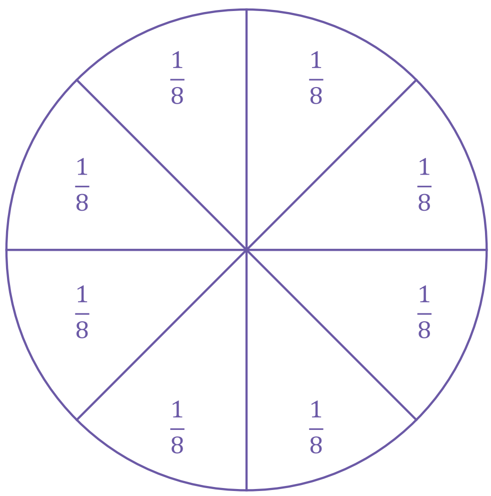
FRAÇÕES

Quando queremos dividir um número em partes iguais, obtemos variadas parcelas do mesmo tamanho. Esse número obtido, que representa cada uma destas parcelas, é chamado de **fração**.

Ao dividirmos uma pizza, por exemplo, em 8 fatias iguais teremos oito parcelas sendo que cada uma representa um oitavo $\left(\frac{1}{8}\right)$ da pizza.

O número $\frac{1}{8}$ é a fração que representa cada pedaço da pizza. Podemos visualizar melhor em um desenho da seguinte forma:



Definimos como fração $\frac{a}{b}$ o resultado do quociente entre a e b, com $b \neq 0$.

Na fração, o número que vai na parte de cima é chamado de **numerador** e o número que vai na parte de baixo é chamado de **denominador**. No caso da pizza, o 1 é o numerador pois temos uma pizza a ser dividida em 8 pedaços, com isso o 8 é o denominador desta fração.

No caso das frações, o denominador nunca poderá ser zero, pois não há divisão por zero.

Todo número inteiro pode ser escrito também na forma de fração. Por exemplo:

$$5 = \frac{5}{1} \text{ , pois } 5 \div 1 = 5$$

Todo número decimal finito também pode ser escrito na forma fracionária, pois esse número decimal finito nada mais é do que um número dividido por alguma potência de 10. Por exemplo:

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} \quad \text{e} \quad 0{,}7 = \frac{7}{10}$$

Há casos em que o número decimal não será finito, ou seja, o número possuirá infinitas casas decimais após a vírgula. Esses números recebem uma denominação especial: são chamados de **dízimas**. As dízimas podem ser periódicas ou não periódicas.

As dízimas periódicas são os números decimais infinitos (obtidos através de uma fração) cujos algarismos das casas decimais apresentam, a partir de algum ponto, um padrão de repetição. Este padrão de repetição é chamado de período. Já, as dízimas não periódicas são os números decimais infinitos que não possuem um padrão de repetição.

As dízimas periódicas são classificadas em: simples ou compostas. Segue abaixo alguns exemplos de dízimas periódicas simples e compostas:

1. 2,5555555...

O 2 é a parte inteira do número e o 5 é o período.

2. 3,46464646...

O 3 é a parte inteira e o 46 é o período.

3. 78,903903903903...

O 78 é a parte inteira e o 903 é o período.

4. 1,244444...

O 1 é a parte inteira, o 2 é a parte não periódica e o 4 é o período.

5. 24,3155555...

O 24 é a parte inteira, o 31 é a parte não periódica e o 5 é o período.

A partir dos exemplos, você consegue diferenciar uma dízima periódica simples de uma composta?

Dízima periódica simples é aquela cujo padrão de repetição começa nos algarismos logo após a vírgula. Já, dízima periódica composta é aquela em que existe pelo menos um algarismo entre a parte inteira e o primeiro período.

Nos exemplos acima, 1,2 e 3 são dízimas periódicas simples e 4 e 5 são dízimas periódicas compostas.

FRAÇÃO GERATRIZ

Como vimos anteriormente, as dízimas periódicas resultam da divisão de um numerador pelo denominador de uma fração. Essa fração inicial é chamada de **fração geratriz** e, para descobrir qual é a fração geratriz de uma dízima periódica, existe um método bem prático.

Para demonstrar o método de como encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica simples, vamos pegar como exemplo a dizima periódica 0,55555... Lembrando que o período é o número que se repete depois da vírgula, que neste caso é 5.

Montamos a fração geratriz da seguinte forma: o período da dízima é o número que comporá o numerador e, como denominador da fração, colocamos o algarismo 9 quantas vezes forem a quantidade de algarismos do período. Se o período for composto por um algarismo, o denominador terá um algarismo 9, se tiver dois algarismos então terá 2 algarismos 9 e assim por diante.

Neste exemplo, como o período é 5, ele é formado por apenas um algarismo e, assim, o nosso denominador terá apenas um 9.

Portanto, a fração geratriz da dizima periódica 0,5555... é:

$$\frac{5}{9}$$

Para saber se o resultado está correto, basta dividir 5 por 9 que terá como resultado 0,5555...

Agora vamos pegar como exemplo a dízima periódica 0,252525... Observe que neste caso temos o período formado pelo 25, que possui dois algarismos. Sendo assim, a fração geratriz é:

$$\frac{25}{99}$$

Mas e como proceder quando a dízima periódica possui a parte inteira diferente de zero?

Neste caso, vamos primeiro separar a parte inteira da parte decimal. Por exemplo, no número 3,4444..., podemos reescrevê-lo da seguinte forma sem mudar o valor do número:

$$3{,}4444\ldots = 3 + 0{,}4444\ldots$$

Feito isso, a parte inteira do número é deixada de lado enquanto a parte periódica é reescrita da mesma forma que vimos anteriormente. Sendo assim ficaremos com a seguinte situação:

$$3 + \frac{4}{9}$$

Para somá-los, vamos transformar o 3 em fração:

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{9}$$

Agora, como os denominadores são diferentes as frações não podem ser somadas numerador + numerador e denominador + denominador, como veremos mais adiante.

Sendo assim, vamos multiplicar o denominador 1 por algum número que possa deixar as duas frações com o mesmo denominador. Neste caso vamos multiplicar por 9 e, para não mudar o valor da fração, temos que multiplicar também o numerador 3 por 9, ficando da seguinte forma:

$$\frac{27}{9}+\frac{4}{9}$$

Note que $\frac{27}{9}=27\ \div 9=3=\frac{3}{1}$, ou seja, não mudou o valor do número.

Finalizando as contas, temos nossa fração geratriz que é:

$$\frac{31}{9}$$

Podemos também estarmos interessados em encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica composta. Como procedemos nesse caso?

Como exemplo, considere a dízima 3,15656... O primeiro passo é copiar o número até o final do período de repetição. Como nesse caso o período é 56, temos o número 3156. Identifique agora o número que não forma o período de repetição. Nesse caso, 31. Subtraia-os: 3156-31. O valor dessa subtração é o numerador da fração geratriz.

Para o denominador, completamos com uma quantidade de algarismos 9 iguais à quantidade de algarismos do período. Nesse caso colocaremos 99. Coloque também no denominador a quantidade de algarismos 0 iguais à quantidade de algarismos após a vírgula que não se repetem. Nesse caso colocaremos apenas um 0, pois apenas o algarismo 1 não se repete.

Sendo assim, temos:

$$\frac{3156-31}{990}=\frac{3125}{990}$$

Observação: o processo descrito acima pode ser generalizado para qualquer dízima periódica composta.

É possível encontrar a fração geratriz de outra forma também, veja os exemplos abaixo:

1. $0{,}545454\ldots$

Seja $x=0{,}545454\ldots$

Então $100\,x=54{,}5454\ldots$

Assim, $100\,x=54{,}5454\ldots$

$$\begin{array}{r} -\quad x=0{,}545454\ldots \\ \hline 99\,x=54 \\ x=\frac{54}{99} \end{array}$$

2. 2,333...

Seja $x = 2{,}333...$

Então $10x = 23{,}333...$

Assim, $10x = 23{,}333...$

$$\begin{array}{r} -\ x = 2{,}3333... \\ \hline 9x = 23\text{-}2 \end{array}$$

$$9x = 21$$

$$x = \frac{21}{9}$$

Perceba que a ideia é multiplicar a dízima por uma potência de 10 conveniente que depois na subtração a parte decimal desapareça para que consigamos encontrar a fração geratriz. Esse processo também pode ser realizado na dízima periódica composta.

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÃO

Simplificar uma fração significa dividir o numerador e o denominador de uma fração pelo **mesmo número** para reduzi-la e encontrar uma fração equivalente.

Frações equivalentes são frações diferentes, mas que produzem os mesmos quocientes quando seus numeradores e denominadores são divididos.

A simplificação pode ser feita quantas vezes forem necessárias, até não ser possível dividir numerador e denominador por um divisor comum, nesse caso a fração chama-se **fração irredutível.**

Exemplos:

1. $\frac{9}{24}$

Podemos dividir o 9 e o 24 por 3, ficando com a fração $\frac{3}{8}$, que é irredutível. Escrevemos: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

2. $\frac{6}{18}$

Neste caso podemos dividir os dois números por 2, 3 ou 6. A diferença será a quantidade de vezes que precisaremos simplificar a fração. O mais prático é sempre pegar o maior divisor comum, neste exemplo o 6.

Dividindo ambos por 6, ficamos com a fração: $\frac{1}{3}$ e escrevemos $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

OPERAÇÕES ENTRE FRAÇÕES

Adição e subtração

A adição e subtração de frações pode ser dividida em dois casos: quando os denominadores são iguais e quando os denominadores são diferentes.

No caso dos denominadores iguais basta apenas somar ou subtrair os numeradores e conservar o denominador.

Exemplos:

1. $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{9}{5}$

2. $\frac{6}{11}+\frac{8}{11}=\frac{14}{11}$

3. $\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$

4. $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

Quando as frações têm os denominadores diferentes não é possível somar ou subtrair do mesmo jeito feito anteriormente. Precisamos primeiro deixar as frações com o mesmo denominador e depois somarmos ou subtrairmos.

Exemplos:

1. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$

Neste caso os denominadores são diferentes. Para deixarmos as duas frações com o mesmo denominador, encontramos o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os números 3 e 9, que neste caso vale 9. Ficaremos então com:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}+\frac{4}{9}=\frac{10}{9}$$

Na primeira fração $\left(\frac{2}{3}\right)$, perceba que do denominador 3 para o 9 multiplicamos por 3. Assim, para a fração $\frac{2}{3}$ não ser alterada, multiplicamos o numerador 2 por 3 também, o que resultou no numerador 6. Já, na segunda fração $\left(\frac{4}{9}\right)$, multiplicamos o denominador 9 por 1 e assim, multiplicamos o numerador 4 também por 1, o que resultou na fração $\frac{4}{9}$.

2. $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$

Neste exemplo, os denominadores também são diferentes, porém não são múltiplos. O MMC entre 5 e 4 é o número 20, sendo assim, teremos:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$$

Observação: perceba que o processo é o mesmo do exemplo 2.

Multiplicação

Na multiplicação de frações, basta multiplicar o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador, e ao final destas multiplicações, se necessário, a fração pode ser simplificada.

Exemplos:

1. $\frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$, note que aqui o resultado da multiplicação foi simplificado por 6.

Divisão

Para poder fazer a divisão de frações, é necessário ter compreendido a multiplicação entre elas. O motivo é que para resolver uma divisão entre frações deve-se manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda. O inverso significa que o numerador passa a ser o denominador e vice-versa.

Exemplos:

1. $\frac{1}{4} \div \frac{5}{8}$

Primeira fração: $\frac{1}{4}$

Inverso da segunda fração: $\frac{8}{5}$

E, assim:

$$\frac{1}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

2. $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{6}{5}} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{18}$

3. $\frac{3}{\frac{1}{4}} = \frac{3/1}{1/4} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$

4. $\frac{\frac{2}{5}}{6} = \frac{2/5}{6/1} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Observação: nos exercícios, tome cuidado para identificar qual é o traço principal da divisão das frações.

NÚMEROS MISTOS

Números mistos são aqueles formados por uma parte inteira e uma parte fracionária.

Exemplos:

1. $4\,\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

2. $5\,\frac{3}{7} = 5 + \frac{3}{7} = \frac{38}{7}$

ANOTAÇÕES