     13. C  
 02. D     06. A     10. D     14. D  
 03. A     07. D     11. E     15. E  
 04. A     08. E     12. A

#### Seção Enem

Acertei \_\_\_\_\_ Errei \_\_\_\_\_

01. D     02. A



Total dos meus acertos: \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ %