Matemática Aplicada

1 Manoel vende melancias e melões em sua barraca no mercado de frutas. Certo dia, iniciou seu trabalho com a barraca cheia de frutas e, durante a manhã, vendeu 12 melancias e 16 melões. Manoel reparou, antes de fechar para o almoço, que para o período da tarde o número de melancias que tinha para vender era o dobro do número de melões. Durante a tarde, ele vendeu 20 melancias e 6 melões e, das frutas que restaram, havia quantidades iguais de melancias e melões.
Determine quantas frutas, no total, Manoel tinha na sua barraca no início da manhã.

Uma solução:
Sejam x e y as quantidades de melancias e melões no início da manhã.
No final da manhã as quantidades eram
Melancias: $x-12$
Melões: $y-16$
De acordo com o enunciado temos $x-12=2(y-16)$, ou seja, $2y-x=20$.
No final da tarde as quantidades eram
Melancias: $x-32$
Melões: $y-22$
De acordo com o enunciado temos $x-32=y-22$, ou seja, $x-y=10$.
Somando as duas equações encontradas temos $y=30$ e, consequentemente, $x=40$.
O número total de frutas no início da manhã era 70.

Outra opção solução:
Seja x a quantidade restante de melancias e melões. No final da manhã temos que $20+x=2(6+x)$ e, daí, $x=8$. Assim, sobraram 16 frutas que somadas às 54 vendidas, dão 70 frutas.

2 Uma empresa estatal Y possui apenas funcionários concursados e funcionários contratados e, no ano de 2006, 80% dos funcionários dessa empresa eram concursados. Hoje, a empresa está muito maior, o número de funcionários concursados dobrou, mas o número de funcionários contratados é 9 vezes o que era em 2006.
Em uma reportagem atual sobre essa empresa, aparece a seguinte frase:
"No ano de 2006, a empresa Y tinha 80% dos funcionários admitidos por concurso e, hoje, o número de funcionários concursados é cerca de 47%, apenas."
A frase acima está correta? Justifique sua resposta.

Uma solução

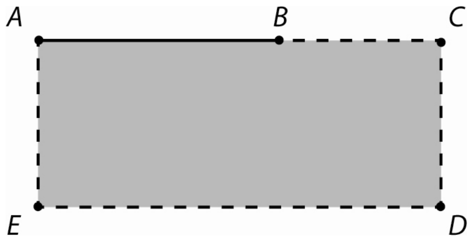
O número total de funcionários em 2006 será representado pelo número 100.
A tabela abaixo resume os dados da questão:

Funcionários	Em 2006	Hoje
Contratados	20	180
Concursados	80	160
Total	100	40

Hoje, a porcentagem de concursados é $\frac{160}{340} \cong 0,47 = 47\%$.

A frase da reportagem está correta.

3 Joel possui um sítio e deseja construir um galinheiro retangular com a cerca que possui. Para conseguir uma área bem grande para o galinheiro, ele deseja aproveitar um muro que já existe no seu quintal. Na figura abaixo, *AB* é o muro existente, *ACDE* é o galinheiro que Joel pretende construir e as linhas tracejadas representam toda a cerca que Joel possui.



O comprimento do muro *AB* é de 6m e Joel possui 34m de cerca.
Qual é a maior área que ele poderá cercar?

Uma solução:

Sejam $BC = x$ e $CD = a$.
O comprimento da cerca de Joel é $x + a + x + 6 + a = 34$.
Portanto, $a = 14 - x$.
A área do galinheiro é $y = AC \cdot CD = (6 + x)(14 - x) = -x^2 + 8x + 84$.
Para que a área seja máxima devemos ter $x = -\dfrac{8}{2(-1)} = 4$.
Assim, as medidas do retângulo são $AC = 6 + 4 = 10$ m e $CD = 14 - 4 = 10$ m.
A maior área que Joel poderá cercar é de 10m $\times$ 10m = 100m^2.

4 Um dado foi jogado quatro vezes e a soma dos resultados deu 21.
Quantas são as sequências possíveis dos resultados?

Uma solução:

a) Resultados: 6 6 6 3 — há 4 sequências.

b) Resultados: 6 6 5 4 — há $C_4^2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$ sequências.

c) Resultados: 6 5 5 5 — há 4 sequências.

No total há 20 sequências possíveis.

5 No plano cartesiano, são dados os pontos $M = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $N = (-1,0)$ e $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ sobre a circunferência de centro na origem e raio 1.
Determine a medida do ângulo *MPN*.

Uma solução:
Como os três pontos estão situados sobre a circunferência de centro na origem e raio 1, abscissa e ordenada de cada ponto são o cosseno e o seno de algum arco do intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$. Sendo $A = (1,0)$ então $\text{arc}AM = 30^\circ$ e $\text{arc}AN = 180^\circ$.

Assim, $\text{arc}MN = 150^\circ$ e, como *P* está no quarto quadrante,

$$M\hat{P}N = \frac{\text{arc}MN}{2} = 75^\circ.$$

6 Dois municípios A e B são vizinhos e ambos produzem soja. No ano de 2013, o município A produziu 120 mil toneladas de soja enquanto que o município B produziu 60 mil toneladas. Entretanto a produção de A cresce 4% ao ano enquanto que a de B cresce 12% ao ano.
Se essas taxas permanecerem as mesmas por longo tempo, em que ano a produção de soja do município B será, pela primeira vez, maior que a produção do município A?

Use o que for necessário das informações a seguir.
$\log 2 = 0{,}301$
$\log 3 = 0{,}477$
$\log 7 = 0{,}845$
$\log 13 = 1{,}114$

Uma solução:

Em milhares de toneladas a desigualdade que modela a situação é: $60(1+0{,}12)^n > 120(1+0{,}04)^n$ onde n é o número de anos decorridos após 2013.

Simplificando e arrumando temos: $1{,}12^n > 2 \cdot 1{,}04^n$.

$$\left(\frac{112}{104}\right)^n > 2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{14}{13}\right)^n > 2$$

Com logaritmo decimal, $n \cdot (log 14 - log 13) > log 2$.

Portanto,

$$n > \frac{log 2}{log 2 + log 7 - log 13} = \frac{0{,}301}{0{,}301 + 0{,}845 - 1{,}114} = \frac{0{,}301}{0{,}032} \cong \frac{300}{32} = 9{,}...$$

Portanto, $n = 10$ e a produção de soja do município B vai superar a do município A no ano de 2023.

7 Flávio imaginou uma brincadeira para fazer com seu pai. Preparou dois sacos iguais, cada um contendo 10 fichas numeradas de 1 a 10 e fez a seguinte proposta ao pai:

Flávio: Pai, você quer ganhar um prêmio?
Pai: Claro que quero.
Flávio: Então escolha um número de 1 a 10.
Pai: Eu escolho o 9.
Flávio: Você tem agora duas opções. Você pode escolher um destes sacos, que contêm, cada um, 10 fichas numeradas de 1 a 10 e tirar duas delas. Se o 9 aparecer, você ganha. Se preferir, você pode tirar uma ficha de cada um dos sacos e, se o 9 aparecer, você ganha.

Decida se as duas opções são equivalentes ou diga qual das opções dá ao pai maior probabilidade de ganhar o prêmio. Justifique sua resposta.

Uma solução:

Na opção de tirar duas do mesmo saco (uma retirada e depois a outra), a probabilidade de não sair o número escolhido pelo pai é $\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{10}=\frac{80}{100}$.

A probabilidade que o número escolhido saia é $p_1=1-\frac{80}{100}=\frac{20}{100}$.

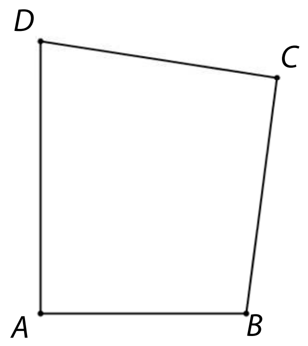
Na opção de tirar uma de cada saco, a probabilidade de não sair o número escolhido pelo pai em nenhuma das duas retiradas é $\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{81}{100}$.

A probabilidade que o número escolhido saia é $p_2=1-\frac{81}{100}=\frac{19}{100}$.

Logo, a primeira opção é melhor para o pai.

8 No antigo Egito, quando o rio Nilo voltava ao seu leito normal após a cheia anual, os terrenos das margens eram novamente remarcados. Cada terreno tinha a forma de um quadrilátero e o lavrador que o ocupava deveria pagar um imposto que era proporcional à área do terreno. Para obter a área de um quadrilátero, os egípcios calculavam o produto das médias aritméticas dos lados opostos, método que não é exato, a menos que o quadrilátero seja um retângulo.

A figura abaixo mostra um terreno com a forma do quadrilátero *ABCD,* onde o ângulo de vértice *A* é reto e, numa unidade adequada (*u*), os lados medem $AB = 12$, $BC = 14$, $CD = 14$ e $DA = 16$.



A Calcule a área do quadrilátero *ABCD*.
Use as aproximações: $\sqrt{2} = 1{,}414$, $\sqrt{3} = 1{,}732$, $\sqrt{6} = 2{,}450$.

B Determine a área do quadrilátero *ABCD* pelo método egípcio.

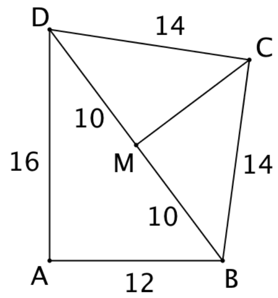
Uma solução:

A No triângulo *ABD*, retângulo em *A* o teorema de Pitágoras fornece $BD = 20$.
Sendo *M* o ponto médio de *BD* temos que *MC* é perpendicular a *DB* porque $CD = CB$. Assim, no triângulo retângulo *DMC* calculamos

$MC = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} = 4 \cdot 2{,}45 = 9{,}8$.

A área do quadrilátero *ABCD* é

$$S = \frac{12 \cdot 16}{2} + \frac{20 \cdot 9{,}8}{2} = 96 + 98 = 194\ \ u^2.$$



B Pelo método egípcio a área do quadrilátero *ABCD* é

$$S_e = \frac{16+14}{2} \cdot \frac{12+14}{2} = 15 \cdot 13 = 195\ \ u^2.$$

9 Uma sala retangular tem 6m de comprimento, 4m de largura e 3m de altura. Um inseto *P* está no centro do teto e seu amigo, o inseto *Q*, está em um dos cantos no chão da sala. O inseto *P* deseja encontrar *Q*, percorrendo a menor distância possível.

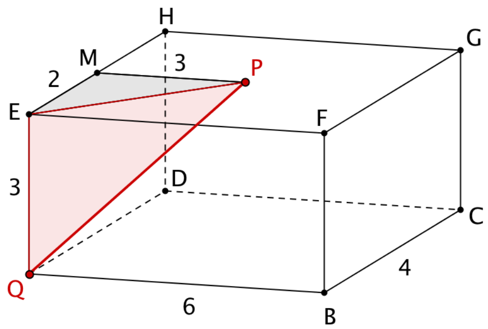
Calcule a menor distância que *P* deve percorrer em cada um dos casos abaixo:

A *P* é um mosquito (portanto, pode voar).

B *P* é uma formiga (portanto deve se deslocar sobre as superfícies das paredes e teto).

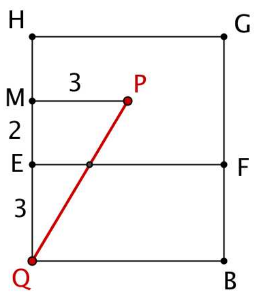
Uma solução:

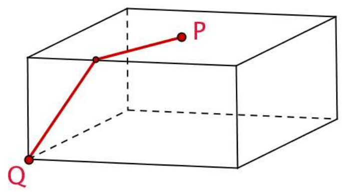
A A figura abaixo mostra a sala, suas medidas, os insetos *P* e *Q*, e o ponto *M*, médio da aresta *EH*.



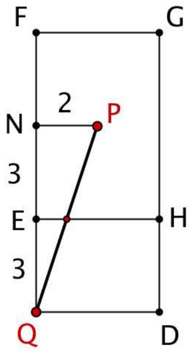
Mosquito voa. A menor distância de *P* até *Q* é o comprimento do segmento *PQ*.
Como o triângulo *PME* é retângulo em *M* temos $PE^2 = PM^2 + ME^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.
Como o triângulo *PEQ* é retângulo em *E* temos $PQ^2 = PE^2 + EQ^2 = 13 + 3^2 = 22$.
Assim, $PQ = \sqrt{22}$ m. (aprox. 4,69m)

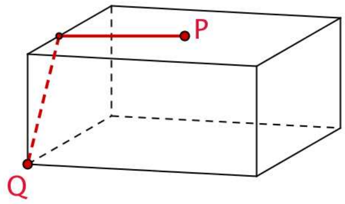
B Formiga não voa. Há duas opções neste caso. A formiga pode andar pelo teto até algum ponto da aresta *EF* e descer pela parede da frente até *Q* ou então andar pelo teto até algum ponto da aresta *EH* e descer pela parede da esquerda até *Q*. Os caminhos mínimos para cada opção estão representados nas figuras a seguir. Em cada uma delas, girou-se o teto de 90° para ficar no mesmo plano da parede





$$PQ = \sqrt{3^3 + 5^2} = \sqrt{34}\text{ m (aprox. 5,83m)}$$





$$PQ = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ m} \quad \text{(aprox. 6,32m)}$$

A primeira opção mostra o percurso mínimo de $\sqrt{34}$ m.

10 Dados dois números reais positivos a e b há várias "médias" que podem ser calculadas com eles. As duas primeiras mostradas abaixo são bem conhecidas e a terceira não é muito conhecida.

A média aritmética entre a e b é: $A=\dfrac{a+b}{2}$

A média geométrica entre a e b é: $G=\sqrt{ab}$

A média heroniana entre a e b é: $H=\dfrac{2A+G}{3}$

A Calcule essas três médias para $a=6$ e $b=24$.

B A média heroniana de dois números positivos é 7. Se um deles é o 4, qual é o outro?

C Sabe-se que para quaisquer dois números reais positivos tem-se $G\le A$ valendo a igualdade se, e somente se, os dois números forem iguais. Mostre que a média H está sempre entre as outras duas, ou seja, mostre que $G\le H\le A$.

Uma solução:

A

$$A=\frac{6+24}{2}=15$$

$$G=\sqrt{6\cdot 24}=\sqrt{144}=12$$

$$H=\frac{2\cdot 15+12}{3}=\frac{42}{3}=14$$

B Sejam 4 e x os dois números. Devemos ter $\dfrac{4+x+\sqrt{4x}}{3}=7$. Temos

$4+x+2\sqrt{x}=21$ ou $x+2\sqrt{x}-17=0$ que é uma equação do segundo grau na incógnita $\sqrt{x}$. Resolvendo, temos:

$$\sqrt{x}=\frac{-2+\sqrt{4-4(-17)}}{2}=\frac{-2+\sqrt{72}}{2}=\frac{-2+6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}-1$$

Assim, $x=(3\sqrt{2}-1)^2=19-6\sqrt{2}$.

C Considere as implicações:

i) $G\le A \;\Rightarrow\; 2G\le 2A \;\Rightarrow\; 3G\le 2A+G \;\Rightarrow\; G\le\dfrac{2A+G}{3}=H$

ii) $G\le A \;\Rightarrow\; 2A+G\le 3A \;\Rightarrow\; \dfrac{2A+G}{3}\le A \;\Rightarrow\; H\le A$

Assim, $G\le H\le A$.