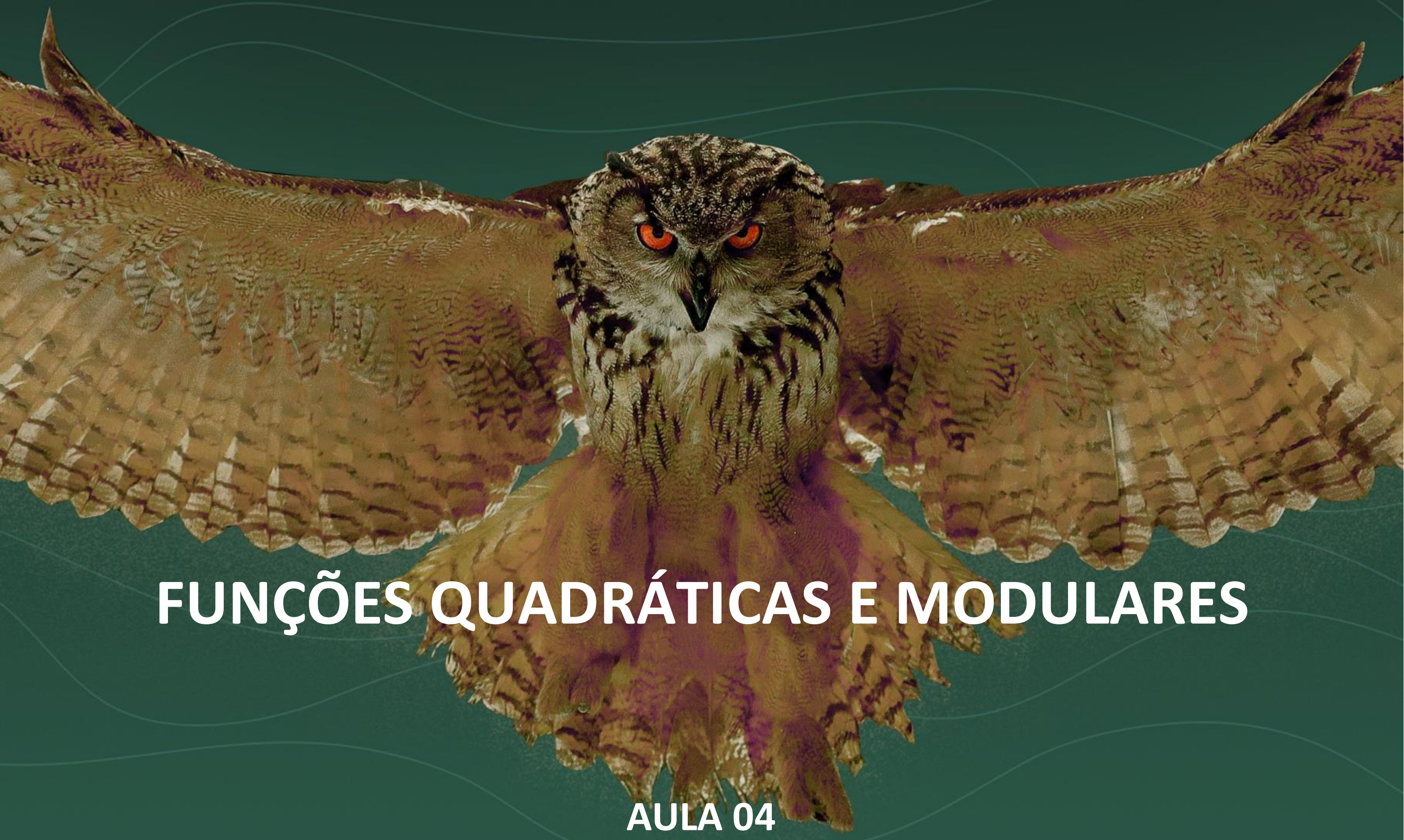
Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023



FUNÇÕES QUADRÁTICAS E MODULARES

AULA 04

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá.

Vimos na aula passada, uma introdução ao conceito de funções. Nessa aula, estudaremos as funções quadráticas e modulares. Veremos os principais temas que poderão ser cobrados na prova e resolveremos diversas questões. Se você for um aluno que já possui base no assunto, vá direto para a lista de questões.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/profvictorso

1. FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática quando definida por:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Alternativamente, para $f(x) = y$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Caso $a = 0$, teremos uma função não quadrática (pode ser linear ou constante).

Essa função também pode ser chamada de função de 2º grau ou trinômio do 2º grau.

Vamos ver alguns exemplos de funções quadráticas:

1) $y = x^2 + 3x + 7 \Rightarrow a = 1, b = 3, c = 7$

2) $y = 3x^2 \Rightarrow a = 3, b = 0, c = 0$

3) $y = -2x^2 + 1 \Rightarrow a = -2, b = 0, c = 1$

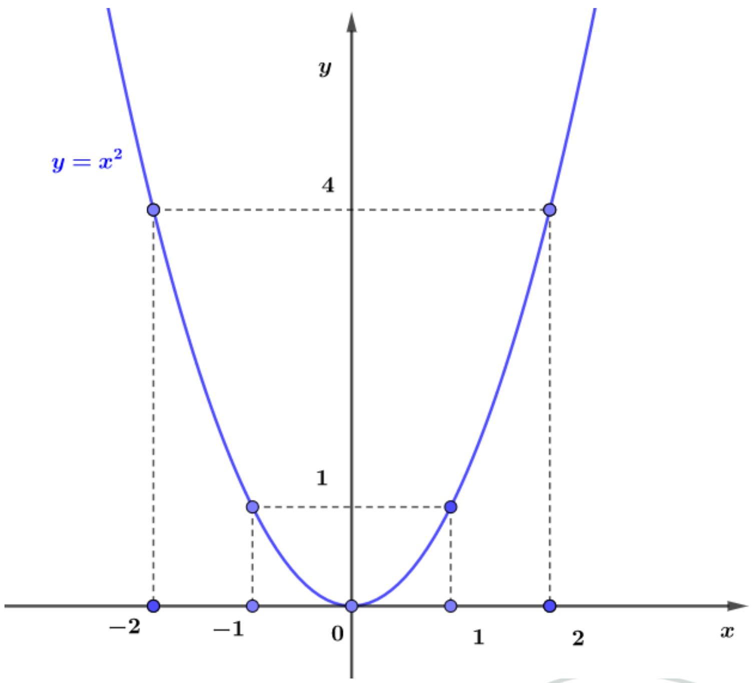
4) $y = x^2 + 2x, a = 1, b = 2, c = 0$

Perceba que uma função quadrática sempre **deve possuir $a \neq 0$.**

Quando desenhamos o gráfico dessa função, obtemos uma **parábola** (veremos o que é uma parábola usando o gráfico). Dependendo do valor de a, ela **pode possuir a concavidade voltada para cima ou para baixo**.

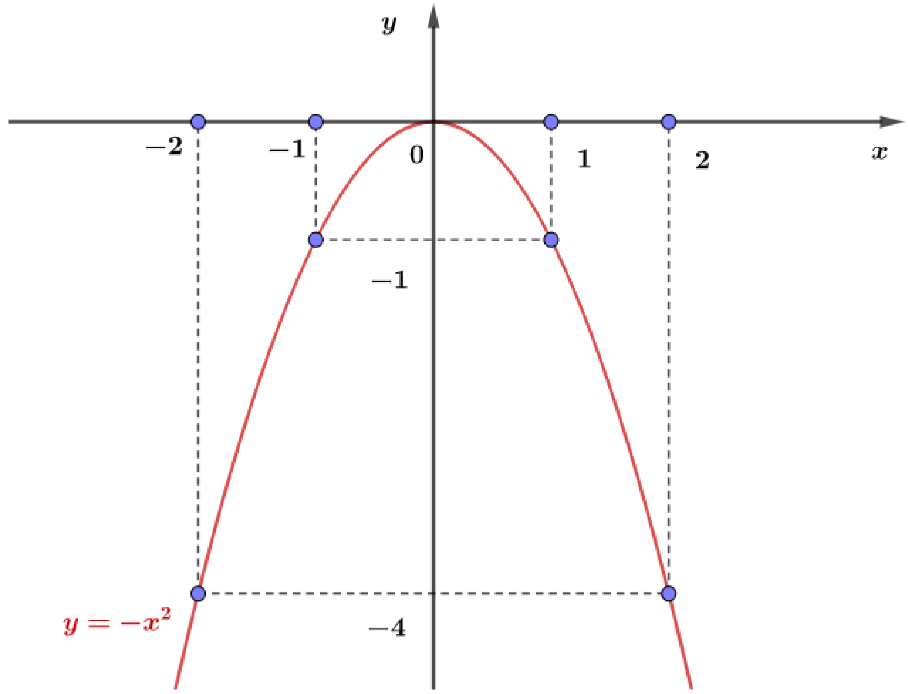
Para **$a > 0$, a concavidade** é voltada **para cima** e para **$a < 0$,** ela é voltada **para baixo**. Vejamos alguns exemplos:

1) Gráfico de $y = x^2$ $(a = 1 > 0)$



Note a concavidade da função voltada para cima.

2) Gráfico de $y = -x^2$ $(a = -1 < 0)$



Note a concavidade da função voltada para baixo.

Vimos basicamente o que é uma função de segundo grau. Vamos aprofundar mais no assunto estudando sua forma canônica.

1.1. FORMA CANÔNICA

Na escola, somos levados a decorar que as raízes de uma função de segundo grau são dadas pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ é o símbolo utilizado para representar o **discriminante** de uma equação quadrática. Lê-se "**delta**".

Saiba que essa fórmula é obtida através da transformação da função quadrática em sua forma canônica. Então, vamos encontrar essa forma.

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função quadrática, dada por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como $a \neq 0$, podemos colocar a em evidência na expressão:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Lembra da aula de fatoração? Vamos manipular a expressão acima de forma a obter um quadrado perfeito. Reescrevendo a expressão:

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Perceba o termo $\frac{b}{2a}$, vamos completar o quadrado perfeito, somando e subtraindo esse número elevado ao quadrado da expressão, obtemos:

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Agora, podemos fatorá-lo:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Reescrevendo a expressão, obtemos:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-b^2 + 4ac)}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right)$$

Chamando de delta o número $b^2 - 4ac$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}}$$

Essa é a forma canônica do trinômio do 2º grau.

Note que ela foi obtida através da fatoração da expressão $ax^2 + bx + c$. A forma canônica nos permite analisar e extrair diversas informações importantes. Vamos explorá-las.

1.1.1. RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Usando a forma canônica, podemos encontrar as raízes da função quadrática:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

ESCLARECENDO!

O que acontece quando aplicamos a raiz quadrada em uma variável elevado ao quadrado?

Para esclarecer, vamos ver um exemplo:

$$y^2 = 4$$

A equação nos diz que devemos encontrar um y tal que esse y elevado ao quadrado resulte no número 4. Para encontrar esse valor, devemos aplicar a raiz quadrada nos dois lados da equação:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{4}$$

$$|y| = 2$$

Note que na última operação, aparece o módulo de y. Isso foi feito para indicar que o valor absoluto de y é igual a 2. Com isso, temos duas soluções possíveis:

$$y_1 = 2 \text{ e } y_2 = -2$$

Quando testamos esses valores na equação inicial, temos:

$$y_1^2 = 2^2 = 4$$

$$y_2^2 = (-2)^2 = 4$$

Portanto, sempre que você for tirar a raiz quadrada de um número com expoente par, lembre-se de aplicar o módulo no número para não perder soluções!

$$\boldsymbol{\sqrt{y^2} = |y|}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{x = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, com\ \Delta = b^2 - 4ac}$$

Desse modo, temos duas raízes para a função quadrática:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\ e\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

1.1.2. MÁXIMO E MÍNIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Usando as relações de desigualdade, podemos ver que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero (ou é nulo ou é positivo), assim, podemos escrever:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

Vamos multiplicar a inequação acima por a, nesse caso, devemos considerar dois casos:

$$a > 0\ ou\ a < 0$$

I) $a > 0$

$$a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

Subtraindo $\frac{\Delta}{4a}$ nos dois lados da inequação, obtemos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Perceba que o lado esquerdo da inequação acima é a forma canônica da função de segundo grau. Reescrevendo:

$$ax^2 + bx + c \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

A inequação acima diz que a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é sempre maior ou igual a $-\frac{\Delta}{4a}$. Dessa forma, podemos concluir que o menor valor que ela assume é:

$$y_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Podemos encontrar o x que resulta nesse número através da seguinte equação:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

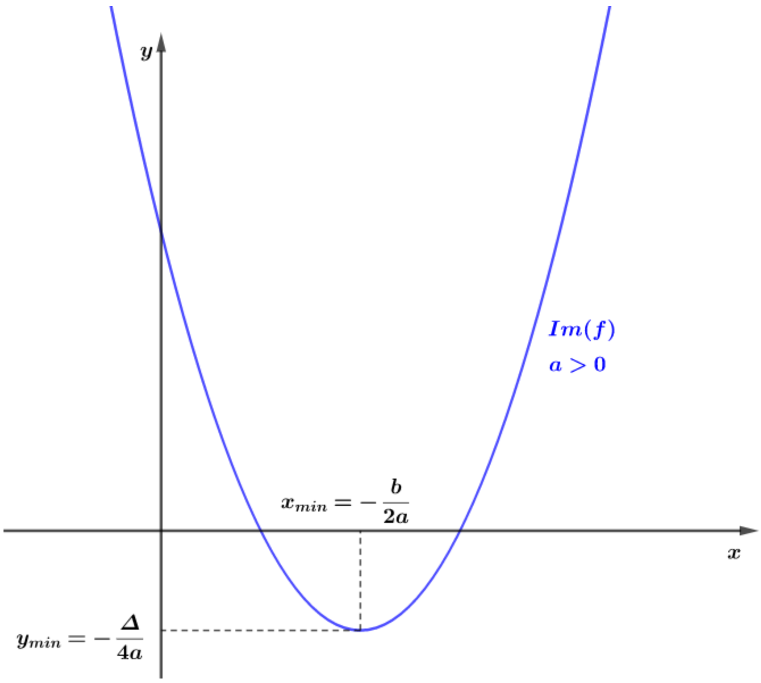
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Assim, concluímos:

$$x_{min} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Graficamente:



II) $a < 0$

$$a < 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

Fazendo as mesmas operações feitas para o caso (I), temos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

$$ax^2 + bx + c \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Agora, todos os valores que a função quadrática pode assumir são menores ou iguais a $-\frac{\Delta}{4a}$, então o valor máximo que ela assume é dado por:

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$$

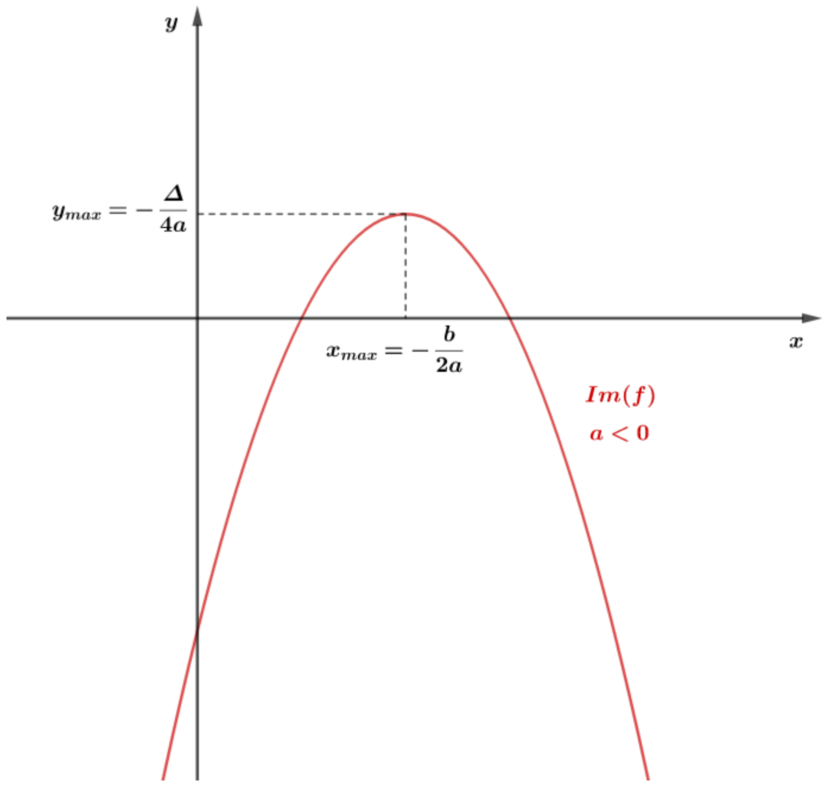
O valor de x que resulta nesse valor é:

$$x_{max} = -\frac{b}{2a}$$

Portanto:

$$x_{max} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Graficamente:



RESUMINDO

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \begin{cases} mínimo\ para\ a > 0 \\ máximo\ para\ a < 0 \end{cases}}$$

CURIOSIDADE

Existe um método simples envolvendo cálculo para encontrar o valor do x máximo ou x mínimo (dependendo do a da função quadrática). Podemos derivar a função do 2º grau e igualá-lo a zero, o x resultante é o x_{max} ou x_{min}. Veja o exemplo:

Calcule o valor de x onde a função abaixo assume o menor valor:

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 12$$

Usando a fórmula que encontramos, temos:

$$x_{min} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{min} = -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Mas, se esquecermos dessa fórmula na hora da prova?

Nesse caso, podemos usar a derivada da função f e igualá-lo a zero:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 1 \cdot 5x^{1-1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{6x - 5}_{f'(x)} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Vamos explicar o que aconteceu.

Inicialmente, devemos saber que, usualmente, representamos a derivada de uma função f por f'.

Para calcular a derivada de uma função, podemos usar a "regra do tombo". Para cada potência de x na função, multiplicamos a constante pelo grau de x e subtraímos 1 do seu grau. Veja:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = ax^2 + bx^1 + cx^0$$
$$f'(x) = 2 \cdot ax^{2-1} + 1 \cdot bx^{1-1} + 0 \cdot cx^{0-1}$$
$$f'(x) = 2ax^1 + bx^0$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

Se igualamos essa derivada a zero, encontramos o ponto crítico dessa função:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x_{crítico} = -\frac{b}{2a}$$

Esse ponto pode ser o ponto de máximo ou mínimo a depender do coeficiente a.

Note que essa é a fórmula que encontramos usando a forma canônica da função quadrática.

Você pode usar esse método se quiser encontrar o máximo ou mínimo de uma função quadrática!

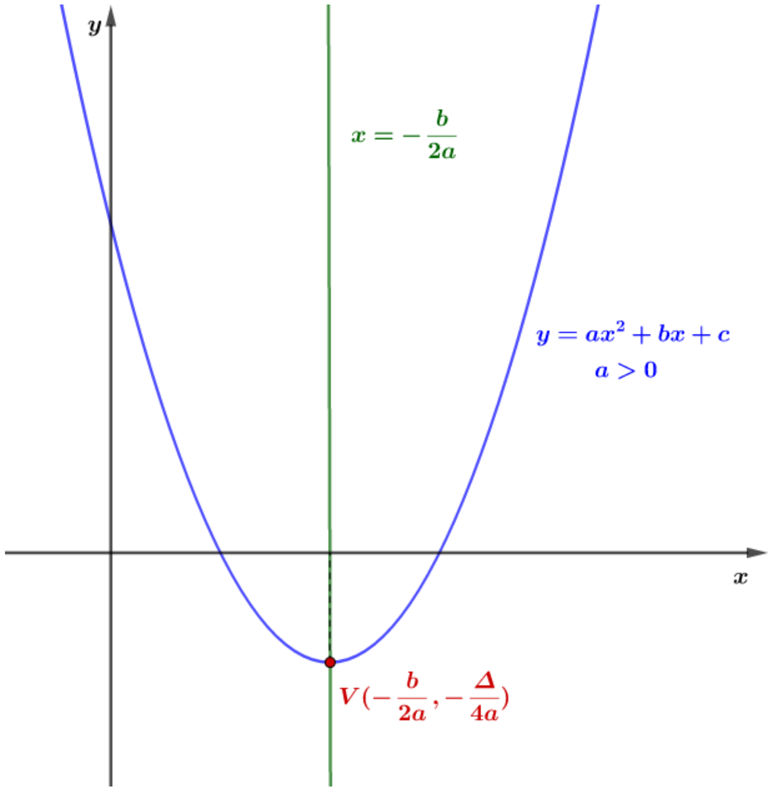
Agora, temos mais uma ferramenta para nos ajudar a resolver as questões da prova!

1.1.3. EIXO DE SIMETRIA E VÉRTICE

Observando o gráfico do tópico anterior, podemos perceber que o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ representa a "ponta" da parábola. Para esse ponto, chamamos de vértice e usualmente representamos por V.

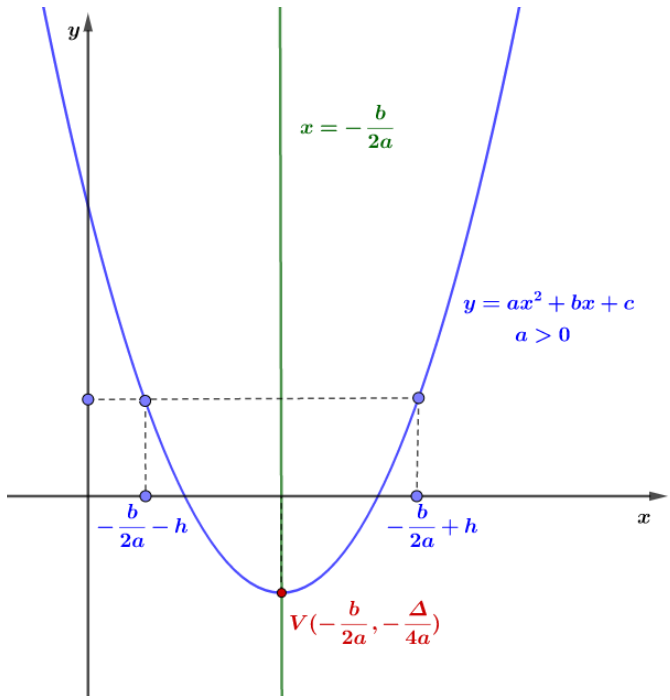
Além disso, perceba que a parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo seu vértice dado por $x = -\frac{b}{2a}$.

Graficamente, podemos visualizar essa propriedade:



Podemos provar algebricamente esse resultado. Para isso, devemos tomar o ponto $x = -b/2a$ como referência e provar que $x_1 = -\frac{b}{2a} + h$ e $x_2 = -\frac{b}{2a} - h$ resultam no mesmo y, ou seja, $f(x_1) = f(x_2)$ para $h \in \mathbb{R}$.

Demonstração:



Usando a forma canônica:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Sendo $h \in \mathbb{R}$, substituindo $x_1 = -\frac{b}{2a} + h$ em f, temos:

$$f(x_1) = f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = a\left(\cancel{-\frac{b}{2a}} + h \cancel{+\frac{b}{2a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ah^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Encontrando o valor de f para $x_2 = -\frac{b}{2a} - h$:

$$f(x_2) = f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) = a\left(\cancel{-\frac{b}{2a}} - h \cancel{+\frac{b}{2a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(-h)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ah^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = ah^2 - \frac{\Delta}{4a} = f(x_2)$$

$$\therefore f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - h\right)$$

Portanto, os valores de x equidistantes da reta $x = -b/2a$ resultam em y iguais para $h \in \mathbb{R}$. Logo, a reta $x = -b/2a$ é o eixo de simetria da função quadrática.

1.2. GRÁFICO

Vamos aprender a esboçar o gráfico de uma função quadrática. O gráfico é muito útil para resolver diversas questões das provas, pois ela nos permite analisar os principais pontos do gráfico e extrair informações relevantes.

Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, devemos nos atentar às seguintes etapas:

I) Analisar o valor de delta e verificar se há raízes.

II) Saber se a concavidade é voltada para cima $(a > 0)$ ou para baixo $(a < 0)$.

III) Encontrar o vértice da parábola, cujo ponto é $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

IV) Desenhar uma parábola simétrica em relação à reta $x = -\frac{b}{2a}$ (reta perpendicular ao eixo x).

Iremos aprender a esboçar o gráfico por meio de exemplos práticos. Antes disso, vamos estudar a primeira etapa:

I) Geralmente, consideramos o conjunto dos reais para análise. As raízes da função quadrática são as soluções da seguinte equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sabemos que a solução é dada por:

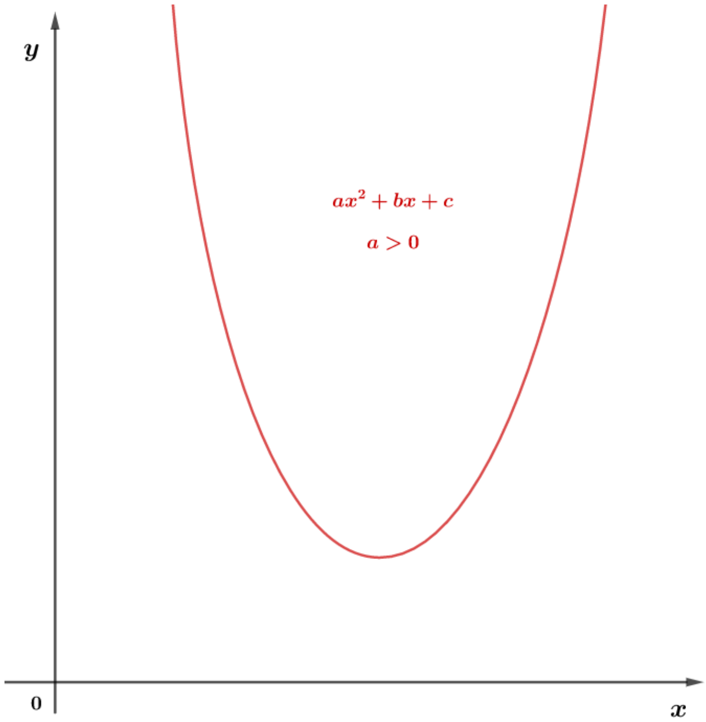
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

No conjunto dos reais, devemos analisar os possíveis valores de delta para verificar se a equação possui solução. Vamos analisar cada caso:

a) $\Delta < 0$

Nesse caso, não temos raízes reais, pois $\sqrt{\Delta}$ não é real para $\Delta < 0$. Logo, o gráfico não intercepta o eixo x.

Graficamente, temos o seguinte resultado:



Essa é uma representação genérica para a positivo. No caso de a negativo, a parábola estaria localizada inteiramente abaixo do eixo das abcissas. Perceba que o gráfico não possui solução para $ax^2 + bx + c = 0$ e por isso ela não intercepta o eixo x.

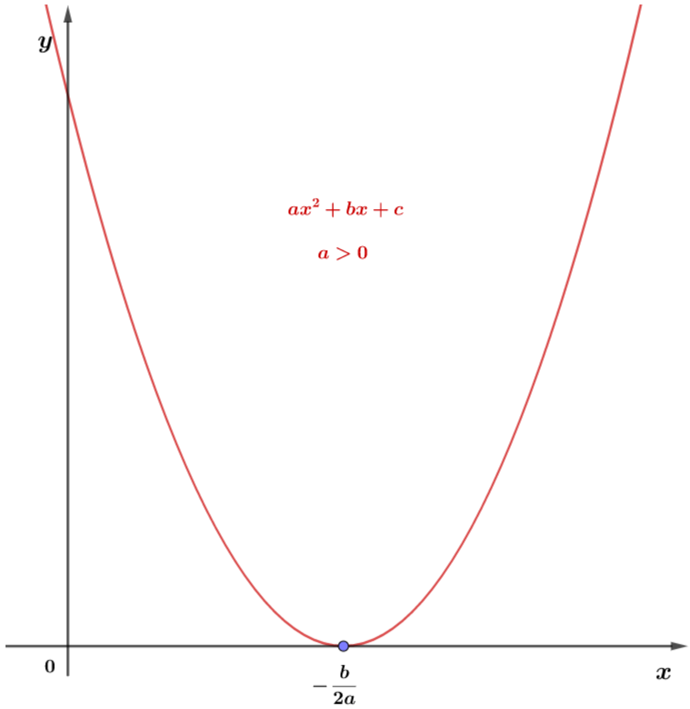
b) $\Delta = 0$

Para esse valor de delta, temos apenas uma única raiz quadrática:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Esse ponto é exatamente a vértice da parábola. Graficamente:



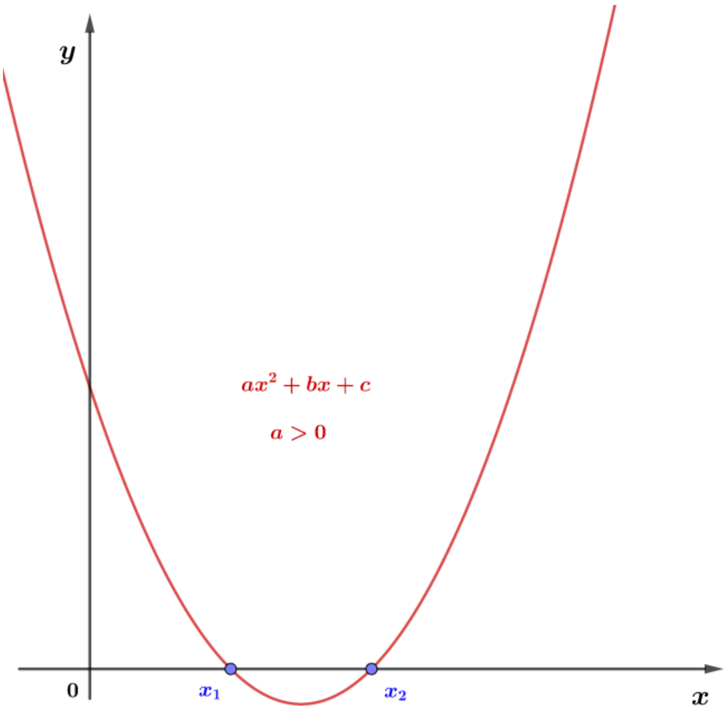
A parábola intercepta o eixo x apenas uma vez no ponto $x = -b/2a$.

c) $\Delta > 0$

Nessa situação, $\sqrt{\Delta}$ é um número real. Logo, temos duas raízes reais dadas por:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Graficamente:



Exemplos:

Vamos esboçar o gráfico da seguinte função:

$$y = x^2 - 8x + 12$$

Seguindo as etapas para o esboço do gráfico, vamos encontrar o valor de delta:

$$x^2 - 8x + 12 \Rightarrow a = 1, b = -8, c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(12) = 64 - 48 = 16 > 0$$

Logo, a função possui duas raízes. Vamos calculá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{(8 \pm 4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

CURIOSIDADE

Perceba que a função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ possui $b = -8$, um número par. Podemos encontrar as raízes dessa função de uma forma mais rápida. Veja:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot 12}}{1} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2 \; e \; x_2 = 6$$

Essas são as raízes da função. Note que o cálculo delas envolve números menores e, por isso, o cálculo se torna mais simples. Podemos usar essa fórmula simplificada apenas quando b for um número par, isto é, $b = 2k$.

Vamos explicar o que aconteceu.

Sendo a equação quadrática da forma:

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

As raízes da equação são dadas por:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}}$$

Note que a fórmula é obtida através da fatoração da expressão.

Essa é a fórmula simplificada para encontrar as raízes de uma equação com b par. Ela facilita os cálculos quando os coeficientes da equação forem grandes.

Encontrado as raízes, devemos encontrar o vértice da parábola.

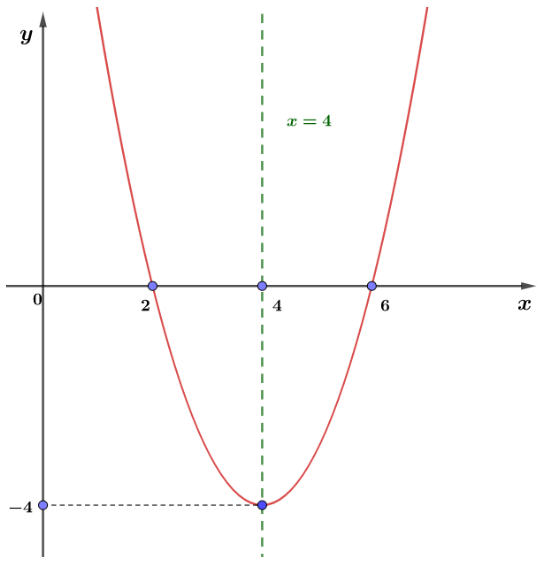
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$$

Para encontrar y_V, podemos substituir x_V na função ou usar a fórmula pronta. Vamos usar a fórmula:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$$

Resta verificar a concavidade da parábola. Temos $a = 1 > 1$, logo a concavidade é voltada para cima.

Para esboçar o gráfico, devemos desenhar uma parábola simétrica em relação à reta $x = 4$ e que passa pelos pontos $x_1(2,0), x_2(6,0), V(4,-4)$:



Esse é o gráfico resultante.

(Exercícios de Fixação)

1. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 + 64x + 1024 = 0$

d) $-x^2 + 9x - 5 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Resolução:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Temos que encontrar a raiz da equação. Sabemos que as raízes de uma equação do 2º grau são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo os valores:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ é solução}$$

b) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soluções:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $x^2 + 64x + 1024 = 0$

Vamos usar a fórmula simplificada para calcular as raízes:

$$x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 1 \cdot 1024}}{1} = -32 \pm 0 = -32$$

$$\Rightarrow x = -32$$

d) $-x^2 + 9x - 5 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{61}}{-2} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{9 - \sqrt{61}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{9 + \sqrt{61}}{2}$$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Para resolver essa equação, podemos reescrevê-la fazendo $z = x^2$:

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

Sabemos que as raízes dessa equação são dadas por:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$z_1 = 1 \text{ e } z_2 = 2$$

Agora, resolvemos a equação $z = x^2$ para encontrar os valores de x:

$$z = x^2$$

$$|x| = \sqrt{z}$$

Assim, para cada valor de z, temos:

$$z_1 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -1$$

$$z_2 = 2 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \text{ e } x_4 = -2$$

2. Calcule o máximo ou mínimo das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $g(x) = -x^2 + 25$

Resolução:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Como $a = 1 > 0$, a função possui um mínimo. Sabemos que ela é dada por:

$$y_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Calculando delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$y_{min} = -\frac{16}{4(1)} = -4$$

b) $g(x) = -x^2 + 25$

$$a = -1 < 0 \Rightarrow \text{a função possui máximo}$$

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4(-1)(25) = 100$$

$$y_{max} = -\frac{100}{4(-1)} = 25$$

3. Esboce o gráfico da seguinte função:

$$f(x) = x^2 - x - 20$$

Resolução:

Analisando a função, temos:

$$a = 1 > 0 \Rightarrow \text{concavidade para cima}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-20) = 1 + 80 = 81 > 0$$

Temos duas raízes:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = 5 \; ou - 4$$

Devemos encontrar o vértice da parábola. Ele é dado por:

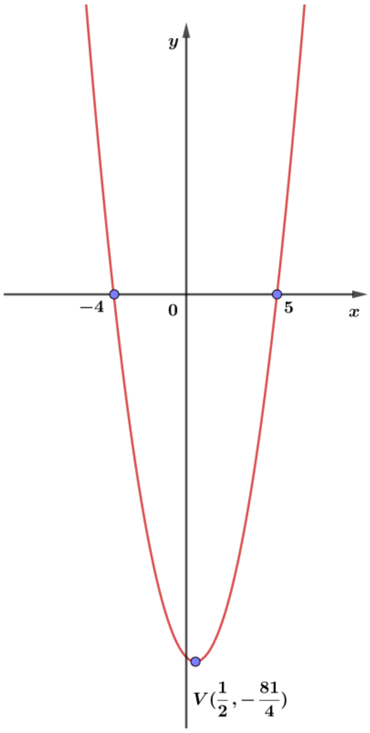
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{81}{4}$$

$$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{81}{4}\right)$$

Esboçando o gráfico, obtemos:



1.3. DECOMPOSIÇÃO EM FATORES DO 1º GRAU

As funções quadráticas podem ser decompostas em fatores do 1º grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes dessa função.

Para isso, ela deve ter pelo menos uma raiz.

Demonstração:

Vamos usar a forma canônica da função f:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Colocando a em evidência:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)}^2\right]$$

Fatorando a expressão:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]$$

$$f(x)=a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

$$f(x)=a\left[x-\underbrace{\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_2}\right]\left[x-\underbrace{\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_1}\right]$$

$$\therefore f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Vamos ver na prática como fazemos:

1) $f(x)=x^2-6x+5$

Encontrando as raízes, usando a fórmula simplificada:

$$x=3\pm\sqrt{3^2-5}=3\pm\sqrt{4}=3\pm 2=5\ ou\ 1$$

Reescrevendo a função:

$$f(x)=(x-5)(x-1)$$

2) $g(x)=2x^2+3x-5$

Encontrando as raízes:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4}=-\frac{5}{2}\ ou\ 1$$

Reescrevendo a função:

$$g(x)=2\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)(x-1)=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)=(2x+5)(x-1)$$

1.4. INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Antes de estudar as inequações quadráticas, vamos fazer o estudo do sinal da função quadrática.

1.4.1. ESTUDO DO SINAL

Para encontrarmos os sinais da função, devemos verificar o valor de delta e também conferir o valor do coeficiente a.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos três casos para delta:

$$\Delta < 0 \; ou \; \Delta = 0 \; ou \; \Delta > 0$$

A análise será feita usando o número $a \cdot f(x)$ (a é o coeficiente da função quadrática). Começaremos pelo primeiro caso:

1) $\boldsymbol{\Delta < 0}$

A função não possui raiz, logo não intercepta o eixo x.

Usando a forma canônica de f, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, vamos analisar o sinal de $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a\left(a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4}$$

Como $\Delta < 0$, temos $-\Delta > 0$. Observe a equação:

$$a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{positivo} \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{positivo} + \underbrace{\frac{(-\Delta)}{4}}_{positivo}$$

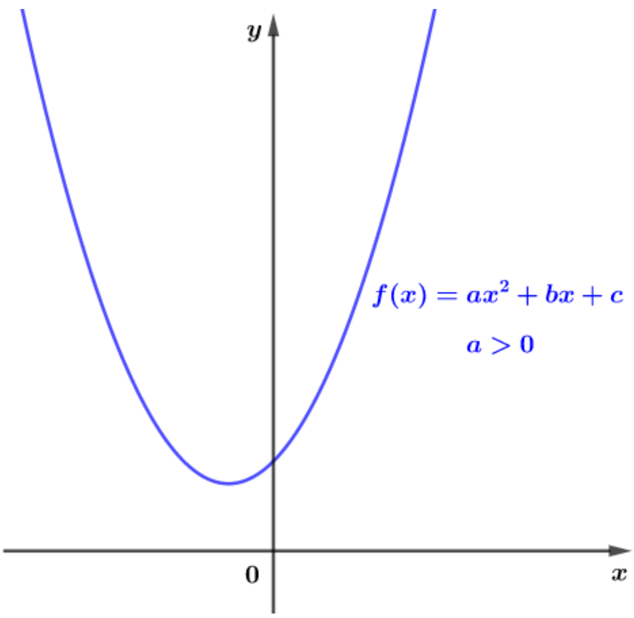
Perceba que todos os termos à direita são positivos, então a soma desses números deve resultar em um número positivo. Com isso, podemos concluir:

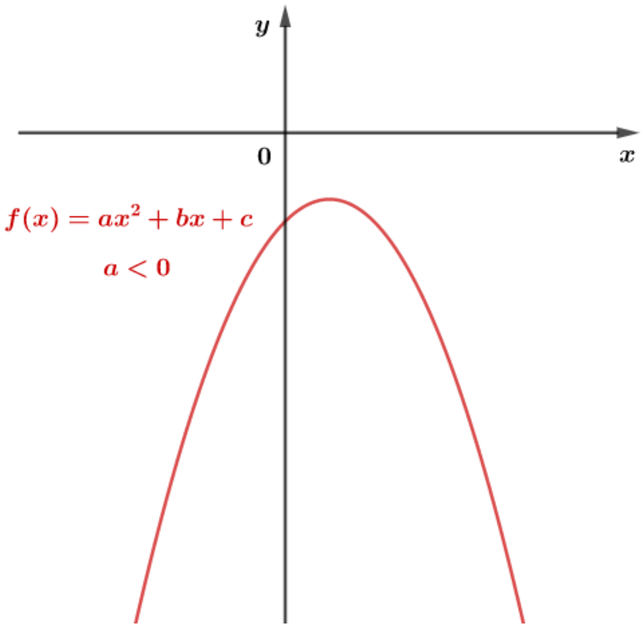
$$a \cdot f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dessa desigualdade, resulta:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a > 0 \Rightarrow f(x) > 0} \\ \boldsymbol{a < 0 \Rightarrow f(x) < 0} \end{array}}$$

Pelo gráfico, podemos visualizar as possibilidades:





2) $\boldsymbol{\Delta = 0}$

Nesse caso, temos uma única raiz. Ela intercepta o eixo das abcissas no ponto $x = -b/2a$.

Calculando $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$$

Substituindo $\Delta = 0$ na equação, obtemos:

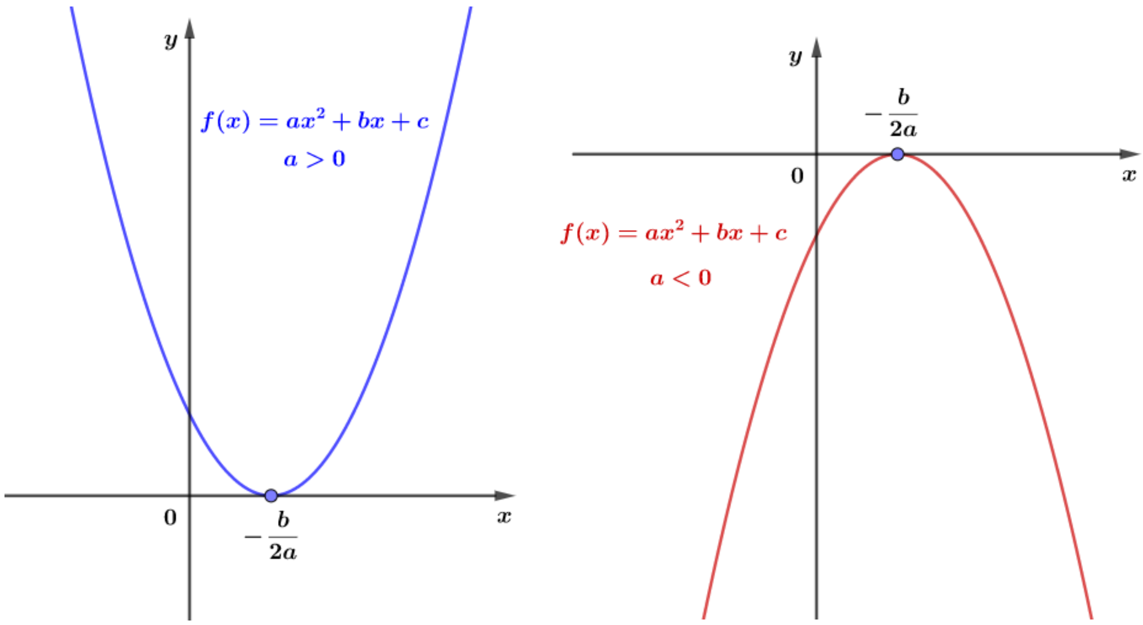
$$\Delta = 0 \Rightarrow a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{positivo} \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}$$

$$a \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Com isso, temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0} \end{array}}$$

Graficamente:



3) $\boldsymbol{\Delta > 0}$

Temos duas raízes reais que interceptam o eixo das abcissas.

Calculando $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a\left(a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right]$$

Vamos aplicar o produto notável no termo em vermelho (lembrando que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$):

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right] = a^2\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Sabemos que para $\Delta > 0$, temos duas raízes reais dadas por:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podemos substituí-las em $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a^2\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a^2\left(x - \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

$$a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{positivo} (x - x_2)(x - x_1)$$

Com isso, vemos que o sinal de $a \cdot f(x)$ é dado pelo estudo do sinal de $a^2(x - x_2)(x - x_1)$. Temos três casos possíveis:

1) $x < x_1 < x_2$:

$$x < x_1 \Rightarrow x - x_1 < 0$$
$$x < x_2 \Rightarrow x - x_2 < 0$$
$$\Rightarrow a^2(x - x_1)(x - x_2) > 0$$
$$\Rightarrow a \cdot f(x) > 0$$

2) $x_1 < x < x_2$:

$$x_1 < x \Rightarrow x - x_1 > 0$$
$$x < x_2 \Rightarrow x - x_2 < 0$$
$$\Rightarrow a^2(x - x_1)(x - x_2) < 0$$
$$\Rightarrow a \cdot f(x) < 0$$

3) $x > x_2 > x_1$:

$$x > x_1 \Rightarrow x - x_1 > 0$$
$$x > x_2 \Rightarrow x - x_2 > 0$$
$$\Rightarrow a^2(x - x_1)(x - x_2) > 0$$
$$\Rightarrow a \cdot f(x) > 0$$

Portanto, obtemos o seguinte resultado:

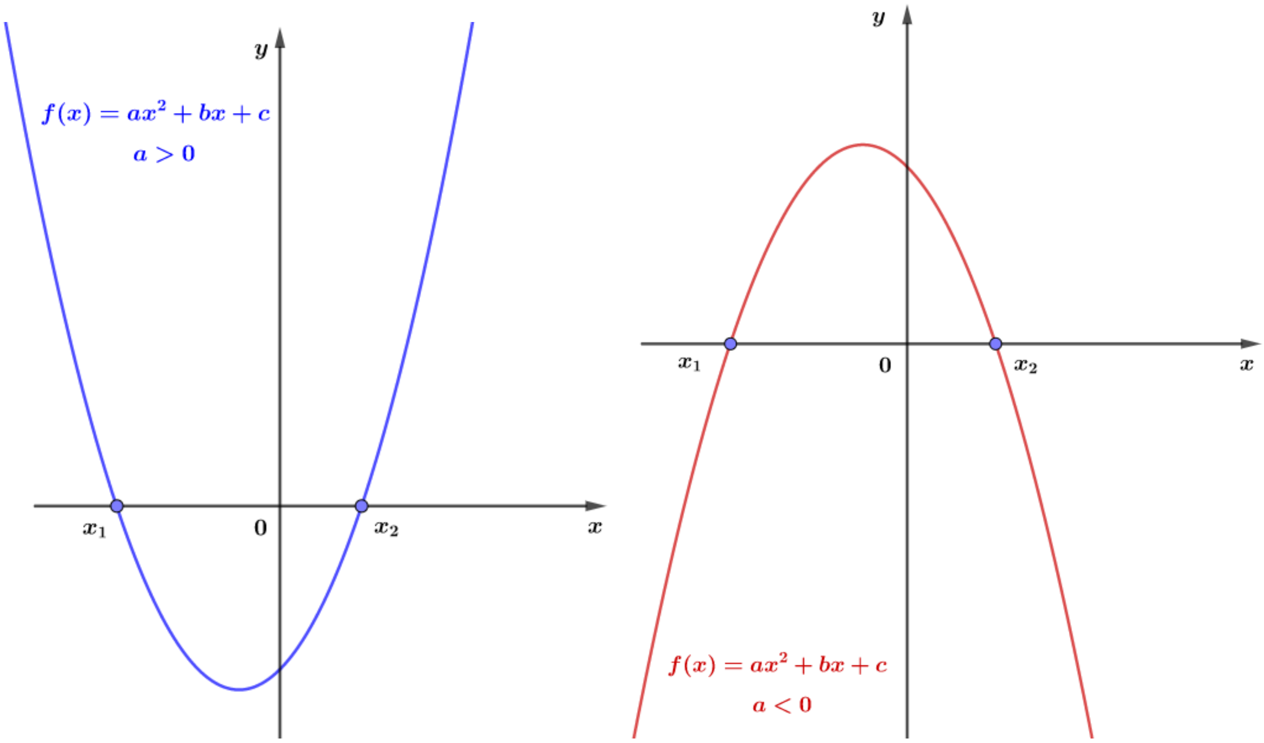
$$x < x_1 \Rightarrow a \cdot f(x) > 0$$
$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow a \cdot f(x) < 0$$
$$x > x_2 \Rightarrow a \cdot f(x) > 0$$

Para cada valor de a, temos:

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, x < x_1 \; ou \; x > x_2 \\ f(x) < 0, x_1 < x < x_2 \\ f(x) = 0, x = x_1 \; ou \; x = x_2 \end{cases}}$$

$$\boxed{a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, x_1 < x < x_2 \\ f(x) < 0, x < x_1 \; ou \; x > x_2 \\ f(x) = 0, x = x_1 \; ou \; x = x_2 \end{cases}}$$

Graficamente:



Resumindo:

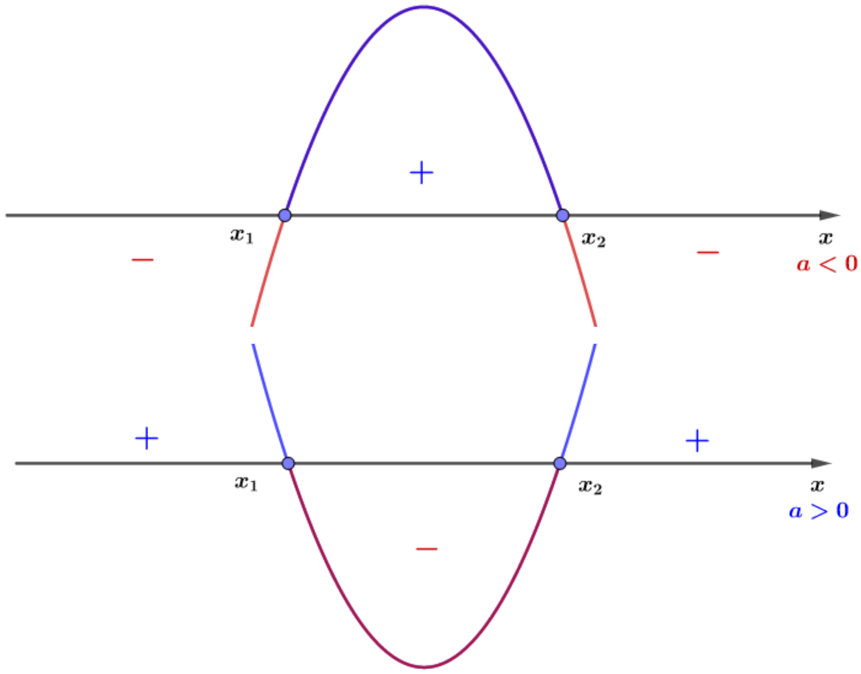
Para fazer o estudo do sinal da função, devemos:

1) Analisar o sinal do coeficiente a.

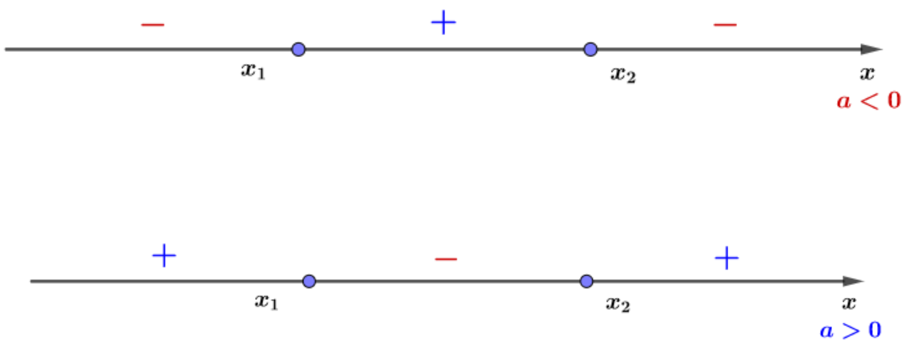
2) Verificar se há raízes.

3) Representar os sinais no eixo x.

Geralmente, as questões de inequações quadráticas terão raízes. Usamos os seguintes eixos para representar o sinal da função:



Simplificadamente:



1.4.2. INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Aprendemos no tópico anterior todos os casos de sinais possíveis para a função quadrática.

Para resolver uma inequação quadrática, temos que verificar o que se pede na questão e analisar quais os valores de x resultam na desigualdade pedida. Vamos ver um exemplo:

Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

Vamos analisar o valor de delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(3) = 4 + 12 = 16$$

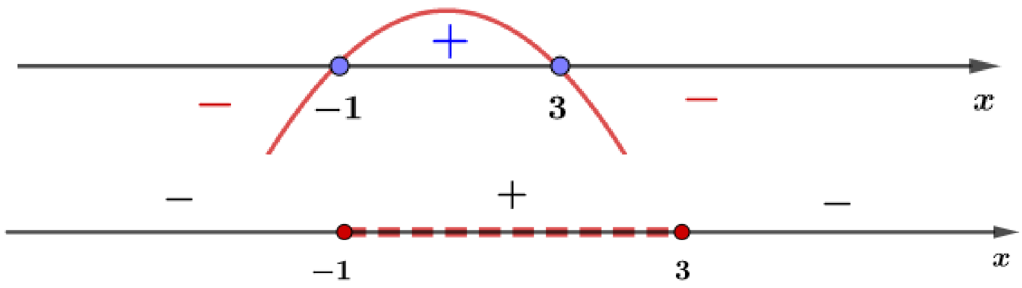
Como $\Delta > 0$, temos duas raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 3$$

$$a = -1 < 0 \Rightarrow \text{concavidade para baixo}$$

Representando o sinal no eixo x, temos:



Os valores que nos interessam são os maiores ou iguais a zero:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\}$$

1.5. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Vamos finalizar o assunto de funções quadráticas estudando as equações e inequações paramétricas. Esse tema é um assunto que pode parecer difícil à primeira vista, então vamos nos atentar a todos os detalhes!

Mas, o que seria uma equação ou inequação paramétrica?

Vejamos alguns exemplos:

1) $x^2 + px + q = 0$

2) $mx^2 + (m-1)x - 1 > 0$

3) $(m-1)x^2 + (2m+3)x + m = 0$

Em uma equação paramétrica, alguns coeficientes tornam-se parâmetros. Esses parâmetros podem variar e mudar totalmente a forma da equação.

No exemplo (1), temos dois parâmetros, p e q. O único coeficiente conhecido é $a = 1$.

No exemplo (2) e (3), temos apenas o parâmetro m.

Normalmente, as questões que envolvem esse tema pedirão para comparar um número real com as raízes da equação ou analisar os sinais das raízes da equação. Veremos como resolver cada caso.

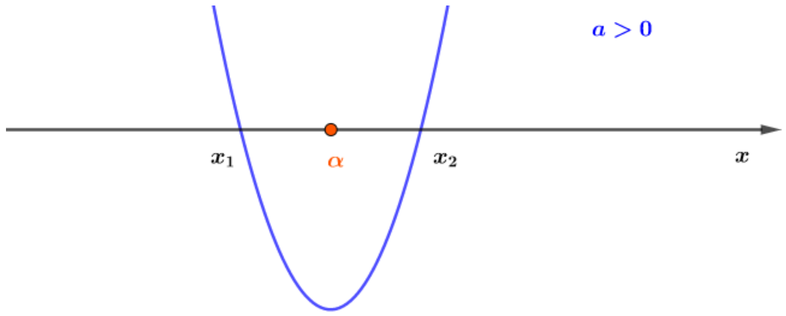
As inequações paramétricas podem ser resolvidas usando os métodos que aprendemos até aqui e também aplicar as técnicas que aprenderemos agora. Vamos ver dois teoremas que nos permitem localizar um número real ao longo do eixo x.

1.5.1. TEOREMA 1 $(a \cdot f(\alpha))$

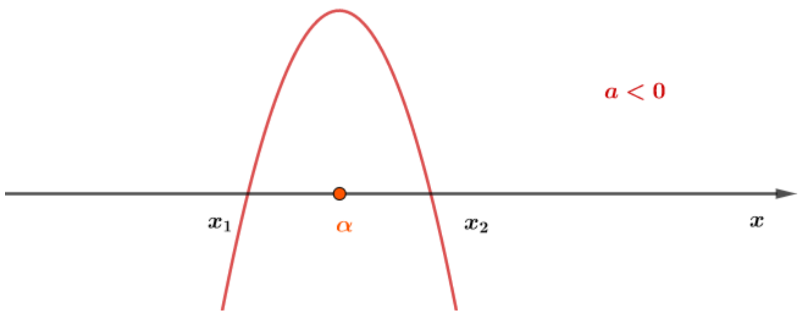
Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \ e \ x_1 < \alpha < x_2}}$$

Esse teorema diz que se o produto $a \cdot f(\alpha) < 0$, o número real α estará entre as raízes da função e a função f terá duas raízes distintas. Graficamente, podemos ver esse resultado:



Ou



Demonstração:

Queremos provar que $a \cdot f(\alpha) < 0$ implica $\Delta > 0$ e $\alpha \in]x_1, x_2[$.

Suponha $\Delta \leq 0$, conforme visto no tópico de estudo do sinal, temos as seguintes possibilidades:

$$a > 0 \text{ e } \Delta \leq 0 \to f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a \cdot f(x) \geq 0$$

Isso é um absurdo dado que a hipótese é $a \cdot f(\alpha) < 0$.

$$a < 0 \text{ e } \Delta \leq 0 \to f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a \cdot f(x) \geq 0$$

Novamente, chegamos a um absurdo.

Logo, $\Delta > 0$ e a função possui duas raízes reais distintas.

Agora, vamos provar que α está entre x_1 e x_2, sendo $x_1 < x_2$.

Escrevendo f em função das raízes, temos:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Da hipótese:

$$a \cdot f(\alpha) < 0$$
$$a \cdot [a(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)] < 0$$
$$a^2(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) < 0$$

Como $x_1 < x_2$, temos apenas uma possibilidade:

$$\begin{cases} \alpha - x_1 > 0 \\ \alpha - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < \alpha < x_2$$

Portanto:

$$a \cdot f(\alpha) \Rightarrow \Delta > 0 \; e \; \alpha \in]x_1, x_2[.$$

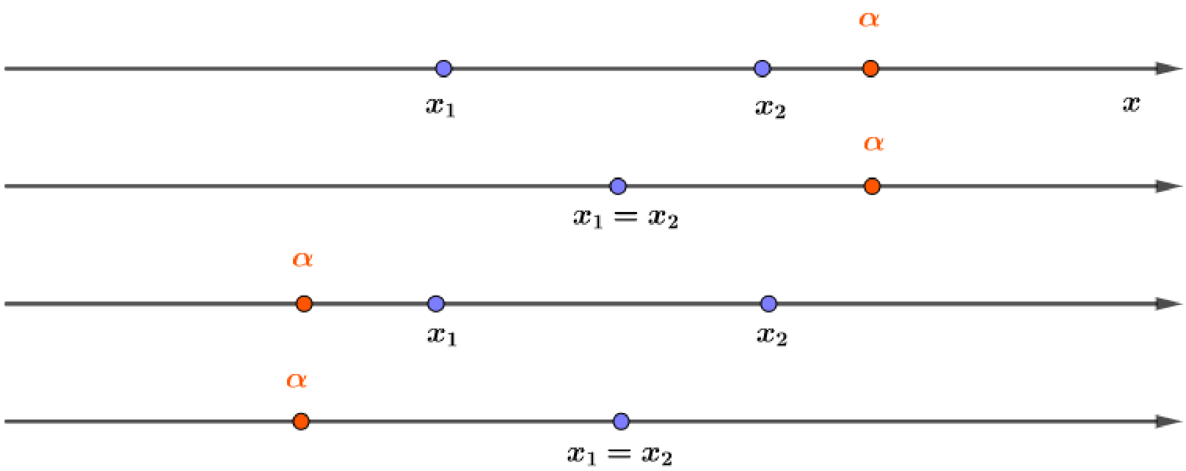
1.5.2. TEOREMA 2 $\left(a \cdot f(\alpha)\right)$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\boxed{a \cdot f(\alpha) > 0 \; e \; \Delta \geq 0 \Rightarrow \alpha < x_1 \; ou \; \alpha > x_2}$$

O teorema diz que se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, o número real α estará à esquerda da menor raiz ou à direita da maior raiz.

Possíveis casos:



Demonstração:

Suponha que α esteja entre as raízes: $x_1 \leq \alpha \leq x_2$.

Então se $\Delta > 0$, f terá duas raízes reais distintas. Para cada caso de a:

Se $a > 0$ e $x_1 \leq \alpha \leq x_2$, temos $f(\alpha) \leq 0$ e, assim, $\underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{f(\alpha)}_{\leq 0} \leq 0$.

Se $a < 0$ e $x_1 \leq \alpha \leq x_2$, temos $f(\alpha) \geq 0$ e, assim, $\underbrace{a}_{<0} \cdot \underbrace{f(\alpha)}_{\geq 0} \leq 0$.

Para qualquer caso, temos $a \cdot f(\alpha) \leq 0$ e isso é um absurdo, dado que a hipótese inicial é $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Se $\Delta = 0$ e $x_1 \leq \alpha \leq x_2$ temos $x_1 = x_2 = \alpha$.

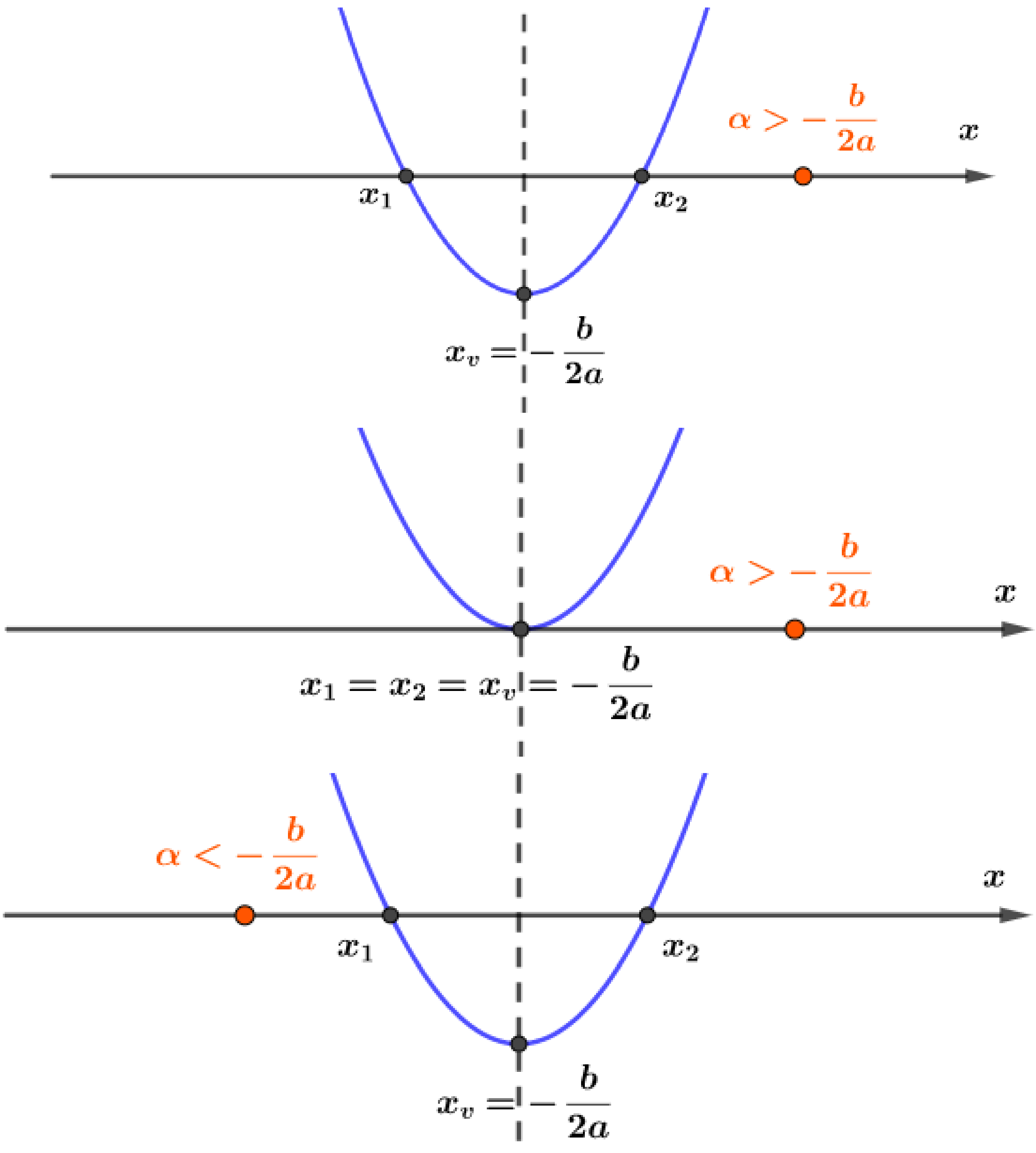
α é raiz, logo $a \cdot f(\alpha) = 0$. O que é um absurdo.

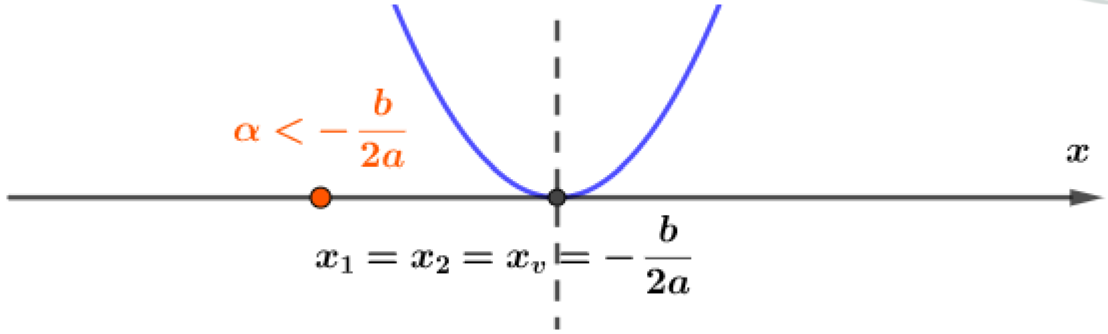
Portanto, concluímos:

$$\alpha < x_1 \leq x_2 \text{ ou } x_1 \leq x_2 < \alpha$$

Atenção a um detalhe! O teorema não diz se o número alfa está à esquerda ou à direita das raízes, ela apenas informa que ela não está localizada entre elas. Para saber qual lado ela está, podemos comparar o número α ao ponto $x_v = -b/2a$. Este ponto é a abcissa do vértice da parábola. Caso ela seja menor, α estará à esquerda de x_1. Caso contrário, ela estará à direita de x_2.

Então, temos para $a > 0$:





Vamos ver a aplicabilidade desses dois teoremas usando exemplos.

Exemplos:

Determine os valores de m na equação $x^2 + (m-2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número 2 esteja entre as raízes.

Queremos que $x_1 < 2 < x_2$, então vamos usar o teorema 1.

Sendo $f(x) = x^2 + (m-2)x + 1 - m$:

$$a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow 1 \cdot f(2) < 0$$

Calculando $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 + (m-2)2 + 1 - m = 4 + 2m - 4 + 1 - m = m + 1$$

Substituindo na condição inicial, encontramos:

$$m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$$

Então, para $m < -1$ o número 2 estará entre as raízes da função.

Determine m de modo que a equação $(m-3)x^2 + 2(m-2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.

Nesse caso, temos que usar o teorema 2.

Considerando $f(x) = (m-3)x^2 + 2(m-2)x + m + 1$. Para satisfazer as condições do problema, temos que encontrar m tal que:

$$(I)\ a \cdot f(1) > 0$$
$$(II)\ \Delta \geq 0$$
$$(III)\ -\frac{b}{2a} < 1$$

Vamos analisar cada condição separadamente.

$(I)\ a \cdot f(1) > 0$

$$f(1) = m - 3 + 2(m-2) + m + 1 = 4m - 6$$
$$\Rightarrow a \cdot f(1) = (m-3)(4m-6) > 0$$

Disso resulta:

$$m - 3 > 0 \text{ e } 4m - 6 > 0 \Rightarrow m > 3\ e\ m > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m > 3}$$

Ou

$$m-3<0 \text{ e } 4m-6<0 \Rightarrow m<3\ e\ m<\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m<\frac{3}{2}}$$

$(II)\ \Delta \geq 0$

$$\Delta=[2(m-2)]^2-4(m-3)(m+1)=$$
$$4(m^2-4m+4)-4(m^2-2m-3)=$$
$$4(m^2-4m+4-m^2+2m+3)=$$
$$4(-2m+7)=$$
$$-8m+28$$
$$\Rightarrow -8m+28\geq 0 \Rightarrow 28\geq 8m \Rightarrow \boxed{m\leq\frac{7}{2}}$$

$(III)\ -\frac{b}{2a}<1$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{[2(m-2)]}{2(m-3)}=\frac{2-m}{m-3}<1$$
$$\frac{2-m}{m-3}-1<0 \Rightarrow \frac{5-2m}{m-3}<0$$

Possibilidades:

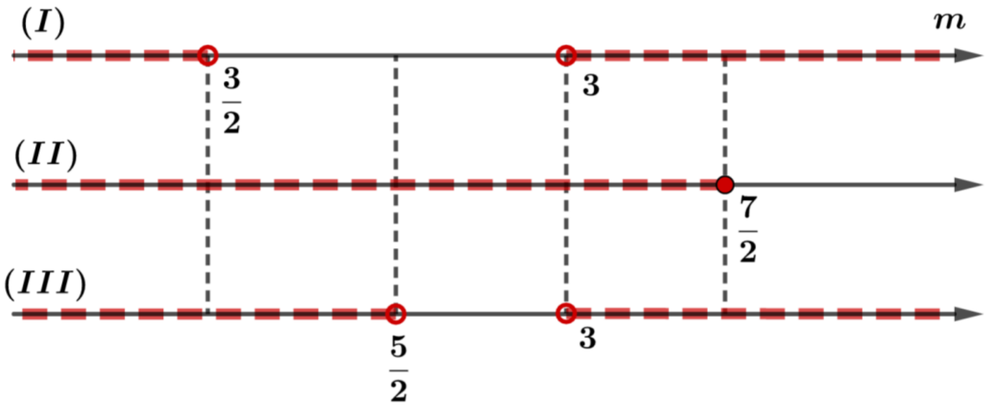
$$5-2m<0\ e\ m-3>0$$
$$\Rightarrow m>\frac{5}{2}\ e\ m>3 \Rightarrow \boxed{m>3}$$

Ou

$$5-2m>0\ e\ m-3<0$$
$$\Rightarrow m<\frac{5}{2}\ e\ m<3 \Rightarrow \boxed{m<\frac{5}{2}}$$

Juntando as possibilidades para $m\in\mathbb{R}$, temos:

$$(I)\ m>3\ ou\ m<\frac{3}{2}$$
$$(II)\ m\leq\frac{7}{2}$$
$$(III)\ m>3\ ou\ m<\frac{5}{2}$$



Os valores de m que satisfazem ao problema são resultados da intersecção dos intervalos acima:

$$m < \frac{3}{2}\ ou\ 3 < m \leq \frac{7}{2}$$

(Exercícios de Fixação)

4. Para $m \in \mathbb{R}$, encontre a solução da equação:

$$(m-1)x^2 + (2m+3)x + m = 0$$

Resolução:

Para resolver essa equação paramétrica, devemos analisar o que acontece com as raízes da equação quando definimos algum valor para ele.

Observando a equação, vemos que a princípio ela é de 2º grau para $a = m - 1 \neq 0$.

Vamos ver o que ocorre quando $a = 0 \rightarrow m = 1$.

Para $m = 1$:

$$(1-1)x^2 + (2(1)+3)x + 1 = 0$$

$$5x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/5$$

Encontramos uma solução única:

$$m = 1 \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

Agora, vamos analisar a equação quadrática para $m \neq 1$.

Devemos analisar os valores de Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m+3)^2 - 4(m-1)m = 16m + 9$$

Para $\Delta < 0$:

$$16m + 9 < 0 \Rightarrow m < -9/16$$

Sabemos que $\Delta < 0$ faz com que a equação não possua solução real, então temos:

$$m < -\frac{9}{16} \Rightarrow S = \emptyset$$

Para $\Delta = 0$:

$$m = -9/16$$

Esse valor de delta implica em raiz única. A raiz é dada por:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m+3}{2(m-1)} = -\frac{2\left(-\frac{9}{16}\right)+3}{2\left(-\frac{9}{16}-1\right)} = \frac{\frac{9}{8}-3}{-\frac{9}{8}-2} = \frac{9-24}{-9-16} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Logo:

$$m = -\frac{9}{16} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$$

Para $\Delta > 0$:

$$m > -9/16$$

Nesse caso, temos duas raízes distintas $x_1 \neq x_2$. Vamos analisar o sinal delas.

Dividiremos em três casos possíveis:

1) x_1 e x_2 com sinais opostos

2) x_1 e x_2 negativos

3) x_1 e x_3 positivos

Vamos começar pelo primeiro caso.

Usaremos o teorema 1, lembrando:

$$a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \text{ está entre as raízes}$$

Se queremos raízes opostas, podemos tomar $\alpha = 0$. Desse modo, a raiz x_1 estará à esquerda de 0 e x_2 à direita de 0.

Calculando $a \cdot f(0)$:

$$a \cdot f(0) = (m-1)m < 0$$

Possibilidades:

$$m < 0 \; e \; m - 1 > 0 \to m < 0 \; e \; m > 1 \; (impossível)$$

$$m > 0 \; e \; m - 1 < 0 \to 0 < m < 1$$

Então:

$$0 < m < 1 \Rightarrow x_1 < 0 \; e \; x_2 > 0 \; com \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Devemos analisar o que acontece nos extremos do intervalo de m. Já sabemos o resultado para $m = 1$. Vamos analisar $m = 0$:

$$m = 0 \to -x^2 + 3x = 0 \to x(-x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \; ou \; x = 3$$

Desse modo:

$$m = 0 \Rightarrow S = \{0, 3\}$$

Provamos que se $m \in]0, 1[$, as duas raízes terão sinais opostos. Então, se $m < 0$ ou $m > 1$, as raízes terão sinais iguais. Vamos analisar o valor de m nesse intervalo, então devemos verificar:

$$-\frac{9}{16} < m < 0 \; ou \; m > 1$$

Para saber se as raízes são positivas ou negativas, devemos analisar o sinal do vértice da parábola da equação quadrática. Se $x_v > 0$, temos $x_2 > 0$ e consequentemente $x_1 > 0$ (ambos possuem mesmo sinal). Se $x_v < 0$, temos $x_1 < 0$ e consequentemente $x_2 < 0$.

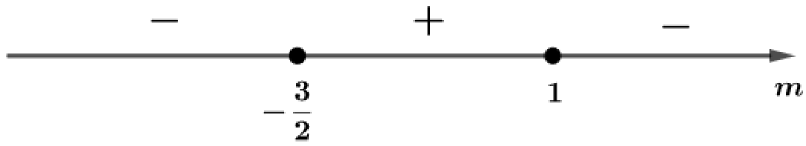
Vamos calcular x_v:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m+3}{2(m-1)} = \frac{2m+3}{2(1-m)}$$

Fazendo o estudo do sinal dessa equação, temos:

$$x_v(0) = \frac{3}{2} > 0$$

Como as raízes dessa equação possuem multiplicidade 1, obtemos:



Então, se $-\frac{3}{2} < m < 1$, temos $x_v > 0$. Das condições iniciais:

$$-\frac{9}{16} < m < 0 \text{ ou } m > 1$$

Fazendo a intersecção dos intervalos:

$$-\frac{9}{16} < m < 0$$

Disso, concluímos:

$$-\frac{9}{16} < m < 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_+^*$$

Já analisamos o intervalo $m \leq -9/16$, resta o intervalo $m > 1$. Do estudo do sinal, vemos que $m > 1$ implica $x_v < 0$. Logo, $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$. Assim, podemos concluir:

$$m > 1 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_-^*$$

Portanto, a análise final da equação é:

$$m < -\frac{9}{16} \Rightarrow S = \emptyset$$

$$m = -\frac{9}{16} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$$

$$-\frac{9}{16} < m < 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_+^*$$

$$m = 0 \Rightarrow S = \{0, 3\}$$

$$0 < m < 1 \Rightarrow x_1 \; e \; x_2 \text{ possuem sinais opostos}$$

$$m = 1 \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

$$m > 1 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_-^*$$

1.6. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

Neste tópico, vamos aprender a resolver equações e inequações irracionais.

1.6.1. EQUAÇÃO IRRACIONAL

Antes de mais nada, vejamos a definição de uma equação irracional:

Uma **equação irracional** é uma equação cuja variável está sob **um ou mais radicais**.

Exemplos:

1) $\sqrt{x+1} = 2$

2) $\sqrt{x^2 - 2x} = 1$

3) $\sqrt{2x+1} = x - 3$

Para resolver uma equação irracional, devemos eliminar os radicais usando as potências convenientes para isso. Vamos ver na prática como fazemos:

Resolva a seguinte equação:

$$\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}} = 3$$

Vamos elevar a equação ao quadrado para eliminar o radical externo:

$$\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}}^{2} = 3^{2}$$

$$5 + \sqrt{3 + x} = 9$$

Agora, isolamos o radical na equação:

$$\sqrt{3 + x} = 9 - 5$$

$$\sqrt{3 + x} = 4$$

Elevando ao quadrado:

$$\sqrt{3 + x}^{2} = 4^2$$

$$3 + x = 16$$

$$\Rightarrow x = 13$$

Mas, antes de afirmar que essa é a solução, devemos testar a raiz ou verificar se ela atende às condições de existência do problema, pois elevar uma equação ao quadrado pode trazer soluções que não satisfazem ao problema. Por exemplo, se elevamos a equação $x = 4$ ao quadrado, encontramos $x^2 = 16$. Resolvendo esse problema, encontramos $x = \pm 4$ e sabemos que $x = -4$ não é solução da equação inicial.

Vamos testar a solução $x = 13$:

$$\sqrt{5+\sqrt{3+x}} = \sqrt{5+\sqrt{3+13}} = \sqrt{5+\sqrt{16}} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

Logo, encontramos uma única solução $S = \{13\}$.

Se quiséssemos verificar a raiz usando as condições de existência, teríamos:

Condição de existência:

$$3 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

Para $x \geq -3$, temos $\sqrt{3+x} \geq 0$ e, assim, $5 + \sqrt{3+x} \geq 5 > 0$. Logo, $3 + x \geq 0$ é a única condição de existência da inequação.

Como $x = 13 > -3$, temos que ele é solução.

Vamos ver mais um exemplo:

Resolva a equação:

$$\sqrt[3]{3x^2 - 7x - 5} = 1$$

Nesse caso, devemos elevar a equação ao cubo para eliminar o radical:

$$\sqrt[3]{3x^2 - 7x - 5}^{\,3} = 1^3$$

$$3x^2 - 7x - 5 = 1$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

Usando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6} = 3 \; ou - \frac{2}{3}$$

Logo, temos a solução:

$$S = \left\{3, -\frac{2}{3}\right\}$$

1.6.2. INEQUAÇÃO IRRACIONAL

Para resolver uma inequação irracional, devemos seguir alguns passos. Vamos resolver um exercício para ver como procedemos.

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2 - 5x} > x - 3$$

Nesse caso, devemos verificar as condições do problema.

Para ter solução nos reais, a expressão dentro do radical deve ser maior ou igual a zero:

$$x^2 - 5x \geq 0$$

Agora, temos duas possibilidades:

1) Se o lado direito for negativo, temos o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

2) Se o lado direito for positivo, podemos elevar ambos os lados ao quadrado e encontrar a solução. O sistema fica:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x > (x-3)^2 \end{cases}$$

Vamos resolver cada caso isoladamente. A solução será a união das soluções encontradas.

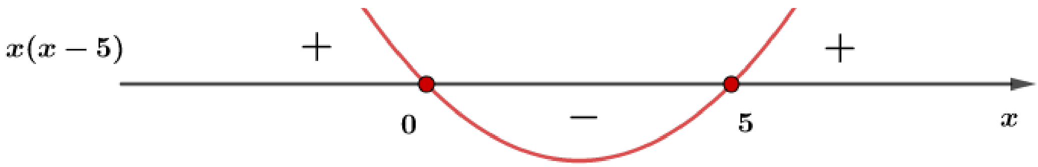
Caso 1:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} x(x-5) \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

Vamos fazer a análise do sinal da equação quadrática. Representando os sinais no eixo x, obtemos:



Observando a figura, podemos extrair a solução:

$$x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \; ou \; x \geq 5$$

Fazendo intersecção com $x < 3$, obtemos:

$$\Rightarrow x \leq 0$$

Nesse caso a solução é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$$

Caso 2:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x > (x-3)^2 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} x(x-5) \geq 0 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 5x > (x-3)^2 \end{cases}$$

Já fizemos o estudo do sinal das duas primeiras inequações.

Da primeira, temos:

$$x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \; ou \; x \geq 5$$

Juntando com $x \geq 3$, encontramos:

$$\Rightarrow x \geq 5$$

Resta analisar a última inequação, vamos desenvolvê-la:

$$x^2 - 5x > x^2 - 6x + 9$$

Simplificando:

$$6x - 5x > 9$$

$$x > 9$$

Assim, $x \geq 5 \; e \; x > 9$ implica $x > 9$.

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 9\}$$

Juntando as soluções:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 9\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, 0] \cup]9, +\infty[$$

1.6.3. INEQUAÇÃO IRRACIONAL PARAMÉTRICA

Vamos aprender a resolver uma paramétrica irracional.

Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R}$, para $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$$

Antes de proceder, devemos analisar a condição de existência:

$$a + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -a$$

$$a - x \geq 0 \Rightarrow x \leq a$$

Agora, vamos variar o valor do parâmetro a:

$\boldsymbol{a < 0}$:

Como a é negativo, temos $-a > 0$. Então, representando a no eixo x:

Das condições de existência, temos:

$$x \geq -a \text{ e } x \leq a$$

Nesse caso, não temos solução pois os intervalos não possuem intersecção:

$$a < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$\boldsymbol{a = 0}$:

Substituindo na inequação do problema, obtemos:

$$\sqrt{x} + \sqrt{-x} > 0$$

Como estamos no conjunto dos reais, não temos solução:

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}\ e\ \sqrt{-x} \in \mathbb{C}$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{C}\ e\ \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 > 0 \Rightarrow 0 > 0$$

$$a = 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$\boldsymbol{a > 0}$:

Nesse caso, temos:

Das condições de existência:

$$x \geq -a \text{ e } x \leq a \Rightarrow x \in [-a, a]$$

Vamos resolver a inequação:

$$\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} > a$$

Elevando a inequação ao quadrado:

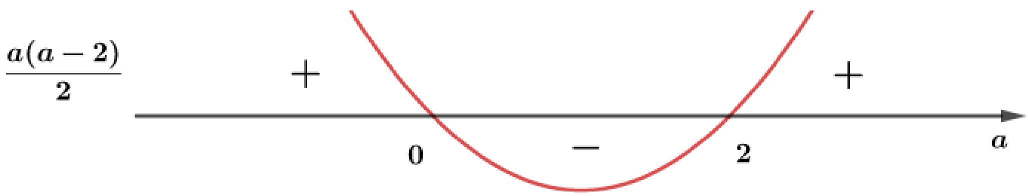
$$a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} > \frac{a^2 - 2a}{2}$$

Devemos analisar o sinal da expressão $(a^2 - 2a)/2$:

$$\frac{a^2 - 2a}{2} = \frac{a(a-2)}{2}$$



Para $0 < a < 2$, temos:

$$\frac{a(a-2)}{2} < 0$$

Qualquer x que satisfaça as condições de existência é solução. Então:

$$x \in [-a, a]$$

$$0 < a < 2 \Rightarrow S = [-a, a]$$

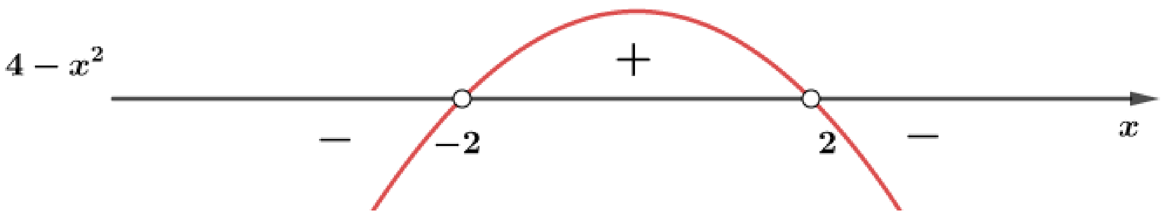
Para $a = 2$:

Substituindo na inequação:

$$\sqrt{4 - x^2} > \frac{4-4}{2} \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} > 0$$

Sabemos que $\sqrt{4 - x^2} \geq 0$. Vamos encontrar a solução em x.

Analisando o sinal de $4 - x^2$ para verificar a condição de existência:



Vemos que temos solução para $x \in]-2,2[$.

$$a = 2 \Rightarrow S =]-2, 2[$$

Para $a > 2$:

Procedemos elevando a inequação ao quadrado:

$$a^2 - x^2 > \frac{(a^2 - 2a)^2}{4}$$

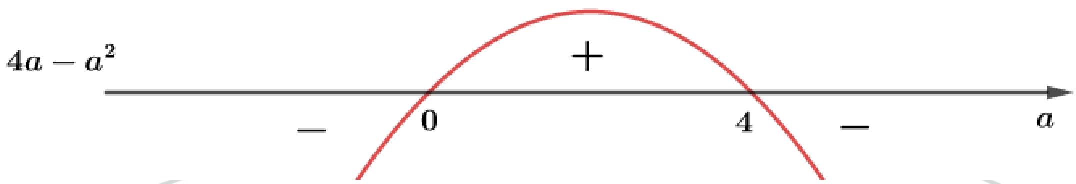
$$a^2 - \frac{a^2(a-2)^2}{4} > x^2$$

$$x^2 < a^2 - \frac{a^2(a-2)^2}{4}$$

$$x^2 < \frac{a^2\left(4 - (a^2 - 4a + 4)\right)}{4}$$

$$x^2 < \frac{a^2(4a - a^2)}{4}$$

a^2 é positivo, vamos estudar o sinal de $4a - a^2$:



Se $a < 0$ ou $a > 4$, temos:

$$x^2 < \frac{a^2(4a - a^2)}{4} < 0$$

$$\Rightarrow x^2 < 0 \ (impossível)$$

$$a > 4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Logo, temos que:

$$\frac{a^2(4a - a^2)}{4} > 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

Como $a > 2$:

$$\frac{a^2(4a - a^2)}{4} > 0 \Rightarrow 2 < a < 4$$

Para esse intervalo de a a solução é dada por:

$$x^2 < \frac{a^2(4a - a^2)}{4}$$

$$-\sqrt{\frac{a^2(4a - a^2)}{4}} < x < \sqrt{\frac{a^2(4a - a^2)}{4}}$$

$$-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2} < x < \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}$$

$$2 < a < 4 \Rightarrow S = \left] -\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}, \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2} \right[$$

Resta analisar $a = 4$:

Substituindo na expressão:

$$x^2 < \frac{4^2(4 \cdot 4 - 4^2)}{4} = 0$$

$$x^2 < 0 \ (impossível)$$

$$a = 4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Com isso, encontramos todas as possibilidades para o parâmetro a:

$$a \leq 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$0 < a < 2 \Rightarrow S = [-a, a]$$

$$a = 2 \Rightarrow S =]-2, 2[$$

$$2 < a < 4 \Rightarrow S = \left] -\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}, \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2} \right[$$

$$a \geq 4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Obs.: Inequações paramétricas também podem ser resolvidas usando geometria analítica. Estudaremos com mais detalhes quando chegarmos nesse assunto.

2. MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

2.1. DEFINIÇÃO

Seja f uma função na variável x. A definição de módulo é dada por:

$$\boxed{|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}}$$

$|f(x)|$ é chamado de módulo de uma função na variável x. O módulo também é conhecido como valor absoluto.

Exemplos:

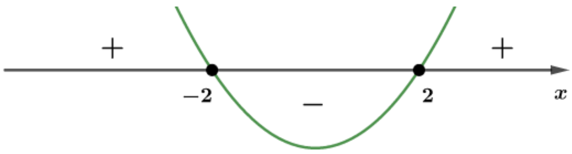
1) $f(x) = |x^2 - 4|$

f pode assumir os valores $x^2 - 4$ ou $4 - x^2$.

Para encontrar as funções de f, devemos encontrar o intervalo de cada uma dessas funções. Isso é feito analisando-se o sinal da função $x^2 - 4$:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

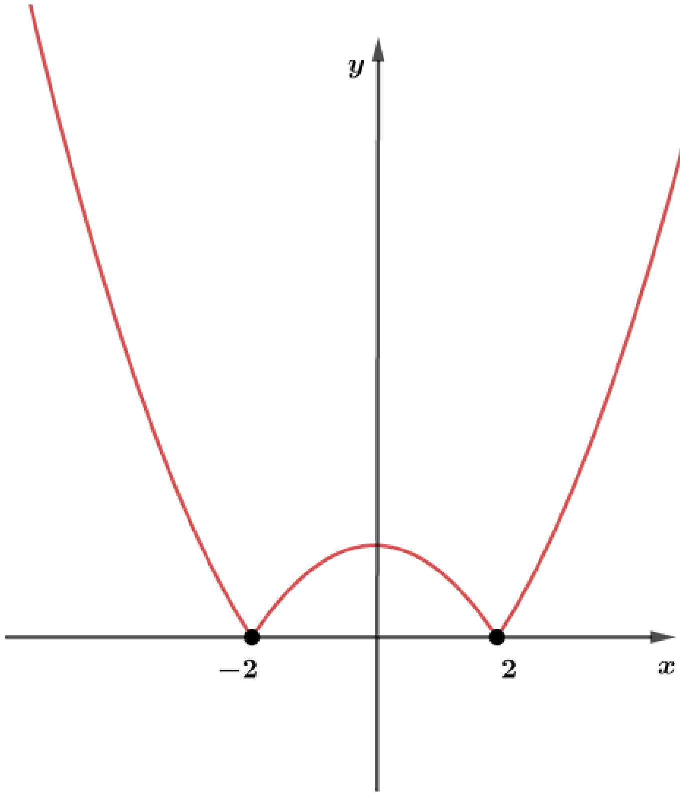
Como $a = 1 > 0$:



Então, a função f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, x \leq -2 \; ou \; x \geq 2 \\ 4 - x^2, -2 < x < 2 \end{cases}$$

Representação gráfica:

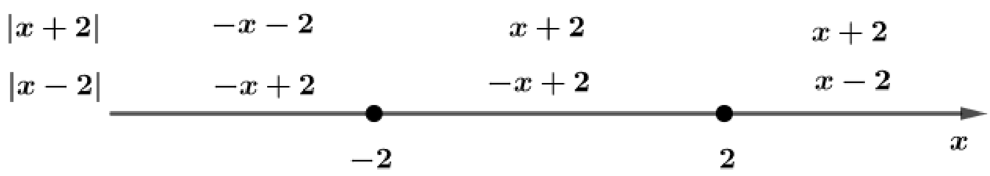


2) $g(x) = |x-2| + |x+2|$

$$|x-2| \text{ pode ser } x-2 \text{ ou } -x+2$$

$$|x+2| \text{ pode ser } x+2 \text{ ou } -x-2$$

Representando os sinais das funções envolvidas no eixo x:



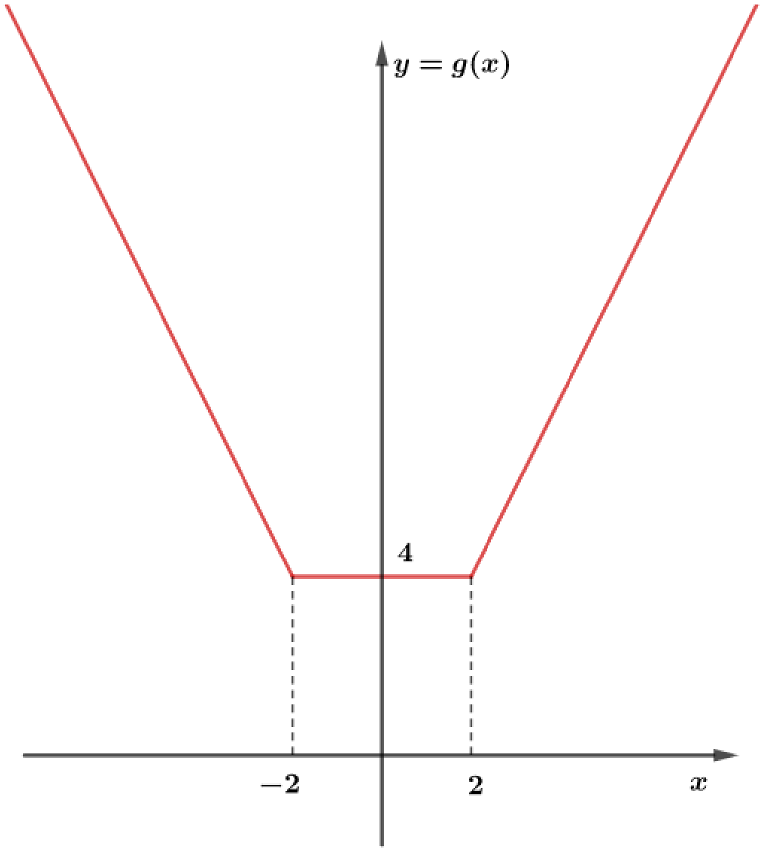
Analisando a figura, temos:

$$x < -2 \Rightarrow g(x) = -x + 2 - x - 2 = -2x$$

$$-2 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = -x + 2 + x + 2 = 4$$

$$x \geq 2 \Rightarrow g(x) = x - 2 + x + 2 = 2x$$

Gráfico:



2.2. GRÁFICO

Usando o gráfico, podemos explicitar os pontos mais importantes de uma função. Vamos aprender como esboçar o gráfico de uma função modular por meio de um exemplo:

$$E(x) = \left||x^2 - 1| - 2\right|$$

Temos que esboçar a figura de dentro pra fora. O primeiro passo é esboçar o módulo da parte interior:

$$|x^2 - 1|$$

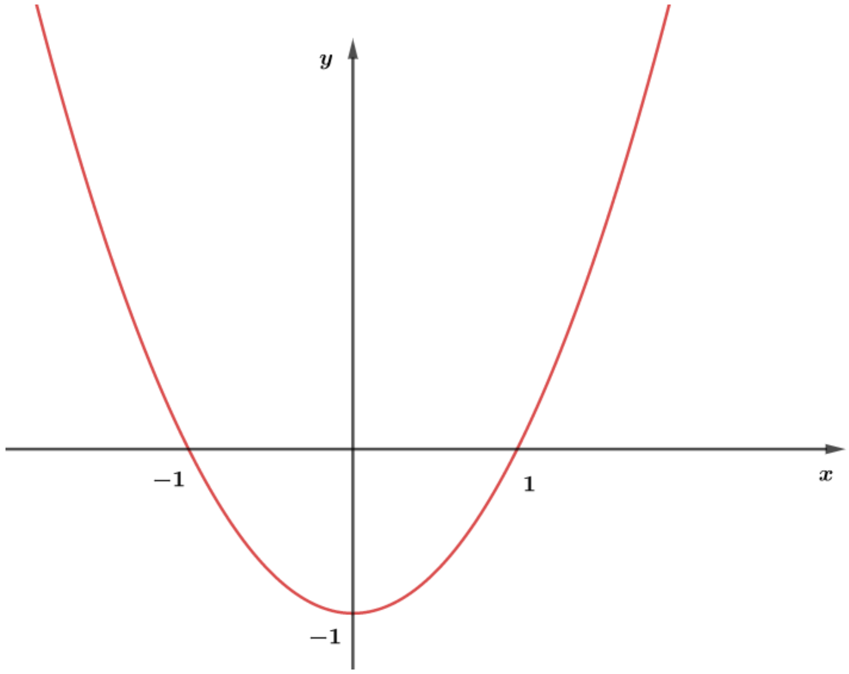
Vamos por partes. Primeiro, representamos $x^2 - 1$:

Raízes:

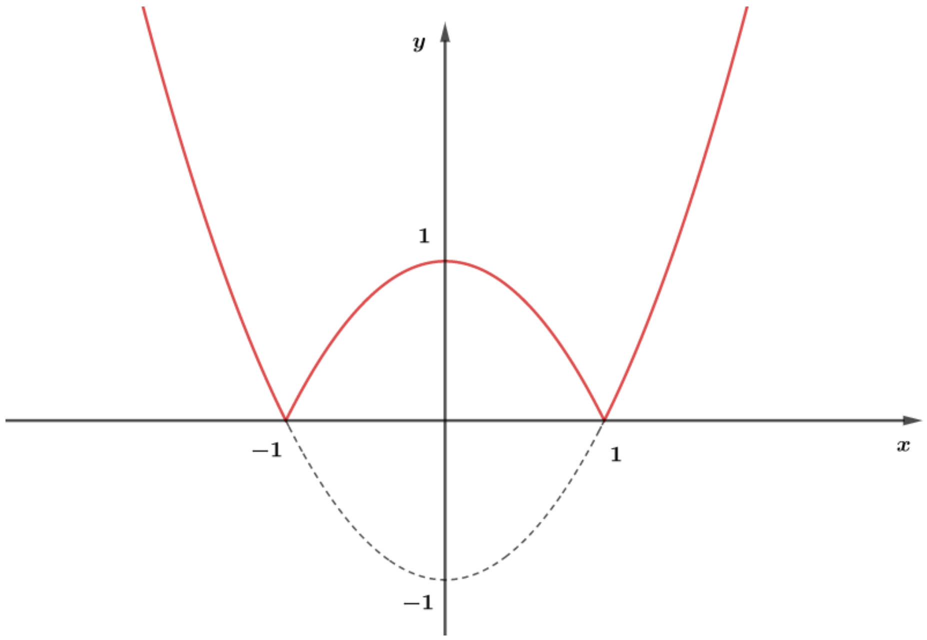
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Vértice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, -1)$$

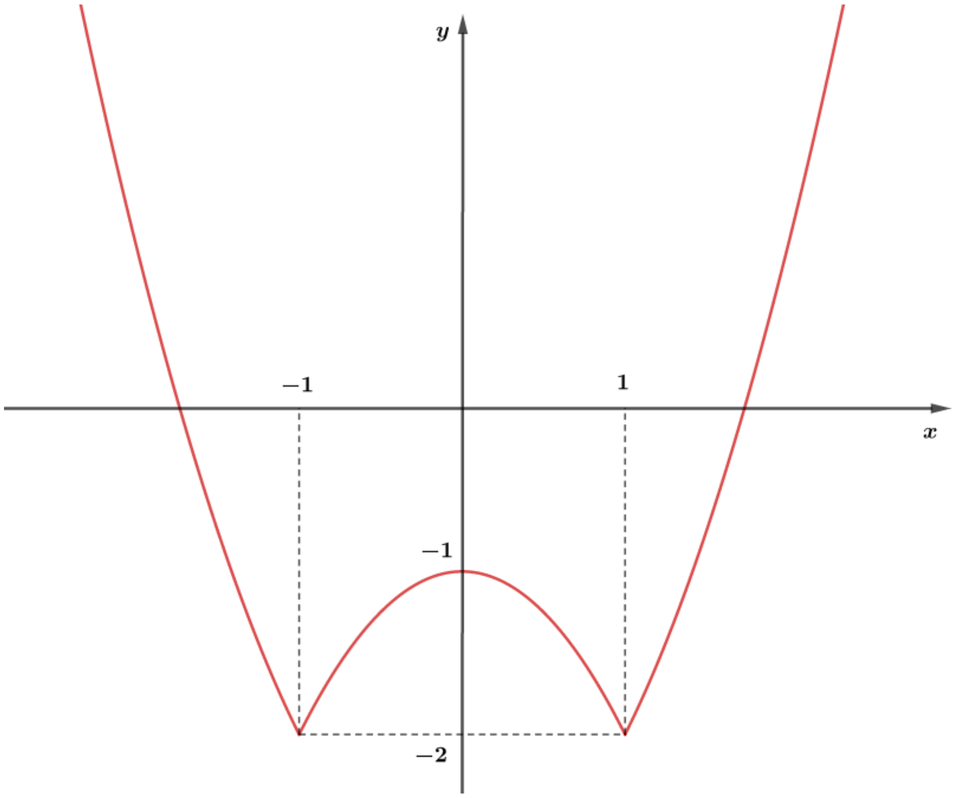


Agora, representamos $|x^2 - 1|$. Basta espelhar a parte negativa para cima:



O próximo passo é transladar -2 na função acima. Devemos deslocar o gráfico 2 números para baixo verticalmente.

$|x^2 - 1| - 2$:



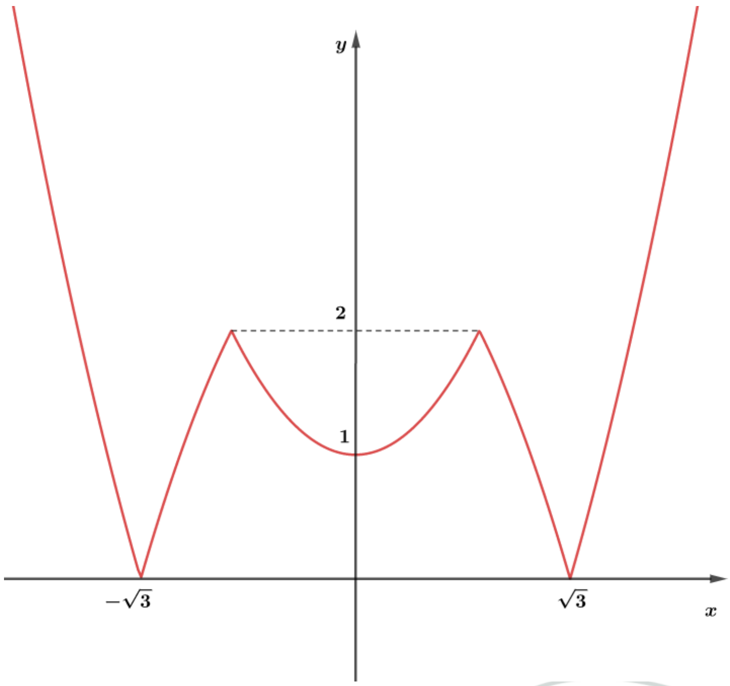
Por último, espelhamos a parte negativa para cima:

$\left||x^2-1|-2\right|$:

Observando o gráfico de $|x^2-1|-2$, vemos que a função que representa os pontos de raízes é dada pelo gráfico da parábola x^2-1 subtraído de 2:

$$x^2-1-2=x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Com isso, obtemos o resultado final:



2.3. PROPRIEDADES

P1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

P2) $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$

P3) $|x|^2 = |x^2| = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

P4) $|x| = \sqrt{x^2}$

P5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

P6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

P7) $|x| \geq a, a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

P8) $|x| \leq a, a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

P9) $|x + y| \leq |x| + |y|$

P10) $|x - y| \geq |x| - |y|$

P11) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

P12) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

Demonstração:

Vamos demonstrar as propriedades P5, P6, P9, P10, P11 e P12:

P5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Usando P4:

$$|a \cdot b| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$$

P6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

Usando P4:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$$

P9) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Usando P3:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

P2:

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq |x^2| + |y^2| + |2xy| = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

Disso, concluímos:

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

Essa propriedade é conhecida como desigualdade triangular.

P10) $|x-y| \geq |x| - |y|$

Usando P3:

$$|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

P2:

$$xy \leq |xy| = |x||y|$$

$$\Rightarrow -2xy \geq -2|x||y|$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq x^2 + y^2 - 2|x||y| = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2$$

Assim, concluímos:

$$|x-y|^2 \geq (|x| - |y|)^2$$

$$\Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y|$$

P11) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

Usando P9:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n|$$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}| + |x_{n-1}| + |x_n|$$

$$\vdots$$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

P12) $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

$$|x+y| = |x| + |y| \Rightarrow xy \geq 0$$

$$|x+y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow (x+y)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

$$\Rightarrow xy = |x||y| = |xy|$$

$$\Rightarrow xy \geq 0$$

Para provar a volta, basta fazer o caminho inverso.

CURIOSIDADE

$$|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$$

Essa equação é conhecida como equação do quadrado, pois a sua representação gráfica no plano cartesiano é um quadrado. Veja:

Para $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + y = a \Rightarrow y = -x + a$$

Para $x \leq 0$ e $y \geq 0$:

$$-x + y = a \Rightarrow y = x + a$$

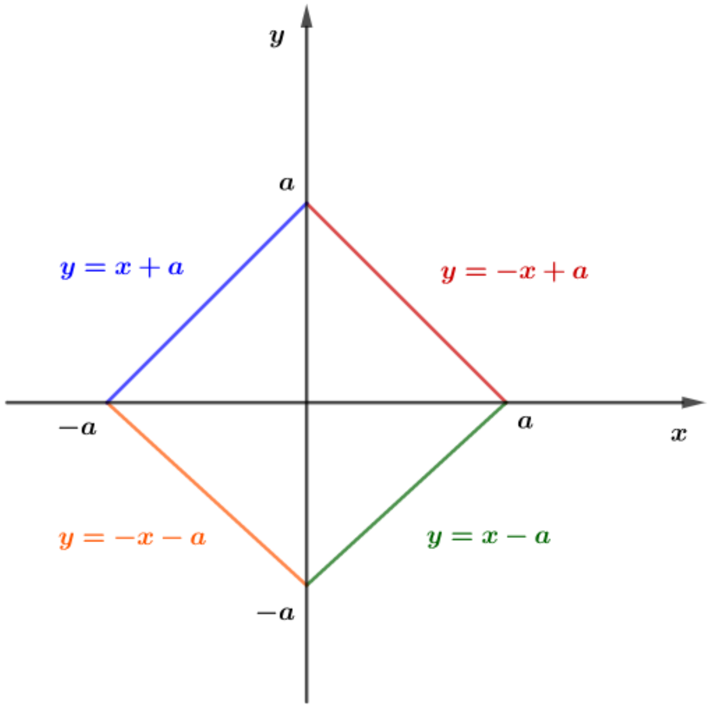
Para $x \leq 0$ e $y \leq 0$:

$$-x - y = a \Rightarrow y = -x - a$$

Para $x \geq 0$ e $y \leq 0$:

$$x - y = a \Rightarrow y = x - a$$

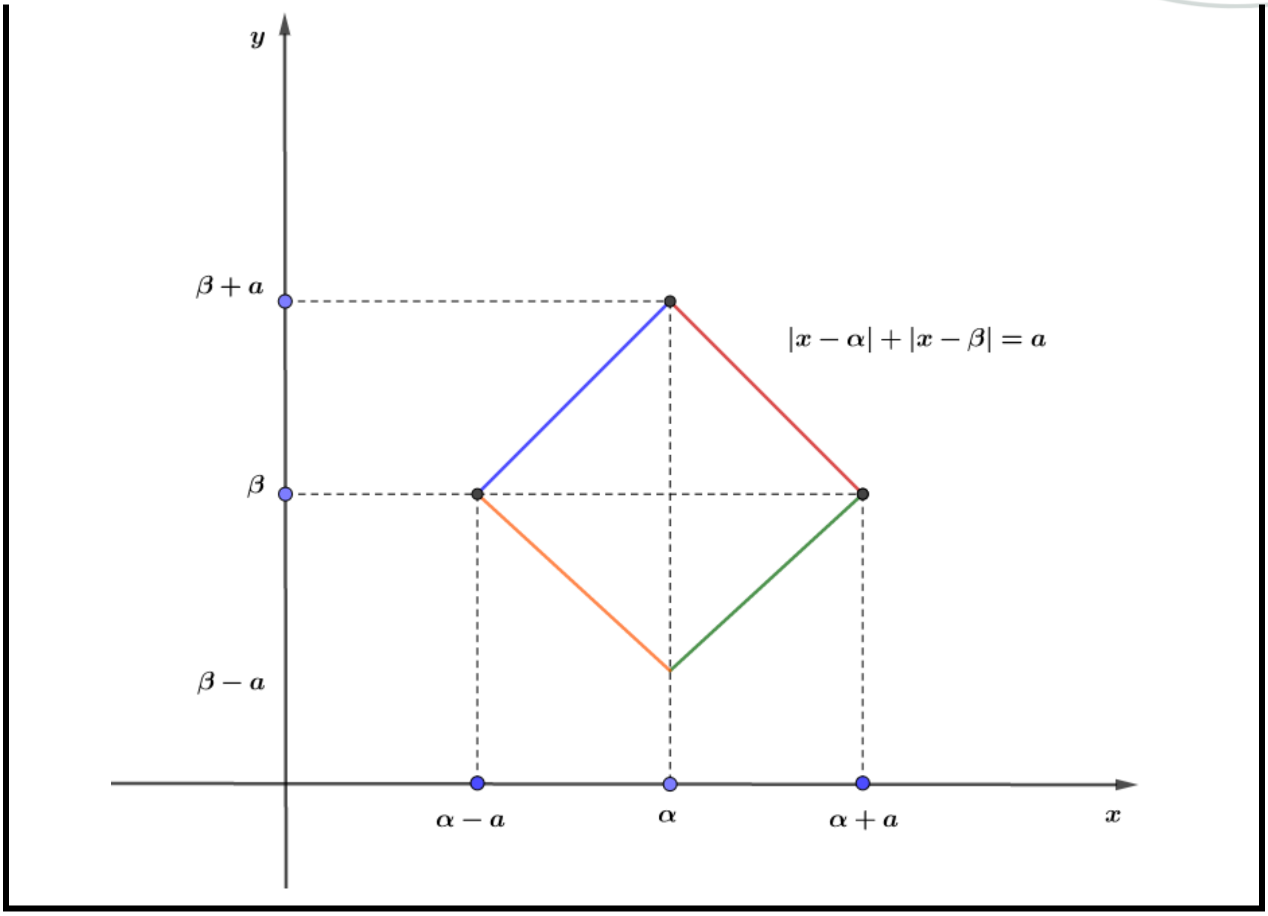
Representando as equações no plano, obtemos:



Note que a equação acima está centrada no ponto $(0,0)$. Podemos escrevê-la com outro centro. Veja:

$$|x - \alpha| + |x - \beta| = a, a > 0$$

Representação gráfica:



5. Construa o gráfico da seguinte função em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x+1| + |x-1|$$

Resolução:

$f(x) = |x+1| + |x-1|$

Vamos dividir em casos. Sabemos que:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ -x+1, x < 1 \end{cases}$$

Construindo a tabela:

	$x < -1$	$-1 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

Para $x < -1$:

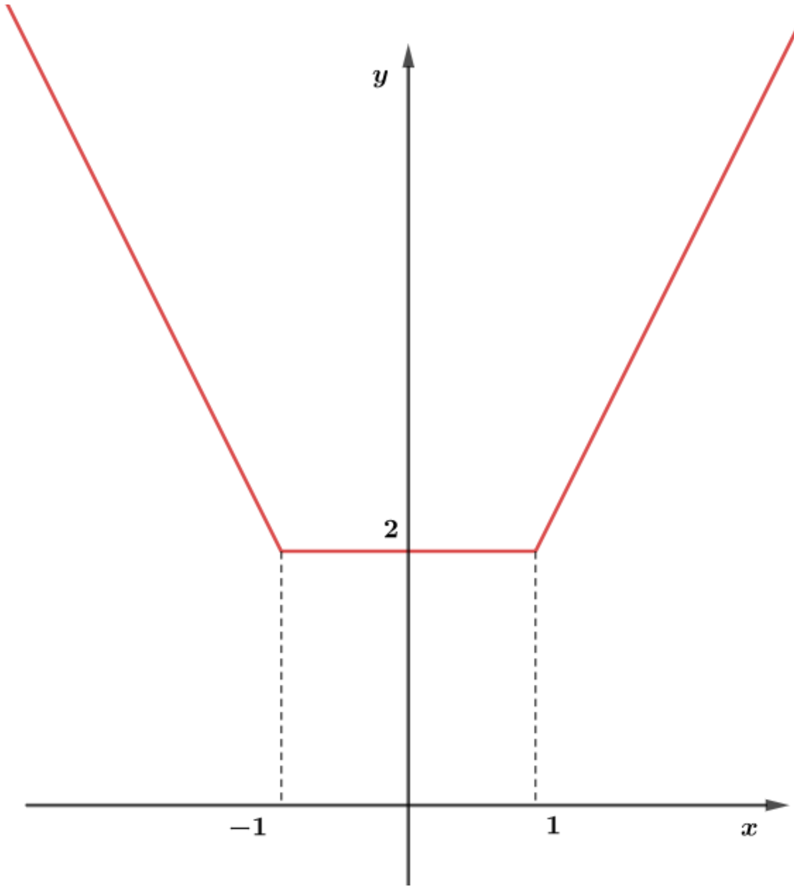
$$f(x) = -x - 1 - x + 1 = -2x$$

Para $-1 \leq x < 1$:

$$f(x) = x + 1 - x + 1 = 2$$

Para $x \geq 1$:

$$f(x) = x + 1 + x - 1 = 2x$$



6. Encontre a função por intervalos:

$$f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$$

Resolução:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, x \geq 2 \\ -x + 2, x < 2 \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, x \leq -2 \; ou \; x \geq 2 \\ -x^2 + 4, -2 < x < 2 \end{cases}$$

Para $x \geq 2$:

$$f(x) = x^2 - 4 - (x - 2) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Para $-2 < x < 2$:

$$f(x) = -x^2 + 4 - (-x + 2) = -x^2 + x + 2 = -(x - 2)(x + 1)$$

Para $x \leq -2$:

$$f(x) = x^2 - 4 - (-x + 2) = x^2 + x - 6$$

Então, podemos escrever f em intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, x \geq 2 \\ -x^2 + x + 2, -2 < x < 2 \\ x^2 + x - 6, x \leq -2 \end{cases}$$

7. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $|3x - 1| = 2$

b) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

c) $|3x + 2| = |x - 1|$

Resolução:

a) $|3x - 1| = 2$

Para resolver uma equação modular, devemos encontrar o valor de x para cada caso do módulo:

$$\begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ -(3x - 1) = 2 \end{cases}$$

$$3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$1 - 3x = 2 \Rightarrow -1 = 3x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$$

b) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ -(x^2 - 4x + 5) = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 5 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \; ou \; x = 3$$

$$-x^2 + 4x - 5 = 2 \Rightarrow -x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(-1)(-7) = 16 - 28 = -12 < 0$$

Não tem raiz

$$\therefore S = \{1, 3\}$$

c) $|3x + 2| = |x - 1|$

$$\begin{cases} 3x + 2 = x - 1 \\ 3x + 2 = -x + 1 \end{cases}$$

$$3x + 2 = x - 1 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

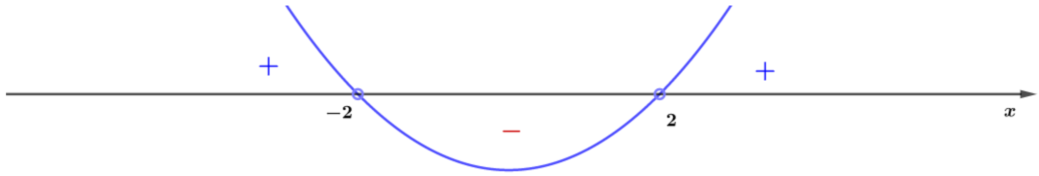
$$3x + 2 = -x + 1 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$$

8. Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

Resolução:

Vamos analisar o sinal de $x^2 - 4$:



Da análise do sinal da figura, temos:

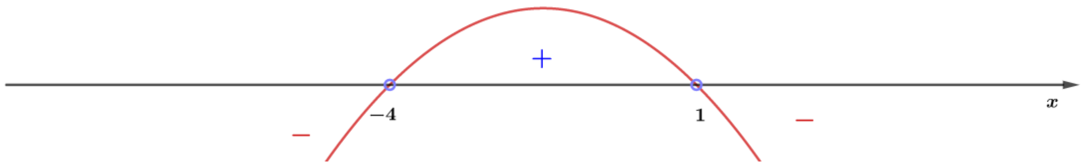
$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, x \leq -2 \; ou \; x \geq 2 \\ -x^2 + 4, -2 < x < 2 \end{cases}$$

Para $-2 < x < 2$:

$$-x^2 + 4 < 3x \Rightarrow -x^2 - 3x + 4 < 0$$

$$\Rightarrow -(x+4)(x-1) < 0$$

Analisando o sinal:



$$\Rightarrow x < -4 \; ou \; x > 1$$

Fazendo a intersecção com $-2 < x < 2$, temos:

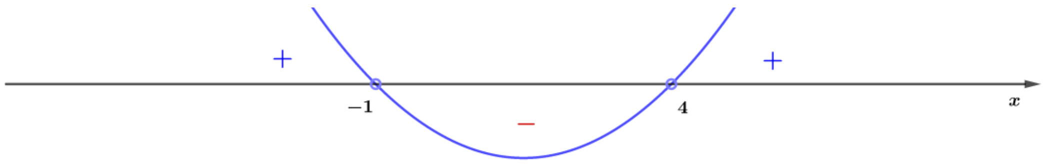
$$1 < x < 2$$

Para $x \leq -2 \; ou \; x \geq 2$:

$$x^2 - 4 < 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) < 0$$

Estudando o sinal:



$$\Rightarrow -1 < x < 4$$

Fazendo a intersecção com a condição inicial $x \leq -2 \; ou \; x \geq 2$:

$$2 \leq x < 4$$

Portanto a solução é dada por:

$$S =]1,2[\cup [2,4[=]1,4[$$

9. (EEAR/2011) A função modular $f(x) = |x - 2|$ é decrescente para todo x real tal que

a) $0 < x < 4$

b) $x > 0$

c) $x > 4$

d) $x \leq 2$

Resolução:

Analisando melhor a função $f(x)$, sabemos que:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$
$$x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow |x - 2| = 2 - x$$

Portanto, escrevemos a função como:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 2 \\ 2 - x, & x \leq 2 \end{cases}$$

Portanto, a função é decrescente quando seu coeficiente angular (termo que multiplica x) é negativo. Isso só ocorre quando $f(x) = 2 - x \Rightarrow x \leq 2$.

Gabarito: "d".

10. (ESPCEX/2004) Analise os itens abaixo para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

I. Se $f(x) + f(-x) = 0$, então f é uma função par.

II. Se $f(x)$ é uma função constante, então f é função par.

III. Se $|f(x)| = f(x)$, então $Im(f) \subset \mathbb{R}_+$.

IV. Se $|f(x)| = f(x)$, então f é função bijetora

São corretas as afirmativas:

a) I e II

b) II e IV

c) II e III

d) I e III

e) III e IV

Resolução:

Analisando cada afirmativa:

I. Falso, pois se $f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f$ é uma função ímpar.

II. Verdadeiro. Se $f(x)$ é constante então $f(x) = k \ \forall x \in \mathbb{R}$, sendo $k \in \mathbb{R}$, então:

$$f(x) = k = f(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow f \text{ é } par$$

III. Verdadeiro. Se $|f(x)| = f(x) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $Im(f) \subset (0, +\infty) = \mathbb{R}_+$

IV. Falso. Sabemos pelo enunciado que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$. Analisando o que é dado:

$$f(x) = |f(x)| > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow Im(f) \subset R_+$$

Assim, f não é sobrejetora, pois seu conjunto imagem não é igual ao seu contradomínio $\mathbb{R}$. Se ela não é sobrejetora, não tem como ser bijetora.

Gabarito: "c".

3. QUESTÕES NÍVEL 1

1. **(EsSA 2012) – Se $f(2x+1) = x^2 + 2x$, então f(2) vale:**

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{2}$

2. **(EsSA 2012) – Os gráficos das funções reais $f(x) = 2x - 2/5$ e $g(x) = 3x^2 - c$ possuem um único ponto em comum. O valor de c é:**

a) $-\frac{1}{5}$

b) 0

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{15}$

e) 1

3. **(EsSA 2015) – As funções do 2º grau com uma variável: $f(x) = ax^2 + bx + c$ terão valor máximo quando:**

a) a < 0

b) b > 0

c) c < 0

d) Δ > 0

e) a > 0

4. **(EsSA 2017) – O conjunto solução da inequação $x^2 + 5x + 6 < 0$, onde x é um número real $(x \in \mathbb{R})$, é:**

a) $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < -2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x < 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < -6\}$

5. **(EsSA 2017) – Os valores de k de modo que o valor mínimo da função $f(x) = x^2 + (2k-1)x + 1$ seja -3 são:**

a) $-\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{4}$ e $-\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

6. **(ESA – Área Geral e Aviação /2021 - Modificada)**

O lucro de uma empresa é dado por uma lei $L(x) = -x^2 + 8x - 7$, em que x é a quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em milhares de unidades). Qual o valor do lucro máximo, em reais?

a) 8.000.

b) 10.000.

c) 9.000.

d) 7.000.

e) 6.000.

7. **(EsSA 2019) – Observe a equação modular $|3x-2| = 8 + 2x$ e identifique a alternativa que apresenta uma das possíveis raízes.**

8. **(ESA – Área Geral e Aviação /2021)**

A solução da inequação $|3x - 10| \leq 2x$ é dada por:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 10\}$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 10\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2 \text{ ou } x \geq 10\}$

GABARITO

1. A
2. D
3. A
4. B
5. E
6. B
7. 10
8. C

RESOLUÇÃO

1. **(EsSA 2012) – Se $f(2x+1) = x^2 + 2x$, então f(2) vale:**

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{2}$

Comentário:

Note a seguinte estratégia:

$$2 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1$$

Assim, vamos tomar $x = \frac{1}{2}$

$$f(2x+1) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = f(2)$$

$$f(2) = \left({}^{1}/_{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$f(2) = \frac{5}{4}$$

Gabarito: A

---

9. (EsSA 2012) – Os gráficos das funções reais $f(x) = 2x - 2/5$ e $g(x) = 3x^2 - c$ possuem um único ponto em comum. O valor de c é:

a) $-\frac{1}{5}$

b) 0

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{15}$

e) 1

Comentário:

Temos que as funções se intersectam em um único ponto, logo devemos igualar $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x)$$

$$2x - \frac{2}{5} = 3x^2 - c$$

$$3x^2 - 2x + \left(\frac{2}{5} - c\right) = 0$$

Como só há um único ponto em comum, temos que só há um valor de possível de x. Desse modo, o delta da equação do 2º grau acima deve ser zero ($\Delta = 0$).

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{5} - c\right) = 0$$

$$c = \frac{1}{15}$$

Gabarito: D

---

10. (EsSA 2015) – As funções do 2º grau com uma variável: $f(x) = ax^2 + bx + c$ terão valor máximo quando:

a) a < 0

b) b > 0

c) c < 0

d) Δ > 0

e) a > 0

Comentário:

Como queremos um valor máximo para $f(x)$, devemos ter a concavidade voltada para baixo. Logo, devemos ter o valor de a negativo

$$a < 0$$

Gabarito: A

---

11. (EsSA 2017) – O conjunto solução da inequação $x^2 + 5x + 6 < 0$, onde x é um número real $(x \in \mathbb{R})$, é:

a) $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < -2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x < 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < -6\}$

Comentário:

Temos que analisar as raízes da equação do segundo grau acima

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dessa forma, temos o seguinte, visto que $x^2 + 5x + 6 < 0$

Logo, temos que $S = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < -2\}$.

Gabarito: B

---

12. (EsSA 2017) – Os valores de k de modo que o valor mínimo da função $f(x) = x^2 + (2k - 1)x + 1$ seja -3 são:

a) $-\frac{5}{2}$ **e** $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{4}$ e $-\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

Comentário:

Para acharmos o valor mínimo de $f(x) = x^2 + (2k-1)x + 1$, devemos calcular o valor do y_v.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -3$$

$$(2k-1)^2 - 4 = 12$$

$$4k^2 - 4k - 15 = 0$$

$$k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4}$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{8}$$

$$\begin{cases} k = \dfrac{5}{2} \\ k = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Gabarito: E

---

13. (ESA – Área Geral e Aviação /2021 - Modificada)

O lucro de uma empresa é dado por uma lei $L(x) = -x^2 + 8x - 7$, em que x é a quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em milhares de unidades). Qual o valor do lucro máximo, em reais?

a) 8.000.

b) 10.000.

c) 9.000.

d) 7.000.

e) 6.000.

Comentários

Sabendo que o lucro máximo é dado pelo y do vértice da equação do segundo grau dada no enunciado, temos que:

$$L_{maximo} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4\,.\,(-1).\,(-7)}{4\,.\,(-1)} = \frac{64-28}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Com isso, temos que o lucro máximo é:

$$R\$ \, 9.000,00$$

Na prova, essa questão foi anulada, devido ao seu enunciado errôneo.

Gabarito: B

---

14. (EsSA 2019) – Observe a equação modular $|3x-2| = 8+2x$ e identifique a alternativa que apresenta uma das possíveis raízes.

Comentários:

Note que temos as seguintes possibilidades

$$\begin{cases} 3x - 2 = 8 + 2x \to x = 10 \ (ok) \\ ou \\ 3x - 2 = -8 - 2x \to x = -\dfrac{6}{5} \ (não\ convém. Faça\ o\ teste!) \end{cases}$$

Gabarito: 10

---

15. (ESA – Área Geral e Aviação /2021)

A solução da inequação $|3x - 10| \leq 2x$ é dada por:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 10\}$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 10\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2 \ ou \ x \geq 10\}$

Comentário:

Observando a inequação, é importante observar que:

$$2x \geq 0 \to x \geq 0$$

Assim:

$$-2x \leq 3x - 10 \to 5x \geq 10 \to x \geq 2$$

Ou

$$2x \leq 3x - 10 \to x \leq 10$$

Assim:

$$x \geq 0 \, , x \geq 2 \ e \ x \leq 10$$

Portanto, tem que satisfazer as 3 restrições, logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 10\}$$

Gabarito: C

---

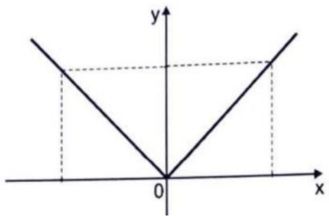
4. QUESTÕES NÍVEL 2

16. (AFA/2021)

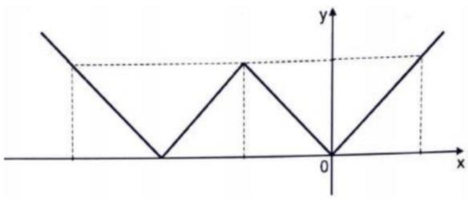
Considere a função real f definida por $f(x) = |-|-c + x| + c|$, com $c \in \mathbb{R}$.

Dos gráficos apresentados nas alternativas a seguir, o único que NÃO pode representar a função f é

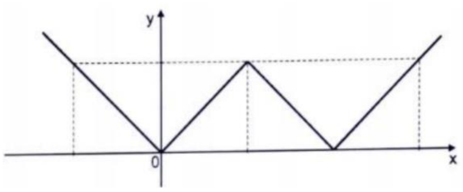
a)



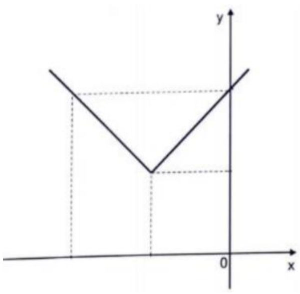
b)



c)



d)



17. (AFA/2021)

Seja D o conjunto domínio mais amplo da função real $f(x) = \sqrt{\frac{(x-4)(x^2-25)}{-x^2+5x-4}}$ e $S \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação $x + 6 \leq x(x+6)$.

O conjunto $D \cap S$ é

a) $]-\infty, -6] \cup]1, 5] - \{4\}$

b) $]-\infty,-5] \cup]1,4] \cup]4,5]$

c) $]-\infty,-6[\cup [1,4[\cup [5,\infty[$

d) $]1,4[\cup [5,\infty[$

18. (AFA/2020)

Considere as funções reais f e g definidas, respectivamente, por

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}}-1$$

e

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^3+x^2-x-1}}{\sqrt{x-1}}-1$$

Sejam:

$D(f)$ o conjunto domínio de f

$D(g)$ o conjunto domínio de g

$Im(f)$ o conjunto imagem de f

$Im(g)$ o conjunto imagem de g

Sobre as funções f e g, analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

(02) A função f admite valor mínimo igual a -1

(04) f é decrescente $\Leftrightarrow x \in]-\infty,-2]$

(08) $D(f)=D(g)$

(16) $Im(g) \subset Im(f)$

(32) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$

A soma das proposições verdadeiras é

a) 50

b) 48

c) 42

d) 30

19. (AFA/2019)

Sobre a inequação $\frac{3x^2+2x}{x} \geq x^3$, considerando o conjunto universo $U \subset \mathbb{R}$, é INCORRETO afirmar que possui conjunto solução:

a) unitário se $U = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ e } x = 2k, k \in \mathbb{Z}_+^*\}$

b) vazio se $U = [2, +\infty[$

c) com infinitas soluções se $U = \{x \in \mathbb{R} | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_-\}$

d) com infinitas soluções se $U = \{x \in \mathbb{R}^* | x \leq 2\}$

20. (AFA/2019)

Para angariar fundos para a formatura, os alunos do 3º ano do CPCAR vendem bombons no horário do intervalo das aulas.

Inicialmente, começaram vendendo cada bombom por R$4,00. Assim, perceberam que vendiam, em média, 50 bombons por dia.

A partir dos conhecimentos que os alunos tinham sobre função, estimaram que para cada 5 centavos de desconto no preço de cada bombom (não podendo conceder mais que 70 descontos), seria possível vender 5 bombons a mais por dia.

Considere:

- p o preço de cada bombom;

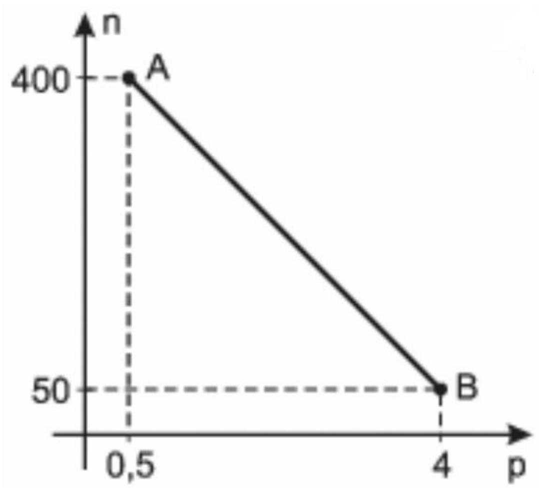
- n o número de bombons vendidos, em média, por dia;

- $x \in \mathbb{N}$ o número de reduções de 5 centavos concedidas no preço unitário de cada bombom; e

- y a arrecadação diária com a venda dos bombons.

Com base nessas informações, analise as proposições abaixo.

(02) O gráfico que expressa n em função de p está contido no segmento $\overline{AB}$ do gráfico abaixo.



(04) A maior arrecadação diária possível com a venda dos bombons, considerando os descontos de 5 centavos, ocorre quando concederem 35 descontos de 5 centavos.

(08) Se forem concedidos 20 descontos de 5 centavos, serão vendidos mais de 100 bombons por dia.

A soma das proposições verdadeiras é igual a

a) 6

b) 10

c) 12

d) 14

21. (AFA/2018)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \begin{cases} x - 3, se\ x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} - x, se\ x > 2 \end{cases}$

Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (verdadeira) ou F (FALSA).

( ) A função f é injetora.

( ) $\forall x \in \mathbb{R}$, a função f é crescente.

( ) A função f^{-1}, inversa de f, é dada por $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3, se\ x \leq -1 \\ \sqrt{4x + 4} + 2, se\ x > -1 \end{cases}$$

A sequência correta é

a) F-V-V

b) V-V-V

c) F-V-F

d) V-F-V

22. (AFA/2017)

Durante 16 horas, desde a abertura de uma certa confeitaria, observou-se que a quantidade $q(t)$ de unidades vendidas do doce "amor em pedaço", entre os instantes $(t-1)$ e t, é dada pela lei $q(t) = \left||t - 8| + t - 14\right|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}$.

É correto afirmar que

a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de "amor em pedaço".

b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.

c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.

d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

23. (AFA/2016)

Considere as funções reais f, g e h tais que

$f(x) = mx^2 - (m+2)x + (m+2)$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = \sqrt{x}$

Para que a função composta $h \; o \; g \; o \; f(x)$ tenha domínio $D = \mathbb{R}$, deve-se ter

a) $m > \frac{2}{3}$

b) $-2 < m < \frac{2}{3}$

c) $0 < m < \frac{2}{3}$

d) $-2 < m < 0$

24. (AFA/2016)

Uma fábrica produz casacos de determinado modelo. O preço de venda de um desses casacos é de R$200,00, quando são vendidos 200 casacos. O gerente da fábrica, a partir de uma pesquisa, verificou que, para cada desconto de R$2,00 no preço de cada casaco, o número de casacos vendidos aumenta de 5.

A maior arrecadação possível com a venda dos casacos acontecerá se a fábrica vender cada casaco por um valor, em reais, pertencente ao intervalo:

a) $[105, 125[$

b) $[125, \; 145[$

c) $[145, 165[$

d) $[165, 185[$

25. (AFA/2012)

Para angariar fundos de formatura, os cadetes do 1º ano da AFA vendem camisas de malha com o emblema da turma. Se o preço de venda de cada camisa é de 20 reais, eles vendem por mês 30 camisas.

Fizeram uma pesquisa e verificaram que, para cada 2 reais de desconto no preço de cada camisa, são vendidas 6 camisas a mais por mês.

Dessa forma, é correto afirmar que

a) é possível fazer mais de 10 descontos de 2 reais.

b) tanto faz vender as camisas por 12 reais cada uma ou 18 reais cada uma que o faturamento é o mesmo.

c) o máximo faturamento ocorre se são vendidas menos de 40 camisas por mês.

d) se o preço de venda de cada camisa é de 14 reais, então o faturamento é maior que 680 reais.

26. (AFA/2012)

Considere f uma função quadrática de raízes reais e opostas.

O gráfico de f intercepta o gráfico da função real g definida por $g(x) = -2$ em exatamente um ponto.

Se $f(\sqrt{3}) = 4$ e $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, então, é INCORRETO afirmar que

a) $f(x) - g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

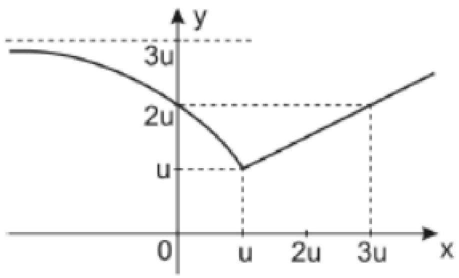
b) o produto das raízes de f é um número ímpar.

c) a função real h definida por $h(x) = g(x) - f(x)$ admite valor máximo.

d) f é crescente $\forall x \in [1, +\infty[$.

27. (AFA/2012)

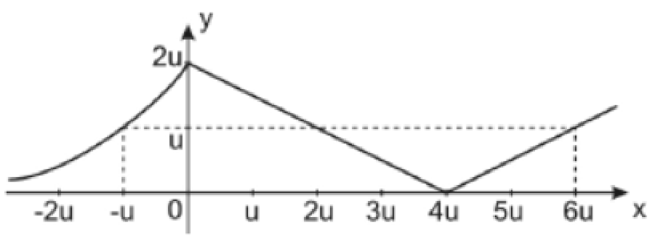
Considere a figura abaixo que representa um esboço do gráfico da função real f.



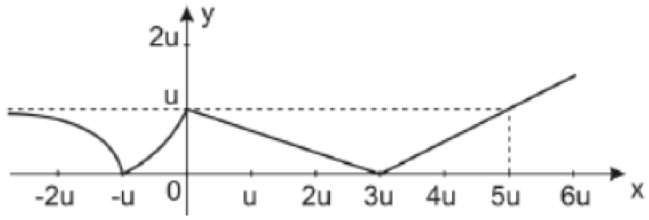
Sabe-se que $g(x) = f(x) - 3u$, $h(x) = g(x + u)$ e $j(x) = |h(x)|$

Um esboço de gráfico que melhor representa a função j é

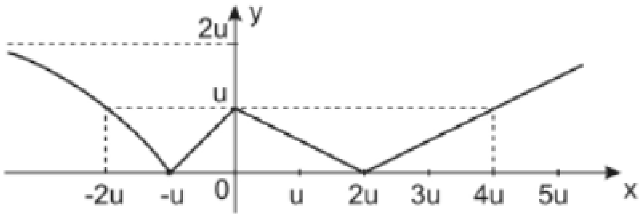
a)



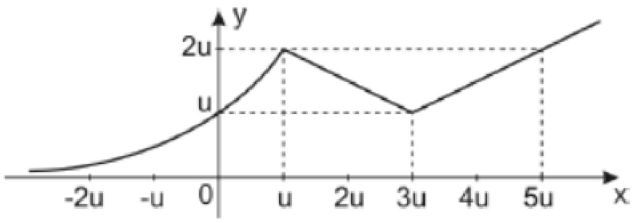
b)



c)



d)



28. (AFA/2012)

Considere a função real $g: A \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$.

Sabendo-se que o conjunto A é o mais amplo possível, é verdade que

a) $\exists x \in A$ tal que $g(x) = -1$.

b) se $h(x) = -1 + |g(x)|$, então h possui raiz real.

c) se $0 < x < 1$, então $-1 < g(x) < 0$.

d) $\exists x \in]-\infty, -2[$ tal que $g(x) > 3$.

29. (AFA/2011)

Considere as funções reais f e g tal que $f(x) = x^2 + 1$ e que existe a composta de g com f dada por $(gof)(x) = \sqrt{(x^2 + 1)^2}$.

Sobre a função g, é INCORRETO afirmar que ela é

a) par

b) sobrejetora

c) tal que $g(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) crescente se $x \in [1, +\infty[$

30. (AFA/2011)

Classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo, onde $a \in \mathbb{R}$.

I. $\frac{x^2-a^2}{x-a} = x + a \ \forall x \in \mathbb{R}$

II. se $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ **e** $a > 0$**, então** $\{x \in R | x < 0 \ ou \ x > a\}$

III. se $a > 0$ **e** $|x| < a$**, então** $x^2 - a^2 < 0$

Tem-se a sequência correta em

a) F-V-F

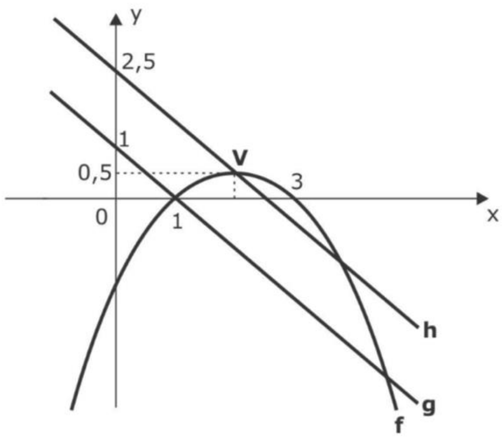
b) F-F-V

c) V-F-V

d) F-V-V

31. (AFA/2010)

Considere o esboço dos gráficos das funções reais f, g e h, tais que f é do 2º grau e g e h são do 1º grau. Sabe-se que V é o vértice da parábola.



O conjunto de todos os valores de x para os quais $h(x) > g(x) > f(x)$ é

a) $\mathbb{R} -]1,5[$

b) $\mathbb{R} - [1,5]$

c) $\mathbb{R} - [1,3]$

d) $\mathbb{R} -]1,3[$

32. (EFOMM/2020)

A inequação $|x| + |2x - 8| \leq |x + 8|$ é satisfeita por um número de valores inteiros de x igual a

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

33. (EFOMM/2020)

Considere a inequação

$$|x^7 - x^4 + x - 1||x^2 - 4x + 3|(x^2 - 7x - 54) \leq 0.$$

Seja I o conjunto dos números inteiros que satisfaz a desigualdade e n a quantidade de elementos de I. Com relação a n, podemos afirmar que

a) n é um número primo.

b) n é divisível por 7.

c) n não divide 53904.

d) n é um quadrado perfeito.

e) n é divisível por 6.

34. (EFOMM/2019)

Considere a função real $f(x) = 1 + 4x + 2x^2$. Determine o ponto x^* que define o valor mínimo dessa função.

a) $x^* = -2$

b) $x^* = -1$

c) $x^* = -1/2$

d) $x^* = zero$

e) $x^* = 1$

35. (EFOMM/2019)

Examine a função real $f(x) = 2x - 3x^2$ quanto à existência de valores de pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa CORRETA.

a) A função atinge o valor máximo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.

b) A função atinge o valor mínimo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

c) A função atinge o valor máximo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

d) A função atinge o valor mínimo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.

36. (EFOMM/2019)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha . x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta \cdot x)$, em que α e β são números reais. Considere que essas funções são tais que

f		g	
Valor mínimo	Ponto de mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
-1	< 0	$9/4$	> 0

Então, f composta em g, $(f\ o\ g)(2) = 0$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

37. (EFOMM/2018)

Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a $R\$\ 9,00$, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de $R\$\ 1,00$ no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de

a) $R\$\ 8,00$.

b) $R\$\ 7,00$.

c) $R\$\ 6,00$.

d) $R\$\ 5,00$.

e) $R\$\ 4,00$.

38. (EFOMM/2018)

A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ $(6 \leq x \leq 11)$. Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto $(2, 0)$. A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?

a) $(8,9)$.

b) $(8,6)$.

c) $(7,9)$.

d) $(7,5)$.

e) $(7,4)$.

39. (EFOMM/2016)

De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625

b) 781150

c) 1000

d) 250

e) 375

40. (EFOMM/2016)

Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = \left||x+2| - |x-2|\right|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, conjunto dos números reais.

a) $Im(f) = \mathbb{R}$

b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$.

c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 4\}$.

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 4\}$.

e) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$.

41. (EFOMM/2010)

A equação $\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217 - 13 \cdot \sqrt[3]{x}}$ tem uma solução inteira positiva x_1. O número de divisores positivos de x_1 é

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

42. (EFOMM/2009)

O logotipo de uma certa Organização Militar é uma pedra semipreciosa, cujo valor é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa em gramas. Suponha que a pedra de 8 gramas, infelizmente, tenha caído partindo-se em dois pedaços. Qual é o prejuízo, em relação ao valor inicial, sabendo-se que foi o maior possível?

a) 18%

b) 20%

c) 50%

d) 80%

e) 90%

43. (EFOMM/2006)

Se M e N sao as raízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, então $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ vale:

a) 6

b) 2

c) 1

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

44. (EFOMM/2005)

Trabalhando x horas por semana um operário ganha $R\$\ 60,00$ por semana trabalhada. Em um novo emprego, esse mesmo operário, continua ganhando os mesmos $R\$\ 60,00$ por semana, porém trabalha 4 horas a mais por semana e recebe $R\$\ 4,00$ a menos por hora trabalhada.

Determine o valor de x.

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

45. (EFOMM/2005)

O intervalo onde a função $f(x) = \frac{ax-2}{ax^2-x}$, com a $\in \mathbb{R}_-^*$, apresenta sinal positivo é

a) $]-\infty, \frac{2}{a}[$

b) $]\frac{1}{a}, 0[$

c) $[\frac{1}{a}, +\infty[$

d) $]\frac{2}{a}, \frac{1}{a}[$

e) $[\frac{2}{a}, 0[$

46. (Escola Naval/2019)

Uma loja de bombons está com o seguinte cartaz de promoção: “compre x bombons e ganhe $x\%$ de desconto”. A promoção é válida para compras de até 60 bombons, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Maria, Flávio, Gisele, Felipe, Evandro e Diego compram 53, 40, 33, 47, 38 e 57 bombons, respectivamente. Nessas condições, assinale a opção que apresenta o nome das pessoas que poderiam ter comprado mais bombons e pago a mesma quantia inicial.

a) Diego e Maria.

b) Gisele e Evandro.

c) Maria e Gisele.

d) Diego e Evandro.

e) Felipe e Flávio.

47. (Escola Naval/2014)

Considere a função real de variável real $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Para que valores da constante real k, a equação $f(x) = k$ possui exatamente 3 raízes reais?

a) $k \leq -\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$

c) $k \geq \frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{4} \leq k \leq 0$

e) $0 \leq k \leq \frac{1}{4}$

48. (Escola Naval/2014)

Um restaurante a quilo vende 200 quilos de comida por dia, a 40 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada aumento de um real no preço do quilo, o restaurante perde 8 cliente por dia, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida, em reais, para que o restaurante tenha a maior receita possível por dia?

a) 52

b) 51

c) 46

d) 45

e) 42

49. (Escola Naval/2013)

Uma loja está fazendo uma promoção na venda de bolas: "Compre x bolas e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é valida para compras de até 60 bolas caso em que é conhecido o desconto máximo de 60%. Julia comprou 41 bolas e poderia ter comprado mais bolas e gasto a mesma quantia. Quantas bolas a mais Julia poderia ter comprado?

a) 10

b) 12

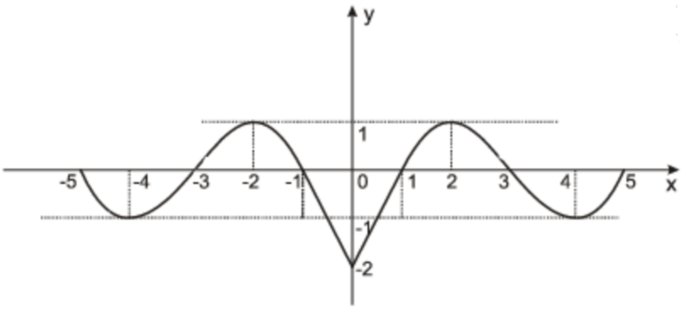
c) 14

d) 18

e) 24

50. (Escola Naval/2013)

Considere a função real $y = f(x)$, definida para $-5 \leq x \leq 5$, representada graficamente abaixo. Supondo a $a \geq 0$ uma constante real, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 9)$ intercepta o gráfico de $y = f(x)$ em exatamente 4 pontos distintos?



a) $1 < a < \frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{9} < a < 1$

c) $0 < a < \frac{2}{9}$

d) $\frac{10}{9} < a < 3$

e) $a > 3$

51. (Escola Naval/2013)

Considere f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = \frac{1}{4x-1}$ e $g(x) = 2x^2$. Qual é o domínio da função composta $(fog)(x)$?

a) $\mathbb{R}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}}, x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{1}{4}\right\}$

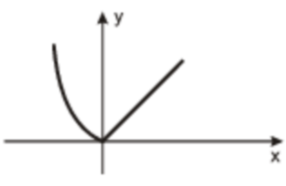
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{1}{4}, x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\frac{1}{4}, x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

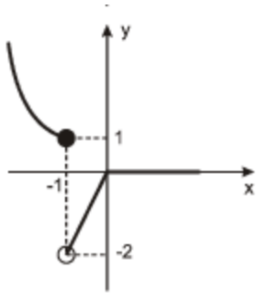
52. (Escola Naval/2013)

O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x)\begin{cases} \frac{-|x+1||x|}{x+1} + x & se\ x > -1 \\ x|x| & se\ x \leq -1 \end{cases}$ é

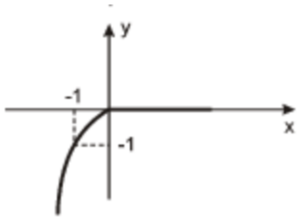
a)



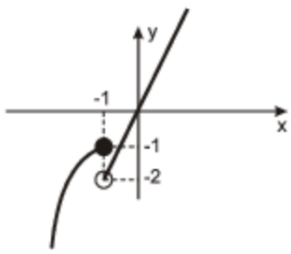
b)



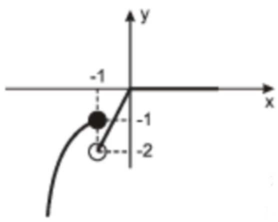
c)



d)



e)



53. (Escola Naval/2013)

A soma das raízes reais distintas da equação $\left||x-2|-2\right|=2$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

GABARITO

16. b
17. a
18. a
19. b
20. d
21. b
22. d
23. a
24. b
25. b
26. a
27. a
28. c
29. b
30. d
31. b
32. e
33. d
34. b
35. c
36. e
37. c
38. b
39. a
40. c
41. d
42. c
43. d
44. a
45. d
46. e
47. e
48. d
49. d
50. c
51. b
52. e
53. d

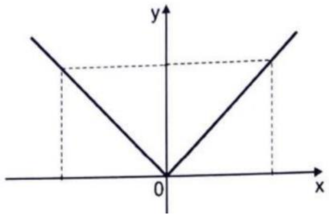
RESOLUÇÃO

16. (AFA/2021)

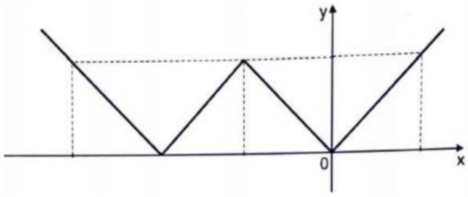
Considere a função real f definida por $f(x) = |-|-c+x|+c|$, com $c \in \mathbb{R}$.

Dos gráficos apresentados nas alternativas a seguir, o único que NÃO pode representar a função f é

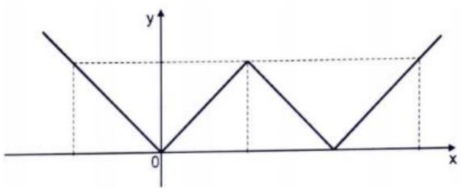
a)



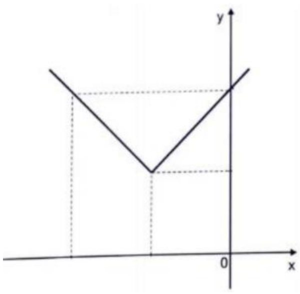
b)



c)



d)



Comentários

Vamos verificar as raízes dos possíveis gráficos para os diferentes valores de c.

1) Para $c = 0$:

$$f(x) = |-|-c+x|+c| = f(x) = \big|-|x|\big| = |x|$$

O gráfico correspondente é a letra A.

2) Para $c > 0$:

$$f(x) = |-|-c+x|+c|$$

Vamos analisar as raízes dessa função:

$$f(x) = 0 \Rightarrow |-|-c+x|+c| = 0 \Rightarrow -|-c+x|+c = 0$$

$$|x-c| = c$$

$$\Rightarrow x - c = \pm c \Rightarrow x = 2c \; ou \; x = 0$$

Assim, temos uma raiz na origem e outra raiz no ponto $x = 2c > 0$. Veja que esse caso ocorre na letra C.

3) Para $c < 0$:

$$f(x) = |-|-c+x|+c|$$

Analisando as raízes:

$$|-|-c+x|+c| = 0 \Rightarrow -|-c+x|+c = 0 \Rightarrow \underbrace{|x-c|}_{>0} = \underbrace{c}_{<0}$$

Como $c \neq 0$, temos que não há raízes nesse caso. Essa situação ocorre na letra D.

Portanto, o gráfico que não é possível é a letra B.

Gabarito: B

---

54. (AFA/2021)

Seja D o conjunto domínio mais amplo da função real $f(x) = \sqrt{\frac{(x-4)(x^2-25)}{-x^2+5x-4}}$ e $S \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação $x + 6 \leq x(x+6)$.

O conjunto $D \cap S$ é

a) $]-\infty, -6] \cup]1, 5] - \{4\}$

b) $]-\infty, -5] \cup]1, 4] \cup]4, 5]$

c) $]-\infty, -6[\cup [1, 4[\cup [5, \infty[$

d) $]1, 4[\cup [5, \infty[$

Comentários

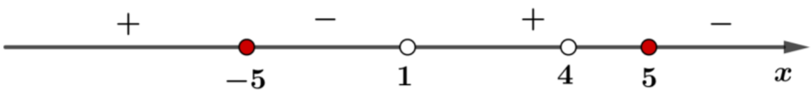
O conjunto D é dado por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-4)(x^2-25)}{-x^2+5x-4}} = \sqrt{\frac{(x-4)(x-5)(x+5)}{-(x-4)(x-1)}}$$

Para $x \neq 4$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-5)(x+5)}{1-x}}$$

Note que devemos ter $x \neq 1$, fazendo o estudo do sinal pelos pontos críticos, vemos que as raízes $x = 5, x = -5$ e $x = 1$ são de multiplicidade ímpar. Veja que $g(0) = \frac{(0-5)(0+5)}{1-0} = -25 < 0$. Assim, temos a seguinte reta com os sinais:



Veja que o ponto $x = 4$ foi incluído para lembrarmos que devemos ter $x \neq 4$.

Queremos os intervalos em que $\frac{(x-5)(x+5)}{1-x} \geq 0$, logo:

$$D = (-\infty, -5] \cup (1, 4) \cup (4, 5]$$

O conjunto S é dado por:

$$x + 6 \leq x(x + 6)$$
$$0 \leq x^2 + 5x - 6$$
$$(x + 6)(x - 1) \geq 0$$

Fazendo o estudo do sinal:

$$S = (-\infty, 6] \cup [1, +\infty)$$

Portanto, a interseção dos conjuntos é

$$D \cap S = (-\infty, 6] \cup (1, 4) \cup (4, 5] =]-\infty, -6] \cup]1,5] - \{4\}$$

Gabarito: A

---

55. (AFA/2020)

Considere as funções reais f e g definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}} - 1$$

e

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x^2 - x - 1}}{\sqrt{x - 1}} - 1$$

Sejam:

$D(f)$ o conjunto domínio de f

$D(g)$ o conjunto domínio de g

$Im(f)$ o conjunto imagem de f

$Im(g)$ o conjunto imagem de g

Sobre as funções f e g, analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

(02) A função f admite valor mínimo igual a -1

(04) f é decrescente $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2]$

(08) $\boldsymbol{D(f) = D(g)}$

(16) $\boldsymbol{Im(g) \subset Im(f)}$

(32) $\boldsymbol{f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[}$

A soma das proposições verdadeiras é

a) $\mathbf{50}$

b) $\mathbf{48}$

c) $\mathbf{42}$

d) $\mathbf{30}$

Comentários

Reescrevendo as funções:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}} - 1 = \sqrt{\frac{x^2(x+1) - (x+1)}{x - 1}} - 1 = \sqrt{\frac{(x^2 - 1)(x+1)}{x - 1}} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)(x+1)}{x - 1}} - 1$$

Para $x - 1 \neq 0$, temos:

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2} - 1 \Rightarrow f(x) = |x+1| - 1; x \neq 1$$

Para g:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x^2 - x - 1}}{\sqrt{x - 1}} - 1 = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)(x+1)}}{\sqrt{x - 1}} - 1 = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)^2}}{\sqrt{x - 1}} - 1$$

Da condição de existência do denominador de g, temos:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Logo,

$$g(x) = |x+1| - 1; x > 1$$

Vamos analisar as afirmações:

(02) A função f admite valor mínimo igual a -1

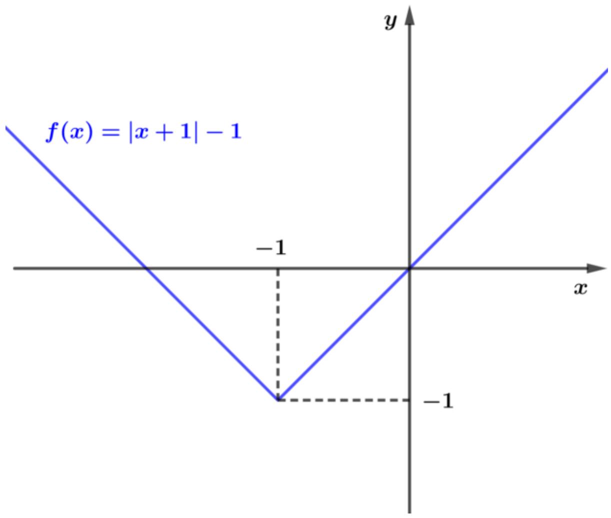
Verdadeira, pois:

$$f(x) = |x+1| - 1$$

Como $|x+1| \geq 0$, temos que o menor valor de f é -1.

(04) f é decrescente $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2]$

Falsa. Esboçando-se o gráfico da função f:



Pelo gráfico, podemos ver que f é decrescente para $x \leq -1$, ou seja, $x \in]-\infty, -1]$.

(08) $D(f) = D(g)$

Falsa. Os domínios das funções são:

$$f(x) = |x+1| - 1; x \neq 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$
$$g(x) = |x+1| - 1; x > 1 \Rightarrow D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$$

(16) $Im(g) \subset Im(f)$

Verdadeira, pois:

Como o domínio da função g é mais restrito que o domínio de f e as funções são iguais, temos que $Im(g) \subset Im(f)$.

(32) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$

Verdadeira. Sabemos que as funções f e g são iguais, e para $x > 1$ a função g está definida.

A soma das proposições verdadeiras é $02 + 16 + 32 = 50$

Gabarito: "a".

---

56. (AFA/2019)

Sobre a inequação $\frac{3x^2+2x}{x} \geq x^3$, considerando o conjunto universo $U \subset \mathbb{R}$, é INCORRETO afirmar que possui conjunto solução:

a) unitário se $U = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ e } x = 2k, k \in \mathbb{Z}_+^*\}$

b) vazio se $U = [2, +\infty[$

c) com infinitas soluções se $U = \{x \in \mathbb{R} | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_-\}$

d) com infinitas soluções se $U = \{x \in \mathbb{R}^* | x \leq 2\}$

Comentários

Uma restrição imposta pela própria expressão é $x \neq 0$. Tendo isso em mente:

$$\frac{3x^2+2x}{x} \geq x^3 \Leftrightarrow 3x+2 \geq x^3 \Leftrightarrow x^3-3x-2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right] \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2, x \neq 0.$$

Sendo S o conjunto solução, analisemos as alternativas:

a. correta. $U = \{2,4,6,8,\ldots\} \Rightarrow S = \{2\}$.

b. incorreta. $S = (\,]-\infty,2] - \{0\}) \cap [2,\infty] = \{2\} \neq \emptyset$.

c. correta. $U = \{1,-1,-3,-5,\ldots\} \Rightarrow S = U = \{1,-1,-3,\ldots\}$

d. correta. $S = U$.

Gabarito: "b"

---

57. (AFA/2019)

Para angariar fundos para a formatura, os alunos do 3º ano do CPCAR vendem bombons no horário do intervalo das aulas.

Inicialmente, começaram vendendo cada bombom por R$4,00. Assim, perceberam que vendiam, em média, 50 bombons por dia.

A partir dos conhecimentos que os alunos tinham sobre função, estimaram que para cada 5 centavos de desconto no preço de cada bombom (não podendo conceder mais que 70 descontos), seria possível vender 5 bombons a mais por dia.

Considere:

- p o preço de cada bombom;

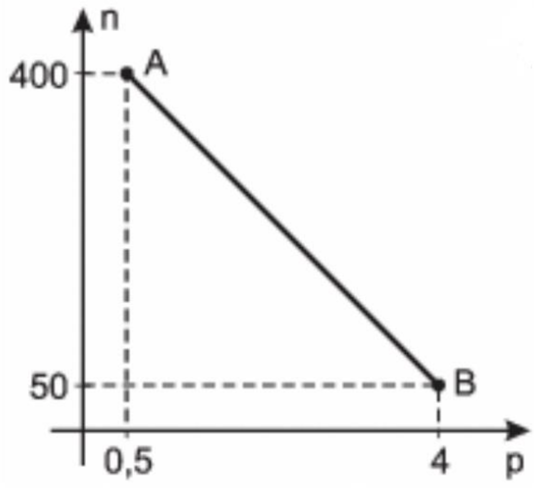
- n o número de bombons vendidos, em média, por dia;

- $x \in \mathbb{N}$ o número de reduções de 5 centavos concedidas no preço unitário de cada bombom; e

- y a arrecadação diária com a venda dos bombons.

Com base nessas informações, analise as proposições abaixo.

(02) O gráfico que expressa n em função de p está contido no segmento $\overline{AB}$ do gráfico abaixo.



(04) A maior arrecadação diária possível com a venda dos bombons, considerando os descontos de 5 centavos, ocorre quando concederem 35 descontos de 5 centavos.

(08) Se forem concedidos 20 descontos de 5 centavos, serão vendidos mais de 100 bombons por dia.

A soma das proposições verdadeiras é igual a

a) 6

b) 10

c) 12

d) 14

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte tabela:

p – preço de cada bombom	n – número de bombons vendidos por dia
4	50
$4-0{,}05$	$50+5$
$4-2\cdot 0{,}05$	$50+2\cdot 5$
$4-3\cdot 0{,}05$	$50+3\cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$
$4-x\cdot 0{,}05$	$50+x\cdot 5$

Assim, temos:

$$p=4-0{,}05x, 0\le x\le 70$$
$$n=50+5x, 0\le x\le 70$$

Vamos analisar as afirmações:

(02) Vamos escrever n em função de p:

De p, temos:

$$p = 4 - 0{,}05x \Rightarrow 0{,}05x = 4 - p \Rightarrow 5x = 400 - 100p$$

Substituindo em n:

$$n = 50 + 400 - 100p = 450 - 100p$$

Essa é a equação de uma reta decrescente. Devemos verificar os pontos do gráfico:

$$p = 0{,}5 \Rightarrow n = 450 - 100 \cdot 0{,}5 = 400$$

$$p = 4 \Rightarrow n = 450 - 100 \cdot 4 = 50$$

Esses pontos são os extremos da reta do gráfico, portanto, a proposição é VERDADEIRA.

(04) A arrecadação diária é dada por:

$$y = p \cdot n = (4 - 0{,}05x)(50 + 5x)$$

Note que y representa uma parábola com concavidade para baixo (expressão fatorada de uma função quadrática), logo, as raízes de y são:

$$y = (4 - 0{,}05x)(50 + 5x) = 0$$

$$4 - 0{,}05x = 0 \Rightarrow x_1 = 80$$

$$50 + 5x = 0 \Rightarrow x_2 = -10$$

O máximo ocorre no vértice da parábola, logo:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{80 - 10}{2} = 35$$

Portanto, proposição VERDADEIRA.

(08) Para $x = 20$, temos

$$n = 50 + 5x = 50 + 5 \cdot 20 = 150 > 100$$

Portanto, afirmação VERDADEIRA.

A soma das proposições verdadeiras é $02 + 04 + 08 = 14$.

Gabarito: “d”.

---

58. (AFA/2018)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \begin{cases} x - 3, se\ x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} - x, se\ x > 2 \end{cases}$

Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (verdadeira) ou F (FALSA).

( ) A função f é injetora.

( ) $\forall x \in \mathbb{R}$, a função f é crescente.

( ) A função f^{-1}, inversa de f, é dada por $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3, se\ x \leq -1 \\ \sqrt{4x + 4} + 2, se\ x > -1 \end{cases}$$

A sequência correta é

a) F-V-V

b) V-V-V

c) F-V-F

d) V-F-V

Comentários

Vamos esboçar o gráfico de f.

Para $x \leq 2$, temos a reta $f(x) = x - 3$.

Para $x > 2$, temos:

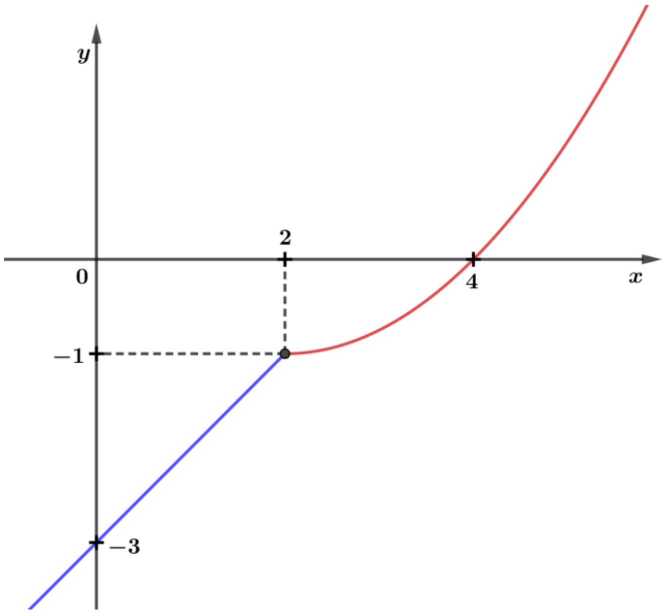
$$f(x) = \frac{x^2}{4} - x = x\left(\frac{x}{4} - 1\right)$$

As raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, logo, o vértice dessa parábola é

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Para esse ponto, temos $f(2) = \frac{2^2}{4} - 2 = -1$.

Assim, o gráfico é



Pelo gráfico, podemos ver que f é injetora, pois ela é estritamente crescente.

Como f é injetora e sobrejetora, pois $D(f) = \mathbb{R}$, temos que f é bijetora, logo, inversível. Assim, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, se\ x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{4} - x, se\ x > 2 \end{cases}$$

Para $x \leq 2$ e $y = f(x)$:

$$y = x - 3 \Rightarrow x = y + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 3$$
$$x \leq 2 \Rightarrow y + 3 \leq 2 \Rightarrow y \leq -1$$

Para $x > 2$:

$$y = \frac{x^2}{4} - x \Rightarrow x^2 - 4x - 4y = 0$$

Encontrando as soluções:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4y)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4(4 + 4y)}}{2} = 2 \pm \sqrt{4y + 4}$$
$$x > 2 \Rightarrow 2 \pm \sqrt{4y + 4} > 2 \Rightarrow \pm\sqrt{4y + 4} > 0$$

Para satisfazermos essa desigualdade, devemos ter $x = 2 + \sqrt{4y + 4}$, ou seja, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4x + 4}$ e da condição de existência do radical:

$$4y + 4 > 0 \Rightarrow 4y > -4 \Rightarrow y > -1$$

Portanto:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, se\ x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} - x, se\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3, se\ x \leq -1 \\ 2 + \sqrt{4x + 4}, se\ x > -1 \end{cases}$$

Analisando as proposições, vemos que todas são verdadeiras.

Gabarito: “b”.

---

59. (AFA/2017)

Durante 16 horas, desde a abertura de uma certa confeitaria, observou-se que a quantidade $q(t)$ de unidades vendidas do doce “amor em pedaço”, entre os instantes $(t - 1)$ e t, é dada pela lei $q(t) = ||t - 8| + t - 14|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}$.

É correto afirmar que

a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de “amor em pedaço”.

b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.

c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.

d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

Comentários

Para $8 \leq t \leq 16$:

$$q(t) = ||t - 8| + t - 14| = |t - 8 + t - 14| = |2t - 22|$$

Note que

$$2t - 22 \geq 0 \Rightarrow t \geq 11$$

Logo, podemos remover o módulo da expressão e assim:

$$11 \leq t \leq 16 \Rightarrow q(t) = 2t - 22$$

$$\Rightarrow q(11) = 0$$
$$\Rightarrow q(12) = 2$$
$$\Rightarrow q(13) = 4$$
$$\Rightarrow q(14) = 6$$
$$\Rightarrow q(15) = 8$$
$$\Rightarrow q(16) = 10$$

Para $8 \leq t < 11$:

$$q(t) = 22 - 2t$$
$$\Rightarrow q(8) = 6$$
$$\Rightarrow q(9) = 4$$
$$\Rightarrow q(10) = 2$$

Para $1 < t < 8$:

$q(t) = \big||t-8| + t - 14\big| = |-(t-8) + t - 14| = |-t + 8 + t - 14| = |-6| = 6$

Analisando as alternativas:

a) Errada, pois $q(11) = 0$.

b) Errada, pois em alguns instantes temos $q(t) \neq 6$.

c) Errada, pois $q(12) = q(10) = 2$.

d) Correta, pois o máximo de unidade vendidas é $q(16) = 10$.

Gabarito: “d”.

---

60. (AFA/2016)

Considere as funções reais f, g e h tais que

$\boldsymbol{f(x) = mx^2 - (m+2)x + (m+2)}$

$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x}}$

$\boldsymbol{h(x) = \sqrt{x}}$

Para que a função composta $h\ o\ g\ o\ f(x)$ tenha domínio $D = \mathbb{R}$, deve-se ter

a) $m > \frac{2}{3}$

b) $-2 < m < \frac{2}{3}$

c) $0 < m < \frac{2}{3}$

d) $-2 < m < 0$

Comentários

Encontrando a composta:

$$h\ o\ g\ o\ f(x) = h\big(g(f(x))\big) = \sqrt{g(f(x))} = \sqrt{\frac{1}{f(x)}} = \sqrt{\frac{1}{mx^2 - (m+2)x + (m+2)}}$$

$$\Rightarrow h\ o\ g\ o\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{mx^2 - (m+2)x + (m+2)}}$$

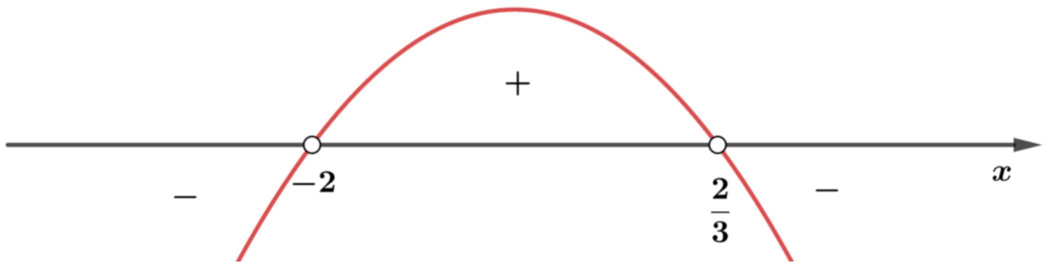
Para que essa função composta tenha domínio real, devemos ter:

$mx^2 - (m+2)x + (m+2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Se $m > 0$, a função acima será uma parábola com concavidade para cima e para que a desigualdade seja satisfeita para todo x, devemos ter $\Delta < 0$, logo:

$$\Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot m \cdot (m+2) = (m+2)(m+2-4m) = (m+2)(2-3m)$$

A expressão de Δ em m representa uma parábola com concavidade para baixo, fazendo o estudo do sinal, temos:



Assim, temos $\Delta < 0$ para $m < -2$ ou $m > 2/3$. Como $m > 0$, devemos ter

$$m > \frac{2}{3}$$

*Se $m < 0$, a função $mx^2 - (m+2)x + (m+2)$ em x seria uma parábola com concavidade para baixo e sempre haveria valores onde $mx^2 - (m+2)x + (m+2) < 0$.

Gabarito: "a".

---

61. (AFA/2016)

Uma fábrica produz casacos de determinado modelo. O preço de venda de um desses casacos é de R$200,00, quando são vendidos 200 casacos. O gerente da fábrica, a partir de uma pesquisa, verificou que, para cada desconto de R$2,00 no preço de cada casaco, o número de casacos vendidos aumenta de 5.

A maior arrecadação possível com a venda dos casacos acontecerá se a fábrica vender cada casaco por um valor, em reais, pertencente ao intervalo:

a) $[105, 125[$

b) $[125,\ 145[$

c) $[145, 165[$

d) $[165, 185[$

Comentários

Do enunciado, temos:

Preço unitário $R\$$	Quantidade de casacos vendidos
$200{,}00$	200
$200-2$	$200+5$
$200-2\cdot 2$	$200+2\cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$
$200-2x$	$200+5x$

Veja que o preço unitário é $p(x)=200-2x$ e a quantidade de casacos vendidos é $q(x)=200+5x$, logo, a arrecadação é

$$A(x)=p(x)\cdot q(x)=(200-2x)(200+5x)=-10x^2+600x+40000$$

A função acima representa uma parábola com concavidade para cima, logo, a arrecadação máxima ocorre no x do vértice:

$$x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{600}{2\cdot(-10)}=30$$

Para esse valor, temos como preço unitário de cada casaco:

$$p(30)=200-2\cdot 30=140$$

Esse valor pertence ao intervalo $[125,\ 145[$.

Gabarito: "b".

---

62. (AFA/2012)

Para angariar fundos de formatura, os cadetes do 1º ano da AFA vendem camisas de malha com o emblema da turma. Se o preço de venda de cada camisa é de 20 reais, eles vendem por mês 30 camisas.

Fizeram uma pesquisa e verificaram que, para cada 2 reais de desconto no preço de cada camisa, são vendidas 6 camisas a mais por mês.

Dessa forma, é correto afirmar que

a) é possível fazer mais de 10 descontos de 2 reais.

b) tanto faz vender as camisas por 12 reais cada uma ou 18 reais cada uma que o faturamento é o mesmo.

c) o máximo faturamento ocorre se são vendidas menos de 40 camisas por mês.

d) se o preço de venda de cada camisa é de 14 reais, então o faturamento é maior que 680 reais.

Comentários

Do enunciado, temos:

Preço unitário $R\$$	Quantidade de camisas vendidas por mês
20	30
$20-2$	$30+6$
$20-2\cdot 2$	$30+2\cdot 6$
$\vdots$	$\vdots$
$20-2x$	$30+6x$

Assim, as funções são:

$$preço \rightarrow p(x) = 20 - 2x$$

$$quantidade\ vendida \rightarrow q(x) = 30 + 6x$$

Vamos analisar as alternativas:

a) Falsa, pois para $x > 10$, o preço fica negativo.

b) Verdadeiro. A função que representa o faturamento é:

$$F(x) = p(x) \cdot q(x) = (20 - 2x)(30 + 6x)$$

Vendendo a camisa por 12, temos

$$p(x) = 12 \Rightarrow 12 = 20 - 2x \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Para esse valor:

$$F(4) = (20 - 2 \cdot 4)(30 + 6 \cdot 4) = 12 \cdot 54 = 648$$

Vendendo a camisa por 18, temos

$$p(x) = 18 \Rightarrow 18 = 20 - 2x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$F(1) = (20 - 2 \cdot 1)(30 + 6 \cdot 1) = 18 \cdot 36 = 648$$

c) Falsa.

O máximo faturamento ocorre no x do vértice:

$$F(x) = (20 - 2x)(30 + 6x) = -12x^2 + 60x + 600$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2 \cdot (-12)} = -\frac{60}{-24} = 2{,}5$$

Para esse valor, temos $q(2{,}5) = 30 + 6 \cdot 2{,}5 = 30 + 15 = 45 > 40$.

d) Falsa.

Vendendo a 14 reais, temos

$$p(x) = 20 - 2x = 14 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

O faturamento para $x = 3$ é:

$$F(3) = (20 - 2 \cdot 3)(30 + 6 \cdot 3) = 14 \cdot 48 = 672 \neq 680$$

Gabarito: "b".

63. (AFA/2012)

Considere f uma função quadrática de raízes reais e opostas.

O gráfico de f intercepta o gráfico da função real g definida por $g(x) = -2$ em exatamente um ponto.

Se $f(\sqrt{3}) = 4$ e $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, então, é INCORRETO afirmar que

a) $f(x) - g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

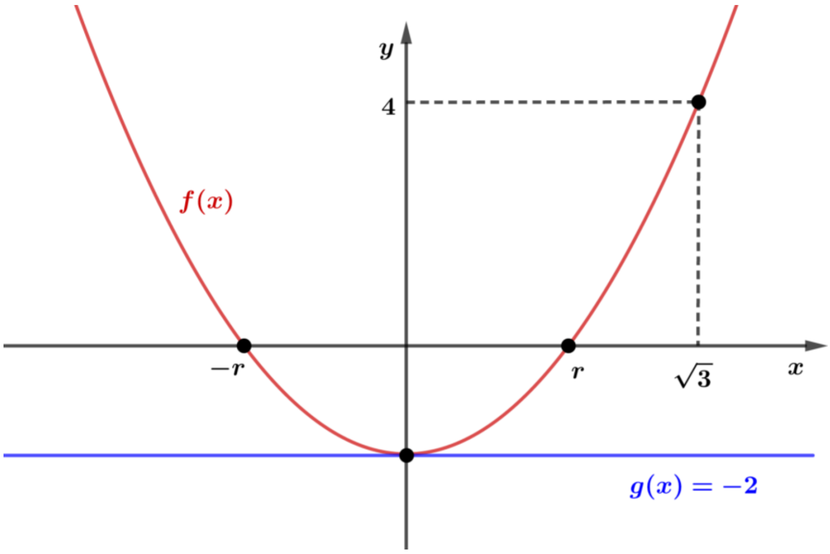
b) o produto das raízes de f é um número ímpar.

c) a função real h definida por $h(x) = g(x) - f(x)$ admite valor máximo.

d) f é crescente $\forall x \in [1, +\infty[$.

Comentários

Como o gráfico de f intercepta o gráfico de $g(x) = -2$ (reta horizontal) em exatamente um ponto, temos que esse é o vértice de f. Sendo esse valor negativo e f uma função quadrática com duas raízes reais e opostas, temos que f é uma parábola com concavidade para cima. Assim, podemos desenhar a seguinte figura:



Vamos analisar as alternativas:

a) Incorreta. Como $f(x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) - g(x) \geq 0$.

b) Correta.

Sendo $r \in]0, \sqrt{3}[$, temos que $r < 2$, ou seja, o produto $-r \cdot r = -r^2$ não pode ser par, logo, é um número ímpar.

c) Correta.

A função $-f(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo, logo, admite valor máximo.

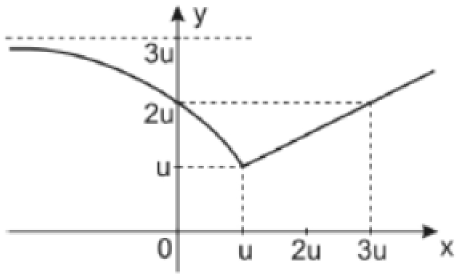
d) Correta.

A função f é crescente $\forall x \in [0, +\infty[$.

Gabarito: "a".

64. (AFA/2012)

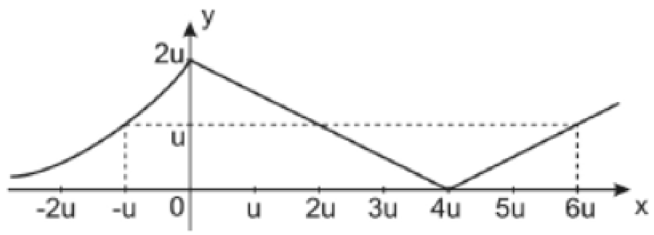
Considere a figura abaixo que representa um esboço do gráfico da função real f.



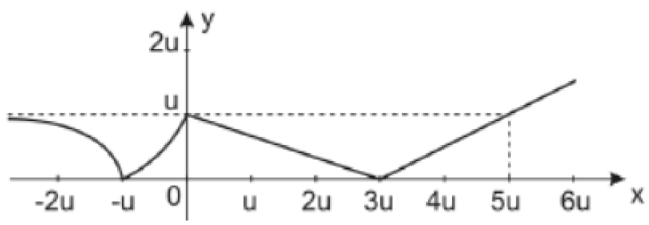
Sabe-se que $g(x) = f(x) - 3u$, $h(x) = g(x+u)$ e $j(x) = |h(x)|$

Um esboço de gráfico que melhor representa a função j é

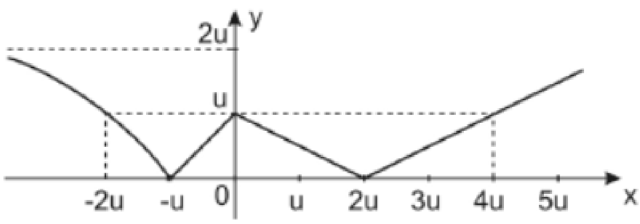
a)



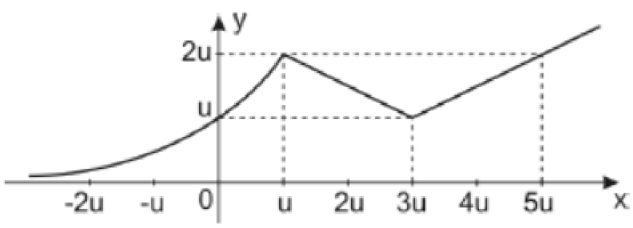
b)



c)



d)

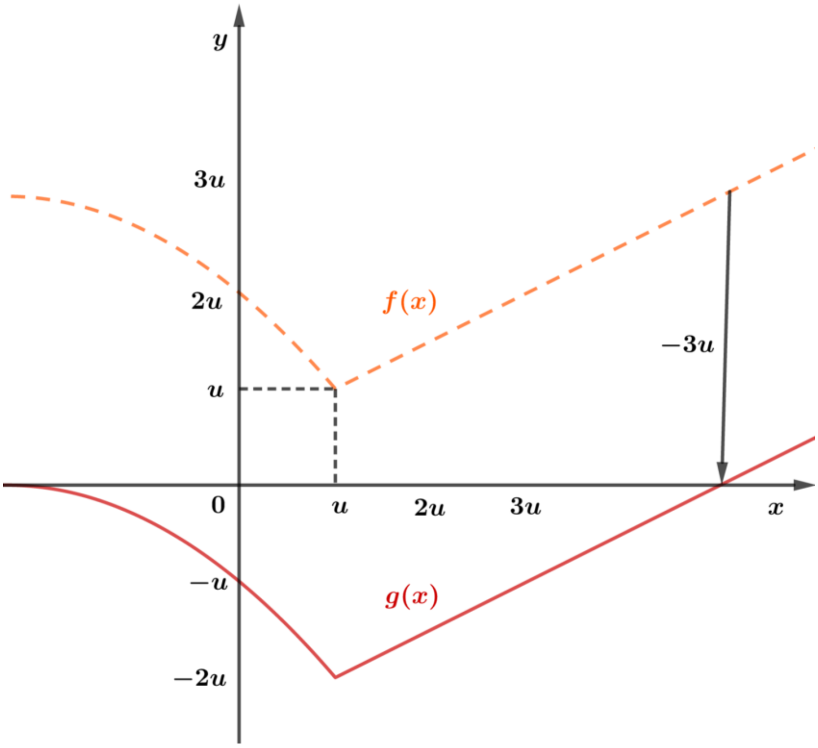


Comentários

Vamos construir a função por partes:

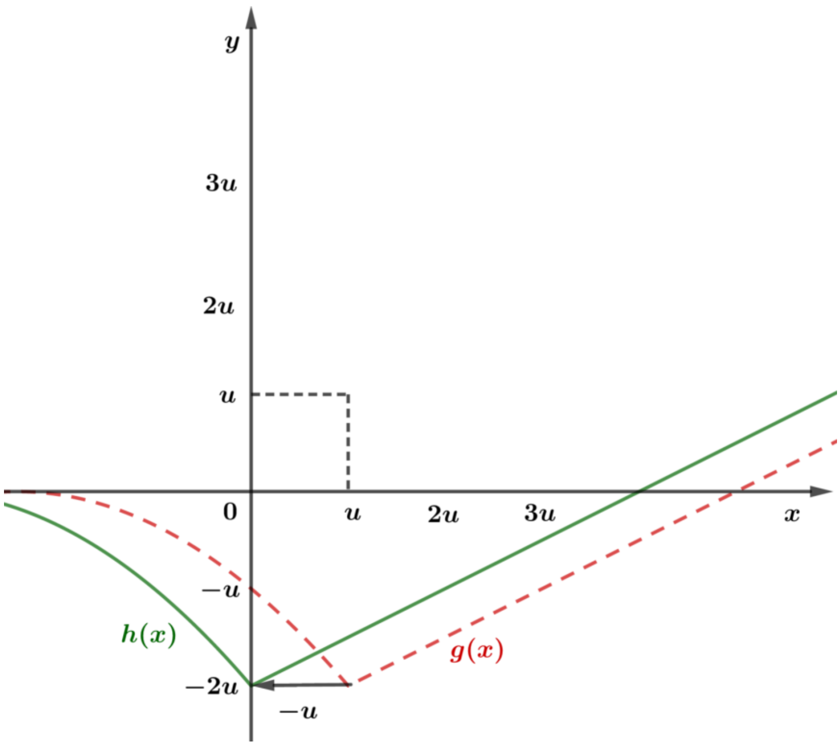
1) $g(x) = f(x) - 3u$

A função f é transladada $-3u$ verticalmente.



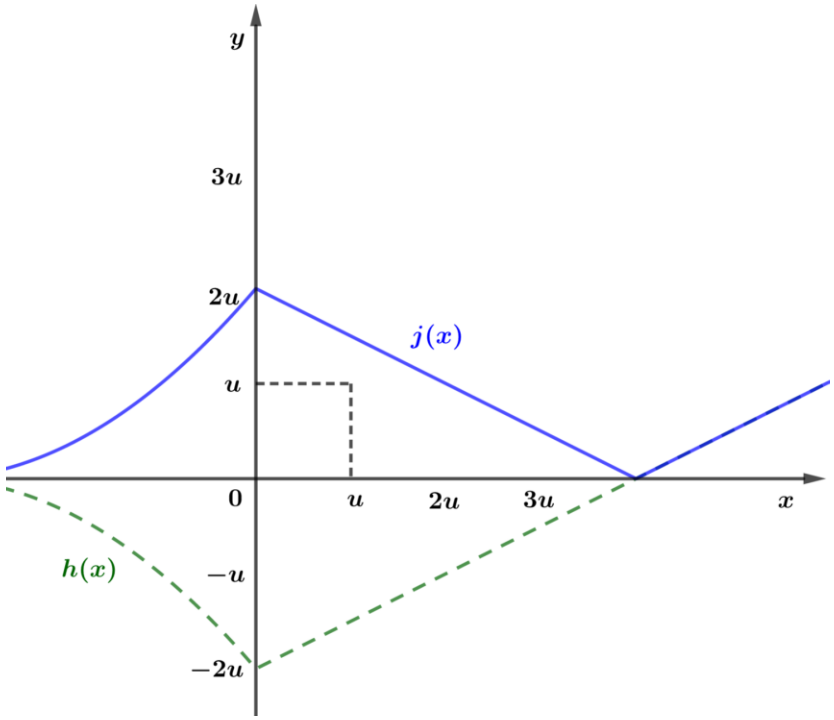
2) $h(x) = g(x+u) = g\big(x - (-u)\big)$

A função g é transladada $-u$ horizontalmente.



3) $j(x) = |h(x)|$

A parte negativa de h é refletida para cima.



Gabarito: "a".

---

65. (AFA/2012)

Considere a função real $g: A \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x}$.

Sabendo-se que o conjunto A é o mais amplo possível, é verdade que

a) $\exists x \in A$ tal que $g(x) = -1$.

b) se $h(x) = -1 + |g(x)|$, então h possui raiz real.

c) se $0 < x < 1$, então $-1 < g(x) < 0$.

d) $\exists x \in]-\infty, -2[$ tal que $g(x) > 3$.

Comentários

Do denominador, temos como condição de existência:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$$

$$x^2 + x \neq 0 \Rightarrow x(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \; e \; x \neq -1$$

Vamos analisar as alternativas:

a) Para $g(x) = -1$:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = -1 \Rightarrow x^2 - x = x^2 + x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Mas, $x \neq 0$, portanto, falsa.

b) Para $h(x) = 0$, temos:

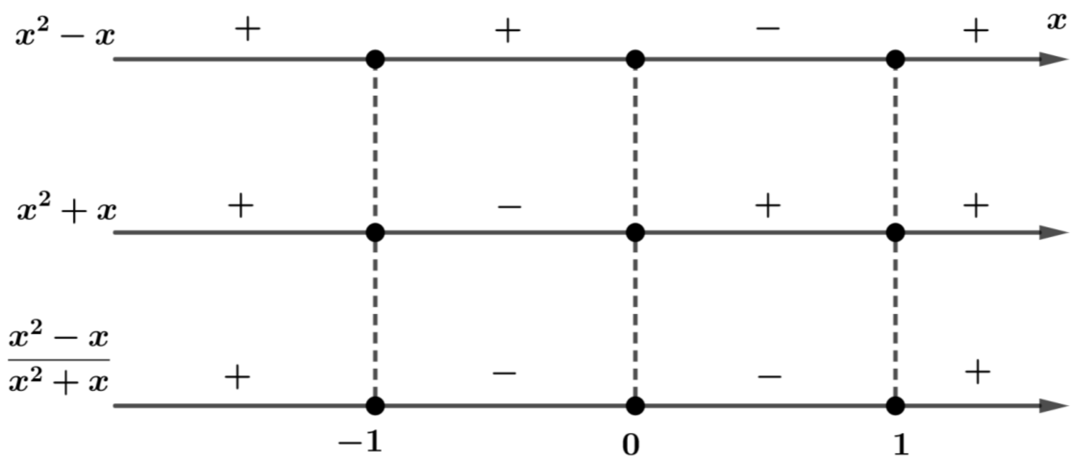
$$-1 + |g(x)| = 0 \Rightarrow |g(x)| = 1 \Rightarrow g(x) = \pm 1$$

Sabemos que para $g(x) = -1$ não temos solução, logo, devemos testar a outra possibilidade:

$$g(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = 1 \Rightarrow x^2 - x = x^2 + x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como $x \neq 0$, temos que $h(x) = 0$ não tem solução, portanto, falsa.

c) Fazendo o estudo do sinal:



Para $0 < x < 1$, temos que $g(x)$ é negativo, vamos verificar o seu intervalo de valores.

Para $x = 1$:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} \Rightarrow g(1) = \frac{1^2 - 1}{1^2 + 1} = 0$$

Para x tendendo a zero:

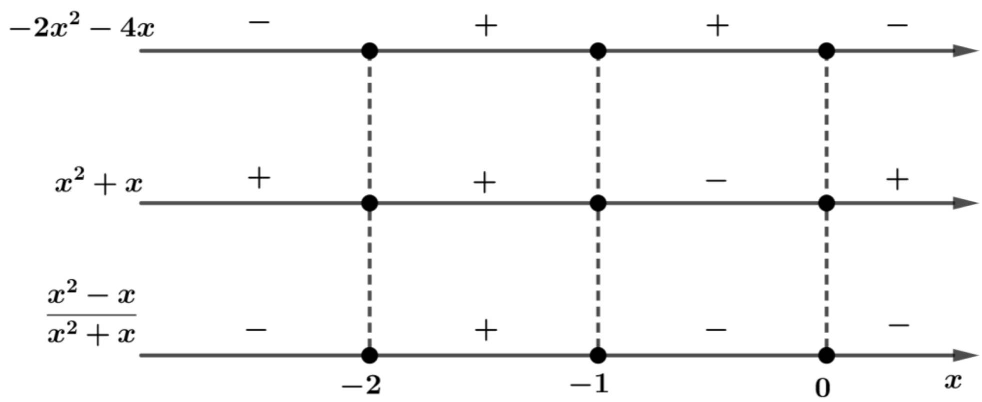
$$g(x) = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$$

Assim, temos que $-1 < g(x) < 0$. Portanto, alternativa correta.

d) Fazendo o cálculo:

$$g(x) > 3 \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + x} > 3 \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + x} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 3x^2 - 3x}{x^2 + x} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 4x}{x^2 + x} > 0$$

Fazendo o estudo do sinal:



Para $x < -2$, temos $g(x) < 0 < 3$, portanto, falsa.

Gabarito: "c".

---

66. (AFA/2011)

Considere as funções reais f e g tal que $f(x) = x^2 + 1$ e que existe a composta de g com f dada por $(gof)(x) = \sqrt{(x^2+1)^2}$.

Sobre a função g, é INCORRETO afirmar que ela é

a) par

b) sobrejetora

c) tal que $g(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) crescente se $x \in [1, +\infty[$

Comentários

Do enunciado:

$$(gof)(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} \Rightarrow g(f(x)) = |x^2+1| = |f(x)| \therefore g(x) = |x|$$

Analisando as alternativas:

a) Correta, pois $g(-x) = |-x| = |x| = g(x)$.

b) Incorreta, pois o contradomínio das funções é $\mathbb{R}$ e a imagem de g é $Im(g) = [0, +\infty[$.

c) Correta, pois $g(x) = |x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Correta, pois para $x \in [0, +\infty[$, temos $g(x) = x$ que é crescente.

Gabarito: "b".

---

67. (AFA/2011)

Classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo, onde $a \in \mathbb{R}$.

I. $\frac{x^2-a^2}{x-a} = x + a\ \forall x \in \mathbb{R}$

II. se $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ e $a > 0$, então $\{x \in R | x < 0\ ou\ x > a\}$

III. se $a > 0$ e $|x| < a$, então $x^2 - a^2 < 0$

Tem-se a sequência correta em

a) F-V-F

b) F-F-V

c) V-F-V

d) F-V-V

Comentários

I. Falsa. Pois do denominador temos que $x - a \neq 0$, ou seja, $x \neq a$.

II. Verdadeira. Pois para $a > 0$, temos:

1) $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

Ou

2) $x > a \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

III. Verdadeira. Para $a > 0$ e $|x| < a$, temos:

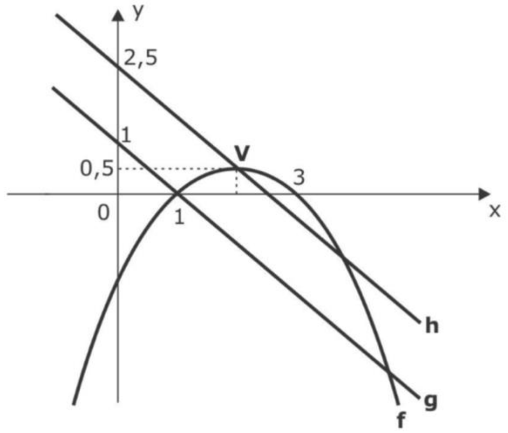
$$|x|^2 < a^2 \Rightarrow x^2 < a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 < 0$$

Gabarito: "d".

---

68. (AFA/2010)

Considere o esboço dos gráficos das funções reais f, g e h, tais que f é do 2º grau e g e h são do 1º grau. Sabe-se que V é o vértice da parábola.



O conjunto de todos os valores de x para os quais $h(x) > g(x) > f(x)$ é

a) $\mathbb{R} -]1, 5[$

b) $\mathbb{R} - [1, 5]$

c) $\mathbb{R} - [1, 3]$

d) $\mathbb{R} -]1, 3[$

Comentários

Note que $h(x) > g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, assim, basta encontrar os valores tais que $g(x) > f(x)$. Do gráfico, temos:

$$g(x) = ax + b$$
$$g(0) = 1 \Rightarrow b = 1$$
$$g(1) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$
$$\therefore g(x) = -x + 1$$

Perceba que a função f possui duas raízes, 1 e 3, logo:

$$f(x) = k(x - 1)(x - 3)$$

Além disso, temos $f(x_v) = 0{,}5$, logo:

$$x_v = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow f(2) = k(2-1)(2-3) = -k \Rightarrow -k = 0{,}5 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$$

Assim, para $g(x) > f(x)$:

$$-x + 1 > -\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$$

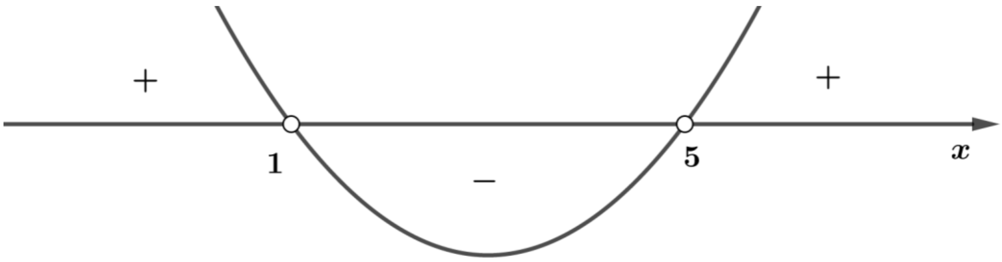
$$-2x + 2 > -(x^2 - 4x + 3)$$

$$-2x + 2 > -x^2 + 4x - 3$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

$$(x-5)(x-1) > 0$$

Fazendo o estudo do sinal:



Assim, temos que $(x-5)(x-1) > 0$ implica $x < 1$ ou $x > 5$, ou seja, $\mathbb{R} - [1, 5]$.

Gabarito: “b”.

---

69. (EFOMM/2020)

A inequação $|x| + |2x - 8| \leq |x + 8|$ é satisfeita por um número de valores inteiros de x igual a

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

Comentários

Vamos escolher uma das expressões modulares acima para fazer o estudo do sinal. Pode escolher qualquer uma delas. Vamos começar com $|2x - 8|$:

i) $2x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$

Assim, nesse caso em que $x \geq 4$ a expressão do enunciado fica:

$$x + 2x - 8 \leq x + 8 \Leftrightarrow 2x \leq 16 \Leftrightarrow x \leq 8$$

A interpretação desse resultado deve ser feita da seguinte maneira: quando analisamos valores de x maiores que 4, a desigualdade do enunciado é satisfeita para valores de x menores ou iguais a 8. Portanto, 4, 5, 6, 7 e 8 são possíveis valores de x. Vamos para o segundo caso:

ii) $2x - 8 < 0 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$

Nesse caso é preciso ter mais cuidado. Pois sabemos que $|x| = x$ apenas para $x \geq 0$ e que $|x+8| = x + 8$ apenas para $x \geq -8$.

Analisemos o subcaso em que $0 \leq x < 4$: Nesse caso a desigualdade do enunciado fica:

$$x + \big(-(2x - 8)\big) \leq x + 8 \Leftrightarrow x - 2x + 8 \leq x + 8 \Leftrightarrow -2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Portanto, os valores que satisfazem a igualdade são x tal que: $0 \leq x < 4$ e $x \geq 0$. Logo, temos 0, 1, 2 e 3.

Agora, analisaremos o intervalo $-8 \leq x < 0$. Para tal, a desigualdade do enunciado fica:

$$(-x) + \big(-(2x - 8)\big) \leq x + 8$$

$$\Rightarrow -x - 2x + 8 \leq x + 8 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Logo, para esse intervalo não há x que satisfaça a desigualdade.

Por último, falta analisar os valores de $x < -8$. Para este intervalo, a desigualdade fica:

$$(-x) + \big(-(2x - 8)\big) \leq -(x + 8) \Rightarrow -x - 2x + 8 \leq -x - 8$$

$$\Rightarrow 2x \geq 16 \Rightarrow x \geq 8$$

Assim, para valores de $x < -8$, não existem aqueles que satisfazem a desigualdade.

Portanto, as soluções inteiras encontradas para x em todos os casos foram 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, totalizando assim, $\boxed{9\ soluções\ inteiras}$.

Gabarito: "e"

---

70. (EFOMM/2020)

Considere a inequação

$$\left|x^7 - x^4 + x - 1\right|\left|x^2 - 4x + 3\right|(x^2 - 7x - 54) \leq 0.$$

Seja I o conjunto dos números inteiros que satisfaz a desigualdade e n a quantidade de elementos de I. Com relação a n, podemos afirmar que

a) n é um número primo.

b) n é divisível por 7.

c) n não divide 53904.

d) n é um quadrado perfeito.

e) n é divisível por 6.

Comentários

Veja que a expressão a ser analisada na desigualdade é uma multiplicação de três polinômios. Logo "de cara" vemos que as raízes dos polinômios satisfazem a desigualdade. Vamos calculá-las no final da resolução.

Também vemos que dois dos polinômios estão dentro de módulos, ou seja, vão sempre resultar em valores positivos ou nulos, independente dos valores de x que possam ser assumidos.

Assim, quem vai definir o sinal da expressão, a priori, é o terceiro polinômio, que é uma parábola de concavidade para cima.

$$x^2 - 7x - 54$$

Por Bhaskara, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2} = \frac{7 + \sqrt{265}}{2} \cong 11{,}64$$

$$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2} = \frac{7 - \sqrt{265}}{2} \cong -4{,}64$$

Logo, como a concavidade dessa parábola é voltada para cima, os valores de x que tornam a expressão negativa ou nula estão entre as raízes, isto é: $x_2 \leq x \leq x_1$. Portanto todo número inteiro entre -4,64 e 11,64 satisfarão a desigualdade do enunciado. Resta agora analisar se existe alguma raiz inteira dos outros dois polinômios fora do intervalo já encontrado. Vamos lá:

$$x^7 - x^4 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^4(x^3 - 1) + x - 1 = 0$$

Fatorando $(x^3 - 1)$:

$$\Rightarrow x^4(x-1)(x^2+x+1) + (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^4(x^2+x+1)+1) = 0$$

Veja que $(x^2 + x + 1)$ não assume valores negativos (não possui raiz real) e, portanto, se multiplicarmo-lo por x^4 (positivo, independente de x) e somarmos 1, continuará sendo positivo e, portanto, não nulo. Logo, a única raiz real desse polinômio é $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, que já está no intervalo primariamente encontrado.

Agora, tratando o último polinômio:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Por soma e produto, é fácil ver que as duas raízes são $x = 1$ e $x = 3$. Essas também estão entre -4,64 e 11,64. Logo, o conjunto $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, com $n = 16$ elementos. Logo, n é um quadrado perfeito.

Gabarito: "d"

---

71. (EFOMM/2019)

Considere a função real $f(x) = 1 + 4x + 2x^2$. Determine o ponto x^* que define o valor mínimo dessa função.

a) $x^* = -2$

b) $x^* = -1$

c) $x^* = -1/2$

d) $x^* = zero$

e) $x^* = 1$

Comentários

Como a função é de segundo grau e o enunciado já afirma que ela admite valor mínimo, então basta utilizarmos a expressão demonstrada para a coordenada vértice x_v da parábola, que nada mais é do que o ponto médio entre as raízes reais.

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Lembrando que $a, b\ e\ c$ são os coeficientes da função de segundo grau geral $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Nesse caso, $a = 2$, $b = 4$ e $c = 1$. Logo:

$$x_v = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1 = x^*$$

Gabarito: "b"

---

72. (EFOMM/2019)

Examine a função real $f(x) = 2x - 3x^2$ quanto à existência de valores de pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa CORRETA.

a) A função atinge o valor máximo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.

b) A função atinge o valor mínimo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

c) A função atinge o valor máximo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

d) A função atinge o valor mínimo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.

Comentários

Pelas alternativas, vemos que a questão quer que analisemos se há mínimo ou máximo, e que descubramos qual é seu respectivo valor.

A função é $f(x) = 2x - 3x^2$. Como o coeficiente do termo de maior grau é negativo (-3), já foi visto que é condição suficiente para afirmar que a função do segundo grau admite máximo e não mínimo, pois sua concavidade é voltada para baixo!

A fim de descobrirmos qual é a coordenada do ponto mínimo x_v e o valor de mínimo y_v, basta aplicarmos nas expressões já demonstradas nas nossas aulas:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}\ e\ x_v = -\frac{b}{2a}$$

Onde Δ é o delta de Bhaskara usual ($\Delta = b^2 - 4ac$) e $a, b\ e\ c$ são os coeficientes da função de segundo grau geral $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nesse caso, $a = -3, b = 2\ e\ c = 0$. Logo:

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot (-3)} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 4$$

$$\Rightarrow y_v = -\frac{4}{4 \cdot (-3)} = \frac{1}{3}$$

Logo, a função assume valor máximo de 1/3 no ponto x = 1/3.

Gabarito: "c"

---

73. (EFOMM/2019)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha . x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta \cdot x)$, em que α e β são números reais. Considere que essas funções são tais que

f		g	
Valor mínimo	Ponto de mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
–1	< 0	9/4	> 0

Então, f composta em g, $(f\ o\ g)(2) = 0$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

Comentários

Primeiramente, calculamos as raízes de $f(x) = x^2 + \alpha . x = x(x + \alpha)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x + \alpha) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ e\ x_2 = -\alpha$$

Como uma parábola é simétrica, o ponto x de máximo será o ponto médio entre as duas raízes (x_v é calculado assim):

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

Assim, sabendo o x_v da função f basta substituirmos na expressão para sabermos seu valor mínimo em função de α (que é dado no enunciado como -1)

$$f\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} = -\frac{\alpha^2}{4} = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

Porém, como a questão fala que o ponto de mínimo (x_v) é negativo, então $\alpha > 0$. Logo:

$$\boxed{\alpha = 2}$$

De mesmo modo, podemos achar o x_v da função $g(x) = -x^2 - \beta . x$, porém vamos usar a expressão direta já demonstrada nesse curso:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-\beta)}{2 \cdot (-1)} = -\frac{\beta}{2}$$

Assim, achamos o ponto de máximo de $g(x)$. Agora, substituindo na expressão, obteremos esse valor máximo em função de β (no enunciado é dito que o valor máximo é 9/4):

$$g\left(-\frac{\beta}{2}\right) = -\left(\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{\beta^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \pm 3$$

Entretanto, o enunciado diz que o ponto de máximo da g (y_v) é positivo, o que nos indica que $\beta < 0$. Portanto, $\boxed{\beta = -3}$.

Agora que temos as expressões completas das funções f e g vamos agora fazer a composição:

$$f\ o\ g(x) = f\big(g(x)\big) = g(x)^2 + 2.g(x) = [-(x^2 - 3x)]^2 + 2[-(x^2 - 3x)]$$
$$\Rightarrow f\ o\ g(x) = (x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x)$$

Para calcular o que se pede na questão, basta substituir $x = 2$:

$$f\ o\ g(2) = (2^2 - 3 \cdot 2)^2 - 2(2^2 - 3 \cdot 2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 8$$

Gabarito: "e"

---

74. (EFOMM/2018)

Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a $R\$\ 9,00$, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de $R\$\ 1,00$ no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de

a) $R\$\ 8,00.$

b) $R\$\ 7,00.$

c) $R\$\ 6,00.$

d) $R\$\ 5,00.$

e) $R\$\ 4,00.$

Comentários

Primeiro nesse problema precisamos montar uma função que defina a receita obtida com as vendas de canecas, até porque se deseja analisar o máximo da receita. Chamaremos essa função de $R(x)$, onde **x é a quantidade de unidades de real reduzidos no preço da caneca**.

Primeiramente, observe que a receita é feita multiplicando o número de canecas vendidas pelo preço de cada uma delas. Porém queremos relacionar a variação do preço com a variação da quantidade vendida: quando diminuir uma unidade no preço, a quantidade vendida aumenta 100.

Ou seja:

$$R(x) = (9 - x)(300 + 100x)$$

Veja que essa função encontrada satisfaz a condição pedida. Portanto, ela representa a receita média das vendas de canecas. Como queremos que essa receita seja máxima, encontraremos o x_v desta função do segundo grau em x.

$$R(x) = -100x^2 + 600x + 2700$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{600}{2 \cdot (-100)} = 3$$

Isso significa que quando forem diminuídos 3 reais do preço inicial da caneca, o valor da receita será máximo, isto é, quando o preço da caneca for 9 - 3= R$ 6,00.

Gabarito: "c"

---

75. (EFOMM/2018)

A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ $(6 \leq x \leq 11)$. Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto $(2, 0)$. A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?

a) $(8, 9)$.

b) $(8, 6)$.

c) $(7, 9)$.

d) $(7, 5)$.

e) $(7, 4)$.

Comentários

Temos uma montanha num formato de uma parábola descrita no enunciado. Perceba, por soma e produto que as raízes dessa parábola são os próprios extremos da montanha, isto é, $x = 6$ e $x = 11$. Levando em consideração o fato de o enunciado ter dito que o rifle é de alta precisão, entendemos que o projétil não sofrerá alteração de trajetória pela gravidade e, portanto, terá trajetória retilínea.

Um coelho localizado na montanha parabólica só estará livre de perigo, portanto, quando a reta de tiro não puder mais alcançá-lo na montanha e isso acontece quando a reta de tiro é tangente à parábola descrita, isto é, a toca apenas uma única vez.

Suponha que a reta de tiro seja $y_r = ax + b$. Como o tiro sai do ponto (2,0), então esse ponto tem que pertencer à reta (linha de tiro). Daí:

$$0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a \Rightarrow y_r = ax - 2a$$

Além disso, queremos que essa reta seja tangente à parábola, ou seja, só possuam um ponto em comum. Ao igualarmos as funções da reta e da parábola para calcularmos o x do ponto de encontro, temos:

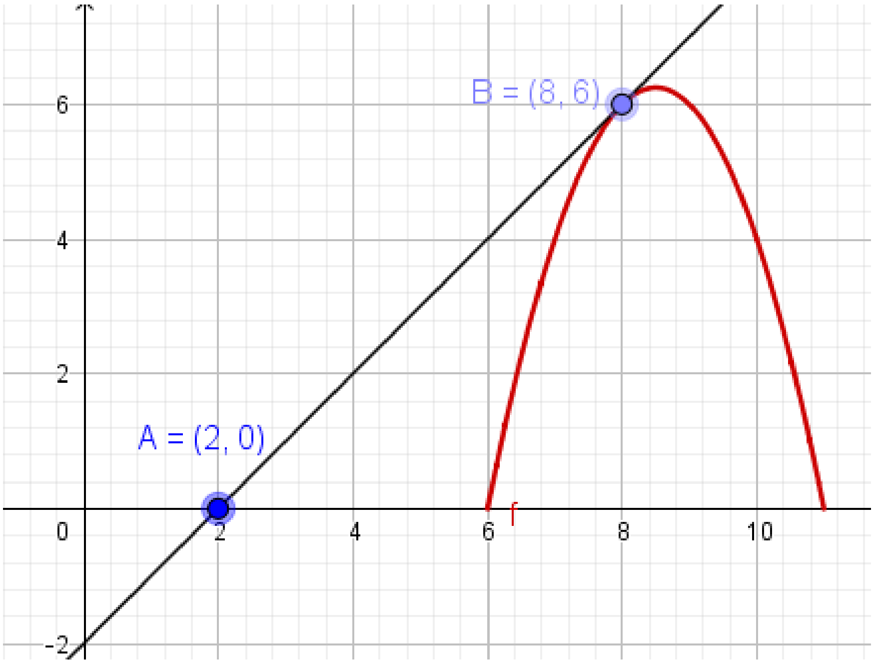
$$y = ax - 2a = -x^2 + 17x - 66 \Rightarrow -x^2 + x(17 - a) - (66 - 2a) = 0$$

Queremos que essa equação tenha apenas uma raiz real (único ponto de tangência), o que implica que $\Delta = 0$. Logo:

$$\Delta = (17 - a)^2 - 4(66 - 2a) = 0$$

Aplicando Bhaskara nessa segunda equação em a, encontramos $a = 25$ e $a = 1$ como raízes. Claramente a opção $a = 25$ é descartada por motivos gráficos (nesse caso $y(6) = 25 \cdot 6 -$

$50 = 100$), pois o máximo da montanha é em torno de 6 (pode calcular usando a expressão do y_v da parábola). Portanto, $a = 1$ e a reta de tiro nesse caso é $y_r = x - 2$.



Dessa maneira, o ponto de tangência dessa reta com a parábola é a raiz única da equação:

$$-x^2 + x(17 - 1) - (66 - 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 8)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Portanto, o valor de altitude da montanha nesse ponto é:

$$y(8) = -8^2 + 17 \cdot 8 - 66 = -64 + 136 - 66 = 6$$

Dessa maneira, o ponto desejado é (8,6)

Gabarito: "b"

---

76. (EFOMM/2016)

De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625

b) 781150

c) 1000

d) 250

e) 375

Comentários

Deseja-se analisar quando a função Lucro é máxima, dadas as funções Custo e Receita. A função Lucro é dada por:

$L(x) = R(x) - C(x) = 2000x - x^2 - (x^2 - 500x + 100)$

$\Rightarrow L(x) = -2x^2 + 2500x - 100$

$L(x)$ é uma função quadrática do segundo grau, com concavidade para baixo. Isso implica que a função tem um máximo. Para calcular a quantidade de peças que precisam ser produzidas para gerar esse máximo (x_v) basta utilizarmos a fórmula já demonstrada nesse curso, que é nada mais que o ponto médio das raízes da função quadrática $L(x) = ax^2 + bx + c$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2500}{2 \cdot (-2)} = 625$$

Logo, para que seja atingido o máximo lucro, é necessário produzir e vender 625 peças.

Gabarito: "a"

---

77. (EFOMM/2016)

Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = \big||x+2| - |x-2|\big|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, conjunto dos números reais.

a) $Im(f) = \mathbb{R}$

b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$.

c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 4\}$.

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 4\}$.

e) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$.

Comentários

Analisando os intervalos presentes nos módulos mais internos da expressão:

i) $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$:

Nesse primeiro caso em que $x \geq 2 \Rightarrow |x+2| = x + 2$. Daí, na expressão de $f(x)$:

$$f(x) = |x + 2 - (x - 2)| = |2 + 2| = 4$$
$$\Rightarrow f(x) = 4 \quad \forall\, x \geq 2$$

ii) $-2 \leq x < 2$

Nesse segundo caso, $|x+2| = x + 2$, mas $|x - 2| = -(x-2) = 2 - x$. Daí, em $f(x)$:

$$f(x) = |x + 2 + x - 2| = |2x|$$
$$\Rightarrow f(x) = |2x| \quad \forall -2 \leq x < 2$$

iii) $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$

Nesse último caso, $|x+2| = -(x+2)$ e $|x-2| = -(x-2) = 2 - x$. Daí, em $f(x)$:

$$f(x) = |-(x+2) + x - 2| = |-4| = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \quad \forall\, x < -2$$

Portanto, a imagem de f é 4 para $x \leq -2$ ou $x \geq 2$ e, para $-2 < x < 2$ a imagem é |2x|, o que significa que varia de 0 a 4 no eixo real das ordenadas. Portanto, a imagem de f é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 4\}$$

Gabarito: "c"

---

78. (EFOMM/2010)

A equação $\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217 - 13 \cdot \sqrt[3]{x}}$ tem uma solução inteira positiva x_1. O número de divisores positivos de x_1 é

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

Comentários

Fazendo $t = \sqrt[3]{x}$, temos:

$$\sqrt[4]{t^3 \cdot t} = 13 + \sqrt{217 - 13 \cdot t} \Leftrightarrow |t| = 13 + \sqrt{217 - 13t}$$

$$\Rightarrow (|t| - 13)^2 = 217 - 13t \Leftrightarrow |t|^2 - 26|t| + 169 = 217 - 13t \Leftrightarrow t^2 + 13(t - 2|t|) - 48 = 0$$

Se $t \geq 0$: $t^2 - 13t - 48 = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau:

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 361 = 19^2$$

$t = \frac{13 \pm 19}{2} \Rightarrow t = 16\ ou\ t = -3 \Rightarrow t = 16$ pois temos $t \geq 0$.

Esse valor de $t = 16$ gera a solução $x_1 = t^3 = (2^4)^3 = 2^{12} = 4096$.

Como é uma solução positiva válida, podemos responder à questão com base nela, partindo da premissa de que apenas uma alternativa estará correta. Logo, como o número de divisores positivos de 2^{12} é 13, pois os divisores são 2^k, $k \in \{0,1, \dots ,12\}$, o gabarito é a alternativa "d".

Gabarito: "d"

---

79. (EFOMM/2009)

O logotipo de uma certa Organização Militar é uma pedra semipreciosa, cujo valor é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa em gramas. Suponha que a pedra de 8 gramas, infelizmente, tenha caído partindo-se em dois pedaços. Qual é o prejuízo, em relação ao valor inicial, sabendo-se que foi o maior possível?

a) 18%

b) 20%

c) 50%

d) 80%

e) 90%

Comentários

O problema é achar qual é o prejuízo máximo, com relação ao valor inicial que antes a pedra única tinha, já que agora vão ter que ser vendidas duas pedras, de massas distintas, e não apenas uma de 8 gramas.

Vamos supor que um dos novos pedaços tenha x gramas e o outro, portanto, $8-x$ gramas. Vamos também criar uma função prejuízo $P(x)$ que será calculada como a diferença entre o valor inicial e o valor atual das duas pedras menores. Calcularemos o seu valor máximo e, em seguida, o colocaremos em termos de porcentagem do valor inicial.

A função Prejuízo, portanto:

$$P(x) = 8^2 - (x^2 + (8-x)^2) = -2x^2 + 16x = -2x(x-8)$$

Suas raízes são $x = 0$ e $x = 8$. Portanto, seu valor de $x_v = \frac{0+8}{2} = 4$ (lembrando que o x_v é o ponto médio entre as raízes de uma equação do 2º grau).

Calculando o valor do Prejuízo para esse valor de $x = 4$ (ponto de máximo):

$$P(4) = 32$$

Portanto, o prejuízo calculado foi de 32 em valores monetários. Se formos comparar em porcentagem do valor inicial que era de 8^2=64, temos:

$$Prejuízo\ Máximo = \frac{32}{64} \cdot 100 = 50\%$$

Gabarito: "c"

---

80. (EFOMM/2006)

Se M e N são as raízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, então $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ vale:

a) 6

b) 2

c) 1

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

Comentários

Veja que a expressão que se deseja calcular é $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$. Vamos levá-la a um denominador comum:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{N}{MN} + \frac{M}{NM} = \frac{N+M}{NM}$$

Porém, na expressão anterior, veja que o numerador da fração é a soma das raízes, e o denominador é o produto delas. Pelas regras de soma e produto, podemos então calcular a expressão pedida!

$$N + M = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{1} = 6$$

E o produto:

$$MN = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

Logo, a expressão pedida é:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{M+N}{MN} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Obs: lembrar que $a, b\ e\ c$ são os coeficientes de uma função quadrática da forma $y = ax^2 + bx + c$.

Gabarito: "d"

---

81. (EFOMM/2005)

Trabalhando x horas por semana um operário ganha $R\$\ 60,00$ por semana trabalhada. Em um novo emprego, esse mesmo operário, continua ganhando os mesmos $R\$\ 60,00$ por semana, porém trabalha 4 horas a mais por semana e recebe $R\$\ 4,00$ a menos por hora trabalhada.

Determine o valor de x.

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

Comentários

No primeiro emprego, vemos que, trabalhando x horas por semana, o operário recebe R$60,00. Logo, a hora trabalhada naturalmente vale 60/x.

No segundo emprego, o operário continuará ganhando os 60 reais na semana trabalhada, sendo que o preço da hora trabalhada varia (60/x – 4), pois recebe 4 reais a menos por hora trabalhada, e a quantidade de horas também varia (x + 4), pois o enunciado diz que ele trabalhará 4 horas a mais por semana.

Sabemos que o valor que o operário recebe na semana é igual ao valor da hora multiplicado pela quantidade de horas. Então:

$$60 = \left(\frac{60}{x} - 4\right) \cdot (x + 4)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por x (não altera a igualdade):

$60x = (60-4x)(x+4) \Rightarrow 240 - 16x - 4x^2 = 0$

Dividindo a última equação por -4:

$$x^2 + 4x - 60 = 0$$

Por soma e produto, podemos ver que as raízes da equação são $x_1 = -10$ e $x_2 = 6$. Como a incógnita x, no problema, representa quantidade de horas trabalhadas na semana, então deve ser positiva. Logo, $x = 6$.

Gabarito: “a”

---

82. (EFOMM/2005)

O intervalo onde a função $f(x) = \frac{ax-2}{ax^2-x}$, com a $\in \mathbb{R}_-^*$, apresenta sinal positivo é

a) $]-\infty, \frac{2}{a}[$

b) $]\frac{1}{a}, 0[$

c) $[\frac{1}{a}, +\infty[$

d) $]\frac{2}{a}, \frac{1}{a}[$

e) $[\frac{2}{a}, 0[$

Comentários

Queremos analisar o sinal da função $f(x)$ dada no enunciado. O objetivo é observar em que intervalo essa função é positiva, sabendo que a é um real negativo ($\mathbb{R}_-^*$). Vamos reescrever $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a\left(x - \frac{2}{a}\right)}{a\left(x^2 - \frac{x}{a}\right)} = \frac{x - \frac{2}{a}}{x^2 - \frac{x}{a}}$$

Agora, podemos fazer o estudo do sinal das funções do numerador e do denominador de maneira mais fácil, pois conhecemos qual é “a cara” do gráfico delas. No numerador temos uma função linear com coeficiente angular igual a 1, com um coeficiente linear dependendo de a. No denominador, temos uma função quadrática de concavidade para cima (pois o coeficiente de x^2 é positivo) cujas raízes são fáceis de identificar.

Analisando quando o numerador é positivo

$$x - \frac{2}{a} > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{2}{a}}$$

Analogamente, para quando ele é negativo:

$$x - \frac{2}{a} < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < \frac{2}{a}}$$

Agora, analisando quando o denominador é positivo:

$$x^2 - \frac{x}{a} > 0 \Leftrightarrow x\left(x - \frac{1}{a}\right) > 0$$

Sabemos que esse produto só é positivo quando os fatores são de mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos).

Para ambos positivos:

$$x > 0\ e\ x - \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow x > 0\ e\ x > \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{x > 0}$$

Para ambos negativos:

$$x < 0\ e\ x - \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow x < 0\ e\ x < \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{x < \frac{1}{a}}$$

Logo, o denominador é positivo se, e somente se $\boxed{x < \frac{1}{a}\ ou\ x > 0}$.

Sabemos que o denominador só pode assumir valores positivos ou negativos (não pode ser nulo, ou seja, x não assume os valores que zeram o denominador, isto é, 0 e 1/a). Se já encontramos o intervalo real que o torna positivo, o complementar deste (sem as raízes, obviamente), o torna negativo:

Logo, o denominador é negativo para o intervalo $\boxed{\frac{1}{a} < x < 0}$.

Essas deduções podem e precisam ser automáticas quando se pensa no gráfico da função quadrática.

Portanto, como a função $f(x)$ é uma divisão, ela será positiva quando o numerador e o denominador tiverem sinais iguais.

Numerador e denominador positivos:

$$x > \frac{2}{a}\ e\ \left(x < \frac{1}{a}\ ou\ x > 0\right) \Rightarrow \boxed{\frac{2}{a} < x < \frac{1}{a}\ ou\ x > 0}$$

Numerador e denominador negativos:

$$x < \frac{2}{a}\ e\ \frac{1}{a} < x < 0 \Rightarrow \emptyset$$

Portanto, a função é positiva para valores de x tal que:

$$\frac{2}{a} < x < \frac{1}{a}\ ou\ x > 0$$

Dentre as alternativas, há apenas uma que contempla um dos intervalos encontrados:

$$\frac{2}{a} < x < \frac{1}{a}$$

Gabarito: "d"

---

83. (Escola Naval/2019)

Uma loja de bombons está com o seguinte cartaz de promoção: "compre x bombons e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 bombons, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Maria, Flávio, Gisele, Felipe, Evandro e Diego compram 53, 40, 33, 47,

38 e 57 bombons, respectivamente. Nessas condições, assinale a opção que apresenta o nome das pessoas que poderiam ter comprado mais bombons e pago a mesma quantia inicial.

a) Diego e Maria.

b) Gisele e Evandro.

c) Maria e Gisele.

d) Diego e Evandro.

e) Felipe e Flávio.

Comentários

Vamos supor que o preço unitário de um bombom seja P. O valor gasto na compra de x bombons é o seu preço unitário multiplicado pela quantidade de bombons, menos o desconto de $x\%$ em cima do valor total. Daí:

$$Valor\ a\ ser\ pago = P\cdot x - P\cdot x\cdot \frac{x}{100} = Px - \frac{Px^2}{100}$$

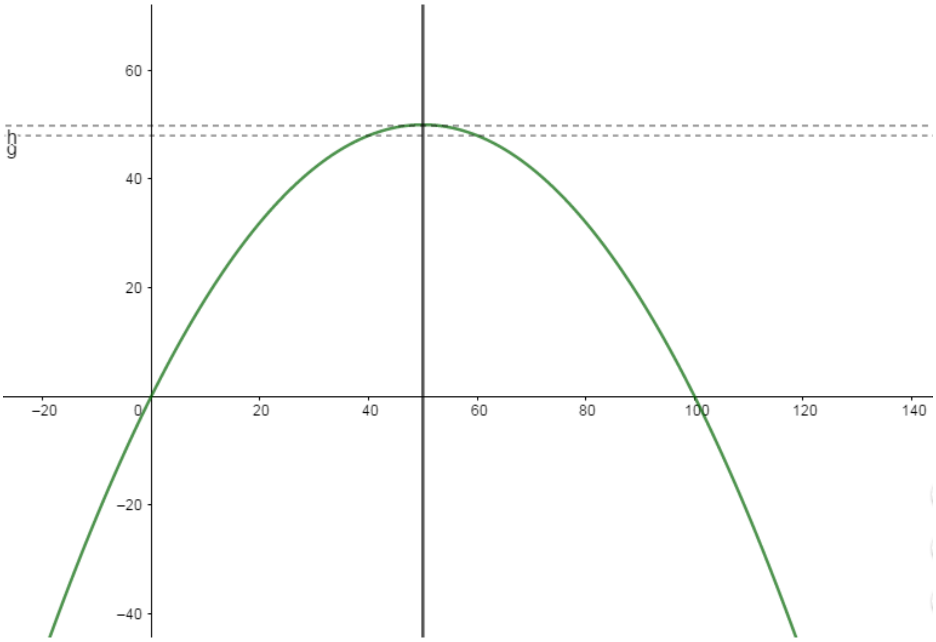
Vemos que a função de valor pago é uma função quadrática de concavidade para baixo (coeficiente do x^2 é negativo). Dessa maneira, ela atinge um máximo e depois volta a repetir valores de gastos. Porém é importante lembrar que o desconto descrito é só para compras abaixo de 60 unidades.

Calculando o x_v (ponto de máximo) dessa parábola, vamos saber a partir de qual valor de x o valor pago vai começar a diminuir novamente, para assim termos noção de quais pessoas podem consumir mais e pagar ainda o mesmo valor inicial:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{P}{2\cdot\left(-\frac{P}{100}\right)} = 50$$

Assim, o ponto de máximo da parábola é 50. Isso significa que, a partir dessa quantidade de bombons comprados, o valor a ser pago vai diminuir. Perceba que a partir desse valor de máximo, podemos excluir as pessoas que já inicialmente compraram mais que 50 bombons, pois a partir de 50 o valor a ser pago vai só diminuir, não chegando ao mesmo valor inicial. Assim, descartamos os que compraram incialmente 53 e 57 bombons.

Para analisar os outros, vamos pensar na simetria de uma função quadrática em torno da reta vertical que passa pelo ponto de vértice (nesse caso, máximo), observe a imagem:



Nessa figura, usamos P = 2, para fins ilustrativos

Para quem comprou 40 inicialmente: de 40 para 50 (ponto de vértice – máximo) temos uma diferença de 10. Portanto, o valor vai se repetir em 50 + 10 = 60! Portanto, esse indivíduo (Flávio) pode aumentar a compra de 40 bombons para 60 bombons (o desconto ainda é válido aqui) e pagará o mesmo valor! A reta tracejada horizontal inferior, na figura acima, mostra essa repetição de valores devido à simetria.

Para quem comprou 33 inicialmente: de 33 para 50 (ponto de vértice – máximo) temos uma diferença de 17. Portanto, o valor iria se repetir em 50 + 17 = 67! Porém, não há desconto para compra de 67 unidades. Assim, esse caso é descartado!

Para quem comprou 47 inicialmente: de 47 para 50 (ponto de vértice – máximo) temos uma diferença de 3. Portanto, o valor vai se repetir em 50 + 3 = 53! Portanto, esse indivíduo (Felipe) pode aumentar a compra de 47 bombons para 53 bombons (o desconto ainda é válido aqui) e pagará o mesmo valor! A reta tracejada horizontal superior, na figura acima, mostra essa repetição de valores devido à simetria.

Para quem comprou 38 inicialmente: de 38 para 50 (ponto de vértice – máximo) temos uma diferença de 12. Portanto, o valor vai se repetir em 50 + 12 = 62! Porém, não há desconto para compra de 62 unidades. Assim, esse caso é descartado!

Logo, as pessoas que podem aumentar a quantidade de bombons comprados e gastar a mesma quantia anterior são Flávio e Felipe!

Gabarito: “e”

---

84. (Escola Naval/2014)

Considere a função real de variável real $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Para que valores da constante real k, a equação $f(x) = k$ possui exatamente 3 raízes reais?

a) $k \leq -\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$

c) $\boldsymbol{k \geq \frac{1}{2}}$

d) $\boldsymbol{-\frac{1}{4} \leq k \leq 0}$

e) $\boldsymbol{0 \leq k \leq \frac{1}{4}}$

Comentários

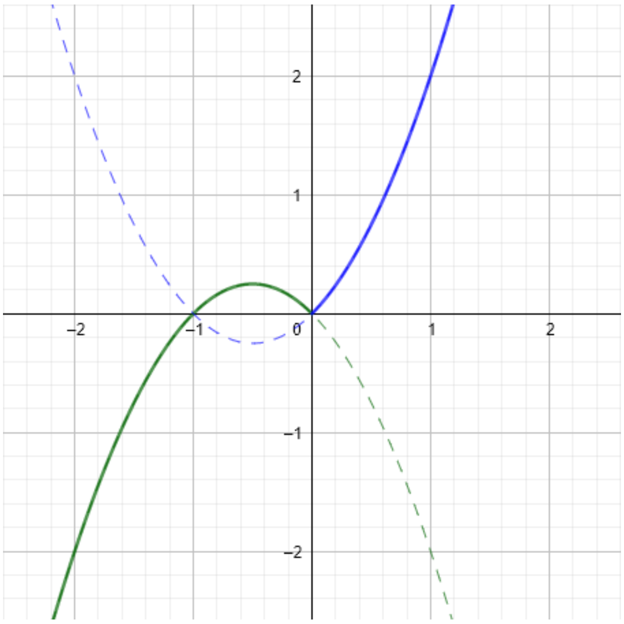
Considere a parametrização $g(t) = f\big(x(t)\big)$ sendo:

$$x(t) = \begin{cases} -t^2, t < 0 \\ t^2, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Note que a função $x(t)$ acima é bijetora, então o problema se resume a encontrar os valores de k tais que $g(t) = k$ possui exatamente 3 raízes reais. Temos:

$$g(t) = \begin{cases} -t^2 - t, t < 0 \\ t^2 + t, t \geq 0 \end{cases}$$

Esboçando o gráfico, vemos que os valores de k vão de 0 ao valor do y do vértice da parábola verde.



$$y_v = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Logo, $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Gabarito: "e"

85. (Escola Naval/2014)

Um restaurante a quilo vende 200 quilos de comida por dia, a 40 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada aumento de um real no preço do quilo, o restaurante perde 8 cliente por dia, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida, em reais, para que o restaurante tenha a maior receita possível por dia?

a) $\boldsymbol{52}$

b) 51

c) 46

d) 45

e) 42

Comentários

Queremos analisar o caso em que há a maior receita possível. A receita nada mais é, nesse caso, o valor do quilo multiplicado pela quantidade vendida no dia. Porém, o valor do quilo, pelo enunciado, é variável, assim como a quantidade vendida.

É dito no enunciado que para cada aumento de 1 real no preço do quilo, o restaurante perde 8 clientes de consumo médio individual de 500g. Em termos quantidade em quilos apenas, equivale a uma perda de $8 \cdot 0{,}5 = 4$ quilos de comida por real aumentado no preço do quilo.

Dessa maneira, podemos montar a função de receita $R(x)$ onde x é a quantidade de reais aumentada no preço do quilo.

$$R(x) = (40 + x)(200 - 4x)$$

Onde $(40 + x)$ é o preço variável do quilo, e $(200 - 4x)$ é a quantidade variável de quilos vendidos em um dia. Assim:

$$R(x) = 8000 + 40x - 4x^2$$

Essa função é quadrática, e possui o coeficiente de maior grau (x^2) negativo. Isso implica que a concavidade da parábola é para baixo, e que a função admite um máximo. Podemos calcular o ponto de máximo x_v por meio da fórmula já demonstrada nesse curso:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2 \cdot (-4)} = 5$$

Lembrando que $a, b\ e\ c$ são os coeficientes da função de segundo grau geral $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nesse caso, $a = -4, b = 40\ e\ c = 8000$.

Portanto, o x que torna a receita máxima para o estabelecimento é $x = 5$. Isso significa que o preço do quilo deverá ser $40 + x = 40 + 5 = 45$ reais.

Gabarito: "d"

---

86. (Escola Naval/2013)

Uma loja está fazendo uma promoção na venda de bolas: "Compre x bolas e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é valida para compras de até 60 bolas caso em que é conhecido o desconto máximo de 60%. Julia comprou 41 bolas e poderia ter comprado mais bolas e gasto a mesma quantia. Quantas bolas a mais Julia poderia ter comprado?

a) 10

b) 12

c) 14

d) 18

e) 24

Comentários

Vamos supor que o preço unitário de uma bola seja P. O valor gasto na compra de x bola é o seu preço unitário multiplicado pela quantidade de bolas, menos o desconto de $x\%$ em cima do valor total. Daí:

$$Valor\ a\ ser\ pago = P \cdot x - P \cdot x \cdot \frac{x}{100} = Px - \frac{Px^2}{100}$$

Vemos que a função de valor pago é uma função quadrática de concavidade para baixo (coeficiente do x² é negativo). Dessa maneira, ela atinge um máximo e depois volta a repetir valores de gastos. Porém é importante lembrar que o desconto descrito é só para compras abaixo de 60 unidades.

Calculando o x_v (ponto de máximo) dessa parábola, vamos saber a partir de qual valor de x o valor pago vai começar a diminuir novamente, para assim termos noção de quais pessoas podem consumir mais e pagar ainda o mesmo valor inicial:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{P}{2 \cdot \left(-\frac{P}{100}\right)} = 50$$

Assim, o ponto de máximo da parábola é 50. Isso significa que, a partir dessa quantidade de bolas compradas, o valor a ser pago vai diminuir. Como Julia comprou 41, valor abaixo do ponto de máximo (50), se ela aumentar a quantidade de bolas a serem compradas, esse valor aumentará à medida que se aproxima de 50 e, quando passar de 50, começará a diminuir e, eventualmente, chegará ao valor que ela gastou antes quando comprou 41 apenas.

Por outro lado, como conhecemos a propriedade de simetria da função quadrática em torno da reta vertical que passa pelo vértice da mesma, sabemos que o valor voltará a ser o mesmo quando a quantidade de bolas compradas for simétrica à 41 com relação ao valor 50. Isto é, quando distar 50-41 = 9 unidades de 50. Assim, o valor simétrico à 41 em relação a 50 é 59!

Caso ainda haja dúvidas quanto à simetria em torno do ponto de vértice de uma parábola, basta verificar que, para uma função quadrática qualquer $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x_v - x) = f(x_v + x)$ para qualquer x real, onde $x_v = -b/2a$. Isso prova nosso argumento.

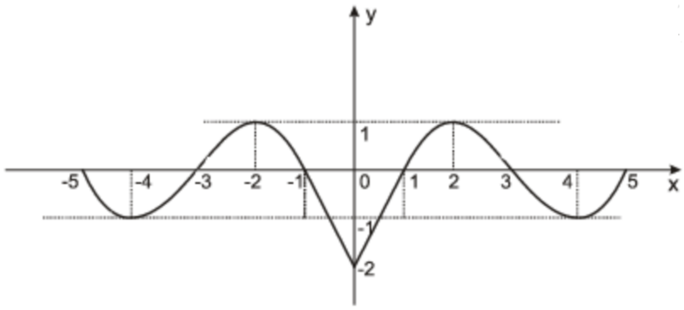
Portanto, quando Julia comprar 59 unidades, ela pagará o mesmo de quando comprou 41. Assim, Julia poderia ter comprado 59-41 = 18 bolas a mais, pagando o mesmo valor.

Gabarito: "d"

---

87. (Escola Naval/2013)

Considere a função real $y = f(x)$, definida para $-5 \leq x \leq 5$, representada graficamente abaixo. Supondo a $a \geq 0$ uma constante real, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 9)$ intercepta o gráfico de $y = f(x)$ em exatamente 4 pontos distintos?



a) $1 < a < \frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{9} < a < 1$

c) $0 < a < \frac{2}{9}$

d) $\frac{10}{9} < a < 3$

e) $a > 3$

Comentários

A questão quer que analisemos o valor de a maior ou igual a 0 para que o polinômio $p(x)$ toque no gráfico de $f(x)$ exatamente 4 vezes.

Primeiramente, é importante ver que se $a = 0$, $p(x) = 0$ e o polinômio identicamente nulo seria o eixo coordenado (x), que tocaria $f(x)$ em 6 pontos exatamente, o que não queremos. Portanto, queremos $a > 0$.

Como a é positivo, então a concavidade do polinômio $p(x) = ax^2 - 9a$ é para cima. As raízes de p são facilmente reconhecidas:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Dadas as raízes, podemos fazer um esboço do gráfico do polinômio quadrático:

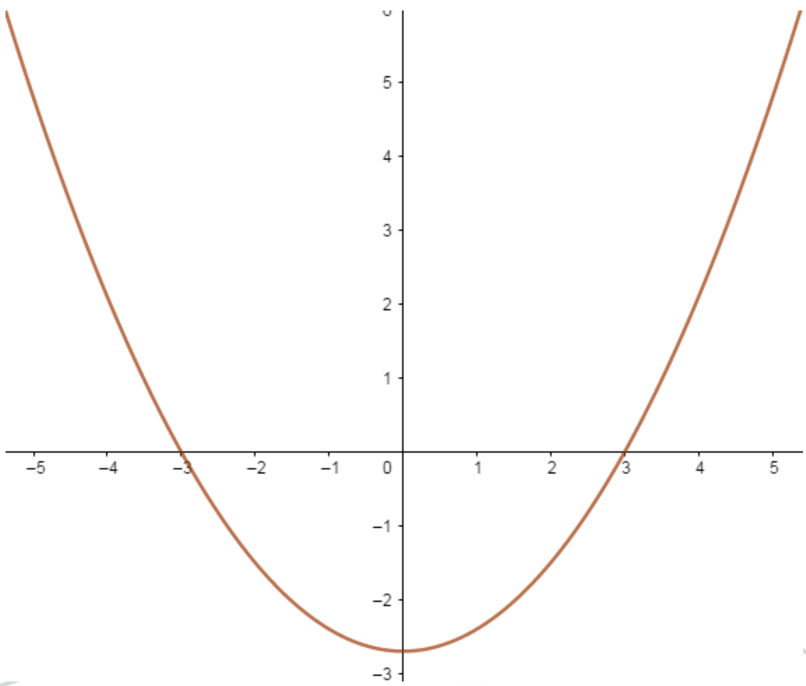


Figura construída para $a = 0.3$

Logicamente, a é uma incógnita e, portanto, o ponto onde o gráfico toca o eixo das ordenadas (y) depende dele. Perceba que, para que essa parábola toque o gráfico descrito no enunciado, o ponto de contato do gráfico com o eixo y deve ser acima do ponto (0,-2). Isto é, basta o coeficiente linear do polinômio ser maior do que -2:

$$p(x) = ax^2 - 9a$$

Daí, o coeficiente linear (independente de x) é $-9a$. Queremos:

$$-9a > -2 \Rightarrow 9a < 2 \Rightarrow a < 2/9$$

Como $a > 0$, segue que:

$$0 < a < \frac{2}{9}$$

Gabarito: "c"

---

88. (Escola Naval/2013)

Considere f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = \frac{1}{4x-1}$ e $g(x) = 2x^2$. Qual é o domínio da função composta $(fog)(x)$?

a) $\mathbb{R}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}}, x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{1}{4}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{1}{4}, x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\frac{1}{4}, x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

Comentários

$$(f\ o\ g)(x) = \frac{1}{4 \cdot (2x^2) - 1} = \frac{1}{8x^2 - 1}$$

Para determinar o domínio da função, impomos que não se anule o denominador:

$$8x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

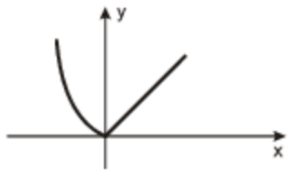
Gabarito: "b"

---

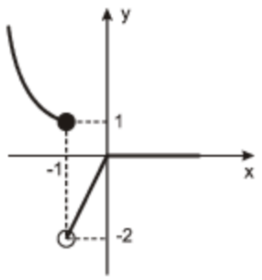
89. (Escola Naval/2013)

O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x)\begin{cases} \frac{-|x+1||x|}{x+1} + x & se\ x > -1 \\ x|x| & se\ x \leq -1 \end{cases}$ é

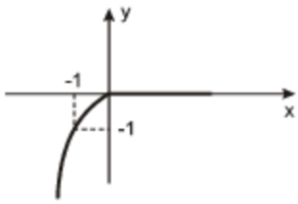
a)



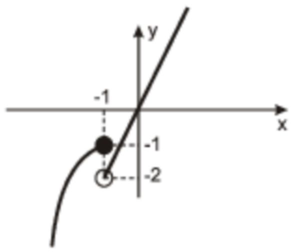
b)



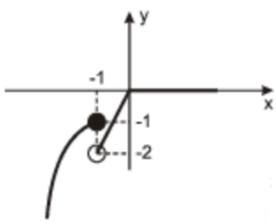
c)



d)



e)



Comentários

Primeiramente, analisaremos o intervalo $x \leq -1$. Para esse intervalo a função é dada por:

$$f(x) = x|x|$$

Como $x < 0$ nesse intervalo, então $|x| = -x \Rightarrow f(x) = -x^2$ para $x \leq -1$. Portanto, vemos que nesse intervalo a função é sempre negativa. Isso já elimina as alternativas a) e b)!

Agora vamos observar a função $f(x)$ para valores de $-1 < x \leq 0$.

$$f(x) = \frac{-|x+1||x|}{x+1} + x$$

Para esse intervalo: $|x+1| = x+1$ e $|x| = -x$ (pois x é negativo). Daí a função fica:

$$f(x) = \frac{-(x+1)(-x)}{x+1} + x = 2x$$

Veja que para valores de x tão próximos de -1 quanto queiramos (pela direita, isto é, valores maiores que -1), f converge para $2 \cdot (-1) = -2$. Portanto, o gráfico da função deve demonstrar isso. Veja que a alternativa c) não demonstra essa descontinuidade da função f e, portanto, é falsa. Resta-nos decidir entre a alternativa d) e e). Para fazer isso, vamos olhar o intervalo que nos falta:

$$x > 0$$

Para $x > 0$, $|x+1| = x+1$, $|x| = x$. Daí, a função fica:

$$f(x) = -\frac{(x+1)x}{x+1} + x = -x + x = 0$$

Portanto, a função é identicamente nula para $x > 0$. A alternativa que está de acordo é a letra e).

Gabarito: "e"

---

90. (Escola Naval/2013)

A soma das raízes reais distintas da equação $\big||x-2|-2\big| = 2$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

Comentários

Vamos resolver essa equação modular considerando cada caso:

Se $\big||x-2|-2\big| = 2 \Rightarrow \boxed{|x-2|-2=2}$ (caso 1) ou $\boxed{|x-2|-2=-2}$ (caso 2)

Caso 1:

$$|x-2|-2=2 \Rightarrow |x-2| = 4 \Rightarrow x-2 = 4 \; ou \; x-2 = -4$$
$$\Rightarrow \boxed{x=6} \; ou \; \boxed{x=-2}$$

Caso 2:

$$|x-2|-2=-2 \Rightarrow |x-2| = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Portanto, encontramos todas as raízes reais distintas da equação: 6, -2 e 2. Se as somarmos, obteremos como resultado $6+2-2=6$.

Gabarito: "d"

---

5. QUESTÕES NÍVEL 3

91. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

92. (ITA/2015)

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-\frac{1}{2}} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s):

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

93. (ITA/2012)

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

94. (ITA/2008)

Resolva a inequação $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2$.

95. (ITA/2007)

Considere a equação: $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?

b) Determine todas essas raízes.

96. (ITA/2007)

Sobre a equação na variável real x,

$$\left|\big||x-1| - 3\big| - 2\right| = 0,$$

Podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) a soma de todas as suas soluções é 6.

c) ela admite apenas soluções positivas.

d) a soma de todas as soluções é 4.

e) ela admite apenas duas soluções reais.

97. (ITA/2005)

Determine todos os valores reais de a para que $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente 3 soluções distintas.

98. (ITA/2005)

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$$

Sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

99. (ITA/2005)

a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

100. (ITA/2005)

Sobre o número $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.

b) x é racional.

c) $\sqrt{2x}$ é irracional.

d) x^2 é irracional.

e) $x \in]2, 3[$.

101. (ITA/2004)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$ em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		g	
$Valor\ mínimo$	$Ponto\ de\ mínimo$	$Valor\ máximo$	$Ponto\ de\ máximo$
-1	< 0	$9/4$	> 0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais $(f\ o\ g)(x) = 0$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

102. (ITA/2002)

Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a expressão real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \left||2x-1| - 6\right|}$ está definida, formam o conjunto:

a) $[0, 1]$

b) $[-5, 6]$

c) $[-5, 0] \cup [1, +\infty[$

d) $]-\infty, 0] \cup [1, 6]$

e) $[-5, 0] \cup [1, 6]$

103. (ITA/2001)

O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

b) $]\frac{1}{4}, \infty[$

c) $]0, \frac{7}{4}[$

d) $]-\infty, \frac{1}{4}]$

e) $]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

104. (ITA/2000)

Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{11}{6}$

e) $\frac{7}{6}$

105. (ITA/1998)

Sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(fog)(x) = x - 6$, em seus respectivos domínios. Então, o domínio A da função g é:

a) $[-3, +\infty[$

b) $\mathbb{R}$

c) $[-5, +\infty[$

d) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$

e) $]-\infty, \sqrt{6}[$

106. (ITA/1997)

Resolva a inequação

$$\frac{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}{-2x^2 + 3\pi x} > 0$$

107. (ITA/1996)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+3, x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, x > 0 \end{cases}$$

Então:

a) f é bijetora e $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.

b) f é bijetora e $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.

c) f é sobrejetiva, mas não é injetora.

d) f é injetora, mas não é sobrejetora.

e) f é bijetora e $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(3)$.

108. (ITA/1995)

Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é:

Tempo(s)	Concentração (moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

a) 3,60

b) 3,65

c) 3,70

d) 3,75

e) 3,80

109. (ITA/1991)

Se $A = \{x \in \mathbb{R}; |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|\}$ então temos:

a) $A = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty[$

b) $A = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

c) $A = [-3, 1]$

d) $A =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

e) n.d.a.

110. (ITA/1988)

Sabendo-se que as soluções da equação $x^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, determine os valores de a e b.

111. (ITA/1988)

Sejam a, b e c constantes reais com $a \neq 0$ formando, nesta ordem, uma PA e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Determine a relação válida entre b e c.

112. (ITA/1987)

Considere a função $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada x real. Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) $y = f(x)$ é uma função par.

b) $y = f(x)$ é uma função ímpar.

c) $f(x) \geq 0$ para todo real x.

d) $f(x) \leq 0$ para todo real x.

e) $f(x)$ tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$.

113. (ITA/1987)

Considere $x = g(y)$ a função inversa da seguinte função:

$y = f(x) = x^2 - x + 1$, para cada número real $x \geq \frac{1}{2}$. Nestas condições, a função g é assim definida:

a) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.

b) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.

c) $g(y) = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.

d) $g(y) = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.

e) $g(y) = \frac{3}{4} + \sqrt{y - \frac{1}{2}}$, para cada $y \geq \frac{1}{2}$.

114. (ITA/1986)

Sejam a, b, c números reais dados com $a < 0$. Suponha que x_1 e x_2 sejam as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ e $x_1 < x_2$. Sejam $x_3 = -\frac{b}{2a}$ e $x_4 = -\frac{2b+\sqrt{b^2-4ac}}{4a}$. Sobre o sinal de y podemos afirmar que:

a) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_3$

b) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_4 < x < x_2$

c) $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_4$

d) $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > x_4$

e) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < x_3$

115. (ITA/1985)

Considere as funções: $f(x) = x - \frac{7}{2}$ e $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ definidas para todo x real. Então, a respeito da solução da inequação $|(gof)(x)| > (gof)(x)$, podemos afirmar que:

a) Nenhum valor de x real é solução.

b) Se $x < 3$ então x é solução.

c) Se $x > 7/2$ então x é solução.

d) Se $x > 4$ então x é solução.

e) Se $3 < x < 4$ então x é solução.

116. (ITA/1980)

A curva $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1, 1)$, $(2, m)$ e $(m, 2)$, onde $m \in \mathbb{R} - \{2\}$. Determine todos os valores reais de m tal que a função admita valor mínimo.

117. (ITA/1977)

Considere a função $F(x) = |x^2 - 1|$ definida em ⍰. Se FoF representa a função composta de F com F, analise as afirmações abaixo:

(1) $(FoF)(x) = x|x^2 - 1|$, para todo x real.

(2) Não existe número real y, tal que $(FoF)(y) = y$.

(3) FoF é uma função injetora.

(4) $(FoF)(x) = 0$, apenas para dois valores reais de x.

O número de afirmativas VERDADEIRAS é:

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

118. (ITA/1972)

Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Os valores de p para os quais $f(x) = 0$ possua raiz dupla positiva são:

a) $0 < p < 4$.

b) $p = 4$.

c) $p = 0$.

d) $f(x) = 0$ não pode ter raiz dupla positiva.

e) nenhuma das anteriores.

119. (IME/2012)

Seja a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Obtém-se $f(x)$ igual a:

a) $x^2 - (a + b + c)x + abc$

b) $x^2 + x - abc$

c) x^2

d) $-x^2$

e) $x^2 - x + abc$

120. (IME/2007)

Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

a) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$

b) $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$

c) $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$

d) $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$

e) $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

121. (IME/2000)

Considere a, b e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação a seguir possui exatamente 2 raízes reais x_1 e x_2 tal que $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

122. (IME/1989)

Resolva o sistema para x e $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

123. (IME/1983)

Dada a equação:

$$2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0, m \in \mathbb{R}$$

a) Calcule m tal que uma raiz seja nula. Calcule a outra raiz.

b) Mostre que a equação tem sempre 2 raízes distintas.

c) Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra superior a 1.

124. (IME/1951)

Determine todos os valores possíveis da relação p/h, onde p e h satisfazem as condições $p > 0, h > 0$, de modo que seja real o valor de y dado pela expressão:

$$y = \sqrt{p^2 - 2ph - h^2}$$

125.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 - \beta x)$, em que α e β são números reais. Considere que essas funções são tais que:

f		g	
Valor mínimo	Ponto de Mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
-2	< 0	4	> 0

Dessa maneira, o valor de $f\left(g(2)\right) - 8\sqrt{2}$ é igual a:

a) 8

b) 4

c) 16

d) 25

e) 10

126. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Considere a função real $f(x) = 4 + 4x + 2x^2$. Determine o ponto x que define o valor mínimo global dessa função:

a) 0

b) 1

c) 2

d) -1

e) -2

127. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Considere as funções reais f, g e h tais que:

$$f(x) = mx^2 - (m+1)x + (m+1)$$

$$g(x) = \frac{2}{x}$$

$$h(x) = \sqrt{2x}$$

Para que a função composta $h \circ g \circ f(x)$ tenha domínio $D = \mathbb{R}$, deve-se ter:

a) $m > \frac{2}{3}$

b) $3m - 1 > 0$

c) $m \geq \frac{1}{3}$

d) $3m + 1 > 0$

e) $m > -\frac{2}{3}$

128. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Para que o sistema $\begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^3 = 2k \end{cases}$ admita apenas soluções reais para a, b, é preciso que todos os valores de k pertençam ao conjunto:

a) $[0, 1]$

b) $[1, \infty)$

c) $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

d) $[1, 9]$

e) $(-\infty, -1]$

129. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Examine a função real $f(x) = 4x - 5x^2$ quanto à existência de valores e pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa correta:

a) A função atinge o valor máximo de $\frac{2}{5}$, no ponto $x = \frac{4}{5}$.

b) A função atinge o valor mínimo de $-\frac{4}{5}$, no ponto $x = \frac{2}{5}$.

c) A função atinge o valor mínimo de $\frac{2}{5}$, no ponto $x = \frac{2}{5}$.

d) A função atinge valor máximo de $\frac{4}{5}$, no ponto $x = \frac{2}{5}$.

e) A função atinge valor máximo de $\frac{4}{5}$, no ponto $x = \frac{4}{5}$.

130. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Seja c a maior constante real tal que

$$x^2 + 3y^2 \geq c \cdot (x^2 + xy + 4y^2)$$

para todos x, y reais.

Determine o inteiro mais próximo de $2020 \cdot c$.

A) 2041

B) 2027

C) 1347

D) 1321

131. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Seja f uma função definida por $f(x)=\begin{cases} x-\frac{3}{2}, \forall\, x \le 1 \\ \frac{x^2}{2}-x, \forall\, x>1 \end{cases}$. Marque a alternativa incorreta sobre f:

a) A função f é injetora.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}$ a função é crescente

c) A função admite inversa tal que $f^{-1}(x)=\begin{cases} x+\frac{3}{2},\ \forall\, x \le -\frac{1}{2} \\ 1+\sqrt{1+2x},\ \forall\, x>-\frac{1}{2} \end{cases}$

d) As raízes de f são $x=0$ e $x=2$.

132. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Analise as alternativas:

I. Se $x \in \mathbb{R} \mid x^3+x+1=0$, então $x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6} \neq 0$

II. $\frac{1}{1011}+\frac{1}{1012}+\cdots+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}<\frac{1}{2}$

III. Seja a função $f: A \to B$ e X e Y dois subconjuntos quaisquer de A, então $f(X \cup Y)=f(X) \cup f(Y)$.

IV. O inverso de um número irracional sempre é irracional.

São corretas:

a) I, apenas.

b) I e III, apenas.

c) II e IV, apenas.

d) I, III e IV, apenas.

e) I e IV, apenas.

133. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Resolvendo a inequação:

$$\frac{16x^2}{\left(1-\sqrt{\frac{8x+3}{3}}\right)^2}>9$$

Para $x \in \mathbb{R}$, obtemos como conjunto solução:

a) $\left]-\frac{3}{8},+\infty\right[$.

b) $[-\frac{3}{8}, 0[$.

c) $]0, \frac{5}{3}[$.

d) $]0, +\infty[$.

e) $]-\infty, 0[$.

134. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Seja $f: \left[0, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 4x - 1, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Seja $g: \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f\left(x + \frac{1}{4}\right), & -\frac{1}{4} < x < 0 \\ 1 - f\left(x + \frac{1}{4}\right), & 0 \leq x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Sobre a função g é correto afirmar:

a) É injetora.

b) É sobrejetora.

c) É par.

d) É ímpar.

e) Não é par nem ímpar.

135. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Encontre todas as soluções reais do sistema de equações:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

136. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Suponha que α e β são raízes distintas da equação $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). $[\alpha, \beta]$ é o domínio da função $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$. Encontre o máximo valor de $g(t) = \text{máx}[f(x)] - \text{mín}[f(x)]$.

137. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

No intervalo $[1,2]$, as funções $f(x) = x^2 + px + q$ e $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$ admitem o mesmo valor de mínimo no mesmo ponto. Qual é o valor máximo de $f(x)$ nesse intervalo?

a) $4 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

b) $4 - \frac{5}{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

c) $1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

d) $4 + \frac{5}{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

e) Nenhum dos valores acima.

138. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Resolva a equação paramétrica na variável $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1 - (x + a)}$$

139. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = m\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

a) Para que valores do parâmetro real m a equação admite raízes reais?

b) Determine essas raízes.

140. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Sobre a equação na variável real x,

$$|x + 3| + |x - 1| = x + 1$$

Podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) ela admite 3 raízes reais.

c) a soma de todas as suas soluções é 2.

d) ela admite apenas 3 soluções reais.

e) a soma de todas as suas soluções é 6.

141. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Calcule o conjunto de valores reais de a para que a seguinte inequação seja satisfeita para qualquer valor real de x:

$$3a(a+2)x^2+3(x+1)>x(9x+8a)$$

a) $]-3;1[$

b) $]1;4[$

c) $]0;2[$

d) $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

e) $]1,5;2,786[$

142. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Considere a inequação:

$$6x^4-5x^3-7x^2+4x<0$$

Se (x,y) é um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação, então o menor valor possível para $y-x$ é:

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{13}{6}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

GABARITO

91. $a=4$ e $b=1$
92. e
93. $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ e\ f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-3}, y\geq 3\\ -\sqrt{3-y}, y<3\end{cases}$
94. $S=(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{2}{3}\right]\cup(2,+\infty)$
95. a) $p\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$ b) $x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$
96. d
97. $a\in\left\{1,\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right\}$
98. a) $S=\left\{0,\pm 2\sqrt{1-m^2}\right\}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq m<1$

99. Demonstração
100. b
101. d
102. e
103. d
104. d
105. a
106. $S =]0, \frac{1}{\pi}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$
107. b
108. d
109. a
110. $a = 0$ e $b = -9$
111. $\frac{c}{b} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$
112. e
113. a
114. c
115. e
116. $m \in]0, 1[$
117. e
118. d
119. c
120. a
121. Demonstração
122. $(10 + 3\sqrt{11}; 10 - 3\sqrt{11}), (10 - 3\sqrt{11}; 10 + 3\sqrt{11}), (16; 4), (4; 16)$
123. a) $m = -\frac{2}{3}$ e $x = -\frac{3}{2}$ b) Demonstração c) $m < -4$ ou $m > 0$
124. $\frac{p}{h} \in [1 + \sqrt{2}, +\infty)$
125. C
126. D
127. B
128. B
129. D
130. C
131. D
132. D
133. D
134. C
135. $\boldsymbol{S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)\right\}}$.
136. $\boldsymbol{\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}}$.
137. B
138. $\boldsymbol{\begin{cases} a < 0 \text{ ou } a > \frac{1}{2} \Rightarrow S = \emptyset \\ 0 \le a \le \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}\right\} \end{cases}}$

139. $x = \frac{(m^2-2m+2)^2}{4(m-1)^2}; 1 < m \le 2$
140. A
141. E
142. C

RESOLUÇÃO

91. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

Comentários

Devemos ter que:

$$kx = x^2 + ax + b$$

$$x^2 + (a-k)x + b = 0$$

$$\Delta = (a-k)^2 - 4b \ge 0 \text{ (pois existe intersecção)}$$

$$a^2 - 2ak + k^2 - 4b \ge 0$$

$$k^2 - 2ak + a^2 - 4b \ge 0 \quad (I)$$

$$\Delta' = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 4b) = 4a^2 - 4a^2 + 16b$$

$$\Rightarrow \Delta' = 16b$$

Encontrando as raízes em k:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2a + \sqrt{16b}}{2} = a + 2\sqrt{b} \\ k_2 = \dfrac{2a - \sqrt{16b}}{2} = a - 2\sqrt{b} \end{cases}$$

O intervalo que satisfaz a inequação (I) é:

$$k \in \left(-\infty, a - 2\sqrt{b}\right] \cup \left[a + 2\sqrt{b}, +\infty\right)$$

Comparando com o intervalo dado no enunciado:

$$k \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$$

Temos que:

$$\begin{cases} a + 2\sqrt{b} = 6 \\ a - 2\sqrt{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (4,1)$$

Gabarito: $a = 4$ e $b = 1$

---

92. (ITA/2015)

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-\frac{1}{2}} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s):

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Comentários

I. Verdadeira.

Substituindo $a = 1, b = 2, x = 0$ na equação, obtemos:

$$\frac{a}{1 - x^2} - \frac{b}{x - \frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{1}{1 - 0^2} - \frac{2}{0 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

II. Verdadeira.

A condição de existência da equação implica:

$$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$x - \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Para a equação possuir x como solução, devemos ter $x \neq \pm 1$ e $x \neq 1/2$.

III. Verdadeira.

Vamos substituir $x = 2/3$ e analisar a equação:

$$\frac{a}{1 - x^2} - \frac{b}{x - \frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{b}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{a}{1 - \frac{4}{9}} - \frac{b}{\frac{1}{6}} = 5$$

$$\frac{9a}{5} - 6b = 5$$

$$\frac{9a}{5} = 5 + 6b$$

$$9a = 5(5 + 6b)$$

$$9a = 25 + 30b$$

$$9a - 30b = 25$$

$$3(3a - 10b) = 25$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}^*$, temos $3a - 10b \in \mathbb{Z}$. Sabemos que 25 não é múltiplo de 3, logo é impossível haver valores para a e b inteiros positivos que satisfaçam a equação acima.

Gabarito: "e".

---

93. (ITA/2012)

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Comentários

Podemos provar que a função f é bijetora de dois modos:

1) Analiticamente:

Para $x_1, x_2 \geq 0, x_1 x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \neq x_2$$

Como ambos são positivos e diferentes entre si, podemos elevar ambos ao quadrado:

$$x_1^2 \neq x_2^2$$

$$3 + x_1^2 \neq x_2^2 + 3$$

$$f(x_1) \neq f(x_2), x_1, x_2 \geq 0$$

Para $x_1, x_2 < 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \neq x_2$$

Ambos são negativos e diferentes entre si, podemos elevar ao quadrado:

$$x_1^2 \neq x_2^2$$

$$-x_1^2 \neq -x_2^2$$

$$3 - x_1^2 \neq 3 - x_2^2$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Portanto, f é injetora.

Dado que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vamos provar que $Im(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Se $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$. Para $x \geq 0$:

$$y = 3 + x^2$$

$$x^2 = y - 3$$

$$|x| = \sqrt{y-3}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{y-3} \geq 0 \\ -\sqrt{y-3} \leq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \geq 0 \Rightarrow y - 3 \geq 0 \Rightarrow y \geq 3$$

Para $x < 0$:

$$y = 3 - x^2$$

$$x^2 = 3 - y$$

$$|x| = \sqrt{3-y}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{3-y} \geq 0 \\ -\sqrt{3-y} \leq 0 \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3-y} < 0 \Rightarrow 3 - y > 0 \Rightarrow y < 3$$

Portanto, $Im(f) = \mathbb{R}$. f também é sobrejetora. f é bijetora.

2) Graficamente:

f é a união de duas parábolas. Uma com concavidade para cima $(3 + x^2)$ e outra com concavidade para baixo $(3 - x^2)$.

O ponto que separa as duas equações é $x = 0$. Para $x = 0$:

$$f(0) = 3$$

O ponto de vértice das duas parábolas é:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

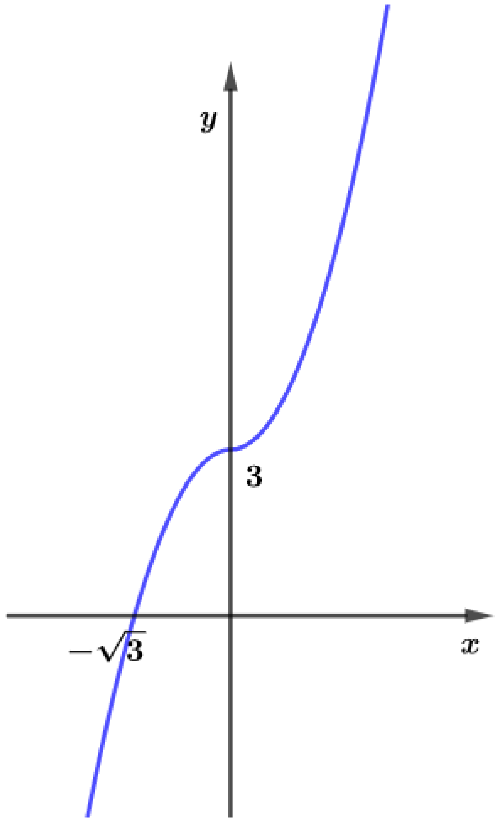
Como $b = 0$ para as duas equações, temos $x_v = 0$. Para $x_v = 0$, temos $f(0) = 3$.

A única equação que possui raiz é $3 - x^2, x < 0$.

$$3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Como $x < 0$, temos como raiz $x = -\sqrt{3}$.

Representando f no plano cartesiano:



Percebemos pelo gráfico que f é uma função crescente $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Logo, f é bijetora e inversível.

Vamos encontrar a inversa de f:

Se $y = f(x)$:

$$x \geq 0$$

$$y = 3 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y-3}, y \geq 3$$

$$x < 0$$

$$y = 3 - x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{3-y} \Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{3-y}, y < 3$$

Dessa forma, a inversa é dada por:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ e\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-3}, y \geq 3 \\ -\sqrt{3-y}, y < 3 \end{cases}$$

Gabarito: $\boldsymbol{f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ e\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-3}, y \geq 3 \\ -\sqrt{3-y}, y < 3 \end{cases}}$

---

94. (ITA/2008)

Resolva a inequação $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2$.

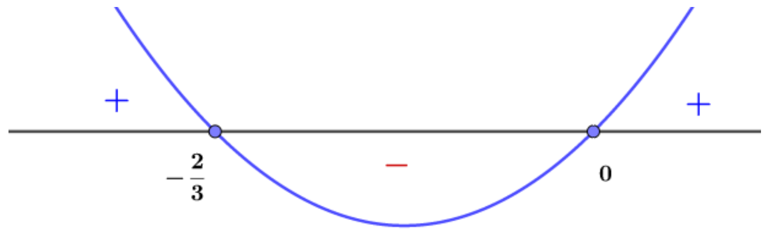
Comentários

Vamos analisar a condição de existência:

$$3x^2 + 2x \geq 0$$

$$x(3x+2) \geq 0$$

Analisando o sinal:



$$\Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}\ ou\ x \geq 0$$

Vamos elevar a inequação ao quadrado:

$$(3x^2+2x) < x^4$$

$$x^4 - 3x^2 - 2x > 0$$

Fatorando:

$$x^4 - 3x^2 - 2x = x(x^3 - 3x - 2) = x(x^3 - x - 2x - 2) = x\left(x(x^2-1) - 2(x+1)\right)$$

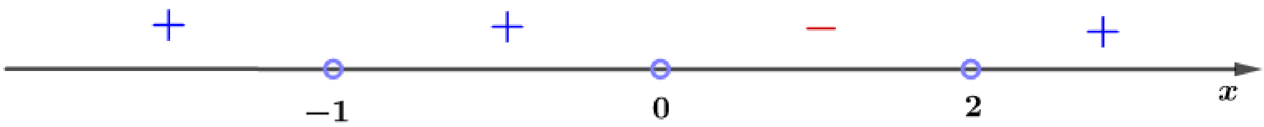
$$x\left(x(x-1)(x+1) - 2(x+1)\right) = x(x+1)(x(x-1)-2) = x(x+1)(x^2-x-2)$$

$$x(x+1)(x-2)(x+1) = x(x+1)^2(x-2)$$

Com isso, temos:

$$x(x+1)^2(x-2) > 0$$

Fazendo o estudo do sinal (lembrando que $x = -1$ é raiz dupla):



Dessa forma, encontramos:

$$x < -1\ ou -1 < x < 0\ ou\ x > 2$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:

$$x \leq -\frac{2}{3}\ ou\ x \geq 0$$

$$\Rightarrow x < -1\ ou -1 < x \leq -\frac{2}{3}\ ou\ x > 2$$

$$\Rightarrow S = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] \cup (2, +\infty)$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] \cup (2, +\infty)}$

---

95. (ITA/2007)

Considere a equação: $\boldsymbol{\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x}$

a) Para que valores do parâmetro real $\boldsymbol{p}$ **a equação admite raízes reais?**

b) Determine todas essas raízes.

Comentários

a) Devemos verificar inicialmente as condições de existência da equação:

$$\underbrace{\sqrt{x^2-p}}_{\geq 0}+2\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\geq 0}=\underbrace{x}_{\geq 0}$$

$$\begin{cases} x^2-p\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^2\geq p \\ x^2\geq 1 \\ x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^2\geq p \\ x\geq 1\ ou\ x\leq -1 \\ x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^2\geq p \\ x\geq 1 \end{cases} (I)$$

Agora, podemos resolver a equação. Elevando ao quadrado, obtemos:

$$x^2-p+4(x^2-1)+4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1}=x^2$$

$$-p+4x^2-4+4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1}=0$$

$$4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=p+4-4x^2$$

Temos que verificar a condição de existência da nova equação:

$$p+4-4x^2\geq 0$$

$$p+4\geq 4x^2$$

$$\Rightarrow x^2\leq \frac{p+4}{4}\ (II)$$

Elevando ao quadrado a nova equação:

$$16(x^2-p)(x^2-1)=(p+4-4x^2)^2$$

$$16(x^4-(p+1)x^2+p)=(p+4)^2+16x^4-8x^2(p+4)$$

$$\cancel{16x^4}-16px^2-16x^2+16p=p^2+8p+16+\cancel{16x^4}-8px^2-32x^2$$

Isolando os termos com $\boldsymbol{x^2}$:

$$-16px^2-16x^2+8px^2+32x^2=p^2+8p+16-16p$$

$$16x^2-8px^2=p^2-8p+16$$

Fatorando:

$$(16-8p)x^2=(p-4)^2$$

$$x^2=\frac{(p-4)^2}{16-8p}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}}$$

O denominador deve ser diferente de zero e a parte interna ao radical deve ser positiva. Logo, a nova condição de existência é:

$$4 - 2p > 0 \Rightarrow 4 > 2p \Rightarrow p < 2$$

Vamos verificar quais valores de $\boldsymbol{x}$ satisfazem as condições de existência $(\boldsymbol{I})$ e $(\boldsymbol{II})$:

(I):

$$\begin{cases} x^2 \geq p \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Da condição $\boldsymbol{x \geq 1}$, temos que a raiz deve ser positiva. Como $\boldsymbol{p < 2}$, temos $\boldsymbol{p - 4 < 0}$ e:

$$\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}} < 0 \Rightarrow \frac{-(p-4)}{2\sqrt{4-2p}} > 0$$

Logo, o valor de $\boldsymbol{x}$ deve ser:

$$x = \frac{-(p-4)}{2\sqrt{4-2p}} = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

Verificando $\boldsymbol{x^2 \geq p}$:

$$\left(\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right)^2 \geq p$$

$$\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)} \geq p$$

Como $\boldsymbol{2\sqrt{4-2p} > 0}$, temos $\boldsymbol{4(4-2p) > 0}$. Então, podemos multiplicar a inequação por esse número:

$$(4-p)^2 \geq p\big(4(4-2p)\big)$$

Resolvendo a inequação:

$$16 - 8p + p^2 \geq 16p - 8p^2$$

$$\Rightarrow 9p^2 - 24p + 16 \geq 0$$

Podemos fatorar a expressão:

$$(3p-4)^2 \geq 0$$

Logo, qualquer $\boldsymbol{p < 2}$ satisfaz a inequação.

(II):

$$x^2 \leq \frac{p+4}{4}$$

$$\left(\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right)^2 \leq \frac{p+4}{4}$$

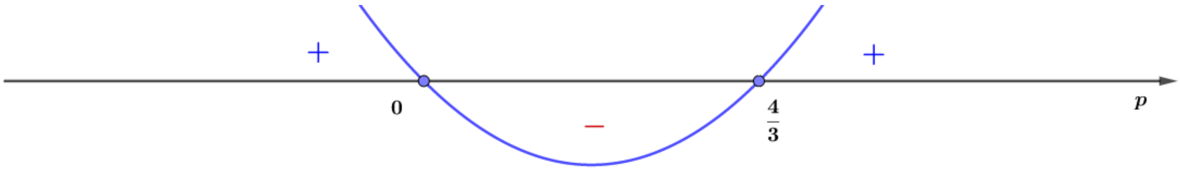
$$\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)} \leq \frac{p+4}{4}$$

$$(4-p)^2 \leq (p+4)(4-2p)$$

$$16 - 8p + p^2 \leq -2p^2 - 4p + 16$$

$$3p^2 - 4p \leq 0$$
$$p(3p - 4) \leq 0$$

Analisando o sinal de $\boldsymbol{p(3p-4)}$:



Vemos que $\boldsymbol{0 \leq p \leq 4/3}$.

Juntando com a condição $\boldsymbol{p < 2}$, temos como solução para $\boldsymbol{p}$:

$$p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$$

E a solução da equação é:

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

b) As raízes para $\boldsymbol{p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]}$ são dados por:

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]}$ **b)** $\boldsymbol{x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}}$

---

96. (ITA/2007)

Sobre a equação na variável real $\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{\left|\left||x-1|-3\right|-2\right| = 0,}$$

Podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) a soma de todas as suas soluções é 6.

c) ela admite apenas soluções positivas.

d) a soma de todas as soluções é 4.

e) ela admite apenas duas soluções reais.

Comentários

Vamos resolver a equação:

$$\left|\left||x-1|-3\right|-2\right| = 0$$

Como a igualdade da equação é zero, podemos remover o módulo mais externo:

$$\left||x-1|-3\right|-2 = 0$$
$$\left||x-1|-3\right| = 2$$

Agora, temos duas possibilidades:

$$|x-1|-3 = 2 \ ou \ |x-1|-3 = -2$$

Para o primeiro caso:

$$|x-1|-3=2$$
$$|x-1|=5$$

Temos mais duas possibilidades:

$$x-1=5 \Rightarrow x=6$$

Ou

$$x-1=-5 \Rightarrow x=-4$$

Para o segundo caso:

$$|x-1|-3=-2$$
$$|x-1|=1$$

Duas possibilidades:

$$x-1=1 \Rightarrow x=2$$

Ou

$$x-1=-1 \Rightarrow x=0$$

Portanto, a equação possui 4 soluções dadas por:

$$S=\{6,-4,0,2\}$$

Analisando as alternativas:

a) Falsa. Pois temos soluções reais.

b) Falsa. A soma de todas as soluções é $s=6-4+0+2=4$

c) Falsa. Temos a solução negativa -4.

d) Verdadeira. A soma de fato é 4.

e) Falsa. Admite 4 soluções reais.

Gabarito: "d".

---

97. (ITA/2005)

Determine todos os valores reais de a para que $(x-1)^2=|x-a|$ admita exatamente 3 soluções distintas.

Comentários

Vamos dividir o problema em casos.

Para $x \geq a$:

$$(x-1)^2=x-a$$

Desenvolvendo, obtemos a equação:

$$x^2-2x+1=x-a$$
$$x^2-3x+a+1=0 \quad (I)$$

Encontrando as raízes:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(a+1)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5-4a}}{2}$$

Para $x<a$:

$$(x-1)^2=-x+a$$
$$x^2-2x+1=-x+a$$
$$x^2-x+1-a=0\ \ (II)$$

Encontrando as raízes:

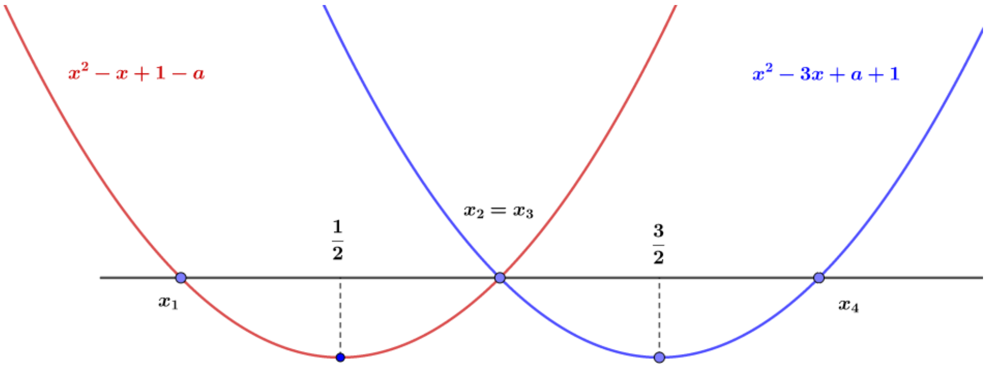
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1-a)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$$

Para termos exatamente 3 raízes, temos 3 casos:

1) Raiz única na equação (I).

2) Raiz única na equação (II).

3) Uma das raízes das equações (I) e (II) são semelhantes.



Vamos resolver para cada caso:

1) Devemos ter $\Delta=0$:

$$x^2-3x+a+1=0\ \ (I)$$
$$\Delta=9-4(a+1)=5-4a=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{5}{4}$$

2) $\Delta=0$:

$$x^2-x+1-a=0\ \ (II)$$
$$\Delta=1-4(1-a)=4a-3=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

3) A maior raiz da equação II deve ser igual à menor raiz da equação I:

Maior raiz da equação II:

$$x_2=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$$

Menor raiz da equação I:

$$x_3 = \frac{3-\sqrt{5-4a}}{2}$$

Igualando $x_2 = x_3$:

$$\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2} = \frac{3-\sqrt{5-4a}}{2}$$

$$\sqrt{4a-3} + \sqrt{5-4a} = 2$$

Elevando ao quadrado:

$$4a - 3 + 5 - 4a + 2\sqrt{4a-3}\sqrt{5-4a} = 4$$

$$2\sqrt{(4a-3)(5-4a)} = 2$$

$$\sqrt{(4a-3)(5-4a)} = 1$$

$$(4a-3)(5-4a) = 1$$

$$20a - 16a^2 - 15 + 12a = 1$$

$$-16a^2 + 32a - 16 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Portanto, os valores de a são:

$$a \in \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a \in \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}}$

---

98. (ITA/2005)

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}}$$

Sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

Comentários

Essa é uma questão difícil e podemos resolvê-la de diferentes maneiras. Vamos usar o que aprendemos até agora.

a) Inicialmente, vamos eliminar os radicais da expressão para encontrar as raízes:

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$$

$$\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x$$

Elevando ao quadrado:

$$\left(\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}\right)^2=x^2$$

$$1+mx+(1-mx)-2\sqrt{1+mx}\sqrt{1-mx}=x^2$$

$$2-2\sqrt{1-m^2x^2}=x^2$$

Isolando o termo com radical:

$$2-x^2=2\sqrt{1-m^2x^2}$$

Devemos analisar a condição de existência da raiz:

$$2\sqrt{1-m^2x^2}\geq 0\Rightarrow 2-x^2\geq 0$$

$$2\geq x^2$$

$$|x|\leq\sqrt{2}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$4-4x^2+x^4=4(1-m^2x^2)$$

$$x^4-4x^2+4-4+4m^2x^2=0$$

$$x^4+4x^2(m^2-1)=0$$

$$x^2\left(x^2+4(m^2-1)\right)=0$$

Encontrando as raízes:

$$x^2=0\Rightarrow x_1=x_2=0$$

$$x^2+4(m^2-1)=0\Rightarrow x^2=4(1-m^2)\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{1-m^2}$$

$$\Rightarrow x_3=2\sqrt{1-m^2}$$

$$\Rightarrow x_4=-2\sqrt{1-m^2}$$

Devemos analisar as condições de existência das raízes $x_{3,4}$:

$$1-m^2\geq 0$$

$$m^2\leq 1$$

$$|m|\leq 1$$

Como não verificamos as condições de existência do problema e elevamos a equação ao quadrado, devemos verificar se essas raízes satisfazem ao problema:

Para $x_1=x_2=0$:

$$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}\Rightarrow\sqrt{1}=0+\sqrt{1}\Rightarrow 1=1\ (V)$$

Para $x_{3,4}=\pm 2\sqrt{1-m^2}$:

$$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}\Rightarrow\sqrt{1\pm 2m\sqrt{1-m^2}}=\pm 2\sqrt{1-m^2}+\sqrt{1\mp 2m\sqrt{1-m^2}}$$

Vamos fatorar as expressões, completando os quadrados:

$$\sqrt{1-m^2 \pm 2m\sqrt{1-m^2}+m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \sqrt{1-m^2 \mp 2m\sqrt{1-m^2}+m^2}$$

$$\sqrt{\sqrt{(1-m^2)^2} \pm 2m\sqrt{1-m^2}+m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \sqrt{\sqrt{(1-m^2)^2} \mp 2m\sqrt{1-m^2}+m^2}$$

$$\sqrt{\left(m \pm \sqrt{1-m^2}\right)^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \sqrt{\left(m \mp \sqrt{1-m^2}\right)^2}$$

$$\left|m \pm \sqrt{1-m^2}\right| = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \left|m \mp \sqrt{1-m^2}\right|$$

Agora, devemos analisar cada possibilidade:

I) $0 \le m \le 1$ e $|m| \ge \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m \pm \sqrt{1-m^2}\right| = \underbrace{\pm 2\sqrt{1-m^2}}_{x_{3,4}} + \left|m \mp \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$m \pm \sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + m \mp \sqrt{1-m^2}$$

$$\pm 2\sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} \ \ (V)$$

II) $0 \le m \le 1$ e $|m| < \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m + \sqrt{1-m^2}\right| = 2\sqrt{1-m^2} + \left|m - \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$m + \sqrt{1-m^2} = 2\sqrt{1-m^2} - m + \sqrt{1-m^2}$$

$$2m = 2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

$$\left|m - \sqrt{1-m^2}\right| = -2\sqrt{1-m^2} + \left|m + \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$-m + \sqrt{1-m^2} = -2\sqrt{1-m^2} + m + \sqrt{1-m^2}$$

$$-2m = -2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

III) $-1 \le m < 0$ e $|m| \ge \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m \pm \sqrt{1-m^2}\right| = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \left|m \mp \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$-\left(m \pm \sqrt{1-m^2}\right) = \pm 2\sqrt{1-m^2} - \left(m \mp \sqrt{1-m^2}\right)$$

$$-m \mp \sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} - m \pm \sqrt{1-m^2}$$

$$\mp 2\sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2}$$

Somente é verdade para $m = -1$. Mas isso faz com que a solução seja $x = 0$.

Nessas condições, a igualdade não é satisfeita.

IV) $-1 \le m < 0$ e $|m| < \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m + \sqrt{1-m^2}\right| = 2\sqrt{1-m^2} + \left|m - \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$m + \sqrt{1-m^2} = 2\sqrt{1-m^2} - \left(m - \sqrt{1-m^2}\right)$$

$$2m = 2\sqrt{1-m^2}\ \ (F)$$

$$\left|m-\sqrt{1-m^2}\right| = -2\sqrt{1-m^2} + \left|m+\sqrt{1-m^2}\right|$$

$$-\left(m-\sqrt{1-m^2}\right) = -2\sqrt{1-m^2} + m + \sqrt{1-m^2}$$

$$-2m = -2\sqrt{1-m^2}\ \ (F)$$

Portanto, para $|m| \geq \sqrt{1-m^2}$, temos solução dada por:

$$S = \left\{0; \pm 2\sqrt{1-m^2}\right\}$$

b) Queremos solução não nula. Então, devemos verificar as raízes $x = \pm 2\sqrt{1-m^2}$.

Da condição de existência da raiz, temos:

$$0 \leq m \leq 1$$

$$|x| \leq \sqrt{2}$$

Verificando a raiz:

$$\Rightarrow \left|\pm 2\sqrt{1-m^2}\right| \leq \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{1-m^2} \leq \sqrt{2}$$

$$4(1-m^2) \leq 2$$

$$1-m^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq m^2$$

$$\Rightarrow |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se $m = 1$, temos $x_{3,4} = 0$. Como queremos raízes não nulas, devemos ter $m \neq 1$. Portanto, m deve pertencer ao intervalo:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$$

Gabarito: a) $S = \left\{0, \pm 2\sqrt{1-m^2}\right\}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$

---

99. (ITA/2005)

a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

Comentários

a) Para provar que o número α é raiz da equação, temos que mostrar que $\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$.

Vamos elevar o número α ao cubo:

$$\alpha^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3$$

Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\alpha^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + 2 - \sqrt{5}$$

Não vamos elevar os radicais ao quadrado para não complicar o cálculo, ao invés disso, vamos fatorar:

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{4-5}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{-1}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 - 3\underbrace{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)}_{\alpha}$$

Perceba que o termo entre parênteses é o próprio α. Reescrevendo:

$$\alpha^3 = 4 - 3\alpha$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

Encontramos a igualdade. Logo, α é raiz da equação.

b) Vamos encontrar as raízes da equação cúbica.

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Fatorando:

$$x^3 - x + 4x - 4 = 0$$

$$x(x^2 - 1) + 4(x - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) + 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x(x+1) + 4) = 0$$

$$(x-1)\left(x^2 + x + 4\right) = 0$$

Encontramos uma raiz:

$$x = 1$$

Vamos verificar se $x^2 + x + 4$ possui raiz:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$$

Logo, essa equação não possui raiz real.

Como α é real, temos que $\alpha = 1$. Portanto, α é racional.

Gabarito: Demonstração

---

100. (ITA/2005)

Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.

b) x é racional.

c) $\sqrt{2x}$ é irracional.

d) x^2 é irracional.

e) $x \in]2, 3[$.

Comentários

Normalmente, nesse tipo de questão, a expressão dentro do radical será um quadrado perfeito, então, para resolvê-lo, devemos tentar fatorar a expressão.

Vamos fatorar x:

$$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{4 + 3 - 2 \cdot 2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{2^2 + \sqrt{(3)^2} - 2 \cdot 2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{3} = \left|2 - \sqrt{3}\right| + \sqrt{3}$$

Como $2 > \sqrt{3}$, podemos remover o módulo do número:

$$x = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

Portanto, x é racional.

Gabarito: "b".

---

101. (ITA/2004)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$ em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		g	
Valor mínimo	*Ponto de mínimo*	*Valor máximo*	*Ponto de máximo*
-1	< 0	$9/4$	> 0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais $(f \ o \ g)(x) = 0$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

Comentários

A questão nos dá as informações do valor mínimo de f e o valor máximo de g. Analisando f:

$$f(x) = x^2 + \alpha x$$

O coeficiente de x^2 de f é positivo, o valor mínimo de f será o valor do vértice da função. Desse modo:

$$f_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4(1)} = -\frac{\Delta}{4}$$

$$f_{min} = -1$$

$$-\frac{\Delta}{4} = -1 \Rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

Da tabela, ponto de mínimo < 0:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{\alpha}{2(1)} < 0 \Rightarrow \alpha > 0$$

Alfa é positivo, logo $\alpha = 2$.

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Analisando g:

$$g(x) = -x^2 - \beta x$$

g é uma parábola com concavidade para baixo $(-x^2)$, o máximo de g será seu vértice:

$$g_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4(-1)} = \frac{\Delta}{4}$$

Da tabela:

$$g_{\max} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \Delta = 9$$

$$\beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = \pm 3$$

Ponto de máximo > 0:

$$x_v = -\frac{b}{2a} > 0$$

$$-\frac{(-\beta)}{2(-1)} = -\frac{\beta}{2} > 0 \Rightarrow \beta < 0$$

Beta é negativo, logo $\beta = -3$.

$$g(x) = -x^2 - (-3)x$$

$$g(x) = -x^2 + 3x$$

A função composta é dada por:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = -x^2 + 3x$$

$$(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 0$$

$$f\big(g(x)\big) = [g(x)]^2 + 2g(x) = (-x^2 + 3x)^2 + 2(-x^2 + 3x)$$

$$f\big(g(x)\big) = (-x^2 + 3x)(-x^2 + 3x + 2)$$

$$f\big(g(x)\big) = x(-x + 3)(-x^2 + 3x + 2)$$

$$f\big(g(x)\big) = 0 \Rightarrow x(-x + 3)(-x^2 + 3x + 2)$$

As raízes da equação são:

$$x(-x + 3) \Rightarrow x_1 = 0\ e\ x_2 = 3$$

$$-x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{-1} = 3$$

A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 3 + 3 = 6$$

*Poderíamos resolver diretamente a soma das raízes usando as Relações de Girard. Aprenderemos esse assunto na aula de Equações Algébricas.

Gabarito: “d”.

102.(ITA/2002)

Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a expressão real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \big||2x - 1| - 6\big|}$ está definida, formam o conjunto:

a) $[0, 1]$

b) $[-5, 6]$

c) $[-5, 0] \cup [1, +\infty[$

d) $]-\infty, 0] \cup [1, 6]$

e) $[-5, 0] \cup [1, 6]$

Comentários

Inicialmente, devemos verificar a condição de existência da função em $\mathbb{R}$:

$$5 - \big||2x - 1| - 6\big| \geq 0$$

$$5 \geq \big||2x - 1| - 6\big|$$

$$\big||2x - 1| - 6\big| \leq 5$$

Removendo o módulo externo, temos:

$$-5 \leq |2x - 1| - 6 \leq 5$$

$$1 \leq |2x - 1| \leq 11$$

Vamos separar em duas inequações:

$$|2x - 1| \leq 11$$

$$|2x - 1| \geq 1$$

Resolvendo a primeira:

$$|2x-1| \leq 11$$

$$-11 \leq 2x-1 \leq 11$$

$$-10 \leq 2x \leq 12$$

$$-5 \leq x \leq 6$$

Resolvendo a segunda:

$$|2x-1| \geq 1$$

$$2x-1 \geq 1 \; ou \; 2x-1 \leq -1$$

$$2x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2x-1 \leq -1 \Rightarrow x \leq 0$$

Fazendo a intersecção dos intervalos que obtemos, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq 0 \; ou \; 1 \leq x \leq 6\}$$

$$S = [-5, 0] \cup [1,6]$$

Gabarito: "e".

103.(ITA/2001)

O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

b) $]\frac{1}{4}, \infty[$

c) $]0, \frac{7}{4}[$

d) $]-\infty, \frac{1}{4}]$

e) $]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

Comentários

Para f estar definida $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que o denominador de f deve ser diferente de zero e também a função com radical deve ser positiva.

Disso, temos:

$$x^2 + (2m+1)x + (m^2+2) > 0$$

Como $a = 1 > 0$, a função será sempre positiva se forçarmos $\Delta < 0$. Então:

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+2) < 0$$

Resolvendo a inequação:

$$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 < 0$$

$$4m - 7 < 0$$

$$\Rightarrow m < \frac{7}{4}$$

Queremos que a função seja não negativa para todo x real. O denominador é sempre positivo, então o numerador deve ser igual ou maior que zero:

$$x^2 + (2m+3)x + \left(m^2+3\right) \geq 0$$

Essa condição ocorre quando $\Delta \leq 0$:

$$\Delta = (2m+3)^2 - 4(m^2+3) \leq 0$$

Resolvendo a inequação:

$$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12 \leq 0$$

$$12m - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

O conjunto dos valores de m que satisfaz o problema é dado por:

$$m < \frac{7}{4} e\ m \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \in \left]-\infty, 1/4\right]$$

Gabarito: "d".

104.(ITA/2000)

Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{11}{6}$

e) $\frac{7}{6}$

Comentários

Inicialmente, devemos fatorar a expressão para analisá-la:

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4)$$

Para fatorar a expressão cúbica, vamos separar os termos de modo a poder evidenciar algum termo em comum:

$$x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4) = x(6x^3 - 4x^2 - x^2 - 6x - x + 4)$$

$$x[6x(x^2-1) - 4(x^2-1) - x(x+1)]$$

Note o fator $(x+1)$:

$$x[6x(x-1)(x+1) - 4(x-1)(x+1) - x(x+1)]$$

Evidenciando $(x+1)$ e simplificando a expressão:

$$x(x+1)(6x(x-1) - 4(x-1) - x)$$

$$x(x+1)(6x^2-6x-4x+4-x)$$

$$x(x+1)(6x^2-11x+4)$$

Vamos verificar se a função quadrática possui raiz:

$$\Delta = 11^2 - 4\cdot 6\cdot 4 = 121-96 = 25 > 0$$

Temos duas raízes, vamos encontrá-las:

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 6} = \frac{11 \pm 5}{12} = \frac{4}{3}\ ou\ \frac{1}{2}$$

Com isso, obtemos a expressão fatorada:

$$x(x+1)(6x^2-11x+4) = 6x(x+1)\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

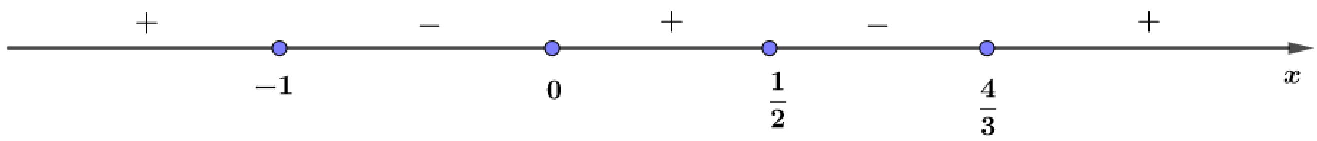
Vamos fazer o estudo do sinal.

Testando o sinal para $x = 1$:

$$6\underbrace{(1)}_{+}\underbrace{(1+1)}_{+}\underbrace{\left(1-\frac{4}{3}\right)}_{-}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{+} < 0$$

Não precisamos calcular o valor dessa expressão, basta saber o sinal dela. Note que temos 3 números positivos e 1 negativo, o produto deles gera um número negativo. Vamos usar o método da multiplicidade das raízes para encontrar o sinal dos outros intervalos.

1 está entre $1/2$ e $4/3$ e nesse ponto temos sinal negativo. Desse modo, obtemos o sinal da função:



Os valores de x que satisfazem ao problema é:

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$$

$$S =]-1,0[\cup]\frac{1}{2},\frac{4}{3}[$$

Queremos a soma dos intervalos da solução:

$$s = (0-(-1)) + \left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{8-3}{6} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

Gabarito: "d".

105.(ITA/1998)

Sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(fog)(x) = x - 6$, em seus respectivos domínios. Então, o domínio A da função g é:

a) $[-3, +\infty[$

b) $\mathbb{R}$

c) $[-5, +\infty[$

d) $]-\infty, -1[\, \cup\, [3, +\infty[$
e) $]-\infty, \sqrt{6}[$

Comentários

$$(fog)(x) = x - 6$$
$$f\big(g(x)\big) = [g(x)]^2 - 9$$
$$[g(x)]^2 - 9 = x - 6$$
$$[g(x)]^2 = x + 3$$
$$\Rightarrow g(x) = \pm\sqrt{x+3}$$

Analisando a condição de existência de g, encontramos:

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

Logo, o domínio de g é:

$$A = [-3, +\infty[$$

Gabarito: "a".

106.(ITA/1997)

Resolva a inequação

$$\frac{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}{-2x^2 + 3\pi x} > 0$$

Comentários

Para aqueles que não conhecem, π é um número que vale aproximadamente 3,14.

Vamos estudar o sinal do numerador e do denominador.

Começando pelo numerador:

$$\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi$$

Antes, vamos verificar o valor de Δ para ver quais sinais a função admite:

$$\Delta = (1+\pi^2)^2 - 4\pi^2$$
$$\Delta = 1 + 2\pi^2 + \pi^4 - 4\pi^2 = \pi^4 - 2\pi^2 + 1 = (\pi^2 - 1)^2 > 0$$

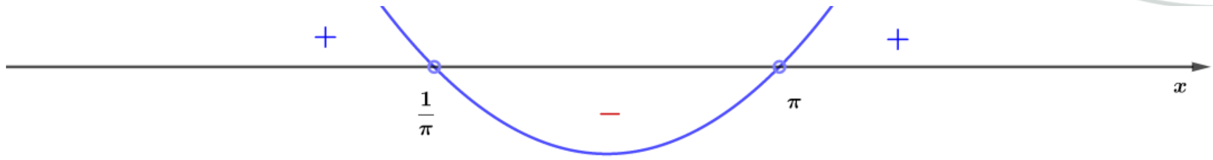
Com isso, verificamos que a função possui duas raízes distintas:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+\pi^2) \pm \sqrt{(\pi^2-1)^2}}{2\pi} = \frac{(1+\pi^2) \pm (\pi^2 - 1)}{2\pi}$$
$$x_1 = \frac{(1+\pi^2) - (\pi^2 - 1)}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$
$$x_2 = \frac{(1+\pi^2) + (\pi^2 - 1)}{2\pi} = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$

Fatorando a expressão usando as raízes, temos:

$$\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi = \pi(x - \pi)\left(x - \frac{1}{\pi}\right)$$

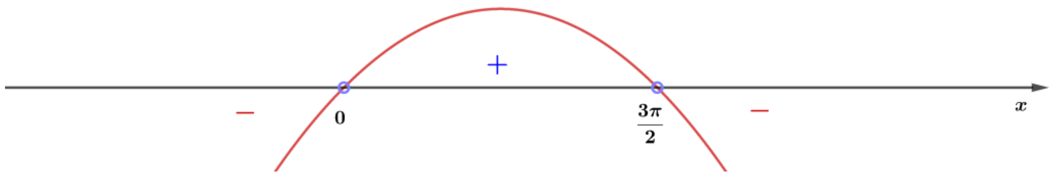
Fazendo o estudo do sinal:



Vamos analisar o denominador:

$$-2x^2 + 3\pi x = x(-2x + 3\pi)$$

Fazendo o estudo do sinal:



Juntando as duas análises no mesmo eixo, obtemos a tabela:

		0		$\frac{1}{\pi}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		x
$\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$	
$-2x^2 + 3\pi x$	$-$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$\frac{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}{-2x^2 + 3\pi x}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Analisando a tabela, vemos que a solução é dada por:

$$S = \left]0, \frac{1}{\pi}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left]0, \frac{1}{\pi}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[}$

107.(ITA/1996)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3, x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, x > 0 \end{cases}$$

Então:

a) f é bijetora e $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.

b) f é bijetora e $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.

c) f é sobrejetiva, mas não é injetora.

d) f é injetora, mas não é sobrejetora.

e) f é bijetora e $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(3)$.

Comentários

Analisando as alternativas, temos que verificar se a função f é injetora e/ou sobrejetora. Vamos verificar se ela é sobrejetora, lembrando:

$$f: A \to B$$
$$f \text{ é } sobrejetora \Leftrightarrow Im(f) = B$$

Do enunciado temos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então devemos provar que $Im(f) = \mathbb{R}$ para f ser sobrejetora.

1) Para $x \leq 0$:

$$f(x) = 3x + 3$$
$$f(x) = y$$
$$y = 3x + 3$$
$$x = \frac{y-3}{3}$$
$$x \leq 0 \Rightarrow \frac{y-3}{3} \leq 0 \Rightarrow y \leq 3$$

2) Para $x > 0$:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$
$$f(x) = y$$
$$y = x^2 + 4x + 3$$
$$x^2 + 4x + 3 - y = 0$$

Vamos encontrar as raízes da equação para analisar os valores de y. Perceba que o b da equação quadrática é par, então podemos usar a forma simplificada da equação quadrática:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (3-y)}}{1} = -2 \pm \sqrt{4 - 3 + y}$$
$$x = -2 \pm \sqrt{1+y}$$

Dessa forma:

$$\begin{cases} -2 - \sqrt{1+y} > 0 \\ -2 + \sqrt{1+y} > 0 \end{cases}$$

No conjunto dos reais, sabemos que $-2 - \sqrt{1+y}$ sempre será negativo pois:

$$\sqrt{1+y} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{1+y} \leq 0 \Rightarrow -2 - \sqrt{1+y} \leq -2$$

Então devemos analisar a outra raiz:

$$-2 + \sqrt{1+y} > 0$$
$$x > 0$$
$$\sqrt{1+y} > 2$$
$$1 + y > 4$$
$$y > 3$$

Logo, concluímos:

$$x \leq 0 \Rightarrow y \leq 3$$

$$x > 0 \Rightarrow y > 3$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

$\therefore f$ é sobrejetora

Agora, vamos analisar se f é injetora. Precisamos verificar se dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sendo x_1 e x_2 números reais quaisquer, temos que provar três situações:

$$I) \begin{cases} f(x_1) = 3x_1 + 3, x_1 \leq 0 \\ f(x_2) = x_2^2 + 4x_2 + 3, x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_1 + 1 \leq 1$$

$$3x_1 + 3 \leq 3$$

$$f(x_1) \leq 3$$

$$x_2 > 0$$

$$x_2 + 2 > 2$$

$$(x_2 + 2)^2 > 2^2$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 4 > 4$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 4 - 1 > 4 - 1$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 3 > 3$$

$$f(x_2) > 3$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$II) \begin{cases} f(x_1) = x_1^2 + 4x_1 + 3, x_1 > 0 \\ f(x_2) = x_2^2 + 4x_2 + 3, x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$x_1 + 2 \neq x_2 + 2$$

$$(x_1 + 2)^2 \neq (x_2 + 2)^2$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 \neq x_2^2 + 4x_2 + 4$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 - 1 \neq x_2^2 + 4x_2 + 4 - 1$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 3 \neq x_2^2 + 4x_2 + 3$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$III) \begin{cases} f(x_1) = 3x_1 + 3, x_1 < 0 \\ f(x_2) = 3x_2 + 3, x_2 < 0 \end{cases}$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$3x_1 \neq 3x_2$$

$$3x_1 + 3 \neq 3x_2 + 3$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Logo, f é injetora.

Com isso, mostramos que f é injetora e sobrejetora $\Rightarrow f$ é bijetora.

Das alternativas que dizem que f é bijetora, temos também uma afirmação com $(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right)$. Vamos calcular o seu valor:

$$(f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(f\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$-\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = 1$$

$$f\left(f\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = f(1)$$

$$1 > 0 \Rightarrow f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = 8$$

$$\Rightarrow (f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = 8$$

f é bijetora, então ela possui inversa. Vamos calcular o valor de $f(8)$ para descobrir qual o valor da inversa nos dá como resultado o valor 8.

$$8 > 0 \Rightarrow f(8) = 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 = 99$$

Da definição da função inversa, temos:

$$f(8) = 99 \Rightarrow f^{-1}(99) = 8$$

$$\therefore (f\ o\ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$$

Gabarito: "b".

108.(ITA/1995)

Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é:

Tempo(s)	Concentração (moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

a) 3,60

b) 3,65

c) 3,70

d) 3,75

e) 3,80

Comentários

A linha que passa pelos três pontos experimentais da tabela é uma parábola, então temos uma função quadrática. Dessa forma, vamos criar a função quadrática f que representa a concentração da substância química em função do tempo:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

Para encontrar os coeficientes da função, vamos substituir os dados da tabela na função:

$$t = 1 \Rightarrow f(1) = a(1)^2 + b(1) + c$$

$$3 = a + b + c$$

$$t = 2 \Rightarrow f(2) = a(2)^2 + b(2) + c$$

$$5 = 4a + 2b + c$$

$$t = 3 \Rightarrow f(3) = a(3)^2 + b(3) + c$$

$$1 = 9a + 3b + c$$

Dessa forma, encontramos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \ \ (I) \\ 4a + 2b + c = 5 \ \ (II) \\ 9a + 3b + c = 1 \ \ (III) \end{cases}$$

ESCLARECENDO!

Vamos ver rapidamente o que é um sistema linear e como resolvê-la.

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares com m equações e n incógnitas. Para resolvê-la, vamos usar o método do escalonamento. Esse método se baseia em reduzir o sistema em outro de mais fácil resolução. Por exemplo, quando temos 3 equações e 3 incógnitas, manipulamos as equações para criar um sistema com 2 equações e 2 incógnitas e depois reduzimos novamente para obter 1 equação e 1 incógnita. Veja:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \ \ (I) \\ 4a + 2b + c = 5 \ \ (II) \\ 9a + 3b + c = 1 \ \ (III) \end{cases}$$

Esse sistema possui 3 equações lineares e 3 incógnitas (a, b, c).

Vamos escalonar o sistema para encontrar sua solução seguindo os passos abaixo:

1) Perceba que os coeficientes da incógnita c nas equações é 1. Vamos criar um sistema com 2 equações e 2 incógnitas sem a variável c. Multiplicando a equação (I) por -1:

$$\begin{cases} a+b+c=3 \ (I) \Leftarrow (-1) \\ 4a+2b+c=5 \ (II) \\ 9a+3b+c=1 \ (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a-b-c=-3 \ (I) \\ 4a+2b+c=5 \ (II) \\ 9a+3b+c=1 \ (III) \end{cases}$$

2) Somando (I) com (II) e (I) com (III), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -a-b-c=-3 \ (I) \\ 4a+2b+c=5 \ (II) \\ 9a+3b+c=1 \ (III) \end{cases} \quad +$$

$$\begin{cases} (4a-a)+(2b-b)+(c-c)=5-3 \\ (9a-a)+(3b-b)+(c-c)=1-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+b=2 \ (IV) \\ 8a+2b=-2 \ (V) \end{cases}$$

3) Vamos usar a mesma ideia para esse sistema linear de 2 equações. Vamos criar uma equação sem a variável b. Multiplicando (IV) por -2:

$$\begin{cases} 3a+b=2 \ (IV) \Leftarrow (-2) \\ 8a+2b=-2 \ (V) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a-2b=-4 \ (IV) \\ 8a+2b=-2 \ (V) \end{cases}$$

4) Somando (IV) com (V), conseguimos calcular o valor de a.

$$\begin{cases} -6a-2b=-4 \ (IV) \\ 8a+2b=-2 \ (V) \end{cases} \quad +$$
$$2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

5) Agora vamos encontrar as outras incógnitas, podemos substituir a em (IV) ou (V) e encontrar b. Substituindo $a=-3$ na equação (IV):

$$3a+b=2 \ (IV)$$
$$b=2-3a$$
$$b=2-3(-3)=2+9=11 \Rightarrow b=11$$

6) Por último, vamos encontrar o valor de c, podemos substituir o valor de a e b em qualquer equação do sistema inicial. Vamos usar (I) para facilitar os cálculos:

$$a+b+c=3 \ (I)$$
$$(-3)+11+c=3$$
$$8+c=3$$
$$c=-5$$

Com isso, resolvemos o sistema linear e a solução é $(a,b,c)=(-3,11,-5)$.

Resolvendo o sistema linear, encontramos $a=-3$, $b=11$ e $c=-5$:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$
$$f(t) = (-3)t^2 + 11t - 5$$
$$f(t) = -3t^2 + 11t - 5$$

A questão pede o valor de f para $t = 2{,}5$. Substituindo esse valor na função, obtemos:

$$f(2{,}5) = -3(2{,}5)^2 + 11(2{,}5) - 5$$
$$f(2{,}5) = -3(6{,}25) + 27{,}5 - 5$$
$$f(2{,}5) = -18{,}75 + 22{,}5$$
$$f(2{,}5) = 3{,}75$$

Com isso, encontramos $3{,}75$. O que nos leva à alternativa d.

Gabarito: “d”.

109.(ITA/1991)

Se $A = \left\{x \in \mathbb{R}; \left|x^2 + x + 1\right| \leq \left|x^2 + 2x - 3\right|\right\}$ então temos:

a) $A = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty[$

b) $A = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

c) $A = [-3, 1]$

d) $A =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

e) n.d.a.

Comentários

Vamos analisar a inequação:

$$\left|x^2 + x + 1\right| \leq \left|x^2 + 2x - 3\right|$$

O bizu nessa questão é perceber que $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ já que seu delta é negativo:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

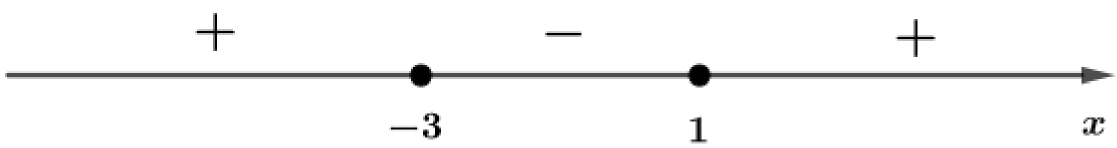
Assim, podemos reescrever:

$$x^2 + x + 1 \leq \left|x^2 + 2x - 3\right|$$

Fatorando o lado direito, obtemos:

$$x^2 + x + 1 \leq |(x-1)(x+3)|$$

Devemos analisar o sinal de $(x-1)(x+3)$ para encontrar os intervalos do módulo. Fazendo o estudo do sinal desta função:



Para $-3 < x < 1$, temos:

$$x^2 + x + 1 \leq -\left(x^2 + 2x - 3\right)$$
$$2x^2 + 3x - 2 \leq 0$$

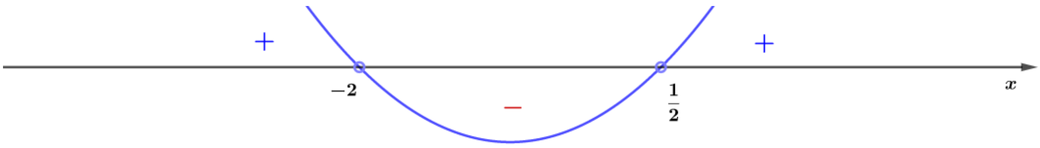
Fatorando a expressão por meio das raízes:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2 \; ou \; 1/2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Fazendo o estudo do sinal:



$$\Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Esse intervalo está contido na condição inicial de x: $]-3{,}1[$.

Para $x \leq -3 \; ou \; x \geq 1$:

$$x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x - 3$$

$$\Rightarrow x \geq 4$$

Fazendo a intersecção dos intervalos de x, obtemos:

$$x \geq 4$$

Portanto, o conjunto A é dado por:

$$A = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty[$$

Gabarito: “a”.

110.(ITA/1988)

Sabendo-se que as soluções da equação $x^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, determine os valores de a e b.

Comentários

Vamos encontrar inicialmente as raízes de $x^2 - |x| - 6 = 0$.

Para $x \geq 0$:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = 3 \; ou -2$$

Para $x \geq 0$, temos $x = 3$.

Para $x < 0$:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3 \; ou \; 2$$

Para $x < 0$, temos $x = -3$.

Logo, as raízes são $x_1 = 3\ e\ x_2 = -3$. Substituindo esses valores na equação $x^2 - ax + b = 0$, obtemos:

$$x_1 = 3 \Rightarrow 3^2 - a(3) + b = 0$$

$$-3a + b = -9 \Rightarrow 3a - b = 9$$

$$x_2 = -3 \Rightarrow (-3)^2 - a(-3) + b = 0$$

$$3a + b = -9$$

Assim, encontramos o sistema:

$$\begin{cases} 3a - b = 9 \\ 3a + b = -9 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações:

$$6a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Encontrando o valor de b:

$$a = 0 \Rightarrow 3(0) - b = 9 \Rightarrow b = -9$$

Portanto, os valores são:

$$a = 0\ e\ b = -9$$

Gabarito: $\boldsymbol{a = 0\ e\ b = -9}$

111.(ITA/1988)

Sejam a, b e c constantes reais com $a \neq 0$ formando, nesta ordem, uma PA e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Determine a relação válida entre b e c.

Comentários

Dos dados do enunciado, temos:

$$(a, b, c) \text{ é } PA \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{2}$$

A soma das raízes da equação é dado por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Disso, encontramos:

$$-\frac{b}{a} = -\sqrt{2}$$

$$b = a\sqrt{2}$$

Encontramos b em função de a, vamos colocar c em função de a:

$$b = \frac{a + c}{2} \Rightarrow c = 2b - a$$

$$c = 2\sqrt{2}a - a = \left(2\sqrt{2} - 1\right)a$$

Vamos dividir c por b para eliminar o termo a:

$$\frac{c}{b}=\frac{(2\sqrt{2}-1)a}{a\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a relação entre b e c é dada por:

$$\frac{c}{b}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: $\frac{c}{b}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$

112.(ITA/1987)

Considere a função $y=f(x)$ definida por $f(x)=x^3-2x^2+5x$, para cada x real. Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) $y=f(x)$ é uma função par.

b) $y=f(x)$ é uma função ímpar.

c) $f(x)\geq 0$ para todo real x.

d) $f(x)\leq 0$ para todo real x.

e) $f(x)$ tem o mesmo sinal de x, para todo real $x\neq 0$.

Comentários

Vamos verificar a paridade de f.

$$f(x)=x^3-2x^2+5x$$
$$f(-x)=(-x)^3-2(-x)^2+5(-x)=-x^3-2x^2-5x$$
$$-f(x)=-x^3+2x^2-5x$$

Concluímos que f não é nem par nem ímpar.

Verificando as outras alternativas:

$$f(x)=x(x^2-2x+5)$$

Vamos estudar o sinal de x^2-2x+5:

$$\Delta=4-4\cdot 5=4-20=-16<0$$

Logo, a equação não possui raízes reais.

Como $a=1>0$, temos que $x^2-2x+5>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Assim, a função $x(x^2-2x+5)$ possui o mesmo sinal de x:

$$x\leq 0\Rightarrow f(x)\leq 0$$
$$x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 0$$

Desse modo, o gabarito é a letra e.

Gabarito: "e".

113.(ITA/1987)

Considere $x=g(y)$ a função inversa da seguinte função:

$y = f(x) = x^2 - x + 1$, para cada número real $x \geq \frac{1}{2}$. Nestas condições, a função g é assim definida:

a) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.

b) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.

c) $g(y) = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.

d) $g(y) = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.

e) $g(y) = \frac{3}{4} + \sqrt{y - \frac{1}{2}}$, para cada $y \geq \frac{1}{2}$.

Comentários

Vamos encontrar a inversa da função:

$$y = x^2 - x + 1$$

$$x^2 - x + 1 - y = 0$$

Encontrando as raízes da equação, temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1 - y)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4y - 3}}{2}$$

Reescrevendo a equação:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y - \frac{3}{4}}$$

Como f é definida para $x \geq \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{y - \frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\pm \sqrt{y - \frac{3}{4}} \geq 0$$

Perceba que $-\sqrt{y - \frac{3}{4}} \leq 0$. Então, a única solução ocorre para a raiz positiva:

$$\sqrt{y + \frac{3}{4}} \geq 0$$

Resolvendo a inequação:

$$y + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$y \geq -\frac{3}{4}$$

Assim, g é dado por:

$$g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}$$

Com $y\geq -\frac{3}{4}$.

Lembre-se que antes de calcular a inversa de uma função, devemos verificar se ela é bijetora. Como a questão é objetiva e as todas as alternativas indicam alguma função para a inversa, desconsideramos esse passo para ganhar tempo na prova.

Gabarito: "a".

114.(ITA/1986)

Sejam a,b,c números reais dados com $a<0$. Suponha que x_1 e x_2 sejam as raízes da função $y=ax^2+bx+c$ e $x_1<x_2$. Sejam $x_3=-\frac{b}{2a}$ e $x_4=-\frac{2b+\sqrt{b^2-4ac}}{4a}$. Sobre o sinal de y podemos afirmar que:

a) $y<0,\forall x\in\mathbb{R},x_1<x<x_3$

b) $y<0,\forall x\in\mathbb{R},x_4<x<x_2$

c) $y>0,\forall x\in\mathbb{R},x_1<x<x_4$

d) $y>0,\forall x\in\mathbb{R},x>x_4$

e) $y<0,\forall x\in\mathbb{R},x<x_3$

Comentários

Se $x_1<x_2$ e x_1,x_2 são raízes da equação, então:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Perceba que x_3 é o vértice da parábola da função quadrática:

$$x_3=V_x=-\frac{b}{2a}$$

Sabemos a localização de x_1,x_2,x_3. Vamos localizar x_4:

$$x_4=-\frac{2b+\sqrt{b^2-4ac}}{4a}=\frac{-2b-\sqrt{b^2-4ac}}{4a}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a}$$

x_4 é menor que x_2, pois:

Sendo $a<0$, temos:

$$0<-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a}<-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a}<-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

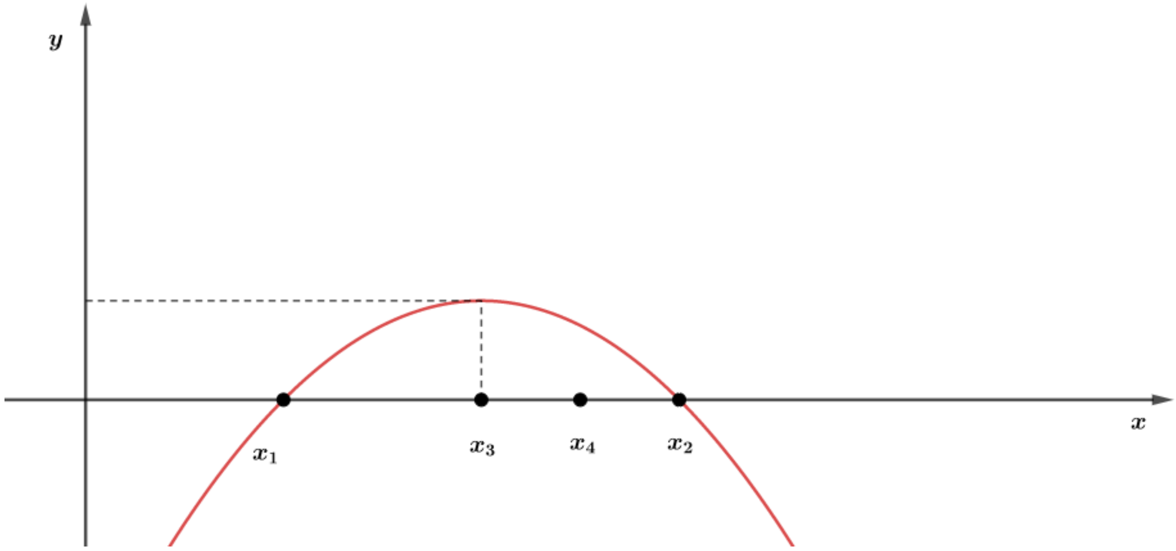
$$x_4<x_2$$

Como $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a} > 0$, temos:

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a} > -\frac{b}{2a}$$
$$x_4 > x_3$$

Portanto x_4 está entre x_3 e x_2.

Esboçando o gráfico, lembrando que $a < 0$:



Com isso, verificamos que $x_1 < x < x_4 \Rightarrow y > 0$.

Gabarito: "c".

115.(ITA/1985)

Considere as funções: $f(x) = x - \frac{7}{2}$ e $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ definidas para todo x real. Então, a respeito da solução da inequação $|(gof)(x)| > (gof)(x)$, podemos afirmar que:

a) Nenhum valor de x real é solução.

b) Se $x < 3$ então x é solução.

c) Se $x > 7/2$ então x é solução.

d) Se $x > 4$ então x é solução.

e) Se $3 < x < 4$ então x é solução.

Comentários

Vamos encontrar a função gof:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(x - \frac{7}{2}\right) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$
$$= x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{1}{4} = x^2 - 7x + 12$$

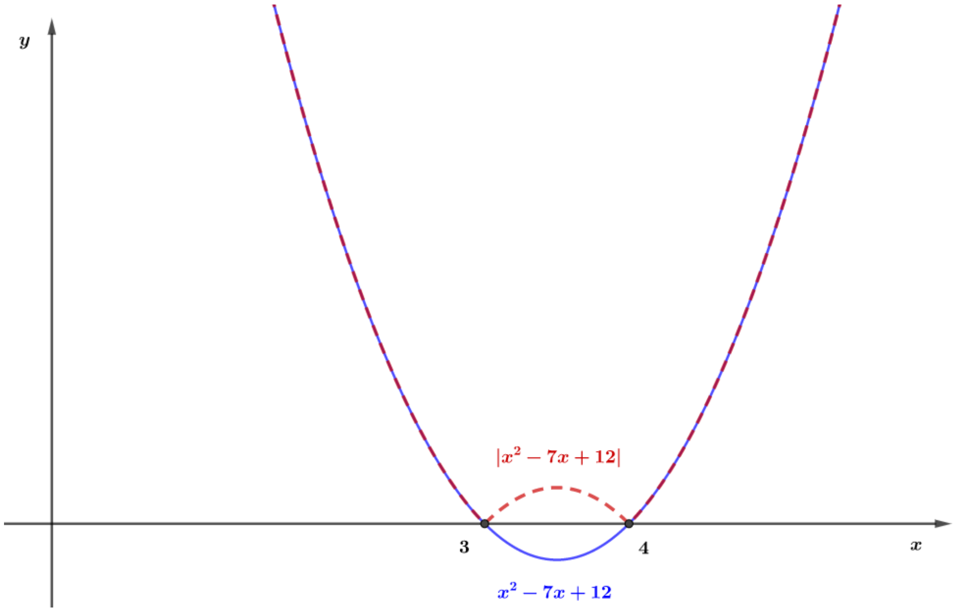
Queremos encontrar a solução de:

$$|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$$

Fatorando:

$$|(x-4)(x-3)| > (x-4)(x-3)$$

Vamos esboçar os gráficos das funções:



Perceba que a região que torna a inequação verdadeira é o intervalo de x entre 3 e 4. Então, temos como solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 4\}$$

Gabarito: "e".

116. (ITA/1980)

A curva $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1,1)$, $(2,m)$ e $(m,2)$, onde $m \in \mathbb{R} - \{2\}$. Determine todos os valores reais de m tal que a função admita valor mínimo.

Comentários

Para que a função quadrática assuma valor mínimo, devemos ter $a > 0$.

Substituindo os pontos na curva, obtemos as seguintes equações:

$$(1,1) \Rightarrow 1 = a + b + c \quad (I)$$

$$(2,m) \Rightarrow m = 4a + 2b + c \quad (II)$$

$$(m,2) \Rightarrow 2 = am^2 + bm + c \quad (III)$$

Devemos colocar a em função de m. Vamos escalonar o sistema obtido. Fazendo $(III) - (II)$ e $(II) - (I)$:

$$(III) - (II) \Rightarrow 2 - m = a(m^2 - 4) + b(m-2)$$

Do enunciado, temos $m \neq 2$. Podemos simplificar a equação:

$$-(m-2) = a(m-2)(m+2) + b(m-2)$$

$$-1 = a(m+2) + b \quad (IV)$$

$$(II) - (I) \Rightarrow m - 1 = 3a + b$$

Colocando b em função de a e m:

$$b = m - 1 - 3a$$

Substituindo b em (IV):

$$-1 = a(m+2) + (m-1-3a)$$

Colocando a em função de m e simplificando:

$$-1 = a(m+2) + (m-1) - 3a$$

$$-1 - m + 1 = a(m+2-3)$$

$$a = -\frac{m}{m-1} = \frac{m}{1-m}$$

Temos que satisfazer $a > 0$, então:

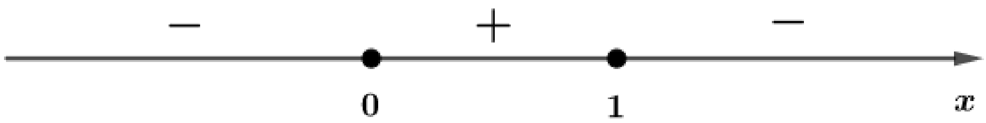
$$a > 0 \Rightarrow \frac{m}{1-m} > 0$$

Vamos fazer a análise do sinal da função, representando todas as raízes no eixo x:

Testando o sinal para $m = -1$:

$$-\frac{1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2} < 0$$

Como a multiplicidade de cada raiz é 1, temos:



Queremos valores positivos, então, os valores de m que satisfazem a inequação é dado por:

$$m \in]0,1[$$

Gabarito: $\boldsymbol{m \in]0,1[}$

117.(ITA/1977)

Considere a função $F(x) = |x^2 - 1|$ definida em ▯. Se FoF representa a função composta de F com F, analise as afirmações abaixo:

(1) $(FoF)(x) = x|x^2 - 1|$, para todo x real.

(2) Não existe número real y, tal que $(FoF)(y) = y$.

(3) FoF é uma função injetora.

(4) $(FoF)(x) = 0$, apenas para dois valores reais de x.

O número de afirmativas VERDADEIRAS é:

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

Comentários

(1) $(FoF)(x) = F(F(x)) = F(|x^2-1|) = \left||x^2-1|^2 - 1\right|$

Lembrando que vale a propriedade $|x^2-1|^2 = (x^2-1)^2$:

$$\left||x^2-1|^2 - 1\right| = |x^4 - 2x^2 + 1 - 1| = |x^4 - 2x^2| = x^2|x^2-2|$$

Logo, a afirmação não condiz com o resultado.

∴Falsa

(2) Usando o resultado da afirmação anterior:

$$(FoF)(y) = y^2|y^2-2|$$

Queremos encontra $y \in \mathbb{R}$, tal que $y^2|y^2-2| = y$.

Se $y = 0 \in \mathbb{R}$, temos:

$$0^2 \cdot |0^2 - 2| = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Logo, a afirmação é falsa.

∴Falsa

(3) Vamos verificar se FoF é injetora:

$$FoF(x) = x^2|x^2-2|$$
$$FoF(-x) = (-x)^2|(-x)^2-2| = x^2|x^2-2| = FoF(x)$$

Como FoF é par, FoF não é injetora.

∴Falsa

(4) Vamos encontrar a raiz de $(FoF)(x) = 0$:

$$x^2|x^2-2| = 0$$
$$x = 0$$

Ou

$$|x^2-2| = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Logo, temos 3 valores de x que satisfaz a equação.

∴Falsa

Gabarito: "e".

118.(ITA/1972)

Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Os valores de p para os quais $f(x) = 0$ possua raiz dupla positiva são:

a) $0 < p < 4$.

b) $p = 4$.

c) $p = 0$.

d) $f(x) = 0$ não pode ter raiz dupla positiva.

e) nenhuma das anteriores.

Comentários

Para a função possuir raiz dupla, devemos ter $\Delta = 0$:

$$\Delta = p^2 - 4p = 0$$

$$p(p-4) = 0$$

$$p = 0 \text{ ou } p = 4$$

Nesse caso, a raiz dupla é dado por:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2}$$

Queremos raiz positiva, então:

$$-\frac{p}{2} > 0 \Rightarrow p < 0$$

Com isso, concluímos que não é possível ter raiz dupla positiva já que 0 e 4 são os únicos possíveis valores para p.

Gabarito: "d".

119.(IME/2012)

Seja a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Obtém-se $f(x)$ igual a:

a) $x^2 - (a+b+c)x + abc$

b) $x^2 + x - abc$

c) x^2

d) $-x^2$

e) $x^2 - x + abc$

Comentários

Perceba que f é uma função quadrática. Veja:

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Os termos em vermelho são expressões quadráticas e os termos em verde são números reais. A soma das expressões quadráticas resulta em uma expressão quadrática. Logo, podemos escrever:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Vamos encontrar relações para f:

$$x = a \Rightarrow f(a) = \frac{a^2(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(a) = a^2$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = \frac{a^2(b-b)(b-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(b-a)(b-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(b) = b^2$$

$$x = c \Rightarrow f(c) = \frac{a^2(c-b)(c-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(c-c)(c-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(c) = c^2$$

Dessa forma, substituindo $x = a, b, c$ na função $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, encontramos o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta a + \gamma = a^2 \ \ (I) \\ \alpha b^2 + \beta b + \gamma = b^2 \ \ (II) \\ \alpha c^2 + \beta c + \gamma = c^2 \ \ (III) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$(I) - (II): \alpha(a-b)^2 + \beta(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(I) - (III): \alpha(a-c)^2 + \beta(a-c) = a^2 - c^2$$

Simplificando ambas as equações (lembrando $(a-b)^2 = (a+b)(a-b)$):

$$\begin{cases} \alpha(a+b) + \beta = a + b \ \ (III) \\ \alpha(a+c) + \beta = a + c \ \ (IV) \end{cases}$$

Fazendo $(III) - (IV)$:

$$\alpha(b-c) = b - c \Rightarrow \alpha = 1$$

Substituindo α em (III):

$$(1)(a+b) + \beta = a + b \Rightarrow \beta = 0$$

Substituindo α, β em (I):

$$(1)a^2 + (0)a + \gamma = a^2 \Rightarrow \gamma = 0$$

Portanto, encontramos $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$. f é dado por:

$$f(x) = x^2$$

Na hora da prova não precisaríamos realizar todas essas etapas para encontrar a resposta. Bastaria perceber a relação:

$$x = a \Rightarrow f(a) = a^2$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = b^2$$

$$x = c \Rightarrow f(c) = c^2$$

Poderíamos substituir $x = a, b, c$ nas alternativas e encontrar nossa resposta.

Gabarito: "c".

120.(IME/2007)

Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

a) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$

b) $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$

c) $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$

d) $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$

e) $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

Comentários

O enunciado afirma que a equação possui 2 raízes reais distintas, então:

$$\Delta > 0$$

$$\Delta = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = p^2 - 32 > 0$$

$$p^2 > 32$$

$$\Rightarrow |p| > 4\sqrt{2}$$

Vamos analisar as alternativas. Devemos analisar o valor de cada raiz:

$$r_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 32}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 32}}{2}$$

Entre as alternativas, vemos que (a) e (b) analisam a soma das raízes. Vamos somá-las:

$$r_1 + r_2 = -p$$

Calculando seu módulo:

$$|r_1 + r_2| = |p|$$

Da condição inicial, encontramos $|p| > 4\sqrt{2}$. Logo:

$$|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$$

Gabarito: "a".

121.(IME/2000)

Considere a, b e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação a seguir possui exatamente 2 raízes reais x_1 e x_2 tal que $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

Comentários

Inicialmente, vamos desenvolver a equação para poder analisá-lo:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

$$\frac{(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0$$

Para $x \neq a, b, c$, temos:

$$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$$

$$\Rightarrow f(x)=3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc$$

Queremos provar que essa função possui 2 raízes reais distintas tal que $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Sendo x_1 e x_2, as raízes da equação, devemos mostrar que o número b está entre as raízes. Vamos usar o teorema $a \cdot f(\alpha)$:

$$a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \; e \; x_1 < \alpha < x_2$$

Fazendo $\alpha = b$:

$$a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(b) = 3(b-a)(b-c)$$

Do enunciado, temos $a < b < c$. Então:

$$b-a > 0 \; e \; b-c < 0 \Rightarrow (b-a)(b-c) < 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot f(b) = 3(b-a)(b-c) < 0$$

Portanto, o número b está entre as raízes x_1 e x_2 e a equação possui 2 raízes distintas.

Vamos usar novamente o teorema para provar que a e c estão fora do intervalo entre as raízes:

$$3 \cdot f(a) = 3(a-b)(a-c)$$

$$a-b < 0 \; e \; a-c < 0 \Rightarrow (a-b)(a-c) > 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot f(a) > 0$$

$$3 \cdot f(c) = 3(c-a)(c-b)$$

$$c-a > 0 \; e \; c-b > 0 \Rightarrow (c-a)(c-b) > 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot f(c) > 0$$

$\therefore a, c$ estão fora do intervalo entre as raízes

Como $a < b < c$ e $x_1 < b < x_2$, temos:

$$a < x_1 < b < x_2 < c$$

Gabarito: Demonstração

122.(IME/1989)

Resolva o sistema para x e $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Comentários

O bizu nessa questão é fazer $a = \sqrt[6]{xy}$. Dessa forma, a primeira equação reescrita fica:

$$7a^2 - 3a^3 = 4$$
$$-3a^3 + 7a^2 - 4 = 0$$

Fatorando a expressão:

$$-3a^3 + 3a^2 + 4a^2 - 4 = 0$$
$$-3a^2(a-1) + 4(a^2-1) = 0$$
$$(a-1)\left(-3a^2 + 4(a+1)\right) = 0$$
$$(a-1)(-3a^2 + 4a + 4) = 0$$

Encontrando as raízes de $-3a^2 + 4a + 4$:

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-3)(4)}}{-3} = \frac{-2 \pm 4}{-3} = 2 \; ou - \frac{2}{3}$$

Dessa forma, temos:

$$\Rightarrow 3(a-1)(a-2)\left(a + \frac{2}{3}\right) = 0$$

Raízes:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -\frac{2}{3}$$

Para $a_1 = 1$:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = 1 \\ x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Substituindo uma equação na outra:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 20$$
$$x^2 - 20x + 1 = 0$$

Raízes:

$$x = 10 \pm \sqrt{100-1} = 10 \pm \sqrt{99} = 10 \pm 3\sqrt{11}$$

Para $x = 10 + 3\sqrt{11}$:

$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{10 + 3\sqrt{11}} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{100 - 9 \cdot 11} = 10 - 3\sqrt{11}$$

Para $x = 10 - 3\sqrt{11}$:

$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{10 - 3\sqrt{11}} = \frac{10 + 3\sqrt{11}}{100 + 9 \cdot 11} = 10 + 3\sqrt{11}$$

Para $a_2 = 2$:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = 2 \\ x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 64 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Substituindo uma equação na outra:

$$y = \frac{64}{x} \Rightarrow x + \frac{64}{x} = 20$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

Raízes:

$$x = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 = 16 \; ou \; 4$$

Para $x = 16$:

$$y = \frac{64}{16} = 4$$

Para $x = 4$:

$$y = \frac{64}{4} = 16$$

Para $a_3 = -2/3$:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = -\dfrac{2}{3} \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Não existe $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfaz o sistema, pois $\sqrt[6]{xy} \geq 0$.

Portanto, os pontos $(x; y)$ que satisfazem o sistema são:

$$\left(10 + 3\sqrt{11}; 10 - 3\sqrt{11}\right)$$

$$\left(10 - 3\sqrt{11}; 10 + 3\sqrt{11}\right)$$

$$(16; 4)$$

$$(4; 16)$$

Gabarito: $\left(\mathbf{10 + 3\sqrt{11}; 10 - 3\sqrt{11}}\right), \left(\mathbf{10 - 3\sqrt{11}; 10 + 3\sqrt{11}}\right), (\mathbf{16; 4}), (\mathbf{4; 16})$

123.(IME/1983)

Dada a equação:

$$\mathbf{2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0, m \in \mathbb{R}}$$

a) Calcule m tal que uma raiz seja nula. Calcule a outra raiz.

b) Mostre que a equação tem sempre 2 raízes distintas.

c) Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra superior a 1.

Comentários

a) Queremos uma raiz nula, então vamos substituir $x = 0$ na equação:

$$2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$$

$$-3m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

Para encontrar a outra raiz, substituímos o valor de m na equação:

$$2\left(-\frac{2}{3}\right)x^2 - 2x - 3\left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x^2 - 2x + 2 - 2 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x^2 - 2x = 0$$

$$x\left(\frac{4}{3}x + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0\ e\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

b) Vamos analisar o discriminante da equação:

$$2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (-3m - 2) = 4 + 24m^2 + 16m$$

$$\Delta = 24m^2 + 16m + 4$$

Se queremos que a equação tenha 2 raízes distintas, temos que provar que $\Delta > 0$:

Isso pode ser feito calculando Δ' da equação de Δ:

$$\Delta' = 16^2 - 4 \cdot 24 \cdot 4 = 256 - 384 = -128 < 0$$

Como $\Delta' < 0$, temos $\Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Portanto, a equação $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ tem sempre 2 raízes distintas.

c) Queremos que o número 1 esteja entre as raízes. Vamos usar o teorema $a \cdot f(\alpha)$:

$$a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow \Delta > 0\ e\ x_1 < \alpha < x_2$$

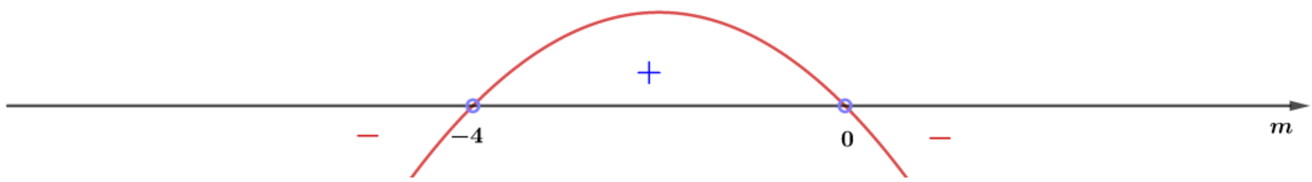
O nosso α é 1, vamos calcular $2m \cdot f(1)$:

$$2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$$

$$a \cdot f(\alpha) = 2m(2m - 2 - 3m - 2) = 2m(-m - 4) = -2m(m + 4)$$

$$\Rightarrow -2m(m + 4) < 0$$

Analisando o sinal da equação:



Assim, temos:

$$m < -4\ ou\ m > 0$$

Portanto, para esses valores de m, o número 1 estará entre as raízes da equação.

Gabarito: a) $m = -\frac{2}{3}$ e $x = -\frac{3}{2}$ b) Demonstração c) $m < -4\ ou\ m > 0$

124.(IME/1951)

Determine todos os valores possíveis da relação p/h, onde p e h satisfazem as condições $p > 0, h > 0$, de modo que seja real o valor de y dado pela expressão:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{p^2 - 2ph - h^2}}$$

Comentários

Dadas as condições do problema, sabemos que

$$p > 0 \; e \; h > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{p}{h} > 0}$$

Agora, vamos fatorar a expressão:

$$y = \sqrt{p^2 - 2ph - h^2}$$

$$y = \sqrt{p^2 - 2ph + h^2 - 2h^2}$$

$$y = \sqrt{(p-h)^2 - \left(\sqrt{2}h\right)^2}$$

$$y = \sqrt{\left(p - h - \sqrt{2}h\right)\left(p - h + \sqrt{2}h\right)}$$

Se queremos que y seja real, a expressão dentro do radical deve ser maior ou igual a zero:

$$\left(p - h - \sqrt{2}h\right)\left(p - h + \sqrt{2}h\right) \geq 0$$

Temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} p - h - \sqrt{2}h \geq 0 \\ p - h + \sqrt{2}h \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq h + \sqrt{2}h \\ p \geq h - \sqrt{2}h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{h} \geq 1 + \sqrt{2} \\ \frac{p}{h} \geq 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{h} \geq 1 + \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} p - h - \sqrt{2}h \leq 0 \\ p - h + \sqrt{2}h \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \leq h + \sqrt{2}h \\ p \leq h - \sqrt{2}h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{h} \leq 1 + \sqrt{2} \\ \frac{p}{h} \leq 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{h} \leq 1 - \sqrt{2}$$

Logo, para y ser real, a relação p/h deve pertencer ao conjunto:

$$\frac{p}{h} \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{2}\right] \cup \left[1 + \sqrt{2}, +\infty\right)$$

Mas como p/h foi deve ser positivo, devemos ter

$$\boxed{\frac{p}{h} \in \left[1 + \sqrt{2}, +\infty\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{p}{h} \in \left[1 + \sqrt{2}, +\infty\right)}$

---

125. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 - \beta x)$, em que α e β são números reais. Considere que essas funções são tais que:

f		g	
Valor mínimo	Ponto de Mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
-2	< 0	4	> 0

Dessa maneira, o valor de $f\big(g(2)\big) - 8\sqrt{2}$ é igual a:

a) 8

b) 4

c) 16

d) 25

e) 10

Comentários

Vamos descobrir as raízes dessas funções do segundo grau, pois o ponto de máximo (ou mínimo) de uma função de segundo grau é a média aritmética entre as suas raízes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \alpha x = 0 \Rightarrow x(x - \alpha) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = \alpha$$

$$\Rightarrow x_{v,f} = \frac{0 + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

A tabela afirma que o ponto de mínimo é negativo, portanto:

$$\frac{\alpha}{2} < 0 \Rightarrow \alpha < 0$$

Como o coeficiente líder (de x^2) em f é positivo, então essa função possui um mínimo. Esse mínimo obviamente é:

$$-2 = f(x_{v,f}) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\alpha^2}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha^2}{4} = -2 \Rightarrow \alpha^2 = 8 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2\sqrt{2}}$$

Agora, calculando as raízes de g:

$$g(x) = 0 \Rightarrow -(x^2 - \beta x) = 0 \Rightarrow x(x - \beta) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = \beta$$

Do mesmo modo, o ponto de máximo dessa função será a média aritmética das duas raízes:

$$x_{v,g} = \frac{0 + \beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

É dito no enunciado que seu ponto de máximo é positivo, portanto:

$$\frac{\beta}{2} > 0 \Rightarrow \beta > 0$$

Dessa maneira, o seu valor máximo é:

$$4 = g\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\left(\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \beta\cdot\frac{\beta}{2}\right) = -\left(\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{\beta^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{4} = 4 \Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\beta = 4}$$

Assim, pede-se o valor de $f(g(2)) - 8\sqrt{2}$

$$g(2) = -(2^2 - 4\cdot 2) = 4$$

$$\Rightarrow f(g(2)) = f(4) = 4^2 + 2\sqrt{2}\cdot 4 = 16 + 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(2)) - 8\sqrt{2} = 16$$

Gabarito: C

126.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Considere a função real $f(x) = 4 + 4x + 2x^2$. Determine o ponto x que define o valor mínimo global dessa função:

a) 0

b) 1

c) 2

d) -1

e) -2

Comentários

Completando quadrado na função quadrática dada:

$$f(x) = 4 + 4x + 2x^2 \Rightarrow \frac{f(x)}{2} = 2 + 2x + x^2 = 1 + (1 + 2x + x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{2} = 1 + (x+1)^2 \Rightarrow f(x) = 2 + 2(x+1)^2$$

Perceba que, como $(x+1)^2$ é sempre positivo, independentemente de x, então f será mínima quando esse termo for nulo, pois:

$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{2 + 2(x+1)^2}_{f(x)} \geq 2$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 2$$

A igualdade, obviamente, se dá quando $x = -1$. Isto é, o valor de x tal que essa função é mínima é justamente $x = -1$

Gabarito: D

127.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Considere as funções reais f, g e h tais que:

$$\boldsymbol{f(x) = mx^2 - (m+1)x + (m+1)}$$

$g(x) = \frac{2}{x}$

$h(x) = \sqrt{2x}$

Para que a função composta $h \circ g \circ f(x)$ tenha domínio $D = \mathbb{R}$, deve-se ter:

a) $m > \frac{2}{3}$

b) $3m - 1 > 0$

c) $m \geq \frac{1}{3}$

d) $3m + 1 > 0$

e) $m > -\frac{2}{3}$

Comentários

Vamos analisar qual é a função composta $h \circ g \circ f(x)$:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{2}{f(x)} = \frac{2}{mx^2 - (m+1)x + (m+1)}$$

$$\Rightarrow h \circ g \circ f(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \sqrt{\frac{4}{mx^2 - (m+1)x + (m+1)}}$$

Assim, para que a função $h \circ g \circ f(x) = F(x)$ tenha o domínio nos reais, é preciso que a expressão dentro da raiz quadrada seja maior que zero. Assim, vamos calcular m para que isso aconteça:

$$\frac{4}{mx^2 - (m+1)x + (m+1)} > 0 \Rightarrow mx^2 - (m+1)x + (m+1) > 0$$

Primeiro, vemos que como a função quadrática acima tem que ser maior que 0 para qualquer x, então o coeficiente do termo x^2 deve ser positivo, a fim de que a parábola tenha concavidade para cima, portanto $\boxed{m > 0}$.

Além disso, vemos que a expressão não pode ter raízes reais (pois não pode assumir valores negativos), o que implica que o Δ tem de ser menor que zero. Assim:

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m(m+1) = -3m^2 - 2m + 1 < 0$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 2m - 1 > 0 \Rightarrow 3m^2 - m + 3m - 1 > 0 \Rightarrow m(3m-1) + 3m - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(3m-1) > 0$$

Veja que o valor será positivo apenas quando os sinais dos fatores acima forem iguais: ambos negativos:

$$m < -1 \; e \; m < \frac{1}{3}$$

Ambos positivos:

$$m > -1 \; e \; m > \frac{1}{3}$$

Portanto, o intervalo desejado é:

$$m < -1 \; ou \; m > \frac{1}{3}$$

Entretanto, como queremos $m > 0$ para que a função apenas tenha valores positivos, então o intervalo que nos interessa:

$$m > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{3m - 1 > 0}$$

Gabarito: B

128.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Para que o sistema $\begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^3 = 2k \end{cases}$ admita apenas soluções reais para a, b, é preciso que todos os valores de k pertençam ao conjunto:

a) $[0, 1]$

b) $[1, \infty)$

c) $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

d) $[1, 9]$

e) $(-\infty, -1]$

Comentários

Fatorando a segunda equação, que é uma soma de cubos, atentos ao fato de que $\boxed{a + b = 2}$

$$a^3 + b^3 = \underbrace{(a + b)}_{2}(a^2 - ab + b^2) = 2k \Rightarrow 2(a^2 - ab + b^2) = 2k \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = k$$

Agora, completando quadrado na expressão da esquerda:

$$a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = k \Rightarrow \underbrace{(a + b)^2}_{2^2} - 3ab = k \Rightarrow 4 - 3ab = k \Rightarrow \boxed{ab = \frac{4 - k}{3}}$$

Portanto, temos a soma de $a + b$ e o produto ab. Assim, podemos montar uma equação do segundo grau, por soma e produto, que tenham a e b como raízes:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{4 - k}{3} = 0$$

Para que as raízes a e b sejam reais, basta que o discriminante Δ seja maior ou igual a 0:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{4 - k}{3} = 4 + \frac{4k - 16}{3}$$

Queremos que $\Delta \geq 0$:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4 + \frac{4k - 16}{3} \geq 0 \Rightarrow 4 \geq \frac{16 - 4k}{3} \Rightarrow 12 \geq 16 - 4k \Rightarrow 4k \geq 16 - 12$$

$$\Rightarrow 4k \geq 4 \Rightarrow \boxed{k \geq 1}$$

Portanto, a única alternativa que contém todos os valores de k é a letra b.

Gabarito: B

129. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Examine a função real $f(x) = 4x - 5x^2$ quanto à existência de valores e pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa correta:

a) A função atinge o valor máximo de $\frac{2}{5}$, no ponto $x = \frac{4}{5}$.

b) A função atinge o valor mínimo de $-\frac{4}{5}$, no ponto $x = \frac{2}{5}$.

c) A função atinge o valor mínimo de $\frac{2}{5}$, no ponto $x = \frac{2}{5}$.

d) A função atinge valor máximo de $\frac{4}{5}$, no ponto $x = \frac{2}{5}$.

e) A função atinge valor máximo de $\frac{4}{5}$, no ponto $x = \frac{4}{5}$.

Comentários

Pede-se informações sobre máximos ou mínimos da função quadrática dada. Vamos completar quadrado da expressão para chegar à conclusão (pode aplicar x_v também):

$$f(x) = 4x - 5x^2 = -(5x^2 - 4x)$$

$$a = \sqrt{5}x$$

$$2ab = 4x \Rightarrow 2\sqrt{5}xb = 4x \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow b^2 = \frac{4}{5}$$

Portanto, subtraindo $4/5$ e somando $4/5$:

$$f(x) = -\left(5x^2 - 4x + \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} - \left(\sqrt{5}x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Portanto, como f é $4/5$ subtraído de um número que é sempre positivo, independentemente de x, pois é uma expressão ao quadrado, então f será máxima quando:

$$\left(\sqrt{5}x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{5}x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

Para esse valor de x a função é:

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = 4 \cdot \frac{2}{5} - 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} - 5 \cdot \frac{4}{25} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

Gabarito: D

130. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Seja c a maior constante real tal que

$$x^2 + 3y^2 \geq c \cdot (x^2 + xy + 4y^2)$$

para todos x, y reais.

Determine o inteiro mais próximo de $2020 \cdot c$.

A) 2041

B) 2027

C) 1347

D) 1321

Comentários

Vamos fazer $\boldsymbol{x = t \cdot y}$, assim a inequação inicial fica

$$\boldsymbol{t^2 + 3 \geq c(t^2 + t + 4) \rightarrow (c-1)t^2 + ct + (4c-3) \leq 0}$$

para todo $\boldsymbol{t}$ real. Para isto, devemos ter

$$\boldsymbol{(c-1) < 0 \Rightarrow c < 1}$$

$$\boldsymbol{\Delta = c^2 - 4(c-1)(4c-3) \leq 0}$$

Daí, temos que

$$\boldsymbol{-15c^2 + 28c - 12 \leq 0}$$

Fazendo o estudo do sinal, encontramos duas raízes $c_1 = 2/3$ e $c_2 = 6/5$. Assim, temos:

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{c \leq \frac{2}{3}\ (ok)} \\ \boldsymbol{c \geq \frac{6}{5}\ (não\ convém)} \end{cases}$$

Dessa forma, o maior valor possível para $\boldsymbol{c}$ é $\boldsymbol{c = \frac{2}{3}}$. Com isso

$$\boldsymbol{2020c = 2020 \cdot \frac{2}{3} \approx 1347}$$

Gabarito: C

---

131. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Seja f uma função definida por $f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2}, \forall\, x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x, \forall\, x > 1 \end{cases}$. Marque a alternativa incorreta sobre f:

a) A função f é injetora.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}$ a função é crescente

c) A função admite inversa tal que $f^{-1}(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2},\ \forall\, x \leq -\frac{1}{2} \\ 1 + \sqrt{1 + 2x},\ \forall\, x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

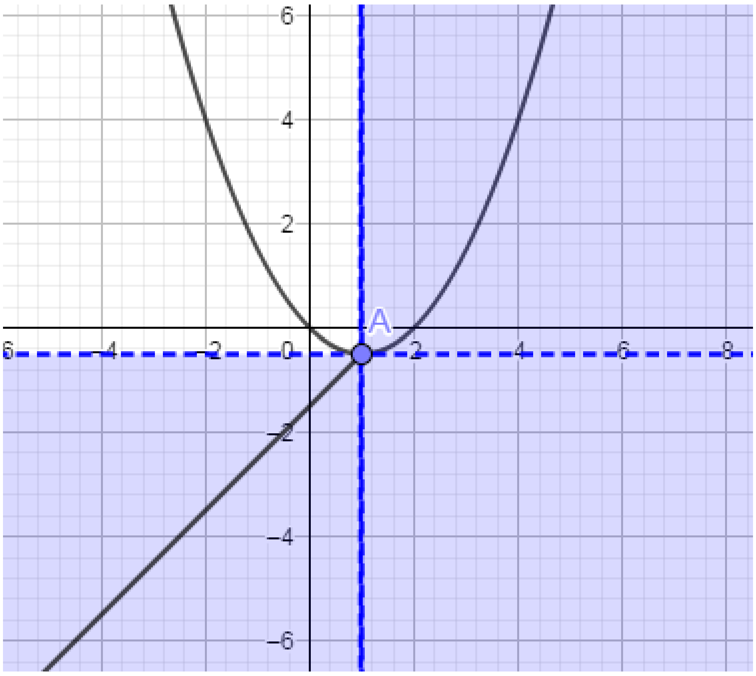
d) As raízes de f são $x = 0$ e $x = 2$.

Comentários

Para analisar a função f vamos construir o seu gráfico. Para isso, sabemos que o gráfico será composto de uma reta $x - 3/2$ para $x \leq 1$ e de uma parábola para $x > 1$. Entretanto, vamos calcular o ponto de vértice da parábola, para sabermos se nesse intervalo $(x > 1)$ a função quadrática $\frac{x^2}{2} - x$ é estritamente crescente ou não:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

Portanto, como o ponto de mínimo da parábola é $x = 1$, significa que para $x > 1$ a função quadrática é crescente, pela própria definição de ponto mínimo. Também no intervalo anterior $x \leq 1$, a função $(x - \frac{3}{2})$ é uma reta com coeficiente angular positivo, o que implica que também é crescente. Portanto, a função é estritamente crescente para toda a reta real. Assim, a alternativa a) e a alternativa b) são corretas, uma vez que a injetividade é garantida pelo fato da função ser sempre crescente. Vejamos o gráfico da função f para anular eventuais dúvidas:



A parte do gráfico que está na área em azul é o gráfico da nossa função f. Perceba que é uma reta para $x \leq 1$ e uma parábola para $x > 1$. Portanto, vemos graficamente que a função é crescente e injetora, e que seu conjunto imagem é todo o conjunto dos reais. Isso implica que a função é também sobrejetora, e por isso, admite inversa. Vamos calcular qual é a função inversa de f: sabemos que para fazer isso, basta chamarmos o x da expressão de f de y da f^{-1} e o y da f de x da f^{-1}. Assim, na f:

$$f(x) = y = \begin{cases} x - \frac{3}{2}, \forall\, x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x, \forall\, x > 1 \end{cases}$$

Assim, na f^{-1}:

$$x = y - \frac{3}{2}, \forall\, y \leq 1 \Rightarrow y = x + \frac{3}{2}, \forall\, x \leq -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{y^2}{2} - y, \forall\, y > 1 \Rightarrow y^2 - 2y - 2x = 0$$

Por Bhaskara e sabendo que $y > 1$ nesse caso:

$$y = \frac{2 + \sqrt{4 - 4(-2x)}}{2} = 1 + \sqrt{1 + 2x}$$

Portanto, temos a inversa de f:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}, & \forall\, x \leq -\frac{1}{2} \\ 1 + \sqrt{1 + 2x}, & \forall\, x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, a alternativa c) é verdadeira. Nos resta, portanto, a alternativa d) como falsa, até porque a raiz de f, na verdade é única e é $x = 2$, como pode-se ver na figura mostrada mais acima.

Gabarito: D

132.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Analise as alternativas:

I. Se $x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x + 1 = 0$, então $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} \neq 0$

II. $\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \cdots + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} < \frac{1}{2}$

III. Seja a função $f: A \to B$ e X e Y dois subconjuntos quaisquer de A, então $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

IV. O inverso de um número irracional sempre é irracional.

São corretas:

a) I, apenas.

b) I e III, apenas.

c) II e IV, apenas.

d) I, III e IV, apenas.

e) I e IV, apenas.

Comentários

I. Vamos analisar primeiramente para quais valores de x a expressão a ser analisada é nula:

$$x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^8 + x^5 + 1}{x^6} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^5(x^3 + 1) + 1}{x^6} = 0$$

Porém, pelo enunciado, $x^3 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = -x$. Daí:

$$\frac{x^5(-x) + 1}{x^6} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^6}{x^6} = 0\ (*)$$

Como $x \in \mathbb{R}$, o numerador só possui duas raízes reais $x = \pm 1$:

$$1 - x^6 = 0 \Rightarrow (1 - x^3)(1 + x^3) = 0 \Rightarrow (1 - x) \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 + x) \cdot (1 - x + x^2) = 0$$

Veja que os polinômios $1+x+x^2$ e $1-x+x^2$ não possuem raízes reais e, portanto, são sempre diferentes de 0. Assim, provamos que os únicos valores que satisfazem $(*)$ são $x=\pm 1$. Agora, basta vermos se esses valores satisfazem $x^3+x+1=0$.

$$(-1)^3+(-1)+1=-1\neq 0, não\ satisfaz$$

$$1^3+1+1=3\neq 0, não\ satisfaz$$

Portanto, concluímos que a alternativa é verdadeira.

II. Veja que do lado esquerdo da desigualdade temos 1010 parcelas de soma. E que o último termo da soma é dividido por 2020. Ainda, do lado esquerdo da desigualdade temos o valor 1/2. Assim, vamos usar desigualdades conhecidas para chegar a um resultado conclusivo:

$$\frac{1}{1011}>\frac{1}{2020}$$

$$\frac{1}{1012}>\frac{1}{2020}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2019}>\frac{1}{2020}$$

Somando todas as desigualdades acima, obtemos:

$$\frac{1}{1011}+\frac{1}{1012}+\cdots+\frac{1}{2019}>1009\cdot\frac{1}{2020}$$

Somando 1/2020 em ambos os lados:

$$\frac{1}{1011}+\frac{1}{1012}+\cdots+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}>1010\cdot\frac{1}{2020}=\frac{1}{2}$$

Portanto, a alternativa é falsa.

III. Denotemos $X-Y=\{x_1,x_2,\dots\}, X\cap Y=\{z_1,z_2,\dots\}\ e\ Y-X=\{y_1,y_2,\dots\}$. Sendo assim, sabemos que $X\cup Y=(X-Y)\cup(X\cap Y)\cup(Y-X)$.

Logo, sabemos que $X\cup Y=\{x_1,x_2,\dots,z_1,z_2,\dots,y_1,y_2,\dots\}$. Portanto, pela definição de função, $f(X\cup Y)=\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(z_1),f(z_2),\dots,f(y_1),f(y_2),\dots\}$. Por outro lado, $X=\{x_1,x_2,\dots,z_1,z_2,\dots,\}$ e $Y=\{z_1,z_2,\dots,y_1,y_2,\dots\}$. Assim:

$$f(X)\cup f(Y)=\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(z_1),f(z_2),\dots\}\cup\{f(z_1),f(z_2),\dots,f(y_1),f(y_2),\dots\}$$

$$\Rightarrow f(X)\cup f(Y)=\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(z_1),f(z_2),\dots,f(y_1),f(y_2),\dots\}$$

$$\Rightarrow f(X)\cup f(Y)=f(X\cup Y)$$

Portanto, a afirmativa é verdadeira.

IV. Considere que exista um número irracional x $(x\notin\mathbb{Q})$ tal que $\frac{1}{x}$ é racional. Sabemos que a divisão de dois números racionais é racional. Portanto, se dividirmos 1 (racional) por $\frac{1}{x}$ (racional por hipótese), teremos um número racional:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}}=x\in\mathbb{Q}, ABSURDO!$$

Note que se admitirmos que existe um número que não satisfaz o que a alternativa sugere, chegaremos em um absurdo. Logo, a alternativa é verdadeira.

Gabarito: D

133.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Resolvendo a inequação:

$$\frac{16x^2}{\left(1-\sqrt{\frac{8x+3}{3}}\right)^2} > 9$$

Para $x \in \mathbb{R}$, obtemos como conjunto solução:

a) $]-\frac{3}{8}, +\infty[$.

b) $[-\frac{3}{8}, 0[$.

c) $]0, \frac{5}{3}[$.

d) $]0, +\infty[$.

e) $]-\infty, 0[$.

Comentários

Primeiramente, para que a inequação seja válida, o denominador da desigualdade precisa ser diferente de zero e a expressão dentro da raiz não pode ser negativa:

$$1-\sqrt{\frac{8x+3}{3}} \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq 0}$$

Além disso:

$$\frac{8x+3}{3} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -\frac{3}{8}}$$

Mas para o caso em que ocorre a igualdade acima, temos:

$$x = -\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{8x+3}{3} = 0 \Rightarrow \frac{16x^2}{1} > 9 \Rightarrow 16x^2 > 9 \Rightarrow x > \frac{3}{4} \; ou \; x < -\frac{3}{4}$$

Como $-\frac{3}{8} > -\frac{3}{4}$, temos que não pode existir a igualdade. Assim, até agora, temos:

$$x > -\frac{3}{8} \; e \; x \neq 0$$

Vamos resolver a inequação:

$$\frac{16x^2}{\left(1-\sqrt{\frac{8x+3}{3}}\right)^2} > 9 \Rightarrow 16x^2 > 9\left(1-\sqrt{\frac{8x+3}{3}}\right)^2 \Rightarrow 16x^2 > \left(3-3\sqrt{\frac{8x+3}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 16x^2 > \left(3-\sqrt{24x+9}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{|4x| > \left|3-\sqrt{24x+9}\right|}$$

Separando em casos:

$$x > 0 \Rightarrow \boxed{4x > 0} \Rightarrow 24x > 0 \Rightarrow 24x+9 > 9 \Rightarrow \sqrt{24x+9} > 3 \Rightarrow \boxed{\sqrt{24x+9}-3 > 0}$$

$$\Rightarrow |4x| = 4x > \left|3-\sqrt{24x+9}\right| = \sqrt{24x+9}-3$$

$$\Rightarrow 4x > \sqrt{24x+9}-3 \Rightarrow 4x+3 > \sqrt{24x+9} \Rightarrow (4x+3)^2 > 24x+9$$

$$\Rightarrow 16x^2+24x+9 > 24x+9 \Rightarrow \boxed{16x^2 > 0}\,(*)$$

Assim, vemos que a solução para esse caso é qualquer número $x > 0$, já que qualquer número real satisfaz a desigualdade $(*)$ acima, e nesse caso tratamos apenas reais positivos.

$$-\frac{3}{8} < x < 0 \Rightarrow \boxed{4x < 0} \text{ e } -9 < 24x < 0 \Rightarrow 0 < 24x+9 < 9 \Rightarrow \boxed{0 < \sqrt{24x+9} < 3}$$

$$-4x > 3-\sqrt{24x+9} \Rightarrow 4x+3 < \sqrt{24x+9}$$

$$\Rightarrow (4x+3)^2 < 24x+9 \Rightarrow 16x^2+24x+9 < 24x+9$$

$$\Rightarrow \boxed{16x^2 < 0}\,(**)$$

A inequação acima $(**)$ é uma incoerência, pois qualquer quadrado de número real é positivo. Assim, esse caso não gera soluções.

Portanto, o único caso que gera solução é para $x > 0$, e o conjunto solução para esse caso é o próprio semieixo real positivo $x > 0$ ou o intervalo $]0,+\infty[$.

Gabarito: D

134.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Seja $f: \left[0,\frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \le x < \dfrac{1}{4} \\ 4x-1, & \dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Seja $g: \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f\left(x+\dfrac{1}{4}\right), & -\dfrac{1}{4} < x < 0 \\ 1-f\left(x+\dfrac{1}{4}\right), & 0 \le x < \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Sobre a função g é correto afirmar:

a) É injetora.

b) É sobrejetora.

c) É par.

d) É ímpar.

e) Não é par nem ímpar.

Comentários

Vamos analisar a g. Vemos que ela depende unicamente de $f\left(x+\frac{1}{4}\right)$. Vamos analisar quem é $f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ pela definição de f do enunciado:

$$f\left(x+\frac{1}{4}\right)=\begin{cases}4\left(x+\frac{1}{4}\right), & 0\leq\left(x+\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{4}\\ 4\left(x+\frac{1}{4}\right)-1, & \frac{1}{4}\leq\left(x+\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(x+\frac{1}{4}\right)=\begin{cases}4\left(x+\frac{1}{4}\right), & -\frac{1}{4}\leq x<0\\ 4\left(x+\frac{1}{4}\right)-1, & 0\leq x<\frac{1}{4}\end{cases}$$

Assim, veja como ficou fácil agora de definir $g(x)$. Pelo dado do enunciado e pela expressão de $f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ deduzida acima, para os devidos intervalos de x, temos:

$$-\frac{1}{4}\leq x<0\Rightarrow g(x)=f\left(x+\frac{1}{4}\right)=4\left(x+\frac{1}{4}\right)=4x+1$$

$$0\leq x<\frac{1}{4}\Rightarrow g(x)=1-f\left(x+\frac{1}{4}\right)=1-\left[4\left(x+\frac{1}{4}\right)-1\right]=1-4x$$

Assim, reescrevendo $g(x)$ em função apenas de x:

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases}4x+1, & -\frac{1}{4}<x<0\\ 1-4x, & 0\leq x<\frac{1}{4}\end{cases}}$$

Analisando a paridade de $\boldsymbol{g(x)}$, se pegarmos um $\boldsymbol{x}\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ tal que $\boldsymbol{x\geq 0}$ $\left(\boldsymbol{0\leq x<\frac{1}{4}}\right)$:

$$\boldsymbol{g(x)=1-4x=1+4\cdot(-x)}$$

$$\boldsymbol{0\leq x<\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{4}<(-x)\leq 0\Rightarrow g(-x)=1+4\cdot(-x)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow g(x)=g(-x)}$$

Se, por outro lado, pegarmos um $\boldsymbol{x}\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ tal que $\boldsymbol{x<0}$ $\left(\boldsymbol{-\frac{1}{4}<x<0}\right)$:

$$\boldsymbol{g(x)=4x+1=1-4(-x)}$$

$$\boldsymbol{-\frac{1}{4}<x<0\Rightarrow 0<(-x)<\frac{1}{4}\Rightarrow g(-x)=1-4(-x)=g(x)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow g(x)=g(-x)}$$

Portanto, a função tal que $g(x)=g(-x)$ para todo seu domínio, podendo ser classificada de função par.

Consequentemente ela não é injetora nem muito menos sobrejetora, pois sua imagem não é igual ao eixo real.

Gabarito: C

135.(Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Encontre todas as soluções reais do sistema de equações:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Comentários

Vamos reescrever o sistema na forma:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \\ y(x+y)^2 = 2 \end{cases}$$

A ideia é dividir as equações, mas antes disso, veja que isso somente é possível quando o fator em comum é não nulo, ou seja, $x \neq -y$:

$$\frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{y(x+y)^2} = \frac{1}{2}$$

Que resulta em:

$$2(x^2 - xy + y^2) = y(x+y)$$

Ou ainda:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = 0$$

Vamos usar a ideia de encarar a equação em uma das variáveis, digamos y, do que resulta em:

$$y = x \text{ e } y = 2x$$

Fazendo $y = x$ na primeira equação:

$$(x+x)(x^2 - xx + x^2) = 1$$

$$2x^3 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Veja que estamos interessados apenas nas soluções REAIS do sistema, por isso encontramos o seguinte par ordenado:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

Fazendo $y = 2x$ na primeira equação:

$$(x+2x)(x^2 - x(2x) + (2x)^2) = 1$$

$$(3x)(3x^2) = 1$$

$$9x^3 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

Do que segue que:

$$y = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$$

Novamente, estamos interessados apenas nas soluções REAIS do sistema, do que segue como solução o par ordenado:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)\right\}}$**.**

136.(Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Suponha que α e β são raízes distintas da equação $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). $[\alpha, \beta]$ é o domínio da função $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$. Encontre o máximo valor de $g(t) = \text{máx}[f(x)] - \text{mín}[f(x)]$.

Comentários

Primeiramente, sejam $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$. Faz sentido, nesse contexto, estudar o comportamento da função $f(x)$ quando se **aumenta** os valores do domínio.

Seja $h(x) = 4x^2 - 4tx - 1$, do estudo das funções do segundo grau, como $a = 4 > 0$, temos que a função h representa uma parábola com concavidade para cima, então para $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, podemos escrever:

$$h(x_1) < 0 \Rightarrow 4x_1^2 - 4tx_1 - 1 < 0$$

$$h(x_2) < 0 \Rightarrow 4x_2^2 - 4tx_2 - 1 < 0$$

Portanto,

$$4(x_1^2 + x_2^2) - 4t(x_1 + x_2) - 2 < 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 < t(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}$$

Da nossa suposição

$$x_2 > x_1 \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 > 0 \Rightarrow x_2^2 + x_1^2 > 2x_1x_2$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2 < t(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}$$

Disso, podemos escrever que:

$$2x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} < 0 \ (ineq. 1)$$

Mas

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2 - t}{x_2^2 + 1} - \frac{2x_1 - t}{x_1^2 + 1} = \frac{(x_2 - x_1)[t(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + 2]}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_2 - x_1)[t(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + 2]}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \quad (eq.2)$$

Observe que se o sinal do lado esquerdo for sempre positivo, podemos afirmar que nossa função é crescente. Já sabemos que:

$$x_2 - x_1 > 0$$

E

$$x_1^2 + 1, x_2^2 + 1 > 0$$

Da inequação 1:

$$t(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + \frac{1}{2} > 0$$

Mas:

$$t(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + 2 > t(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + \frac{1}{2} > 0$$

Ou seja, nossa função é estritamente crescente.

Sabemos, das relações de Girard, que:

$$\alpha + \beta = t \text{ e } \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

Logo:

$$g(t) = \text{máx}[f(x)] - \text{mín}[f(x)] = f(\beta) - f(\alpha)$$

Usando a equação 2, temos que

$$g(t) = f(\beta) - f(\alpha) = \frac{(\beta - \alpha)[t(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta + 2]}{(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{(\beta - \alpha)[t(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta + 2]}{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta)^2 + 1}$$

Como α e β são raízes distintas da equação $4x^2 - 4tx - 1 = 0$, temos:

$$x = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 + 4}}{4} = \frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2} \text{ e } \alpha = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2}$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = \sqrt{t^2 + 1}$$

Além disso:

$$4\alpha^2 - 4t\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = t\alpha + \frac{1}{4}$$

$$4\beta^2 - 4t\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 = t\beta + \frac{1}{4}$$

Somando essas equações:

$$\alpha^2+\beta^2=t\underbrace{(\alpha+\beta)}_{t}+\frac{1}{2}=t^2+\frac{1}{2}$$

Substituindo os valores das variáveis na função g, obtemos:

$$g(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}\left[t^2-2\left(-\frac{1}{4}\right)+2\right]}{t^2+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+1}$$

Ou seja:

$$g(t)=\frac{\left(\sqrt{t^2+1}\right)\left(t^2+\frac{5}{2}\right)}{t^2+\frac{25}{16}}=\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}$$

Gabarito: $\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}$.

137.(Estratégia Militares – Prof. Victor So)

No intervalo $[1,2]$, as funções $f(x)=x^2+px+q$ e $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$ admitem o mesmo valor de mínimo no mesmo ponto. Qual é o valor máximo de $f(x)$ nesse intervalo?

a) $4+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

b) $4-\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

c) $1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

d) $4+\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

e) Nenhum dos valores acima.

Comentários

Uma forma de estudar o valor de mínimo da função $g(x)$ é utilizando a desigualdade entre as médias, veja:

$$x+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Esse valor de mínimo ocorre quando:

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

Como $\sqrt[3]{2}\in[1,2]$, podemos afirmar que:

$$-\frac{p}{2}=\sqrt[3]{2}\Rightarrow p=-2\sqrt[3]{2}$$

E:

$$f(\sqrt[3]{2})=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}+q\Rightarrow q=\sqrt[3]{4}+\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

Como o mínimo valor ocorre para $x = \sqrt[3]{2}$ e a concavidade da parábola é para cima, sempre que $x > \sqrt[3]{2}$ a função $f(x)$ é crescente.

Logo, nesse intervalo, seu máximo valor é:

$$f(2) = 2^2 - 2\sqrt[3]{2} \cdot 2 + \sqrt[3]{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} = 4 - \frac{5}{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

Gabarito: B

---

138. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Resolva a equação paramétrica na variável $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1 - (x + a)}$$

Comentários

Vamos estabelecer as condições de existência:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ a \geq 0 \\ 1 - (x + a) \geq 0 \end{cases}$$

Assim, para $a < 0$, a equação não possui raiz real.

Para $a \geq 0$, vamos elevar a equação ao quadrado:

$x + 2\sqrt{ax} + a = 1 - (x + a)$

$2\sqrt{ax} = 1 - 2x - 2a$

Aqui, temos como nova condição

$$\begin{cases} ax \geq 0 \\ 1 - 2x - 2a \geq 0 \end{cases}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$4(ax) = 1 + 4x^2 + 4a^2 + 2(-2x - 2a + 4ax)$$

$$4x^2 - 4x + 8ax - 4a + 1 + 4a^2 - 4ax = 0$$

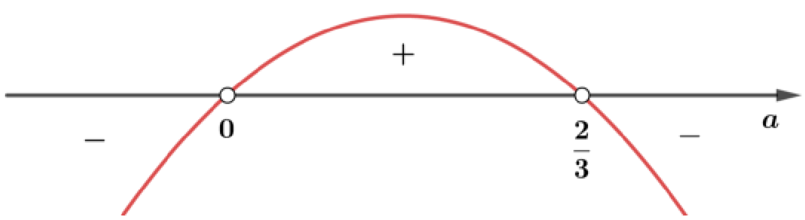
$$4x^2 + 4(a - 1)x + 4a^2 - 4a + 1 = 0$$

Calculando o discriminante:

$$\Delta = 16(a - 1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (4a^2 - 4a + 1)$$

$$\Delta = 16(a^2 - 2a + 1 - 4a^2 + 4a - 1) = 16a(-3a + 2)$$

Fazendo o estudo do sinal:



Veja que $a < 0$ ou $a > 2/3$, temos $\Delta < 0$, logo não há solução real.

Para $0 \leq a \leq 2/3$:

$$4x^2+4(a-1)x+4a^2-4a+1=0$$

$$x=\frac{-4(a-1)\pm\sqrt{16a(-3a+2)}}{8}=\frac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2}$$

Vamos verificar se as raízes satisfazem todas as restrições do problema:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-(x+a)\geq 0 \\ 1-2(x+a)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x+a\leq 1 \\ x+a\leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x+a\leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Testando $x_1=\frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}\geq 0 \\ \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a\leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como $0\leq a\leq 2/3$, temos a primeira desigualdade satisfeita. Para a segunda desigualdade:

$$\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2a-3a^2}}_{\geq 0}\leq \underbrace{-a}_{\leq 0}$$

Note que, a única forma da desigualdade ser satisfeita é se $a=0$. Para esse valor, temos como solução:

$$x=\frac{1}{2}$$

Testando $x_2=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}\geq 0 \\ \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a\leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2a-3a^2}\leq 1-a \\ \sqrt{2a-3a^2}\geq a \end{cases}$$

Como o lado direito de ambas desigualdades é positivo, podemos elevá-las ao quadrado:

$$\begin{cases} 2a-3a^2\leq a^2-2a+1 \\ 2a-3a^2\geq a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2-4a+1\geq 0 \\ 4a^2-2a\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a-1)^2\geq 0 \\ 2a(2a-1)\leq 0 \end{cases}$$

Da primeira inequação, temos que ela será verdadeira para qualquer valor de a. Para a segunda inequação:

$$0\leq a\leq\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\Rightarrow x_2=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$$

Portanto, a solução da equação é:

$$\begin{cases} a < 0 \; ou \; a > \dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \emptyset \\ 0 \leq a \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\dfrac{1 - a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2}\right\} \end{cases}$$

Gabarito: $\begin{cases} \boldsymbol{a < 0 \; ou \; a > \frac{1}{2} \Rightarrow S = \emptyset} \\ \boldsymbol{0 \leq a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}\right\}} \end{cases}$

---

139. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = m\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

a) Para que valores do parâmetro real m a equação admite raízes reais?

b) Determine essas raízes.

Comentários

Analisando os radicais e o denominador, percebemos que x deve ser um número real positivo.

Vamos multiplicar o lado esquerdo da equação pelo conjugado dessa expressão:

$$\frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = m\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$\frac{\left(x + \sqrt{x}\right) - \left(x - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = m\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \frac{m\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Assim, temos que o lado esquerdo sempre é positivo, logo

$$\frac{m\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} > 0 \Rightarrow m > 0$$

Como $x > 0$, temos:

$$2\sqrt{x + \sqrt{x}} = m\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}\right)$$

$$(2 - m)\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x}}}_{>0} = \underbrace{m}_{>0}\underbrace{\sqrt{x - \sqrt{x}}}_{\geq 0}$$

Temos como condição:

$$2 - m \geq 0 \Rightarrow \boxed{m \leq 2}$$

Elevando ao quadrado:

$$(2-m)^2\left(x+\sqrt{x}\right) = m^2\left(x-\sqrt{x}\right)$$

$$(2-m)^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = m^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$(2-m)^2\left(\sqrt{x}+1\right) = m^2\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$(2-m)^2\sqrt{x} + (2-m)^2 = m^2\sqrt{x} - m^2$$

$$(4-4m+m^2) + m^2 = m^2\sqrt{x} - (4-4m+m^2)\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}(4m-4) = 2m^2 - 4m + 4$$

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{>0} = \frac{m^2-2m+2}{2(m-1)}$$

Analisando a equação:

$$\frac{m^2-2m+2}{2(m-1)} > 0$$

O numerador sempre é positivo, pois

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0 \therefore m^2 - 2m + 2 > 0$$

Logo, o denominador deve ser positivo:

$$2(m-1) > 0 \Rightarrow \boxed{m > 1}$$

Com isso, elevando ao quadrado, obtemos a raiz da equação:

$$x = \frac{(m^2-2m+2)^2}{4(m-1)^2}; 1 < m \leq 2$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = \frac{\left(m^2-2m+2\right)^2}{4(m-1)^2}; 1 < m \leq 2}$

---

140. (Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Sobre a equação na variável real x,

$$|x+3| + |x-1| = x + 1$$

Podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) ela admite 3 raízes reais.

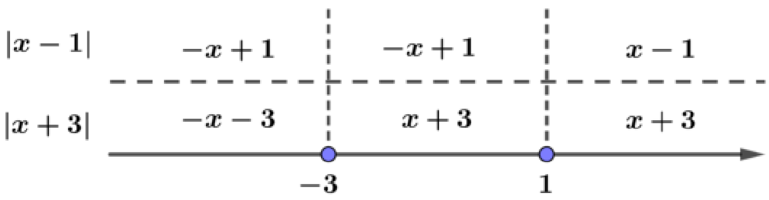
c) a soma de todas as suas soluções é 2.

d) ela admite apenas 3 soluções reais.

e) a soma de todas as suas soluções é 6.

Comentários

Vamos analisar os intervalos da equação, fazendo o estudo do sinal das funções modulares:



Para $x \geq 1$:

$$x+3+x-1=x+1 \therefore x=-1 \Rightarrow \text{não convém}$$

Para $-3 \leq x < 1$:

$$x+3-x+1=x+1 \therefore x=3 \Rightarrow \text{não convém}$$

Para $x < -3$:

$$-x-3-x+1=x+1 \therefore x=-1 \Rightarrow \text{não convém}$$

Portanto, a equação não possui solução real.

Gabarito: A

141.(Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Calcule o conjunto de valores reais de a para que a seguinte inequação seja satisfeita para qualquer valor real de x:

$$3a(a+2)x^2+3(x+1)>x(9x+8a)$$

a) $]-3;1[$

b) $]1;4[$

c) $]0;2[$

d) $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

e) $]1,5;2,786[$

Comentários

Primeiramente, vamos reescrever a inequação fornecida:

$$(3a^2+6a-9)x^2+(3-8a)x+3>0$$

Para que a parábola esteja sempre acima do eixo x, basta que o coeficiente do x^2 seja sempre positivo e que o discriminante seja sempre negativo, isto é, a equação não possua raízes reais.

Para satisfazer a primeira condição:

$$3a^2+6a-9>0$$

Que, fazendo o estudo do sinal dessa equação do segundo grau:

$$a<-3 \text{ ou } a>1$$

Além disso, o discriminante deve ser sempre negativo, do que temos:

$$(3-8a)^2-4\cdot(3a^2+6a-9)\cdot 3<0$$

Ou seja:

$$28a^2 - 120a + 13 \cdot 9 < 0$$

Precisamos encontrar as raízes dessa equação para fazer o estudo do sinal. Observe:

$$\Delta = (-120)^2 - 4 \cdot 28 \cdot 13 \cdot 9 = 144 \cdot 100 - 144 \cdot 13 \cdot 7 = 144 \cdot 100 - 144 \cdot 91$$

Ou seja:

$$\Delta = 144 \cdot 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 12 \cdot 3 = \pm 36$$

Disso, temos que as raízes são:

$$a = \frac{120 \pm 36}{56} \Rightarrow a = 1{,}5 \; ou \; a = 2{,}786$$

Como $28 > 0$, temos que a inequação é satisfeita para:

$$1{,}5 < a < 2{,}786$$

Devemos satisfazer, ao mesmo tempo:

$a < -3 \; ou \; a > 1;$

$1{,}5 < a < 2{,}786.$

Isto é:

$$1{,}5 < a < 2{,}786$$

Gabarito: E

142.(Estratégia Militares – Prof. Victor So)

Considere a inequação:

$$\boldsymbol{6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0}$$

Se (x, y) é um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação, então o menor valor possível para $y - x$ é:

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{13}{6}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

Comentários

Veja, primeiramente, que para fazer o estudo das soluções da inequação, é preciso fazer o estudo dos sinais do polinômio à esquerda da desigualdade. Para isso, precisamos saber os valores das raízes desse polinômio:

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = 0$$

Veja que $x = 0$ e $x = -1$ são raízes "óbvias" desse polinômio (tenha o costume de analisar se existem raízes triviais como 1, -1, 0, 2, -2). Assim, vamos fatorar essa expressão:

$$\Rightarrow x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4) = x(6x^3 - 5x^2 - 5x - 2x - 2 + 6)$$
$$= x\big(6(x^3 + 1) - 5x(x + 1) - 2(x + 1)\big)$$

Como $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$:

$$= x(6(x + 1)(x^2 - x + 1) - 5x(x + 1) - 2(x + 1))$$
$$= x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4)$$

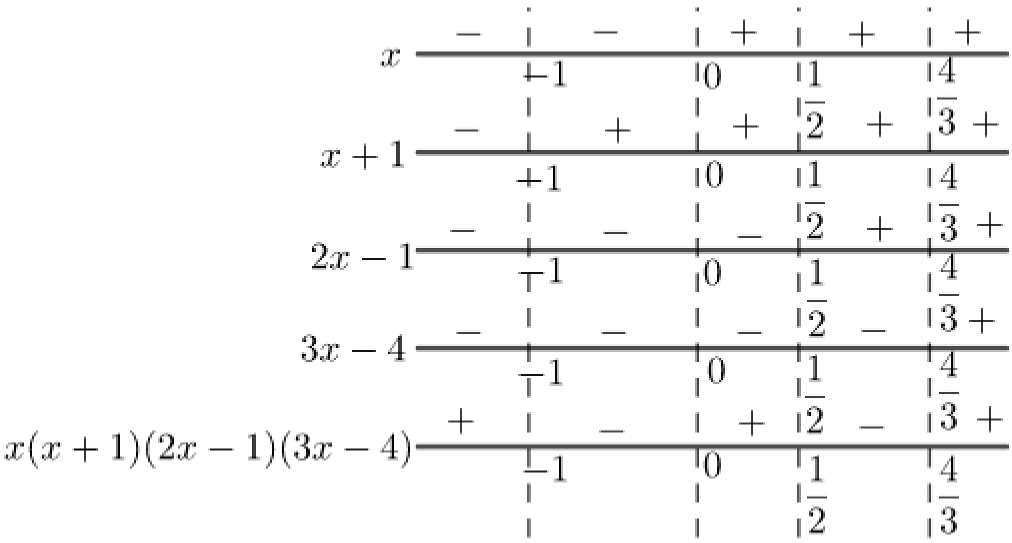
Calculando as demais raízes por Bhaskara:

$$6x^2 - 11x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4}}{2 \cdot 6}$$
$$x_1 = \frac{4}{3} \; e \; x_2 = \frac{1}{2}$$

Portanto, as raízes são -1, 0, 1/2 e 4/3. E a inequação fica:

$$x(x + 1)(2x - 1)(3x - 4) < 0$$

Assim, fazendo o estudo do sinal:



Vemos que a expressão do enunciado assume valores negativos apenas para $-1 < x < 0$ ou $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$.

Como queremos o menor valor de $y - x$:

$$y_1 - x_1 = 0 - (-1) = 1$$
$$y_2 - x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Portanto como 5/6 < 1, o menor valor possível para $y - x$ é 5/6.

Gabarito: C

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da nossa aula. Vimos tudo que precisamos para resolver as questões sobre funções, equações e inequações do 2º grau e modulares. Na próxima aula, veremos as outras funções que serão cobradas na prova. Tente agregar os métodos de resolução de exercícios abordados nessa aula. Ao longo do tempo, aprenderemos novos métodos que podem facilitar a resolução dos exercícios.

Continue estudando e se esforçando!

Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/profvictorso

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Murakami, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções. 9. ed. Atual, 2013. 410p.

[2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Lima, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio, v. 1. 11 ed. SBM, 2016. 250p.

8. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.