Aula 09

Matemática I p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos

Aula 09 – Equação Modular; Inequação Modular; Função Modular

1 – INTRODUÇÃO

Olá, meu querido aluno!! Tudo bem?! Como andam os estudos?

Na aula de hoje, entraremos num dos tópicos mais curtos do nosso edital, porém, não menos importante!
Fique muito atento a cada detalhe. Cada condição de existência pode fazer diferença na sua prova. Exercite bastante.

Sem mais, vamos à luta!!

2 – MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

1 – DEFINIÇÃO

Na matemática, até mesmo na física, faz-se necessário a adoção de valores sempre positivos.

Valor absoluto ou módulo de um número real, é um número não negativo denotado por $|x|$, com definição da forma:

$$|x| = \begin{cases} x; se & x \geq 0 \\ -x; se & x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, módulo de um valor x real será igual a ele mesmo se for não negativo ou, será igual ao seu simétrico, se for negativo.

Veja alguns exemplos:

$|5| = 0$

$|-3| = -(-3) = 3$

$|1-\sqrt{3}| = -1+\sqrt{3}$

$|0| = 0$

$$|x^2+1| = x^2+1$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2; x \geq 2 \\ -x+2; x < 2 \end{cases}$$

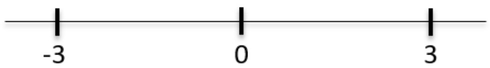
INDO MAIS FUNDO!

Podemos também definir módulo de um número real sob a interpretação geométrica, veja: valor absoluto de um número será igual a distância desse número até a origem.

Fique ligado que:

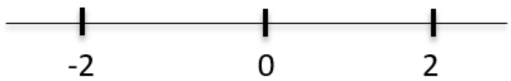
$$|x-y| = |y-x|.$$

Observe:



$$d(3;-3) = |3-(-3)| = 6$$
$$d(-3;3) = |-3-(3)| = 6$$

Vejamos um exemplo de módulo de um número real na perspectiva geométrica



$$|-2| = 2$$
$$|2| = 2$$

✓ Propriedades

Para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$, temos como verdade:

$$A)|x| \geq 0 \qquad (se|x| = 0 \rightarrow x = 0)$$
$$B)|x| = |-x|$$
$$C)|x^2| = x^2 = |x^2|$$
$$D)\sqrt{x^2} = |x|$$
$$E) -|x| \leq x \leq |x|$$
$$F)|x-y| = |y-x|$$
$$G)|x.y| = |x|.|y|$$
$$H)\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|; y \neq 0$$
$$I)|x+y| \leq |x|+|y|$$
$$J)|x|-|y| \leq |x-y|$$

3 – Equações Modulares

Para que possamos resolver equações modulares, faz-se necessário ter a definição de valor absoluto “na veia”.

Por definição, temos que: equação modular é toda igualdade em que a variável real encontra-se dentro do módulo.

Assim, tenha sempre em mente que:

$$|x| = a \Rightarrow a \geq 0 \quad e \quad x = a \quad ou \quad x = -a$$
$$|x| = |b| \Rightarrow x = b \quad ou \quad x = -b$$

Exemplos:

a) $|x-2| = 5$

Comentário:

Por definição, temos que:

$$|x-2| = 5 \Rightarrow x-2 = 5 \quad ou \quad x-2 = -5$$

Assim:

$$x-2 = 5 \Rightarrow x = 7$$
$$x-2 = -5 \Rightarrow x = -3$$
$$S = \{-3; 7\}$$

b) $|2x-1|=|3x-5|$

Comentário:

Por definição, temos que:

$$|2x-1|=|3x-5| \Rightarrow 2x-1=-3x+5 \quad ou \quad 2x-1=3x-5$$

Assim:

$$2x-1=-3x+5 \Rightarrow 5x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{5}$$

$$2x-1=3x-5 \Rightarrow x=4$$

$$S=\{4;\frac{6}{5}\}$$

INDO MAIS FUNDO!

A troca de variável é um método muito eficaz quando estamos diante de certas equações modulares. Veja um exemplo prático:

$$x^2-5|x|+6=0$$

Comentário:

Já é sabido que $|x|^2=x^2$, então:

$$|x|^2-5|x|+6=0$$

Podemos então, atribuir o valor de y para $|x|$. Assim:

$$y^2-5y+6=0$$

A equação acima é uma equação do 2º grau com raízes 2 e 3. Porém, essas raízes são iguais a y, assim:

$$y=|x|=2 \Rightarrow x=2 \quad ou \quad x=-2$$

$$y=|x|=3 \Rightarrow x=3 \quad ou \quad x=-3$$

4 – Inequações Modulares

Já passamos por equação modular, que consiste numa igualdade. Inequação, por sua vez, é uma desigualdade que possui as seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
&|x| < b \leftrightarrow b > 0 \quad e \quad -b < x < b \\
&|x| \le b \leftrightarrow b > 0 \quad e \quad -b \le x \le b \\
&|x| > 0 \leftrightarrow x < -b \quad ou \quad x > b \\
&|x| \ge b \leftrightarrow x \le -b \quad ou \quad x \ge b \\
&|x| \ge |y| \leftrightarrow (x+y)(x-y) \ge 0
\end{aligned}
$$

Você deve estar pensando: “preciso decorar todas?” Eu respondo: Não só decorar, bem como entender (que é o mais recomendado).

Exemplos:

a) $|x-1| < 5$

Comentário:

Sabemos que, pela propriedade:

$$5 > 0 \quad e \quad -5 < x-1 < 5$$

Então:

$$
\begin{aligned}
&-5 < x-1 < 5 \quad (+1) \\
&-5+1 < x-1+1 < 5+1 \\
&-4 < x < 6
\end{aligned}
$$

b) $|x+3| \le 9$

Comentário:

Questão parecida com a anterior. Observe:

$$9 > 0 \quad e \quad -9 \le x+3 \le 9$$

Então:

$$-9 \le x+3 \le 9 \qquad (-3)$$
$$-9-3 \le x+3-3 \le 9-3$$
$$-12 \le x \le 6$$

c) $|x-2| \ge 5$

Comentário:

Sabemos que:

$$|x-2| \le -5 \qquad ou \qquad x-2 \ge 5$$

Assim:

$$x-2 \le -5$$
$$x \le -5+2$$
$$x \le -3$$

Ou:

$$x-2 \le 5$$
$$x \le 5+2$$
$$x \le 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \le -3 \qquad ou \qquad x \le 7\}$$

d) $|x-2| \le |x-1|$

Comentário:

Segundo a propriedade $|x+y| \ge |x-y| \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \ge 0,$ então:

$$(x-2)^2 \le (x-1)^2$$
$$[(x-2)+(x-1)][(x-2)-(x-1)] \le 0$$
$$(2x-3)(-1) \le 0$$
$$-2x+3 \le 0$$
$$2x \ge 3$$
$$x \ge \frac{3}{2}$$

Logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \ge \frac{3}{2}\}$$

INDO MAIS **FUNDO!**

Dados dois números a e b, temos que:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Esse teorema é comumente chamado de **Teorema da Desigualdade Triangular**.

O teorema acima é aplicado tanto em equações quanto em inequações modulares com uma estrutura muito particular. Veja:

$$|x^2-x+1| \leq |x^2-1|+|2-x|$$

Vamos imaginar o seguinte:

$$\begin{cases} a = x^2-1 \\ b = 2-1 \end{cases} \Rightarrow a+b = x^2-x+1$$

Logo, se $|a+b| \leq |a|+|b|$, qualquer x real satisfaz a inequação acima.

TOME NOTA!

Quero deixar duas informações importantes no que tange desigualdade triangular. Veja:

Corolário 1: $|a+b| = |a|+|b| \leftrightarrow ab \geq 0$

Corolário 2: $|a+b| < |a|+|b| \leftrightarrow ab < 0$

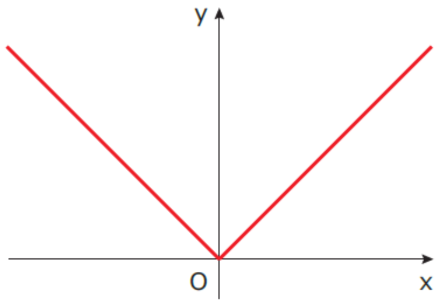
A partir das informações acima, podemos perceber que, se os números a e b tiverem sinais iguais, então ocorre a igualdade, porém, se possuírem sinais diferentes, então, ocorrerá a desigualdade, como mostra a relação acima!!

5 – Função Modular

É uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$

Essa função, de acordo com a definição de módulos, pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$



O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de mesma origem. Observe que:

Para $x \geq 0$, temos o gráfico da reta $y = x$

Para $x < 0$, temos o gráfico da função $y = -x$

A imagem da função modular é o conjunto $\mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$. Ressalto que o domínio é o conjunto dos reais, bem como o contradomínio!

6 – Gráficos de Funções Modulares

1 – Gráficos de Funções da Forma $y = |f(x)|$

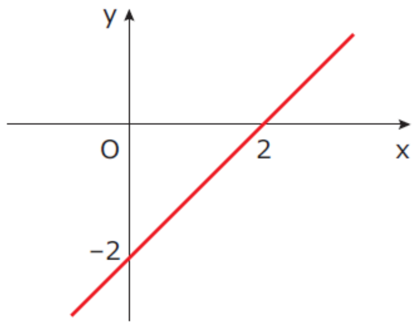
Esse tipo de gráfico é obtido pela “reflexão” ou “rebatimento”, em relação ao eixo **x**, das partes do gráfico nas quais $f(x) < 0$

Exemplos:

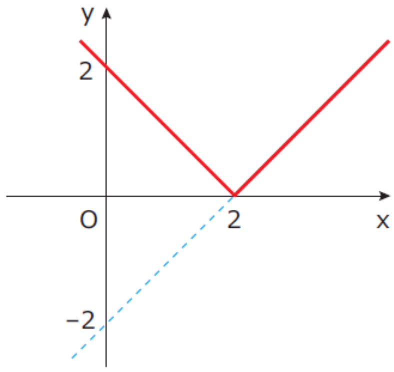
1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 2|$

Comentário:

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x - 2$



Agora, basta efetuarmos uma reflexão, em torno do eixo **x**, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.



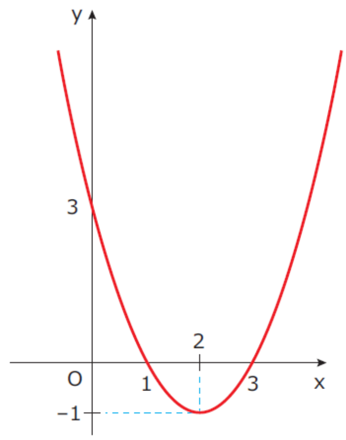
O gráfico da função básica $y = |x|$ também pode ser obtido pelo processo acima!

2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x^2 - 4x + 3|$

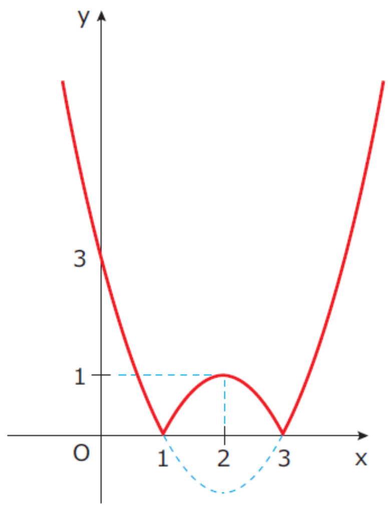
Comentário:

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função

$y = x^2 - 4x + 3$



Efetuando a reflexão em torno do eixo **x**, temos o seguinte gráfico:



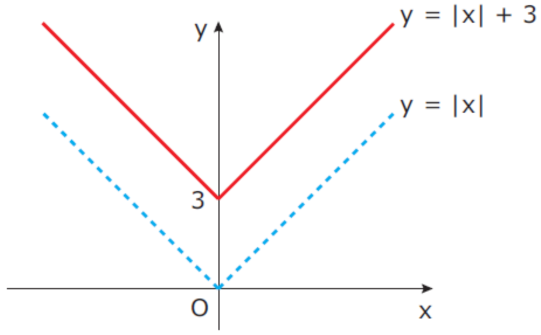
2 – Outros Gráficos

Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x| + 3$

Comentário:

Basta esboçarmos o gráfico da função $y = |x|$ e, em seguida, deslocarmos esse gráfico 3 unidades para cima.



2º) Esboçar o gráfico da função $y=|x-1|-2$

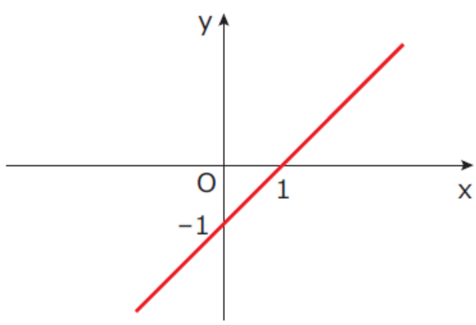
Comentário:

Basta esboçarmos o gráfico da função $y=|x-1|$ e, em seguida, deslocarmos esse gráfico 2 unidades para baixo.

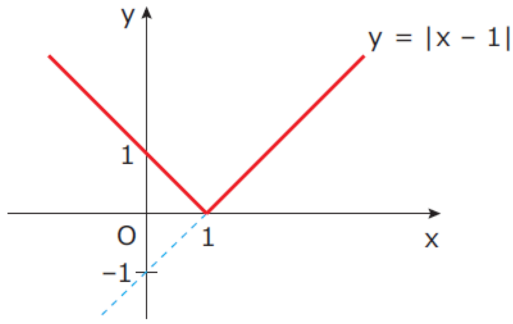
<u>1º passo</u>: Esboço do gráfico da função $y=|x-1|$:

Nesse caso, podemos utilizar o "rebatimento" em relação ao eixo **x**, descrito anteriormente.

Inicialmente, desconsideramos o módulo e esboçamos o gráfico de $y=x-1$



Agora, basta efetuarmos uma reflexão em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.



<u>2º passo</u>: A partir do gráfico da função $y = |x - 1|$ construído anteriormente, promoveremos uma translação do mesmo 2 unidades para baixo. Para isso, é necessário encontrar os pontos de interseção de $y = |x - 1| - 2$ com os eixos ordenados:

Interseção com o eixo Oy

Fazendo

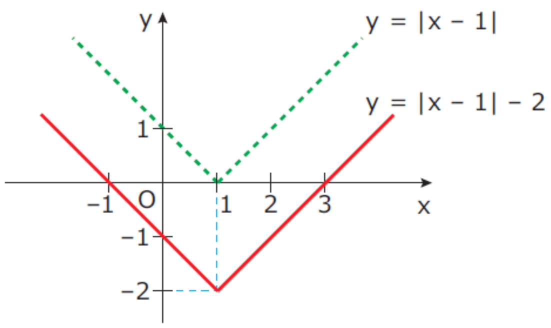
$$x = 0 \Rightarrow y = |0 - 1| - 2 \Rightarrow$$
$$y = 1 - 2$$
$$y = -1$$

Interseção com o eixo Ox

Fazendo

$$y = 0 \Rightarrow 0 = |x - 1| - 2 \Rightarrow$$
$$|x - 1| = 2 \Rightarrow$$

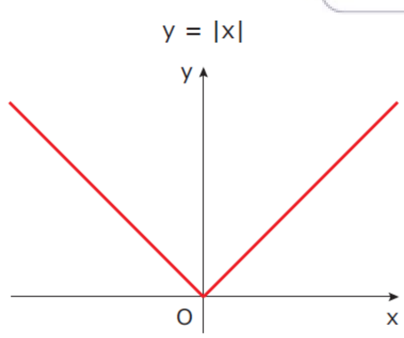
$$|x - 1| = 2 \Rightarrow$$
$$\begin{array}{lcl} x - 1 = 2 & & x = 3 \\ ou & \Leftrightarrow & ou \\ x - 1 = -2 & & x = -1 \end{array}$$

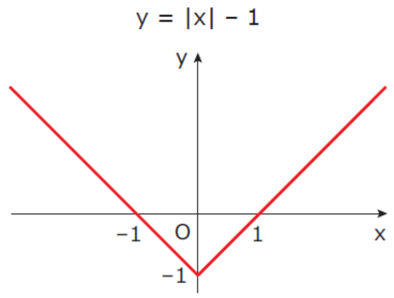


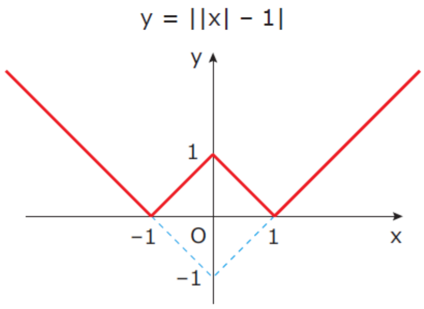
3º) Esboçar o gráfico da função $y = ||x| - 1|$

Comentário:

Inicialmente, esboçamos o gráfico da função $y = |x|$. Em seguida, deslocamos esse gráfico 1 unidade para baixo, obtendo o gráfico da função $y = |x| - 1$. Finalmente, "rebatemos", em relação ao eixo x, a parte do gráfico da ordenada negativa, obtendo o gráfico da função $y = ||x| - 1|$

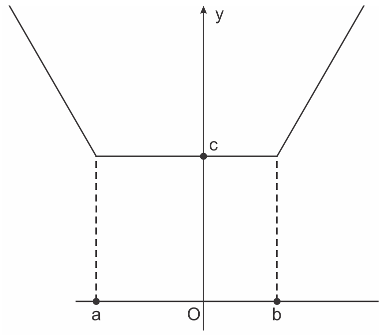






QUESTÕES COMENTADAS

1. (Espcex 2019) Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x-2| + |x+3|$, então o valor de $a+b+c$ é igual a



Desenho ilustrativo fora de escala

a) $-7.$

b) $-6.$

c) $4.$

d) $6.$

e) $10.$

Comentário:

$$\begin{aligned}
&x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow b=2\\
&x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow a=-3\\
&c=f(0)=|0-2|+|0+3|=5\\
&\therefore a+b+c=2+(-3)+5=4
\end{aligned}$$

Gabarito: C

---

2. (Ufu 2018) Considere a função definida por $y=f(x)=k\cdot|x-3|,$ em que k é um número natural constante, x uma variável assumindo valores reais e $|a|$ representa o módulo do número real $a.$ Representando, no sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de $y=f(x),$ tem-se que esse gráfico e os eixos coordenados delimitam um triângulo de área igual a $72\,cm^2.$

Nas condições apresentadas, o valor de $k,$ em $cm,$ é um número

a) quadrado perfeito.

b) ímpar.

c) múltiplo de $3.$

d) divisível por $5.$

Comentário:

Se $x < 3$, então $y = -kx + 3k$. Daí, como essa reta intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada $3k$ e o eixo das abscissas no ponto de abscissa 3, temos

$$\frac{3 \cdot 3k}{2} = 72 \Leftrightarrow k = 16,$$

que é um quadrado perfeito. É imediato que 16 não é ímpar, nem múltiplo de 3, nem múltiplo de 5.

Gabarito: A

---

3. (Espcex 2018) O conjunto solução da inequação $||x-4|+1| \le 2$ é um intervalo do tipo $[a, b]$. O valor de $a+b$ é igual a

a) -8.

b) -2.

c) 0.

d) 2.

e) 8.

Comentário:

De $||x-4|+1| \le 2$,

$$\begin{aligned} -2 &\le |x-4| + 1 \le 2 \\ -3 &\le |x-4| \le 1 \\ |x-4| &\le 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-1 \le x-4 \le 1 \\ &3 \le x \le 5 \\ &a = 3 \quad \text{e} \quad b = 5 \\ &a + b = 8 \end{aligned}$$

Gabarito: E

---

4. (Eear 2017) Seja $f(x) = |x-3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

Comentário:

Queremos calcular x de modo que se tenha $f(x) = 2.$ Desse modo, vem

$$\begin{aligned} |x-3| = 2 &\Leftrightarrow x-3 = \pm 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

O resultado é, portanto, $1+5=6.$

Gabarito: C

---

5. (Cftmg 2017) Seja $f(x)$ uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, $|f(x)|,$

a) nunca passará pela origem.

b) nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.

c) intercepta o eixo x somente se $f(x)$ for do primeiro grau.

d) intercepta o eixo y somente se $f(x)$ for do segundo grau.

Comentário:

A alternativa [B] é a correta, pois a função $|f(x)|$ não assumirá valores negativos e, no terceiro e quarto quadrantes, os valores assumidos por qualquer função serão sempre negativos.

Gabarito: B

---

6. (Epcar 2017) Durante 16 horas, desde a abertura de certa confeitaria, observou-se que a quantidade $q(t)$ de unidades vendidas do doce “amor em pedaço”, entre os instantes $(t-1)$ e $t,$ é dada pela lei $q(t) = \left| |t-8| + t - 14 \right|,$ em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}.$

É correto afirmar que

a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de “amor em pedaço”.

b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.

c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.

d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

Comentário:

Calculando:

$$q(t) = ||t-8| + t - 14|$$
$$t \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$$
$$t = 8 \rightarrow q(t) = |8-14| \rightarrow q(t) = 6$$
$$t < 8 \rightarrow q(t) = |-(t-8) + t - 14| \rightarrow q(t) = 6$$
$$t = 16 \rightarrow q(t) = |8 + 16 - 14| \rightarrow q(t) = 10$$
$$8 < t < 16 \rightarrow q(t) = 2 \cdot |t - 11|$$
$$q(t) \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Assim, a única alternativa correta é a letra D.

Gabarito: D

---

7. (Fgv 2017) Para certos valores reais de k, o polinômio $P(x) = x^2 - 6x + |2k - 7|$ é divisível por $x - 1$. A soma de todos esses valores é igual

a) 8.

b) 7.

c) 5.

d) -1.

e) -5.

Comentário:

Se P é divisível por $x - 1$, então

$$\begin{aligned} P(1) = 0 &\Leftrightarrow 1^2 - 6 \cdot 1 + |2k - 7| = 0 \\ &\Leftrightarrow |2k - 7| = 5 \\ &\Leftrightarrow 2k - 7 = \pm 5 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \text{ ou } k = 6. \end{aligned}$$

A resposta é $1 + 6 = 7$.

Gabarito: B

---

8. (Uece 2017) Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então, os valores dos números reais a e b são respectivamente

a) -1 e 6.

b) 5 e 6.

c) 0 e 36.

d) 5 e 36.

Comentário:

Sabendo que $|x|^2 = x^2$, para todo x real, temos

$$\begin{aligned} x^2 - 5|x| - 6 = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 - 5|x| - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 6)(|x| + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 6. \end{aligned}$$

Em consequência, das Relações de Girard, vem $a = 0$ e $b = 36$.

Gabarito: C

---

9. (Uefs 2017) Considerando-se a equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$, tem-se que a soma de suas raízes é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentário:

Se $x \geq 3$, temos a seguinte equação:

$$x^2 - 5x + 6 = x - 3$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$x = \frac{6 \pm 0}{2}$$
$$x = 3 \ \text{(dupla)}$$

Se $x < 3$, temos a seguinte equação:

$$x^2 - 5x + 6 = -x + 3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$$x = 3 \ \text{(não convém)}$$
$$x = 1$$

Portanto, a soma de suas raízes será $1 + 3 = 4$.

Gabarito: E

---

10. (Mackenzie 2017) O produto das raízes da equação $|3x+5| + |x-1| = 2$ é

a) $-\frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $-\frac{25}{9}$

d) $\frac{25}{9}$

e) não admite raízes

Comentário:

Questão anulada no gabarito oficial.

De $|3x+5| + |x-1|$,

$-\frac{5}{3}$ $\qquad$ 1

|3x + 5|	-3x - 5	3x + 5	3x + 5
|x - 1|	-x + 1	-x + 1	x - 1
|3x + 5| + |x - 1|	4x - 4	2x + 6	4x + 4

Assim, de $|3x+5|+|x-1|=2, -4x-4=2,$ com $x \le -\frac{5}{3}$ ou $2x+6=2,$ com $-\frac{5}{3} \le x \le 1$ e $4x+4=2,$ com $x \ge 1.$

De $-4x-4=2,$ com $x \le -\frac{5}{3}, x=-\frac{3}{2} > -\frac{5}{3},$ ou seja, $x=-\frac{3}{2}$ não é raiz da equação.

De $2x+6=2,$ com $-\frac{5}{3} \le x \le 1, x=-2 < -\frac{5}{3},$ ou seja, $x=-2$ não é raiz da equação.

De $4x+4=2,$ com $x \ge 1, x=-1<1,$ ou seja, $x=-1$ não é raiz da equação.

Assim, a equação $|3x+5|+|x-1|=2$ não admite raízes.

Gabarito: E

---

11. (Pucrj 2017) Três números positivos proporcionais a $5,$ 8 e 9 são tais que a diferença do maior para o menor supera o módulo da diferença entre os dois menores em 5 unidades.

Assinale o maior deles.

a) 45

b) 54

c) 63

d) 72

e) 81

Comentário:

Do enunciado, sejam os números $5x, 8x$ e $9x, x>0.$

$$9x-5x-5=|8x-5x|$$
$$4x-5=|3x|$$

Como $x>0,$

$$4x-5=3x$$
$$x=5$$

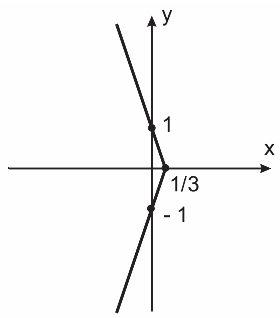
Assim, os números são: $25, 40$ e 45.

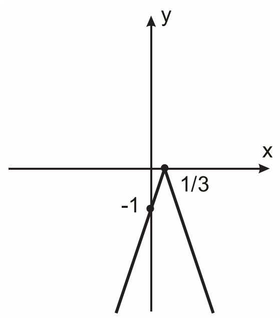
Logo, o maior dos números é o 45.

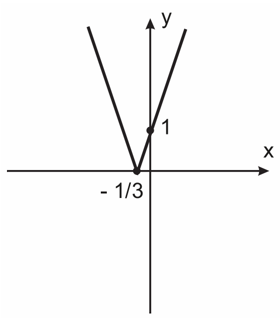
Gabarito: A

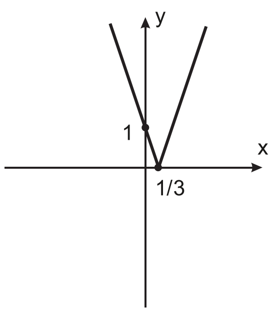
---

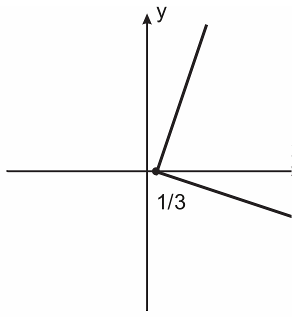
12. (Pucrj 2016) Qual dos gráficos abaixo representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Comentário:

Basta tomar o gráfico da função $g(x) = 3x - 1$ e refletir, em relação ao eixo das abscissas, a parte em que $g(x) < 0$. Logo, o gráfico de f é o da alternativa D.

Gabarito: D

---

13. (Cftmg 2015) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ é o intervalo

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Comentário:

$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

Portanto, o domínio da função será dado por: $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

Gabarito: D

---

14. (Espcex 2015) O número de soluções da equação $\frac{1}{2}|x| \cdot |x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentário:

$$\frac{1}{2}|x|\cdot|x-3| = 2\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right| \Rightarrow \frac{\left|x^2-3\cdot x\right|}{2} = \frac{|2(2x-3)|}{2} \Rightarrow x^2-3x=4x-6 \text{ ou } x^2-3x=-2x+6 \Rightarrow$$

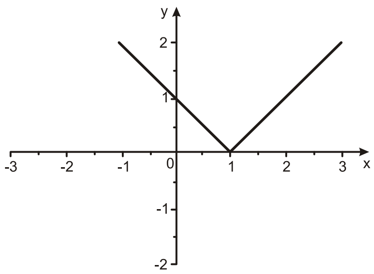
$$x^2-7x+6=0 \text{ ou } x^2-x-6=0 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=6 \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=2$$

Portanto, a equação possui quatro raízes.

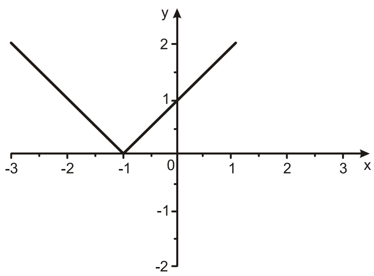
Gabarito: D

---

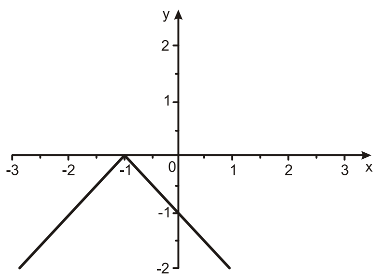
15. (Pucrj 2014) Considere a função real $f(x)=|-x+1|$. O gráfico que representa a função é:



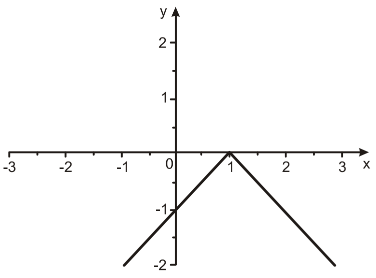
a)

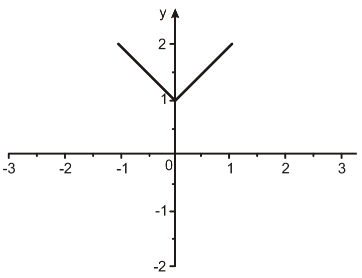


b)



c)

d) 

e) 

Comentário:

Tem-se que $f(x)=\begin{cases} -x+1, \text{ se } x \le 1 \\ x-1, \text{ se } x > 1 \end{cases}.$ Portanto, o gráfico da alternativa [A] é o que representa $f.$

Gabarito: A

---

16. (Udesc 2014) A soma das raízes distintas da equação $x^2-5x+6=|x-3|$ é:

a) 10

b) 7

c) 0

d) 3

e) 4

Comentário:

Fatorando, obtemos

$$x^2-5x+6=|x-3| \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3)=|x-3|.$$

Se $x \geq 3$, então $|x-3| = x-3$. Assim,

$$(x-2)\cdot(x-3) = x-3 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Se $x < 3$, então $|x-3| = -(x-3)$. Daí,

$$(x-2)\cdot(x-3) = -(x-3) \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x-1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Mas $x = 3$ não convém, pois $x < 3$.

Por conseguinte, a soma das raízes distintas da equação é $1+3=4$.

Gabarito: E

---

17. (Pucrs 2014) A expressão $|x-a| < 16$ também pode ser representada por

a) x – a < 16

b) x + a > 16

c) – a – 16 < x < a + 16

d) – 16 + a < x < a + 16

e) x – a < – 16 ou x – a >0

Comentário:

$$|x-a| < 16 \Rightarrow -16 < x-a < 16 \Rightarrow \boxed{-16+a < x < a+16}$$

Gabarito: D

---

18. (Esc. Naval 2013) A soma das raízes reais distintas da equação $||x-2|-2| = 2$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

Comentário:

$$|x-2|-2=2 \text{ ou } |x-2|-2=-2$$
$$|x-2|=4 \text{ ou } |x-2|=0$$
$$x-2=4 \text{ ou } x-2=-4 \text{ ou } x=2$$
$$x=6 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=2$$

Portanto, a soma das raízes será $6+(-2)+2=6$.

Gabarito: D

---

19. (Cftmg 2013) A soma das raízes da equação modular $|x+1|^2-5|x+1|+4=0$ é

a) – 7.

b) – 4.

c) 3.

d) 5.

Comentário:

Resolvendo a equação na incógnita $|x+1|$ temos:

$$|x+1|=\frac{5\pm3}{2} \Rightarrow |x+1|=4 \text{ ou } |x+1|=1 \Rightarrow x=3 \text{ ou } x=-5 \text{ ou } x=0 \text{ ou } x=-2$$

Calculando a soma das raízes, temos:

$$3+(-5)+0+(-2)=-4$$

Gabarito: B

---

20. (Uepb 2012) A soma das raízes que a equação modular $||x-2|-7|=6$ é

a) 15

b) 30

c) 4

d) 2

e) 8

Comentário:

Temos

$$||x-2|-7| = 6 \Leftrightarrow |x-2|-7 = \pm 6.$$

Logo,

$$|x-2| = 13 \Leftrightarrow x-2 = \pm 13$$
$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ ou } x = -11$$

ou

$$|x-2| = 1 \Leftrightarrow x-2 = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1.$$

Portanto, o resultado é $15+(-11)+3+1=8.$

Gabarito: E

21**.** (Ita 2011) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

a) –5.

b) –1.

c) 1.

d) 2.

e) 5.

Comentário:

$x^2 - 3X + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$, temos o produto das raízes igual a 5.

$x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, temos o produto das raízes igual a -1.

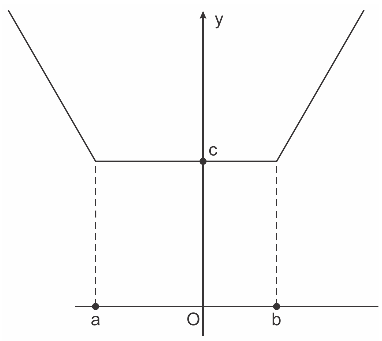
Logo, o produto total das raízes é -1.5 = -5

Gabarito: A

---

7 – LISTA DE QUESTÕES

1. (Espcex 2019) Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, então o valor de $a + b + c$ é igual a



Desenho ilustrativo fora de escala

a) -7.

b) -6.

c) 4.

d) 6.

e) 10.

---

2. (Ufu 2018) Considere a função definida por $y = f(x) = k \cdot |x - 3|$, em que k é um número natural constante, x uma variável assumindo valores reais e $|a|$ representa o módulo do número real a. Representando, no sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de $y = f(x)$, tem-se que esse gráfico e os eixos coordenados delimitam um triângulo de área igual a $72\ \text{cm}^2$.

Nas condições apresentadas, o valor de k, em cm, é um número

a) quadrado perfeito.

b) ímpar.

c) múltiplo de 3.

d) divisível por $5.$

---

3. (Espcex 2018) O conjunto solução da inequação $||x-4|+1| \leq 2$ é um intervalo do tipo $[a, b].$ O valor de $a+b$ é igual a

a) $-8.$

b) $-2.$

c) $0.$

d) $2.$

e) $8.$

---

4. (Eear 2017) Seja $f(x) = |x-3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

---

5. (Cftmg 2017) Seja $f(x)$ uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, $|f(x)|,$

a) nunca passará pela origem.

b) nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.

c) intercepta o eixo x somente se $f(x)$ for do primeiro grau.

d) intercepta o eixo y somente se $f(x)$ for do segundo grau.

---

6. (Epcar 2017) Durante 16 horas, desde a abertura de certa confeitaria, observou-se que a quantidade $q(t)$ de unidades vendidas do doce "amor em pedaço", entre os instantes $(t-1)$ e $t,$ é dada pela lei $q(t) = ||t-8|+t-14|,$ em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}.$

É correto afirmar que

a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de "amor em pedaço".

b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.

c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.

d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi $10.$

---

7. (Fgv 2017) Para certos valores reais de $k,$ o polinômio $P(x) = x^2 - 6x + |2k - 7|$ é divisível por $x - 1.$ A soma de todos esses valores é igual

a) $8.$

b) $7.$

c) $5.$

d) $-1.$

e) $-5.$

---

8. (Uece 2017) Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0,$ então, os valores dos números reais a e b são respectivamente

a) -1 e $6.$

b) 5 e $6.$

c) 0 e $36.$

d) 5 e $36.$

---

9. (Uefs 2017) Considerando-se a equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|,$ tem-se que a soma de suas raízes é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

---

10. (Mackenzie 2017) O produto das raízes da equação $|3x + 5| + |x - 1| = 2$ é

a) $-\frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $-\frac{25}{9}$

d) $\frac{25}{9}$

e) não admite raízes

---

11. (Pucrj 2017) Três números positivos proporcionais a 5, 8 e 9 são tais que a diferença do maior para o menor supera o módulo da diferença entre os dois menores em 5 unidades.

Assinale o maior deles.

a) 45

b) 54

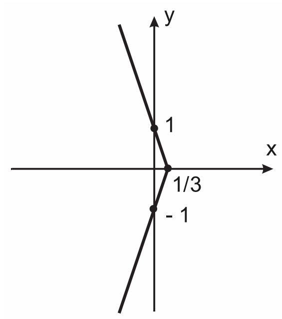
c) 63

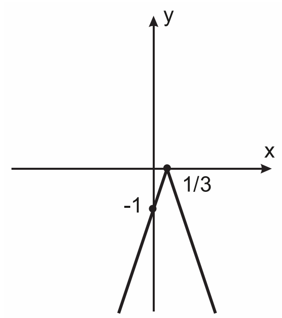
d) 72

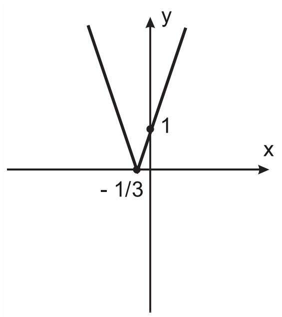
e) 81

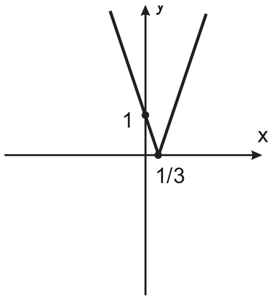
---

12. (Pucrj 2016) Qual dos gráficos abaixo representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

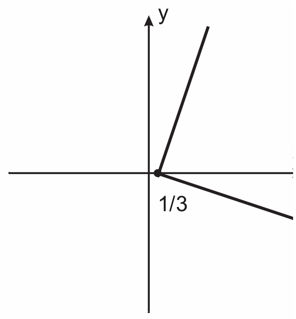
a) 

b) 

c) 



d)



e)

---

13. (Cftmg 2015) O domínio da função real $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ é o intervalo

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1 \text{ ou } x \ge 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$

---

14. (Espcex 2015) O número de soluções da equação $\frac{1}{2}|x|\cdot|x-3| = 2\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é

a) 1.

b) 2.

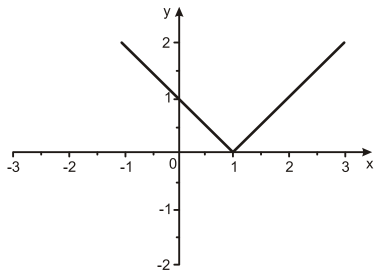
c) 3.

d) 4.

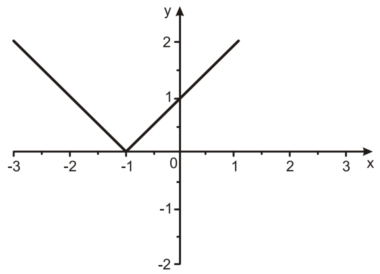
e) 5.

---

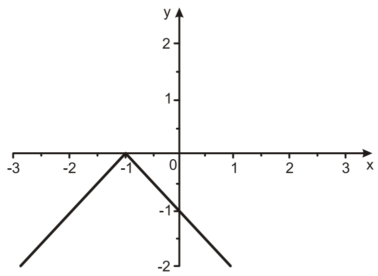
15. (Pucrj 2014) Considere a função real $f(x)=|-x+1|$. O gráfico que representa a função é:



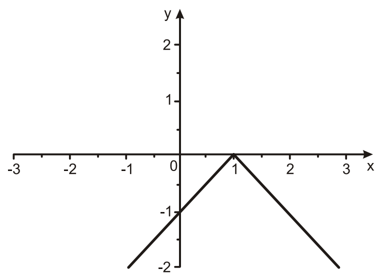
a)



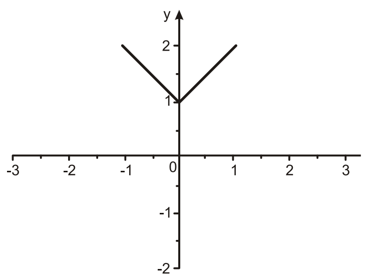
b)



c)



d)



e)

---

16. (Udesc 2014) A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é:

a) 10

b) 7

c) 0

d) 3

e) 4

---

17. (Pucrs 2014) A expressão $|x - a| < 16$ também pode ser representada por

a) x – a < 16

b) x + a > 16

c) – a – 16 < x < a + 16

d) – 16 + a < x < a + 16

e) x – a < – 16 ou x – a >0

---

18. (Esc. Naval 2013) A soma das raízes reais distintas da equação $||x - 2| - 2| = 2$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

---

19. (Cftmg 2013) A soma das raízes da equação modular $|x + 1|^2 - 5|x + 1| + 4 = 0$ é

a) – 7.

b) – 4.

c) 3.

d) 5.

---

20. (Uepb 2012) A soma das raízes que a equação modular $||x - 2| - 7| = 6$ é

a) 15

b) 30

c) 4

d) 2

e) 8

21. (Ita 2011) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

a) –5.

b) –1.

c) 1.

d) 2.

e) 5.

8 – Gabarito

1. C
2. A
3. E
4. C
5. B
6. D
7. B
8. C
9. E
10. E
11. A
12. D
13. D
14. D
15. A
16. E
17. D
18. D
19. B
20. E
21. A