SUMÁRIO

RETAS ____ 3
RESUMO TEÓRICO ____ 3
1. EQUAÇÃO VETORIAL ____ 3
2. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS ____ 3
3. EQUAÇÃO SIMÉTRICA ____ 3
4. EQUAÇÃO GERAL ____ 4
5. EQUAÇÃO REDUZIDA ____ 4
6. VETOR NORMAL À UMA RETA ____ 4
7. PARALELISMO E PERPENDICULARISMO ____ 5
8. DISTÂNCIA DE PONTO À RETA ____ 5
9. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE 3 PONTOS ____ 6
10. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS ____ 6
11. ÂNGULO DE DUAS RETAS ____ 7
12. ÁREA DE UM TRIÂNGULO ____ 8
13. ÁREA DE POLÍGONOS ____ 10
EXERCÍCIOS DE COMBATE ____ 11
GABARITO ____ 17

RETAS

RESUMO TEÓRICO

1. EQUAÇÃO VETORIAL

Suponhamos que dados um ponto A do plano e um vetor $\vec{u}=(u_1,u_2)$ seja pedido achar a equação da reta (r) que passa por $A=(x_0,y_0)$ e tenha a direção de $\vec{u}$. Para resolver o problema seja P um ponto qualquer de (r), como queremos que (r) tenha a direção de $\vec{u}$. Decorre daí,que $P=A+\alpha\vec{u}$, onde P=(x,y) , $\alpha\in\mathbb{R}$ chamada a *equação vetorial da reta.*

2. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Obteremos, a partir da equação vetorial que:

$$(x,y)=(x_0,y_0)+\alpha(u_1,u_2) \text{ ou } \begin{cases} x=x_0+\alpha u_1 \\ y=y_0+\alpha u_2 \end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

que são as *equações paramétricas* da reta sendo α o *parâmetro*.

3. EQUAÇÃO SIMÉTRICA

Se $u_1\neq 0$ e $u_2\neq 0$ as equações paramétricas podem ser escritas na forma $\alpha=\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2}$

que é a chamada *equação simétrica* da reta.

4. EQUAÇÃO GERAL

Da equação simétrica obtém-se

ou $u_2x - u_1y + (u_1y_0 - u_2x_0) = 0$

fazendo $u_2 = a\,; -u_1 = b$ e $c = u_1y_0 - u_2x_0$ resulta que $ax + by + c = 0$ denominada *equação geral* da reta (r).

5. EQUAÇÃO REDUZIDA

Supondo $b \neq 0$ podemos escrever $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e pondo $m = -\frac{a}{b}$ e $p = -\frac{c}{b}$ segue-se que $y = mx + p$ conhecida como *equação reduzida da reta*.

Onde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que é igual à tangente do ângulo θ que a reta (r)faz com o semieixo positivo dos x. O parâmetro m é denominado coeficiente angular da reta (r) e é uma medida da inclinação da reta em relação ao eixo x .Se fizermos x = 0 na equação reduzida da reta obteremos y = p. Logo, o ponto (0, p) é o ponto de interseção de (r) com o eixo dos y e |p| é a distância deste ponto à origem. O parâmetro p é denominado *coeficiente linear da reta* (r).

6. VETOR NORMAL À UMA RETA

Suponhamos agora, uma reta (r) que passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ possui direção dada pelo vetor $\vec{u}$ e está representada pela sua equação geral $ax + by + c = 0$. Se $Q = (x_2, y_2)$ é outro ponto qualquer da reta (r), então claramente $\overrightarrow{PQ} = \alpha\vec{u}$ com $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Como P e Q são pontos de (r), temos também $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$. Subtraindo membro a membro a primeira da segunda temos que: $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$

A expressão acima pode ser identificada com o produto escalar do vetor $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ com o vetor $\vec{n} = (a, b)$. Fazendo esta identificação obtemos:

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$ qualquer que seja o ponto $Q=(x_2,y_2)$ da reta. Concluímos daí que se a reta estiver representada pela sua equação geral $ax+by+c=0$, *os números* a e b *são as componentes de um vetor* $\vec{n}$ *perpendicular à direção de* (r), isto é perpendicular ao vetor $\alpha\vec{u}$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$.

7. PARALELISMO E PERPENDICULARISMO

Suponhamos agora duas retas (r) e (s) representadas por suas equações gerais ax + by + c = 0 e $a'x+b'y+c'=0$, coeficientes angulares m e m' e vetores normais $\vec{n}=(a,b)$ e $\vec{n}'=(a',b')$ respectivamente. Logo,

(i) Se $(r)\parallel(s)$ então $\vec{n}\parallel\vec{n}'$ e daí $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ou ainda m = m’.

(ii) Se $(r)\perp(s)$ então $\vec{n}\perp\vec{n}'$ e daí $aa'+bb'=0$ ou ainda $m=-\frac{1}{m'}$.

8. DISTÂNCIA DE PONTO À RETA

Sejam dados a reta (r), representada pela sua equação geral, ax + by + c = 0 e $P_0=(x_0,y_0)$ determinemos agora a distância d do ponto à reta. Pelo que vimos anteriormente, a direção da normal a (r) é dada por $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ onde $\vec{n}=(a,b)$. Considere um ponto P qualquer da reta (r) e seja θ o ângulo entre a direção de $(\vec{u}-\vec{v})$ e $\hat{n}$. A distância d procurada é expressa por:

$$d=\left\|\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right\|\left|\cos\theta\right|=\left|\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cos\theta\right| \text{ ou seja } d=\left|\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\hat{n}\right|$$

Em coordenadas a fórmula acima se torna

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

9. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE 3 PONTOS

Sejam os pontos $P_1(x_1, y_1) \neq P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$.

Sabemos que os pontos P_1 e P_2 determinam a reta (r) da equação

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Para P_3 pertencer à reta (r) é necessário e suficiente que suas coordenadas satisfaçam sua equação $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \text{ ou } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ou } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

10. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas retas (r_1) e (r_2) do plano R^2 serão:

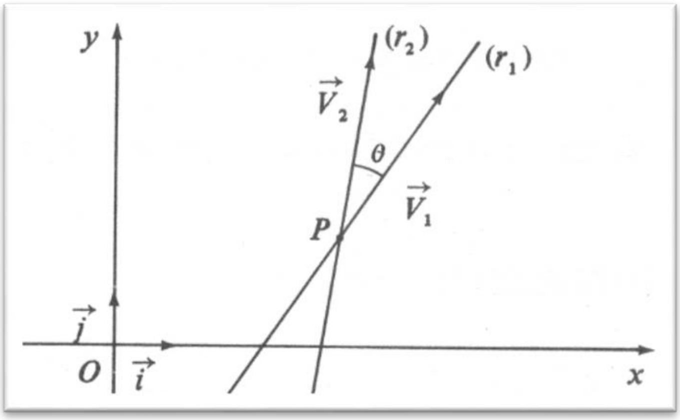
a) *paralelas distintas*: $(r_1) \cap (r_2) = \emptyset$

b) *coincidentes*: $(r_1) \cap (r_2) = (r_1) = (r_2)$

c) *concorrentes*: $(r_1) \cap (r_2) = \{P\}$

11. ÂNGULO DE DUAS RETAS

Sejam as retas (r_1) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e (r_2) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ referidas num sistema $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$, de vetores diretores $\vec{V}_1 = (-B_1, A_1)$ e $\vec{V}_2 = (-B_2, A_2)$ e θ o ângulo agudo entre elas.



Do produto $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = |\vec{V}_1||\vec{V}_2| \cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|} \times \frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{(-B_1)(-B_2) + A_1A_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$\Rightarrow \cos\theta \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ Fórmula que nos permite calcular o ângulo θ ou seu suplemento.

O ângulo θ pode ser calculado através do produto vetorial dos 2 vetores:

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ ou

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$, ou, dividindo numerador e denominador por B_1B_2,

$$\text{tg }\theta = \frac{\dfrac{A_1}{B_1} - \dfrac{A_2}{B_2}}{\dfrac{A_1}{B_1} \cdot \dfrac{A_2}{B_2} + 1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

onde $m_1 =$ coeficiente angular de r_1 e $m_2 =$ coeficiente angular de r_2

TEOREMA

O ângulo θ de duas retas orientadas é determinado pela relação.

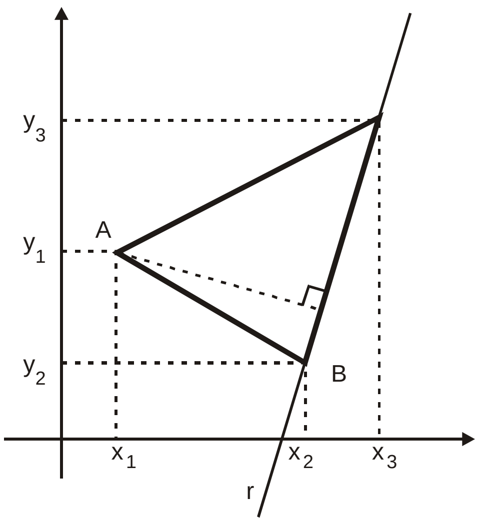
$$(\text{I}) \qquad \text{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Onde m_2 é o coeficiente angular da reta de maior inclinação.

12. ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Dado um triângulo ABC, de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, desejamos expressar sua área em função das coordenadas de A, B e C.

Seja *r* a reta suporte do seguimento BC. A equação de *r* é dada por :



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

A distância de A à reta *ré* : $d(A, r) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

onde, de acordo com (1),

$a = y_2 - y_3$; $b = x_3 - x_2$ e $c = x_2y_3 - x_3y_2$. Assim,

$$d(A, r) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}} =$$

a área do triângulo ABC é igual a $(ABC) = \dfrac{1}{2} d(A, r) \,.\, d(B, C) =$

desenvolvendo obtemos $= \dfrac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right] =$

$$(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix}\right\|$$

logo a área do triângulo ABC é igual a metade do valor absoluto do

O “determinante” acima e pode ser calculado da seguinte maneira:

$$= x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3$$

EXEMPLO:

Calcule a área do triângulo ABC, dados A(1,-1) , B(7,5) e C(-2,6).

SOLUÇÃO:

$$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \\ -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(5+42+2+7+10-6)\right| = \frac{1}{2}\,.\,60 = 30 \text{ u.a.}$$

13. ÁREA DE POLÍGONOS:

Dado um polígono P qualquer, é possível uma divisão de P em triângulos.

EXEMPLO 1:

Calcule a área do pentágono ABCDE de vértices: A(3,0), B(1,2), C(-2,2), D(-8,-7) e E(6,-1).

$$\text{Área}\left(ABCDE\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ -8 & -7 \\ 6 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(65+33\right) = \frac{98}{2} = 49 \text{u.a.}$$

1. A equação da reta que passa pelos pontos (3,3) e (6,6) é:

a) y = x.

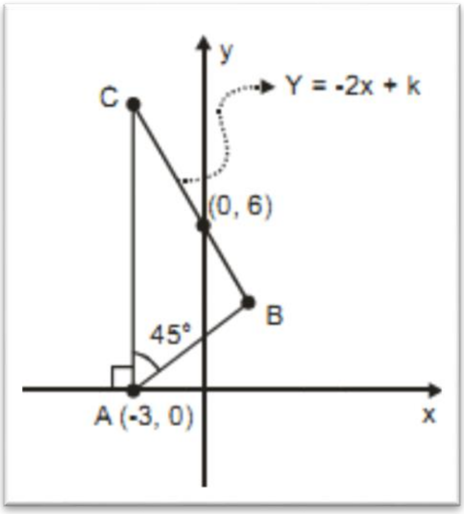
b) y = 3x.

c) y = 6x.

d) 2y = x.

e) 6y = x.

2. (EN 2004) O perímetro do triângulo ABC dado na figura abaixo mede:



a) $12+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

b) $6+4\sqrt{2}+\sqrt{5}$

c) $12+\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

d) $6+\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

e) $12+4\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

3. Determine a equação da reta suporte do lado AB e da mediana relativa ao lado AC do triângulo ABC de vértices A(3, 5), B(2, -1) e C(4, 0).

1) A reta suporte do lado AB do triângulo é definida pelos pontos A(3, 5) e B(2, 1). Sua equação é

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 & x \\ y & 5 & -1 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 3 + 2y + x - 10 - 3y = 0$$

$$6x - y - 13 = 0$$

2) A reta suporte da mediana relativa ao lado AC é determinada pelo vértice B(2, - 1) e pelo ponto médio de AC.

Determinemos o ponto médio de AC

$$x_M = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y_M = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$

A equação da reta BM (mediana) é

$$\begin{vmatrix} x & 2 & \frac{7}{2} & x \\ y & -1 & \frac{5}{2} & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow - x + 5 + \frac{7}{2}y - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} - 2y = 0$$

$$-2x + 10 + 7y - 5x + 7 - 4y = 0 \Rightarrow -7x + 3y + 17 = 0$$

$$7x, -3y - 17 = 0$$

4. (ITA 2012) A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{19}{2}$

b) 10

c) $\frac{25}{2}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{29}{2}$

5. (ITA 2007) Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

a) $\frac{15}{2}$

b) $\frac{13}{4}$

c) $\frac{11}{6}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{7}{2}$

6. (EN 1990) No triângulo de vértices $A(1,3)$, $B(4,5)$ e $C(7,6)$, a equação da altura relativa ao vértice A é:

a) $3x + y - 6 = 0$

b) $x + 3y - 6 = 0$

c) $3x - y = 0$

d) $x - 3y + 8 = 0$

e) $5x - 9y + 22 = 0$

7. (EN) A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 4y + 1 = 0$ e $5x - 12y + 3 = 0$ é:

a) $2x - 2y + 1 = 0$

b) $x - 8y + 1 = 0$

c) $x + 6y = 0$

d) $7x + 56y - 1 = 0$

e) $16x - 2y + 7 = 0$

8. (UECE 2015) No referencial cartesiano ortogonal usual com origem no ponto O, a reta r, paralela à reta $y = -2x + 1$ intercepta os semieixos positivos OX e OY, respectivamente, nos pontos P e Q formando o triângulo POQ. Se a medida da área deste triângulo é igual a $9\,m^2$, então a distância entre os pontos P e Q é igual a

a) $\sqrt{5}$ m.

b) $3\sqrt{5}$ m.

c) $4\sqrt{5}$ m.

d) $2\sqrt{5}$ m.

9. (EsPCEx 2015) O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x+3y-4=0$ é o ponto

a) $(-3,-1)$.

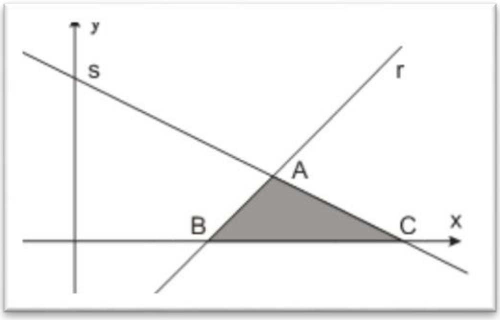
b) $(-1,-2)$.

c) $(-4,4)$.

d) $(3,8)$.

e) $(3,2)$.

10. (PUC-RJ) Sejam r e s as retas de equações $y=x-2$ e $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico abaixo. Seja A o ponto de interseção das retas r e s. Sejam B e C os pontos de interseção de r e s com o eixo horizontal, respectivamente.



A área do triângulo ABC vale:

a) 1,0

b) 1,5

c) 3,0

d) 4,5

e) 6,0

11. (ITA 2015) Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r: 3x+4y-4=0$ e $s: 3x+4y-19=0$. A área do círculo determinado por C é igual a

a) $\frac{5\pi}{7}$.

b) $\frac{4\pi}{5}$.

c) $\frac{3\pi}{2}$.

d) $\frac{8\pi}{3}$.

e) $\frac{9\pi}{4}$.

12. A reta r contém os pontos (4, 2) e (7, 3).
a) Determine k para o ponto (16, k) pertença a r.
b) Verifique se o ponto (1997, 666) esta acima ou abaixo de r.

13. Encontre os pontos da reta y = x + 1 que distam 5 unidades da reta 8x + 6y = -5.

14. Calcular a área do quadrilátero ABCD, dados A(0,-1) , B(6,0) , C(4,5) e D(1,7).

15. Dados A = (3, 7), B = (1, 1) e C = (9, 6), determine a projeção ortogonal de A sobre a reta BC.

16. O que significa a equação (x + y – 3) (3x – y – 1) = 0?

17. O que significa no plano cartesiano a equação $x^3y - xy^3 = 0$?

18. Para que valor de k as retas 2x + 5y = 7, 3x + ky = 1 são
a) paralelas?
b) perpendiculares?

19. Determine o ortocentro do triângulo cujos vértices são (-3, 0), (0, 6) e (2, 0).

20. (ITA 2002) Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente, se interceptam na origem O. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a $12 \cdot 10^{-1}$, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale
a) $\frac{8}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{1}{5}$
e) 1

21. (AFA-2013) Sejam **a** e **b** dois números reais positivos.

As retas **r** e **s** se interceptam no ponto (a, b)

Se $\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in r$ e $\left(0, \frac{b}{2}\right) \in s$, então uma equação para a reta **t**, que passa por (0, 0) e tem a tangente do ângulo agudo formado entre **r** e **s** como coeficiente angular, é

a) $3abx + (2a^2 - b^2)y = 0$

b) $3bx - b(a^2 + b^2)y = 0$

c) $3ax - a(a^2 + b^2)y = 0$

d) $3abx - 2(a^2 + b^2)y = 0$

22. (ITA 2000) A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A:(2,1)$ e $B:(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abscissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

a) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ou $(5,0)$

b) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ou $(4,0)$

c) $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ou $(5,0)$

d) $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ou $(4,0)$

e) $\left(-\frac{1}{5},0\right)$ ou $(3,0)$

23. (ITA 1998) As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem $4\,\text{cm}$ e $6\,\text{cm}$, então a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

a) $\frac{36}{5}$

b) $\frac{27}{4}$

c) $\frac{44}{3}$

d) $\frac{48}{3}$

e) $\frac{48}{5}$

1.

(3, 3) e (6, 6) $\in$ r.

r : y = mx + n

$$\begin{cases} 3 = 3m + n \\ 6 = 6m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3m + n \\ 3 = 3m \Rightarrow \boxed{m = 1} \end{cases} \Rightarrow 3 = 3 + n \Rightarrow \boxed{n = 0}$$

Portanto, r : y = x

RESPOSTA: A

2.

$BC: y = -2x + k$

$(0,6) \in BC \Rightarrow k = 6 \Rightarrow BC: y = -2x + 6$

$AB: y = x + 3$

$AC: x = -3$

$B = AB \cap BC \Rightarrow x + 3 = -2x + 6 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 4 \Rightarrow B = (1,4)$

$C = AC \cap BC \Rightarrow y = -2 \cdot (-3) + 6 = 12 \Rightarrow C = (-3,12)$

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (0-12)^2} = 12$$

$$BC = \sqrt{(1-(-3))^2 + (4-12)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$2p_{ABC} = 12 + 4 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$$

RESPOSTA: E

3.

1) A reta suporte do lado AB do triângulo é definida pelos pontos A(3, 5) e B(2, 1). Sua equação é

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 & x \\ y & 5 & -1 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 3 + 2y + x - 10 - 3y = 0$$

$$6x - y - 13 = 0$$

2) A reta suporte da mediana relativa ao lado AC é determinada pelo vértice B(2, - 1) e pelo ponto médio de AC.

Determinemos o ponto médio de AC

$$x_M = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y_M = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$

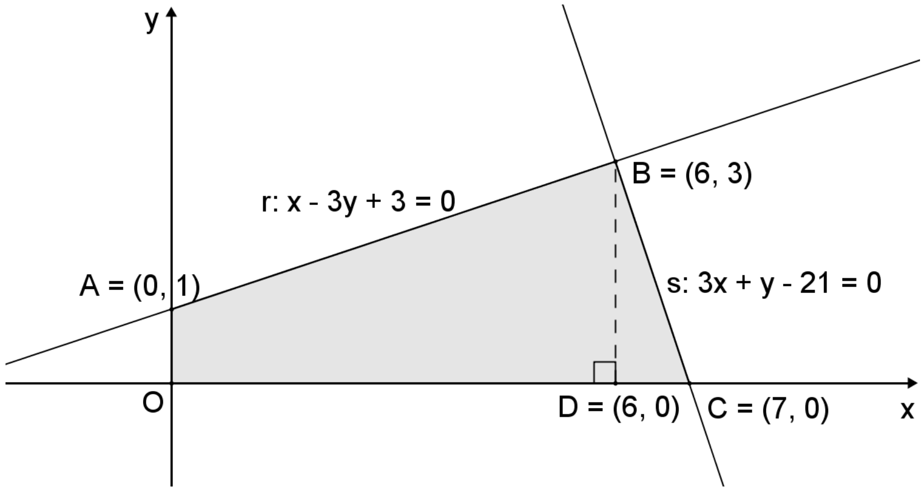
A equação da reta BM (mediana) é

$$\begin{vmatrix} x & 2 & \frac{7}{2} & x \\ y & -1 & \frac{5}{2} & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 5 + \frac{7}{2}y - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} - 2y = 0$$

$$-2x + 10 + 7y - 5x + 7 - 4y = 0 \Rightarrow -7x + 3y + 17 = 0$$

$$7x, -3y - 17 = 0$$

4.



$$\{A\} = Oy \cap r : x = 0 \Leftrightarrow 0 - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow A = (0,1)$$

$$\{C\} = Ox \cap s : y = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 - 21 = 0 \Leftrightarrow y = 7 \Leftrightarrow C = (8,0)$$

$$\{B\} = r \cap s : 3\cdot(3y-3) + y - 21 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \wedge x = 3\cdot 3 - 3 = 6 \Leftrightarrow B = (6,3)$$

$$S_{OABC} = S_{OABD} + S_{BCD} = \frac{(OA+DB)\cdot OD}{2} + \frac{BD\cdot CD}{2} = \frac{(1+3)\cdot 6}{2} + \frac{3\cdot 1}{2} = \frac{27}{2} \text{ u.a.}$$

Nessa questão foram utilizados os seguintes conceitos:

A área de um trapézio de bases B e b e altura h é $S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$.

A área de um triângulo retângulo de catetos b e c é $S = \frac{b\cdot c}{2}$.

RESPOSTA: D

5.

$r: y = 2x$, $s: x = 2y$ e $t: x = -2y + 10$

$$\begin{cases} r: y = 2x \\ s: x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} r: y = 2x \\ t: x = -2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = -4x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow B(2, 4)$$

$$\begin{cases} s: x = 2y \\ t: x = -2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C\left(5, \frac{5}{2}\right)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{5}{2} & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|5 - 20| = \frac{15}{2} \text{ u.a.}$$

RESPOSTA: A

6.

RESPOSTA: A

7.

$$\frac{|3x+4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|5x-12y+3|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} \Leftrightarrow 13(3x+4y+1) = \pm 5(5x-12y+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+56y-1=0\,(a) \\ \text{ou} \\ 16x-2y+7=0\,(b) \end{cases}$$

$$r: 3x+4y+1=0 \Rightarrow n_r = (3,4)$$

$$s: 5x-12y+3=0 \Rightarrow n_s = (5,-12)$$

$$\cos(r\,a) = \frac{n_r \cdot n_a}{|n_r| \cdot |n_a|} = \frac{3\cdot 7 + 4\cdot 56}{5\cdot\sqrt{3185}} = \frac{49}{\sqrt{3185}} > \cos 45^\circ \Rightarrow \text{(a) é bissetriz do ângulo obtuso}$$

$$\cos(r\,b) = \frac{n_r \cdot n_b}{|n_r| \cdot |n_b|} = \frac{3\cdot 16 + 4\cdot(-2)}{5\cdot\sqrt{260}} = \frac{8}{\sqrt{260}} < \cos 45^\circ \Rightarrow \text{(b) é a bissetriz do ângulo agudo}$$

RESPOSTA: E

8.

Reescrevendo a equação da reta $y = -2x + 1$ sob a forma $\frac{x}{1/2} + y = 1$, tem-se que os pontos de interseção dessa reta com os eixos cartesianos são $N = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $M = (0, 1)$.

Como os triângulos POQ e MON são semelhantes por AA, temos

$$\frac{(POQ)}{(MON)} = k^2 \Rightarrow \frac{9}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}} = k^2$$
$$\Rightarrow k = 6,$$

com k sendo a razão de semelhança. Desse modo, vem $P = (0, 6)$ e $Q = (3, 0)$.

Portanto, o resultado pedido é

$d(P, Q) = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ m.

RESPOSTA: B

9.

Considerando, $(r)\,2x + 3y - 4 = 0$ e $P(1, 5)$

Determinando a equação da reta (s) perpendiculara reta (r) e que passa pelo ponto $(1, 5)$

$$(s)\,3x - 2y + k = 0$$
$$3 - 10 + k = 0$$
$$k = 7$$

Logo, a equação da reta (s) será dada por $3x - 2y + 7 = 0.$

Determinando, o ponto M de intersecção das retas r e s.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $M(-1, 2).$

Determinando agora o ponto A simétrico do ponto P em relação à reta r, M é ponto médio de PA.

$$\frac{1 + x_A}{2} = -1 \Rightarrow x_A = -3$$

$$\frac{5 + x_A}{2} = 2 \Rightarrow x_A = -1$$

Logo, $A(-3, -1).$

RESPOSTA: A

10.

Determinando o ponto B, utilizando a equação da reta r.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 0)$$

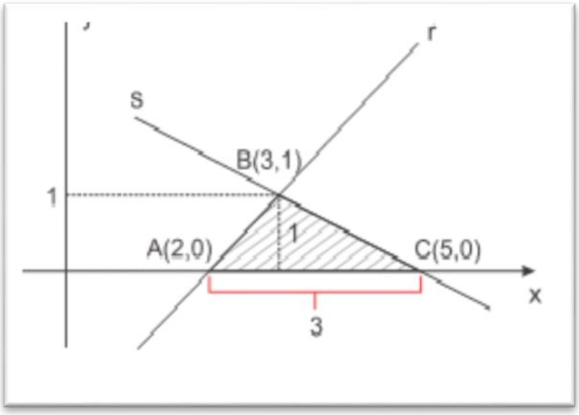
Determinando o ponto C, utilizando a equação da reta s.

$$-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow C(5,0)$$

Determinando o ponto A resolvendo um sistema com as equações de r e s.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow A(3, 1)$$

Daí, temos a seguinte figura:

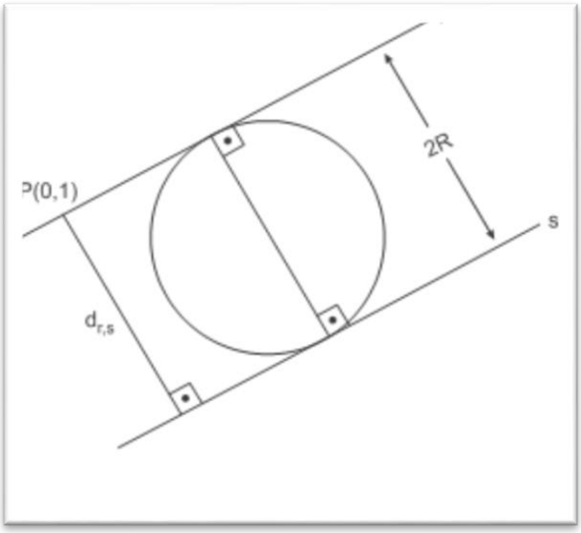


A área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$$

RESPOSTA: B

11.



Determinando um ponto P da reta r de abscissa $x = 0$, temos: $P = (0,1)$ $m_r = m_s = -3/4 \Rightarrow r \, // \, s$.

Considerando a medida R do raio da circunferência, temos:

$$d_{r,s} = d_{P,s} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 2R = 3 \Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

Portanto a área do círculo será dada por:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot \pi}{4}$$

RESPOSTA: E

12.

A inclinação da reta r é $a=\frac{3-2}{7-4}=\frac{1}{3}$. Como ela passa pelo ponto (4, 2), sua equação é $y=2+\frac{1}{3}(x-4)$, ou $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$, ou ainda x – 3y = -2.

Portanto:

a) O ponto (16, k) pertence a r se, e somente se, 16 – 3k = -2, isto é, 3k = 18, donde k = 6.
b) O ponto de r com abcissa 1997 tem ordenada $y=\frac{1997+2}{3}=666\frac{1}{3}$, logo o ponto (1997, 666) está abaixo de r.

13.

A distância do ponto P = (x, y) à reta 8x + 6y = –5 é $\frac{|8x+6y+5|}{10}$. Portando os pontos do plano que distam 5 dessa reta são os pontos das retas 8x + 6y + 5 = 50 e –8x – 6y – 5 = 50, ou seja 8x + 6y = 45 e 8x + 6y = -55, as quais cortam a reta y = x + 1 nos pontos P_1 = (39/14, 53/14) e P_2 = (-61/14, -47/14) respectivamente. Estes são os pontos procurados.

14.

$$\text{Área (ABCD)} =\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \\ 4 & 7 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(30+28-1+6-5)\right| = 29 \text{ u.a.}$$

15.

A projeção ortogonal do ponto A sobre a reta BC, cuja equação é 5x – 8y = -3, é o ponto de interseção dessa reta com a perpendicular baixada de A sobre ela, a qual tem a equação 8x + 5y = 59. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, encontramos x = 457/89, y = 319/89, que são as coordenadas da projeção procurada.

16.

Tem-se (x + y – 3) (3x – y – 1) = 0 se, e somente se x + y – 3 = 0 ou 3x – y – 1 = 0. Logo a equação dada representa o conjunto formado pela reunião das retas 3x – y = 1 e x + y = 3.

17.

Como $x^3y - xy^3 = xy(x + y)(x - y)$, tem-se $x^3y - xy^3 = 0$ se, e somente se, xy = 0, ou x + y = 0, ou x – y = 0. Portanto a equação dada representa a reunião dos dois eixos e as duas diagonais do plano.

18.

a) Para que as retas dadas sejam paralelas, devemos ter $\frac{2}{3}=\frac{5}{k}$, onde $k=7{,}5$.

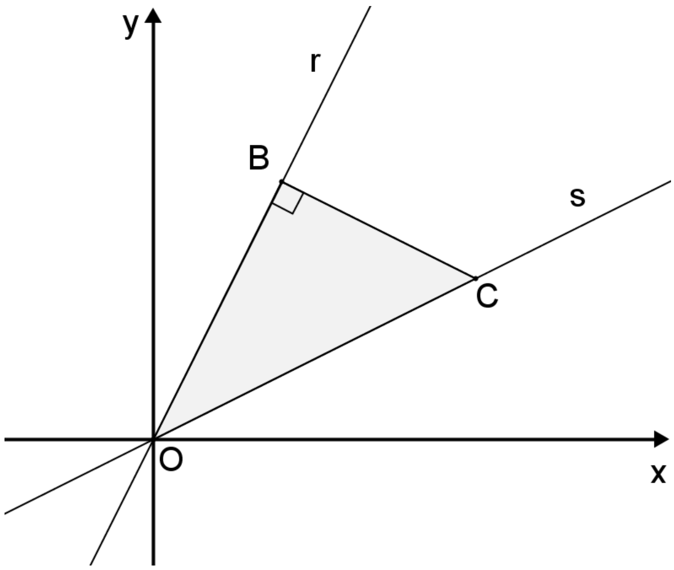
b) Para que as retas sejam perpendiculares devemos ter:

$$-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{k}\right)=-1\Leftrightarrow k=-\frac{6}{5}.$$

19.

Sejam A = (–3, 0), B = (2, 0) e C = (0, 6). O ortocentro do triângulo ABC é a interseção das 3 alturas. Uma delas é o eixo OY. Outra é a reta AD, que passa por A e é perpendicular BC. Como a inclinação de BC é –3, a inclinação de AD é 1/3, logo sua equação é $y=\frac{1}{3}(x+3)$, ou seja, x – 3y = -3. Sua interseção com a altura OY é o ponto em que x = 0, ou seja, –3y = –3, o que nos dá y = -1. Portando o ortocentro de ABC é o ponto (0, –1).

20.



$r: y=2x$; $B\in r\Rightarrow B(b,2b)$, $b>0$

$s: y=\frac{1}{2}x$; $C\in s\Rightarrow C(2c,c)$, $c>0$

O coeficiente angular da reta que contém o segmento $\overline{BC}$ é $m_{BC}=\frac{c-2b}{2c-b}$.

Como $\overline{BC}\perp r$, então $m_{BC}\cdot m_r=-1\Leftrightarrow\frac{c-2b}{2c-b}\cdot 2=-1\Leftrightarrow 4c=5b$.

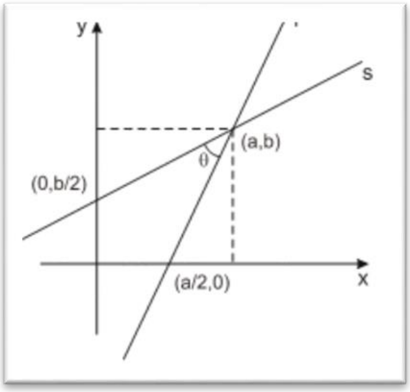
A área do ΔOBC é dada por $S_{OBC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} b & 2b & 1\\ 2c & c & 1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=12\cdot 10^{-1}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot|bc-4bc|=1{,}2\Leftrightarrow bc=0{,}8=\frac{4}{5}$.

$$4c=5b\ \wedge\ bc=\frac{4}{5}\Leftrightarrow b\cdot\frac{5b}{4}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow b^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2\Leftrightarrow b=\frac{4}{5}\ \wedge\ c=1.$$

A distância de B ao eixo das ordenadas é a abscissa do ponto B, ou seja, $b = \frac{4}{5}$.

RESPOSTA: B

21.



Calculando os coeficientes angulares das retas r e s

$$m_r = \frac{b-0}{a-\frac{a}{2}} = \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a}$$

$$m_s = \frac{b-\frac{b}{2}}{a-0} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a}$$

Calculando a tangente do ângulo agudo formado pelas reatas r e s.

$$tg\theta = \frac{\left|\frac{2b}{a} - \frac{b}{2a}\right|}{1 + \frac{2b}{a} \cdot \frac{b}{2a}}$$

$$tg\theta = \frac{3ab}{2 \cdot (a^2 + b^2)}$$

Portanto, a reta t passa pelo ponto (0, 0) e tem coeficiente angular $m_t = \frac{3ab}{2 \cdot (a^2 + b^2)}$

Logo, sua equação será dada por $y - 0 = \frac{3ab}{2 \cdot (a^2 + b^2)}(x - 0) \Rightarrow 3abx - 2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot y = 0.$

RESPOSTA: D

22.

Como o terceiro vértice do triângulo encontra-se sobre o eixo das abscissas, então possui ordenada nula. Seja $C = (x_C, 0)$ esse terceiro vértice. Assim, temos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_C & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix}\right\| = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|x_C - 4 - 3 + 2x_C\right| = 4 \Leftrightarrow \left|3x_C - 7\right| = 8 \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -1/3 \end{matrix}\right.$$

Logo, $C=\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ou $C=(5,0)$.

RESPOSTA: C

23.

A reta $r: 4x+3y+7=0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$ tem coeficiente angular $m_r=-\frac{4}{3}$.

Portanto, a tangente do ângulo entre a reta $r: 4x+3y+7=0$ e a reta $y=0$ é $\text{tg}\,\theta=m_r=-\frac{4}{3}$.

$\text{cossec}^2\,\theta=1+\text{cotg}^2\,\theta=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16} \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta=\frac{4}{5}$, pois $0<\theta<180^\circ$.

A área do paralelogramo é igual ao semiproduto das diagonais multiplicado pelo seno do ângulo entre elas, ou seja, $S=\frac{6\cdot 4}{2}\cdot\text{sen}\,\theta=12\cdot\frac{4}{5}=\frac{48}{5}$ unidades de área.

RESPOSTA: E