MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

EAD – ITA/IME

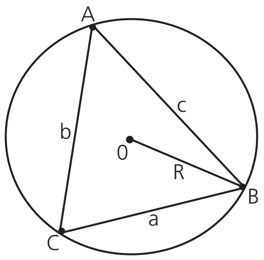
AULAS 03 A 05

ASSUNTO: LEI DOS SENOS, LEI DOS COSSENOS, RELAÇÃO DE STEWART E FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA DA ÁREA

Resumo Teórico

Teorema dos Senos

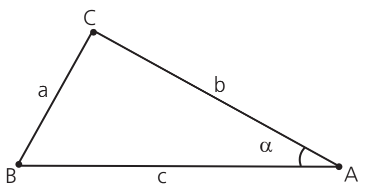
Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita.



$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R \rightarrow (a, b, c) = (2R\text{sen}\hat{A}, 2R\text{sen}\hat{B}, 2R\text{sen}\hat{C})$$

Teorema dos Cossenos

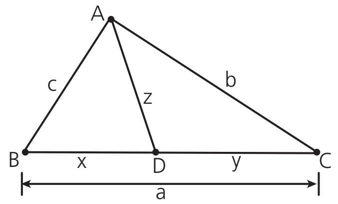
Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Teorema de Stewart

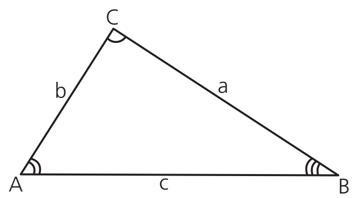
Seja ABC um triângulo de lados a,b e c e seja **z** o comprimento de uma ceviana $\overline{AD}$ que divide $\overline{BC}$ em dois segmentos BD = x e DC = y, conforme a figura a seguir.



$$\text{Relação de Stewart} \rightarrow b^2 \cdot x + c^2 \cdot y - a^2 \cdot z = a \cdot x \cdot y$$

Fórmula Trigonométrica da Área

A área de um triângulo qualquer é igual à metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo que eles formam.



$$\text{Área}(\Delta ABC) = S \rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2} \\ S = \dfrac{a \cdot c \cdot \text{sen}\hat{B}}{2} \\ S = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen}\hat{C}}{2} \end{cases}$$

Exercícios

01. Se a, b e c são lados de um triângulo ABC que satisfaz a seguinte relação $\frac{a}{b^2 - c^2} + \frac{c}{b^2 - a^2} = 0$. Então, o ângulo $\hat{B}$ oposto ao lado **b** desse triângulo vale:

A) $\frac{\pi}{2}$

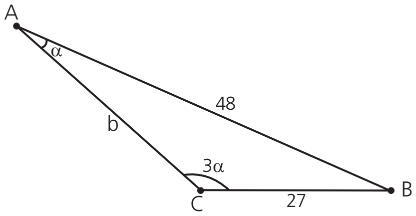
B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{2\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{3}$

02. No triangulo obtusângulo a seguir, sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos A, B e C respectivamente.



Sabendo que o ângulo $\hat{C}$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$, a = 27 cm e c = 48 cm, então o valor de **b** é igual a

Utilize: $\text{sen}(3\alpha) = 3\,\text{sen}\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha$

A) 33 cm
B) 35 cm
C) 37 cm
D) 39 cm
E) 42 cm

03. Dado um triângulo de vértices A, B e C, e com lados medindo a = BC, b = AC e c = AB, chamamos D o ponto de interseção do lado $\overline{AB}$ com a bissetriz do ângulo $\hat{C}$. Mostre que

$$CD = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{a+b}$$

Utilize: $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$

4. Sabendo que em um triângulo ABC a relação a seguir é satisfeita:

$\frac{\cos\hat{A}}{a} + \frac{\cos\hat{B}}{b} + \frac{\cos\hat{C}}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{R^3}$, em que R é o circunraio.

Então, o valor da expressão $\sqrt{\text{sen}\hat{A} \cdot \text{sen}\hat{B} \cdot \text{sen}\hat{C}}$ é:

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{6}$

05. Suponha que exista um triângulo ABC de lados a, b, c e circunraio R, tal que $R \cdot (b + c) = a \cdot \sqrt{bc}$.

Podemos afirmar que
A) ABC é retângulo e isósceles.
B) ABC é um triângulo equilátero.
C) ABC é um triângulo obtusângulo.
D) não existe tal triângulo.
E) n.d.a.

06. Em um triângulo ABC, $\frac{a}{\cos\hat{A}} = \frac{b}{\cos\hat{B}} = \frac{c}{\cos\hat{C}}$ e b = 2 cm, então a área do ΔABC é igual a

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) 2
D) 3
E) 4

07. Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento $\overline{AC}$ mede 2 cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. A área do triângulo, em cm², é igual a

Utilize: sen(a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a

A) $2 \cdot \text{sen}^2\alpha \cdot \text{cotg}\,\beta + \text{sen}2\alpha$
B) $2 \cdot \text{sen}^2\alpha \cdot \text{tg}\,\beta - \text{sen}2\alpha$
C) $2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \text{cotg}\,\beta + \text{sen}2\alpha$
D) $2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \text{tg}\,\beta + \text{sen}2\alpha$
E) $2 \cdot \text{sen}^2\alpha \cdot \text{tg}\,\beta - \cos2\alpha$

08. Sejam m_a, m_b e m_c as medianas relativas aos lados a, b e c de um triângulo, mostre que:

$$\frac{(m_a)^4 + (m_b)^4 + (m_c)^4}{a^4 + b^4 + c^4} = \frac{9}{16}$$

09. Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e A, B e C os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um desses lados. Sabe-se que a, b, c, nessa ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e $\frac{\cos\hat{A}}{a} + \frac{\cos\hat{B}}{b} + \frac{\cos\hat{C}}{c} = \frac{77}{240}$, então sua área, em cm², mede

A) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

B) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

C) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

E) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

10. Dado um triângulo ABC onde se cumpre que

$\frac{\cos\hat{A}}{a} + \frac{\cos\hat{B}}{b} + \frac{\cos\hat{C}}{c} = \frac{a}{bc}$, calcular

$\cos^6\hat{B} + \cos^6\hat{C} + 3 \cdot \cos^2\hat{B} \cdot \cos^2\hat{C}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

11. Prove que em todo triângulo ABC vale a igualdade:

$$\text{sen}^2\hat{A} = \text{sen}^2\hat{B} + \text{sen}^2\hat{C} - 2 \cdot \text{sen}\hat{B} \cdot \text{sen}\hat{C} \cdot \cos\hat{A}$$

12. Um triangulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito em uma circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ cm. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ cm e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$ cm. Determine a área do triângulo ABC.

13. Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado $\overline{BC}$ tais que BM = MN = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de cos α é

A) $\frac{13}{14}$

B) $\frac{14}{15}$

C) $\frac{15}{16}$

D) $\frac{16}{17}$

E) $\frac{17}{18}$

14. Em um triângulo ABC, obtusângulo em $\hat{A}$, de vértices A, B e C, e com lados medindo a = BC, b = AC e c = AB, cumpre-se a relação $a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2 \cdot (b^2 + c^2)$, então o valor de cos $\hat{A}$ é

A) $-\frac{1}{2}$

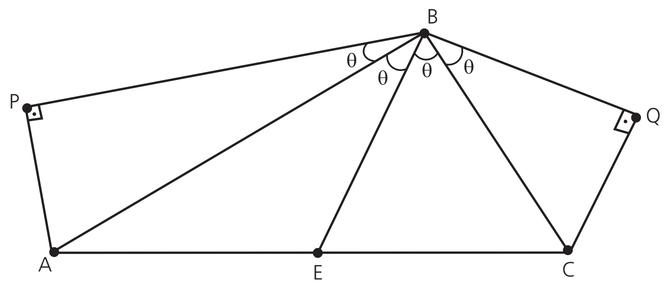
B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $-\frac{1}{3}$

E) $-\frac{1}{5}$

15. Dada a figura a seguir:



Sabendo que BP = a e BQ = b. Então, o valor de $\overline{BE}$, em função de **a** e **b**, é

A) $\frac{ab}{a+b}$

B) $\frac{2ab}{a+b}$

C) 2a + b

D) a + b

E) a + 2b

Gabarito

01	02	03	04	05
E	B	–	A	A
06	**07**	**08**	**09**	**10**
B	A	–	A	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**
–	–	A	C	B

– Demonstração.

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA
Dig.: REJANE – Rev.: SARAH