Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

GEOMETRIA PLANA III

AULA 09

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá,

Nessa aula, vamos estudar quadriláteros e círculos. No capítulo de quadriláteros, veremos algumas propriedades válidas para cada tipo de quadrilátero e no capítulo de círculos, estudaremos os elementos presentes no círculo e alguns teoremas e propriedades válidas para essa figura geométrica.

Os exercícios ao longo da teoria dessa aula exploram melhor o conhecimento do aluno e, por isso, você poderá ter dificuldades em resolver algumas. Mas, tenha calma. Caso isso ocorra, leia a resolução e tente entender o raciocínio por trás da questão.

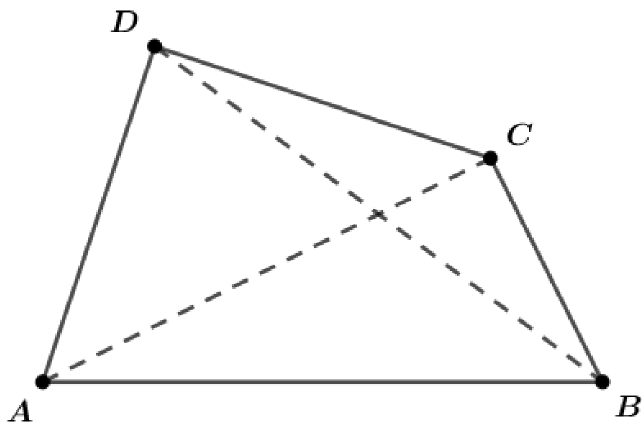
Lembre-se, só leia as resoluções ou comentários das questões se você tiver alguma dúvida ou não souber como resolver. Se você acha que já tem um bom conhecimento dos tópicos dessa aula, vá direto para as listas de questões, resolva e verifique se acertou no gabarito.

E qualquer dúvida, crítica ou sugestão não hesite em nos procurar pelo fórum de dúvidas ou pelos meios de contato abaixo:

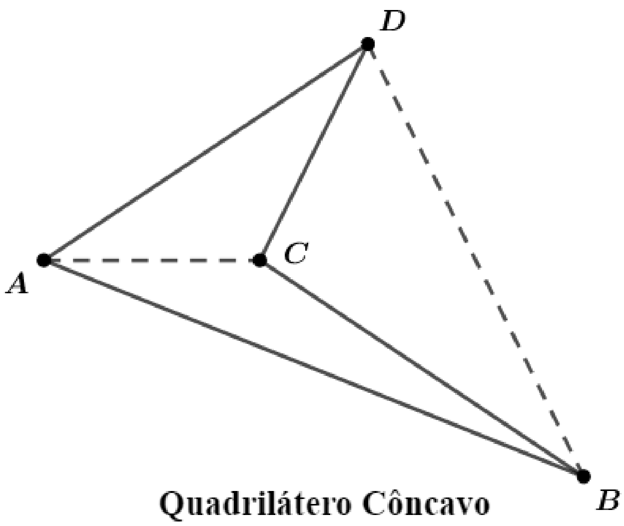
/profvictorso

1. QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Um quadrilátero é formado pela união de 4 pontos distintos do plano e três desses pontos não podem ser colineares. Vejamos os dois tipos de quadriláteros abaixo:



Quadrilátero Convexo



Quadrilátero Côncavo

Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais dos quadriláteros acima. A soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a $360°$ e a soma dos ângulos externos também é igual a $360°$. Basta notar que o quadrilátero é formado pela união de dois triângulos, por exemplo, no caso do quadrilátero convexo, temos a união dos triângulos ABD e CBD.

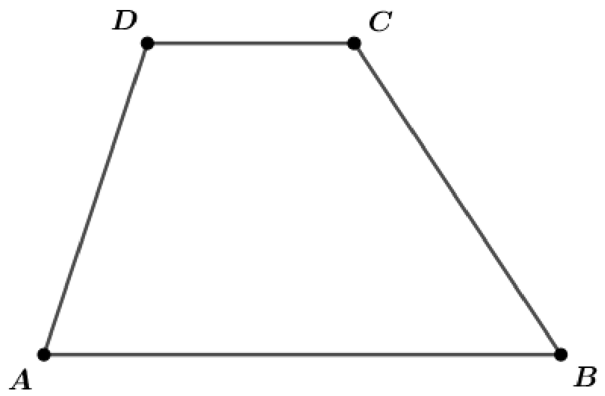
Para nossa prova, vamos estudar apenas os quadriláteros convexos. Os principais que podem ser cobrados na prova são: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

1.1. TRAPÉZIO

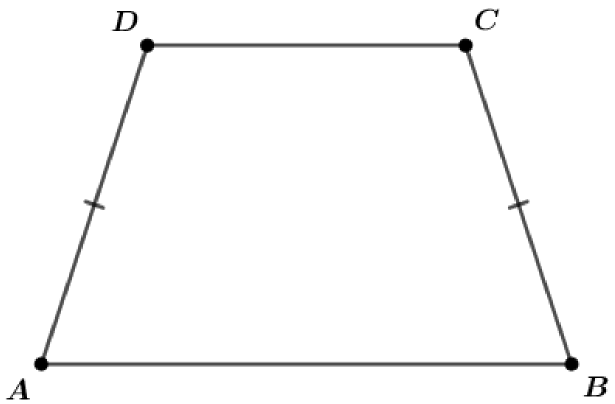
1.1.1. DEFINIÇÃO

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se possui dois lados paralelos entre si. Chamamos esses lados de base do trapézio. Essa figura geométrica pode receber a seguinte classificação dependendo dos lados adjacentes às bases:

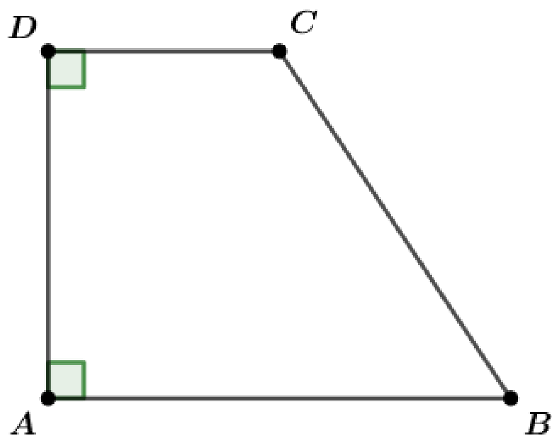
1) Trapézio Escaleno: os lados adjacentes não são congruentes.



2) Trapézio Isósceles: os lados adjacentes são congruentes.

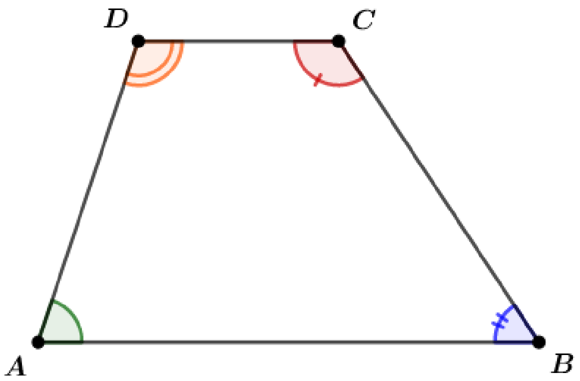


3) Trapézio Retângulo: um dos lados adjacentes forma dois ângulos retos com as bases.



1.1.2. PROPRIEDADES

P1) Ângulo Interno



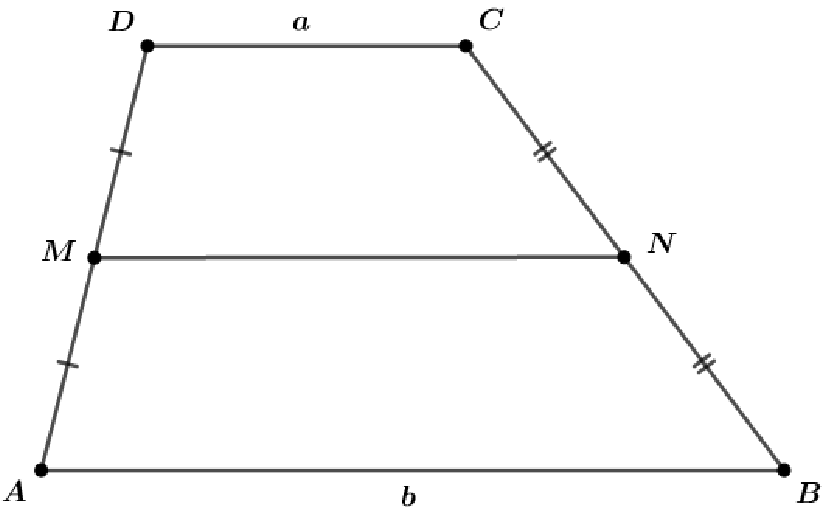
Sendo $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, segmentos transversais às bases paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, temos:

$$\hat{A} + \hat{D} = 180°$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$\boxed{\boldsymbol{A + D = B + C = 180°}}$$

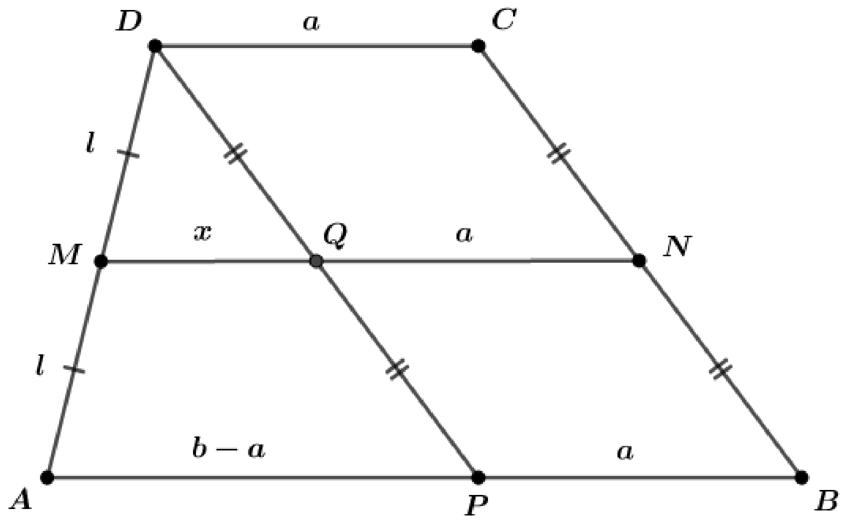
P2) Base Média



A base média de um trapézio de bases a e b possui a seguinte relação:

$$\boxed{\boldsymbol{MN = \frac{a+b}{2}}}$$

Demonstração:



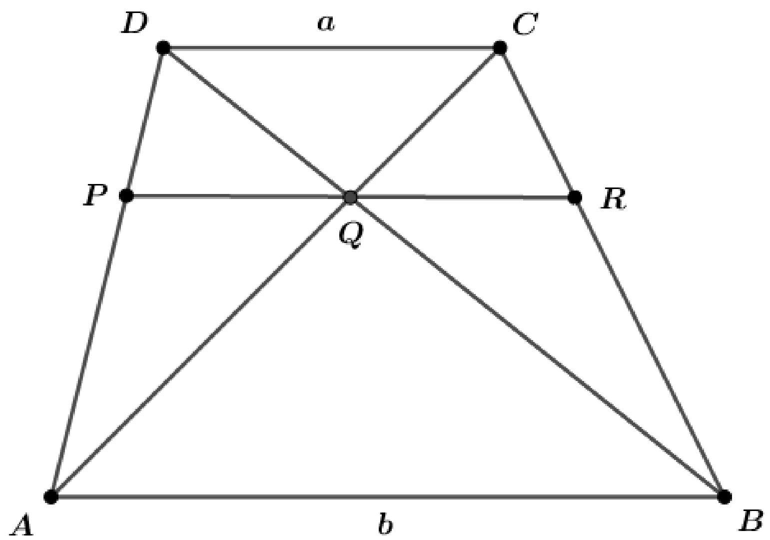
Traçamos o segmento de reta $\overline{PD}$ paralelo à $\overline{BC}$. De acordo com a figura, temos:

$$\Delta MQD \sim \Delta APD \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MQ}{AP} \Rightarrow \frac{l}{2l} = \frac{x}{b-a} \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$MN = x + a \Rightarrow MN = \frac{b-a}{2} + a$$

$$\therefore MN = \frac{a+b}{2}$$

P3) Base que intercepta o encontro das diagonais

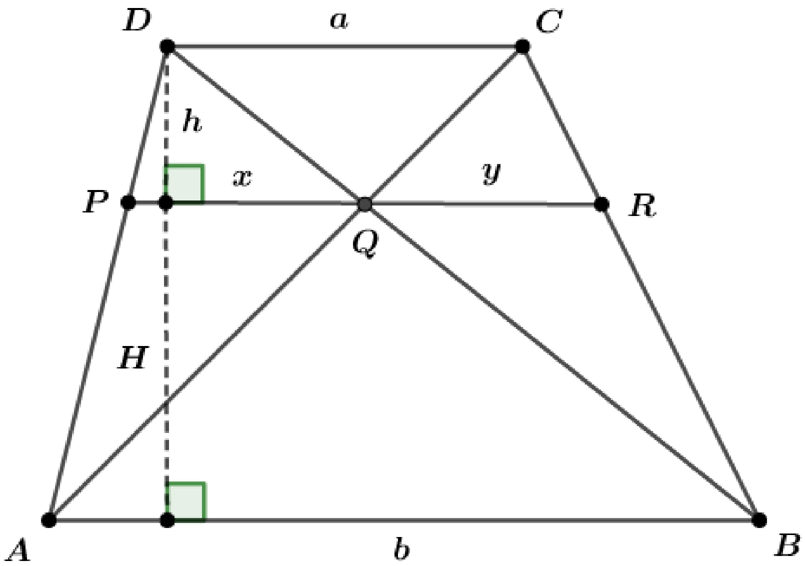


Sejam P, Q, R pontos do trapézio tal que Q é o ponto de encontro das diagonais e PR é paralelo às bases ABe CD, então:

$$\boxed{PQ = QR = \frac{ab}{a+b}}$$

$$\boxed{PR = \frac{2ab}{a+b}}$$

Demonstração:



Sejam h e $H + h$ as alturas dos triângulos PQD e ABD, respectivamente. Então, aplicando a semelhança de triângulos, temos:

$$\Delta PQD \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{h}{h+H} \quad (I)$$

$$\Delta PQA \sim \Delta DCA \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{H}{h+H} \quad (II)$$

Dividindo (I) por (II):

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{H} \quad (III)$$

Isolando h/H em (I):

$$xh + xH = bh \Rightarrow xH = h(b-x) \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{x}{b-x} \quad (IV)$$

Igualando (III) e (IV):

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{b-x} \Rightarrow ab - ax = bx \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

Analogamente, para os triângulos BQR e BDC:

$$\Delta BQR \sim \Delta BDC \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{H}{h+H} \Rightarrow yh + yH = aH \Rightarrow yh = H(y-a) \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{y-a}{y}$$

Usando a relação (III):

$$\frac{a}{b} = \frac{y-a}{y} \Rightarrow ay = by - ab \Rightarrow y = \frac{ab}{a+b}$$

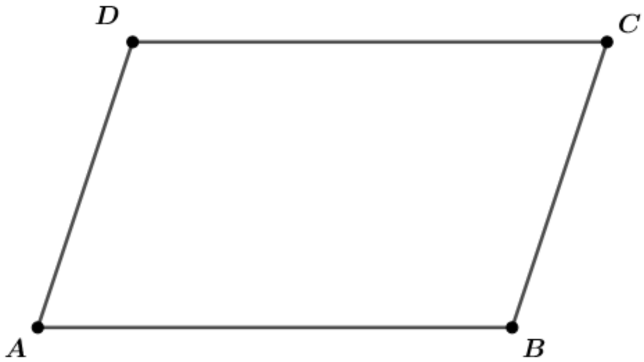
$$\therefore PQ = QR = \frac{ab}{a+b}$$

$$\therefore PR = \frac{2ab}{a+b}$$

1.2. PARALELOGRAMO

1.2.1. DEFINIÇÃO

Um quadrilátero plano convexo é classificado como paralelogramo quando seus lados opostos são paralelos.

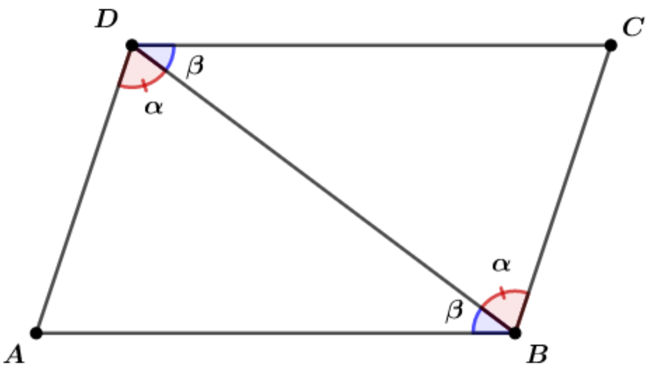


$$\overline{AB}//\overline{CD} \text{ e } \overline{AD}//\overline{BC}$$

1.2.2. PROPRIEDADES

P1) Lados opostos congruentes

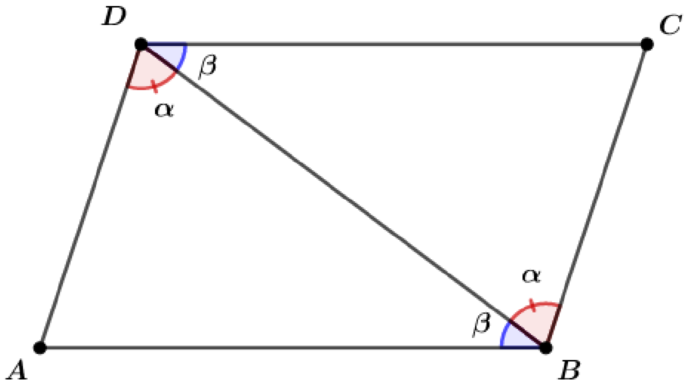
Traçando-se a diagonal $\overline{BD}$, temos pela propriedade das retas paralelas:



Pelo critério de congruência ALA, temos $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, então:

$$\overline{AD} = \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} = \overline{CD}$$

P2) Ângulos opostos congruentes



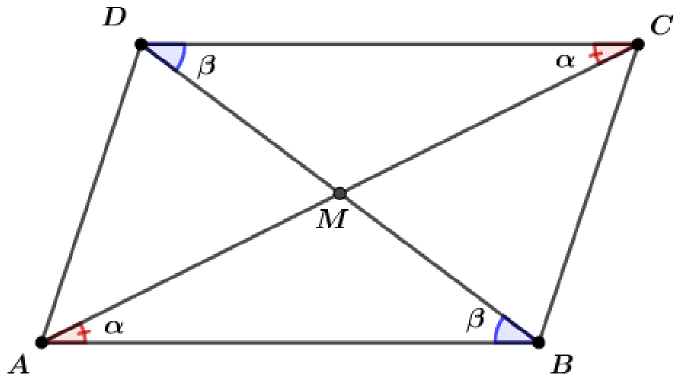
Note que $\widehat{D} = \alpha + \beta$ e $\widehat{B} = \alpha + \beta$, logo:

$$\widehat{B} \equiv \widehat{D}$$

Analogamente para $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$:

$$\widehat{A} \equiv \widehat{C}$$

P3) As diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios



Se $ABCD$ é um paralelogramo, então:

$$AB = CD$$

$$A\widehat{B}D \equiv B\widehat{D}C \text{ e } B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$$

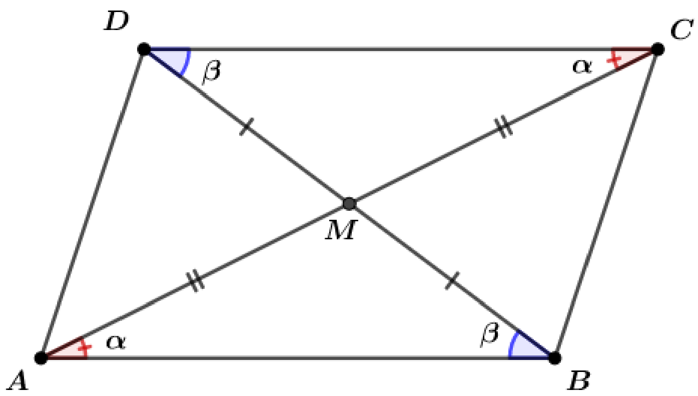
Pelo critério de congruência ALA, temos:

$$\Delta AMB \equiv \Delta CMD$$

Logo:

$$MD = MB \text{ e } AM = CM$$

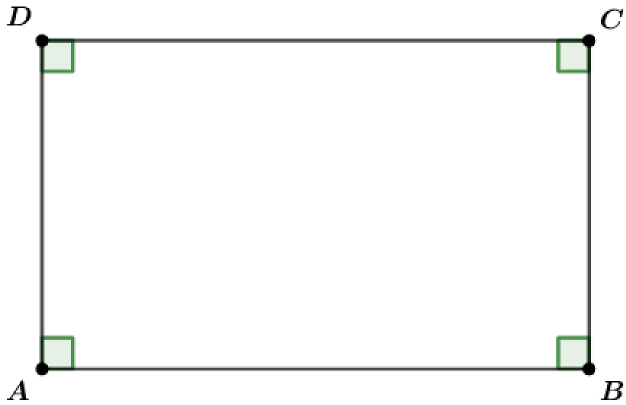
Portanto, M é ponto médio das diagonais.



1.3. RETÂNGULO

1.3.1. DEFINIÇÃO

Se um quadrilátero plano convexo é equiângulo, então, ele é um retângulo.

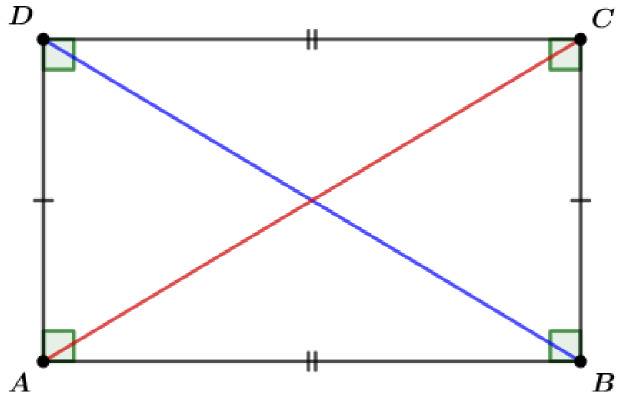


1.3.2. PROPRIEDADES

P1) Todo retângulo é paralelogramo

Pela definição de ângulos opostos congruentes do paralelogramo, como todos os ângulos internos do retângulo são congruentes, temos que todo retângulo é paralelogramo. Logo, todas as propriedades do paralelogramo são válidas para o retângulo.

P2) Diagonais congruentes

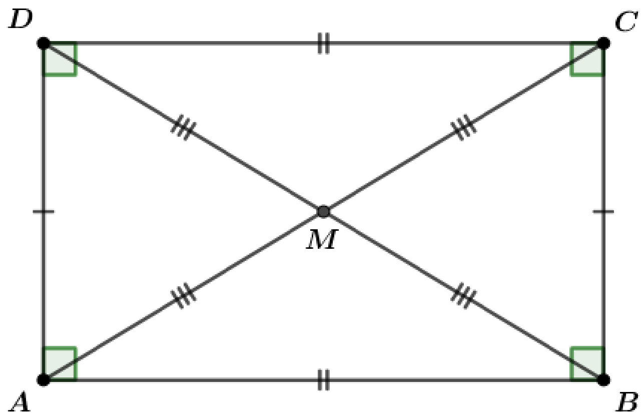


Sabendo que todo retângulo é um paralelogramo, então, $AB = CD$ e $AD = BC$. Usando o critério de congruência LAL:

$$AD = BC, \hat{A} \equiv \hat{B} \text{ e } AB = AB \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta BAC \Rightarrow AC = BD$$

Uma consequência dessa propriedade é que se M é o ponto de cruzamento das diagonais do retângulo, temos:

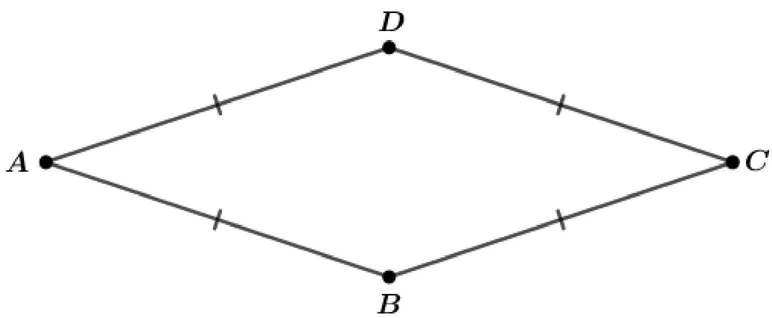
$$AM = MC = DM = MB$$



1.4. LOSANGO

1.4.1. DEFINIÇÃO

Um quadrilátero plano convexo é equilátero, então, ele é um losango.



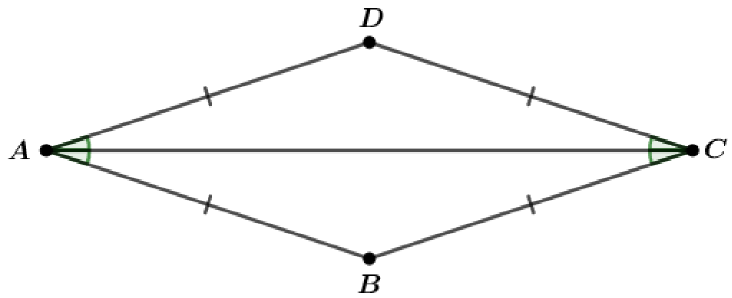
1.4.2. PROPRIEDADES

P1) Todo losango é um paralelogramo.

Todas as propriedades do paralelogramo são válidas para o losango.

P2) As diagonais são bissetrizes e mediatrizes.

Como o losango é equilátero, temos:



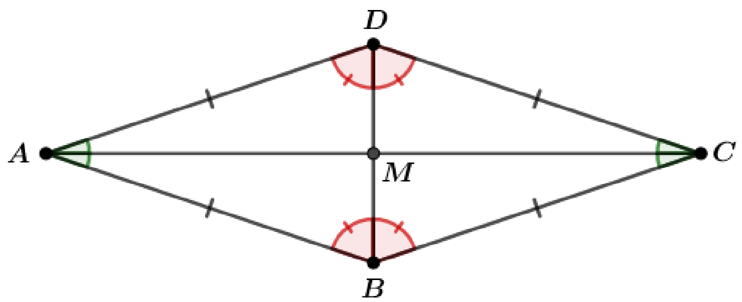
Os triângulos ACD e ACB são isósceles, então, como $AD = CD = AB = CB$ e $\overline{AC}$ é um segmento em comum:

$$D\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \equiv B\hat{A}C \equiv B\hat{C}A$$

Logo, a diagonal $\overline{AC}$ é bissetriz do losango. Analogamente, podemos provar que $\overline{BD}$ também é bissetriz.

Assim, os ângulos opostos são congruentes, portanto, um losango também é um paralelogramo.

Seja M o ponto de intersecção das diagonais:



Como $ABCD$ também é um paralelogramo, temos que M divide as diagonais ao meio. Então:

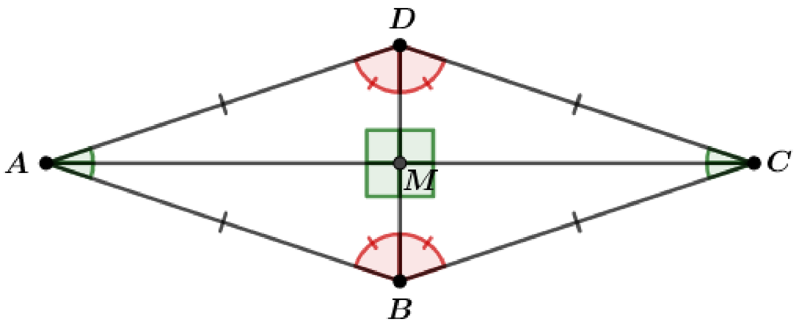
$$AM = MC \text{ e } DM = MB$$

Usando o critério de congruência LLL, temos:

$$\Delta MAD \equiv \Delta MAB \equiv \Delta MCB \equiv \Delta MCD \Rightarrow A\widehat{M}D \equiv A\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}D = \theta$$

$$\theta + \theta + \theta + \theta = 360° \Rightarrow \theta = 90°$$

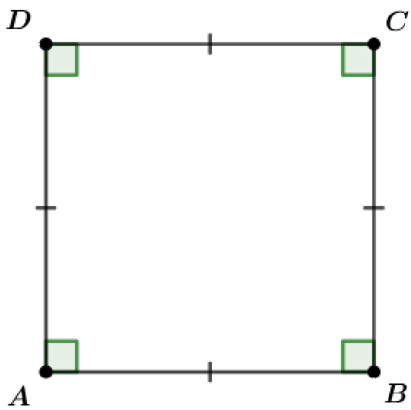
Desse modo, as diagonais são perpendiculares entre si e M é o ponto médio deles, portanto, as diagonais também são mediatrizes.



1.5. QUADRADO

1.5.1. DEFINIÇÃO

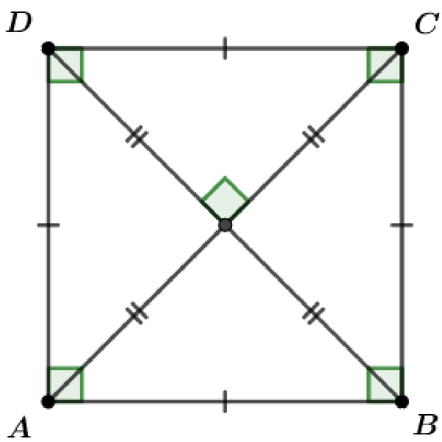
Um quadrilátero convexo plano é um quadrado quando é equilátero e equiângulo.



1.5.2. PROPRIEDADES

Todo quadrado é um retângulo e losango.

Todas as propriedades do retângulo e losango são válidas para o quadrado.



HORA DE PRATICAR!

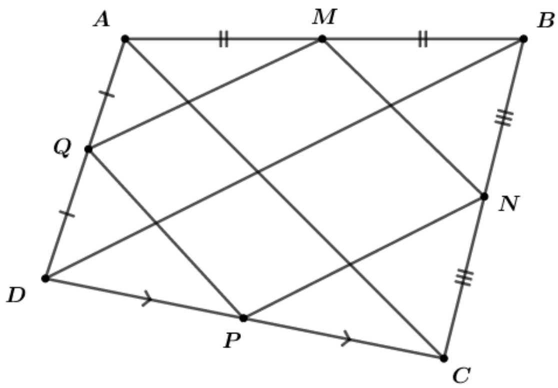
1. Considere um quadrilátero ABCD e sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

a) Demonstrar que $MNPQ$ é um paralelogramo.

b) Em quais condições $MNPQ$ é um retângulo, losango e quadrado?

Resolução:

a) Vamos desenhar um quadrilátero qualquer $ABCD$:



Traçamos as diagonais AC e BD do quadrilátero $ABCD$. Note que MQ é base média do triângulo ABD, logo, $MQ//BD$ e $MQ = BD/2$. Analogamente, para o triângulo BCD, temos $NP//BD$ e $NP = BD/2$. Portanto, $NP = MQ$ e $NP//MQ$.

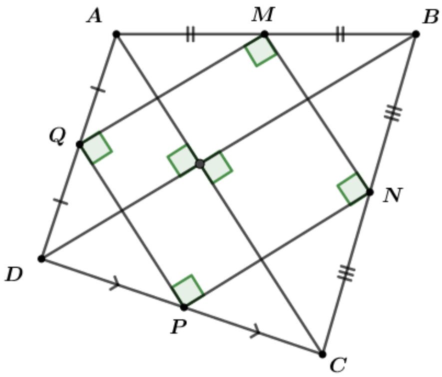
Para a diagonal AC, temos do triângulo ABC que MN é sua base média, logo, $MN//AC$ e $MN = AC/2$. Analogamente, para o triângulo ADC, temos $PQ//AC$ e $PQ = AC/2$. Portanto, $MN//PQ$ e $MN = PQ$.

Assim, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

b) Vamos dividir o problema em cada caso:

Caso 1) $MNPQ$ é retângulo:

Como $MNPQ$ é um retângulo e seus lados são paralelos às diagonais do quadrilátero $ABCD$, temos que a condição para isso é $ABCD$ possuir diagonais ortogonais entre si.



Caso 2) $MNPQ$ é losango:

Vimos no item a que $MQ = NP = BD/2$ e $MN = PQ = AC/2$. Sabemos que o losango deve possuir todos os lados equiláteros, logo:

$$MQ = NP = MN = PQ \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow BD = AC$$

Portanto, uma condição é as diagonais do quadrilátero $ABCD$ devem possuir a mesma medida.

Caso 3) $MNPQ$ é quadrado:

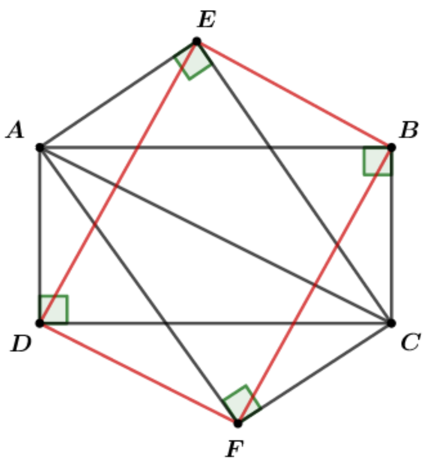
Para $MNPQ$ ser um quadrado, ele deve satisfazer as condições de um losango e de um retângulo. Logo, $ABCD$ deve possuir diagonais congruentes e ortogonais.

Gabarito: Demonstração

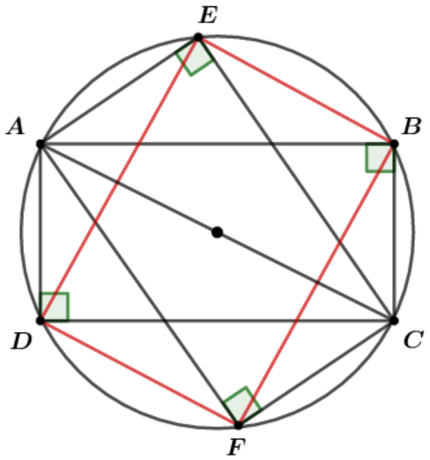
2. $ABCD$ e $AECF$ são dois retângulos que possuem uma diagonal comum AC. Demonstrar que o quadrilátero $BEDF$ também é um retângulo.

Resolução:

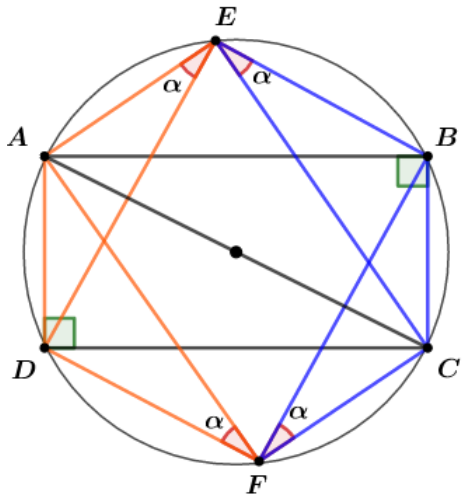
De acordo com o enunciado da questão, temos:



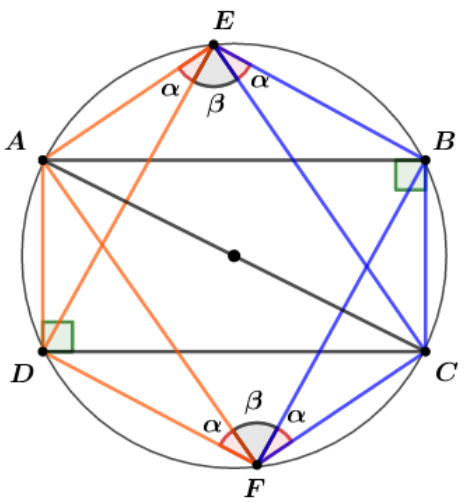
Queremos provar que $BEDF$ é retângulo, então, devemos mostrar que seus ângulos internos são todos retos. Note que os triângulos AEC, ABC, ADC e AFC são todos retângulos e possuem a mesma hipotenusa, logo, eles estão inscritos numa mesma circunferência:



Podemos usar as propriedades do arco capaz. Note que $B\hat{E}C \equiv B\hat{F}C$, pois enxergam o mesmo arco BC. Analogamente, $A\hat{E}D \equiv A\hat{F}D$. Como $AD = BC$, temos que $B\hat{E}C \equiv B\hat{F}C \equiv A\hat{E}D \equiv A\hat{F}D$.

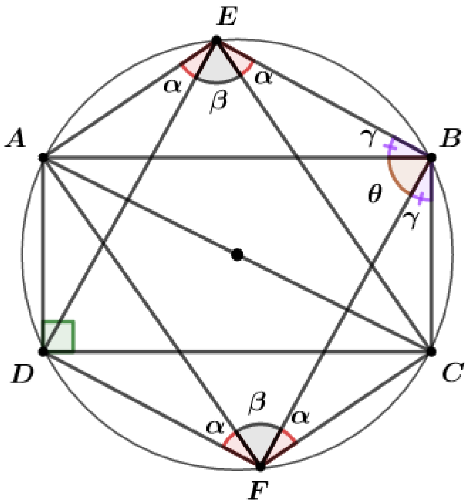


Da mesma forma, como $AB = CD$, temos $AFB \equiv CED$:



Como $A\hat{E}C$ é ângulo do retângulo $AECF$, temos $\alpha + \beta = 90°$. Logo, $B\hat{E}D$ e $B\hat{F}D$ são ângulos retos.

Sendo $AE = CF$, temos $E\hat{B}A \equiv C\hat{B}F$:

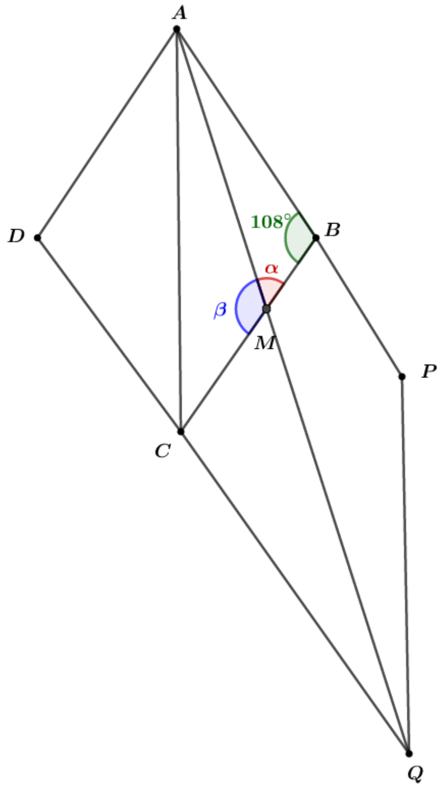


Do retângulo $ABCD$, temos $\theta + \gamma = 90°$, logo, $E\hat{B}F$ também é ângulo reto. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$, temos que todos os ângulos internos do quadrilátero $BDEF$ são congruentes e iguais a $90°$. Portanto, esse quadrilátero é retângulo.

Gabarito: Demonstração

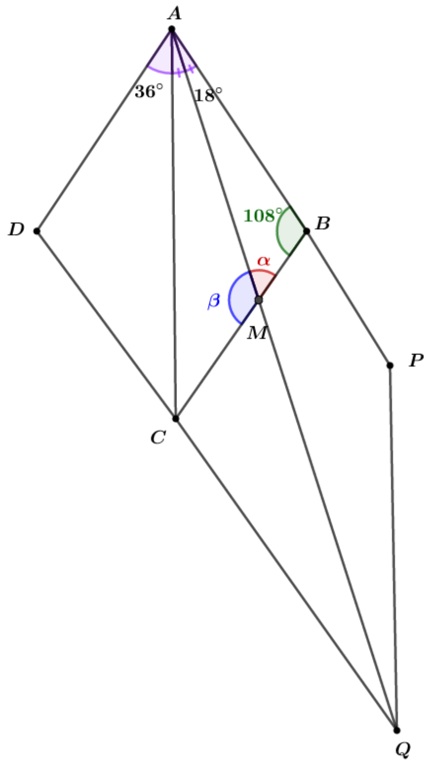
3. $ABCD$ é um losango no qual $\hat{B} = 108°$ e $CAPQ$ é um outro losango cujo vértice P está no prolongamento de $\overline{AB}$. Achar os ângulos formados por $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$.

Resolução:



Vamos usar as propriedades do losango. Inicialmente, vamos encontrar os ângulos dos losangos. Como $\widehat{B} = 108°$, temos $\widehat{D} = 108°$. Sabendo que um losango também é um paralelogramo, temos que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ são suplementares de $108°$, logo, $\widehat{A} = \widehat{C} = 72°$.

Sendo $CAPQ$ um losango, temos que AQ é sua bissetriz. Como $B\hat{A}C = 36°$ (bissetriz de $ABCD$), temos $C\hat{A}Q = P\hat{A}Q = 18°$.



Como β é ângulo externo do triângulo ABM, os ângulos formados por $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$ são dados por:

$$\beta = 18° + 108° \Rightarrow \beta = 126°$$

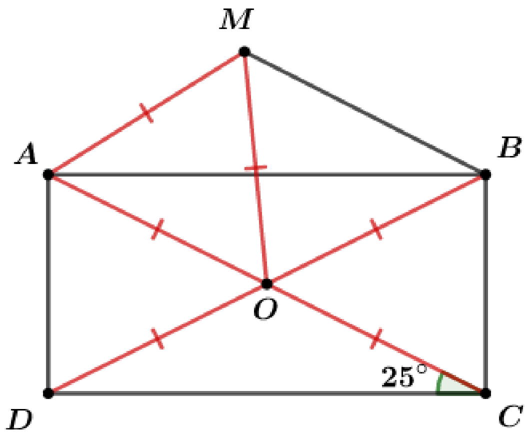
$$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha = 54°$$

Gabarito: $54°$ e $126°$

4. $ABCD$ é um retângulo cujas diagonais se cortam em O e AOM é um triângulo equilátero construído no semi-plano dos determinados por $\overline{AC}$ que contém B. Sabendo que $A\hat{C}D = 25°$, calcular os ângulos do ΔABM.

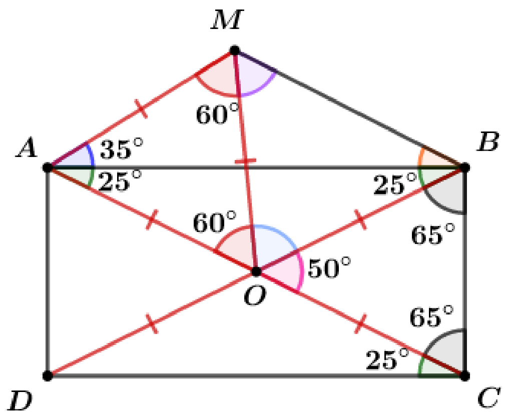
Resolução:

Vamos desenhar a figura do enunciado:

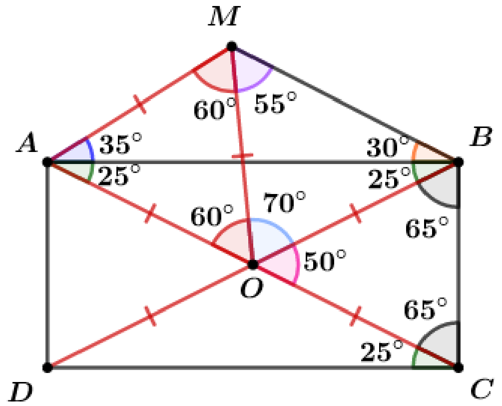


Como $A\hat{C}D = 25°$, temos $C\hat{A}B = A\hat{B}D = 25°$. Sendo ΔOCB isósceles, temos $O\hat{B}C = O\hat{C}B = 65°$ ($\widehat{C}$ é ângulo reto do retângulo) e, assim, $B\hat{O}C = 50°$.

Vamos completar os ângulos da figura:



ΔOBM é isósceles e o ângulo $B\hat{O}M = 70°$ (ângulo raso), assim, $O\hat{B}M = O\widehat{M}B = 55°$. Logo, $M\hat{B}A = 30°$:



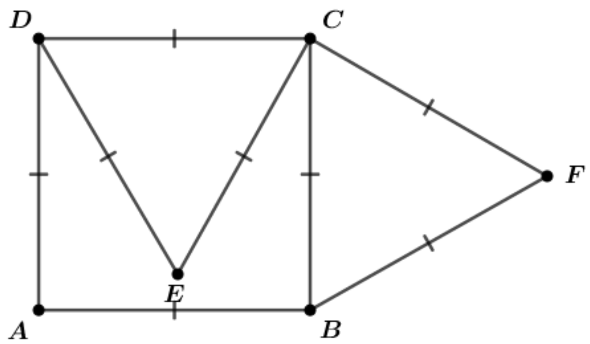
Os ângulos internos do ΔABM são $30°, 35°$ e $115°$.

Gabarito: $35°, 30°$ e $115°$

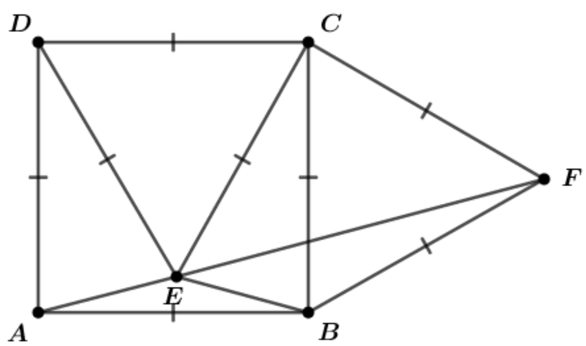
5. Sobre o lado $\overline{CD}$ de um quadrado $ABCD$, contrói-se internamente um triângulo equilátero CED e sobre o lado $\overline{BC}$ constrói-se externamente um triângulo equilátero BCF. Mostrar que A, E e F estão alinhados.

Resolução:

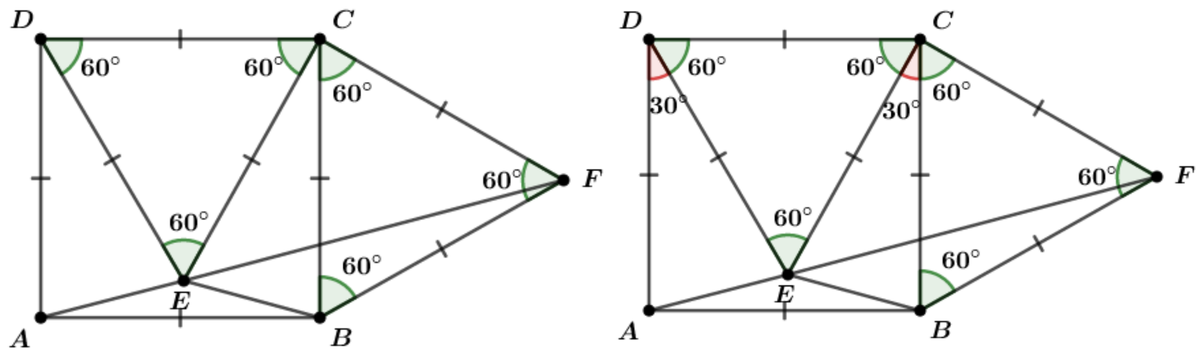
De acordo com os dados da questão:



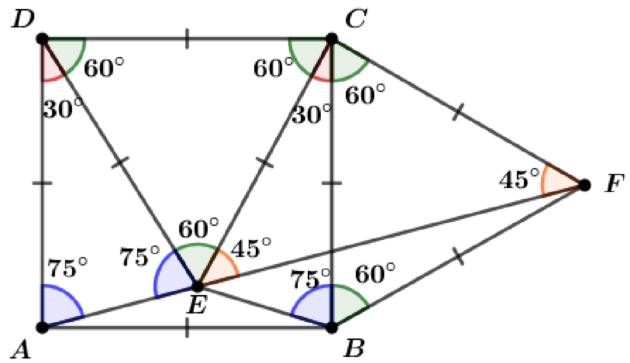
Vamos construir os triângulos AED, EBC e CEF:



Note que esses triângulos são isósceles. Vamos completar os ângulos da figura:



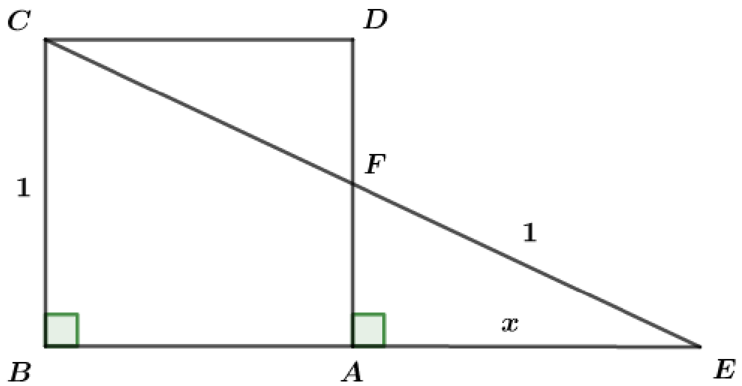
Como o vértice C e D dos triângulos isósceles ECB e ADE são iguais a 30°, os ângulos de suas bases são iguais a 75°. Sendo $E\hat{C}F = 90°$ e ΔECF isósceles, temos $C\hat{E}F = C\hat{F}E = 45°$.



Analisando a figura, vemos que $A\hat{E}D + D\hat{E}C + C\hat{E}F = 75° + 60° + 45° = 180°$. Logo, $A\hat{E}F$ é um ângulo raso e, portanto, A, E e F estão alinhados.

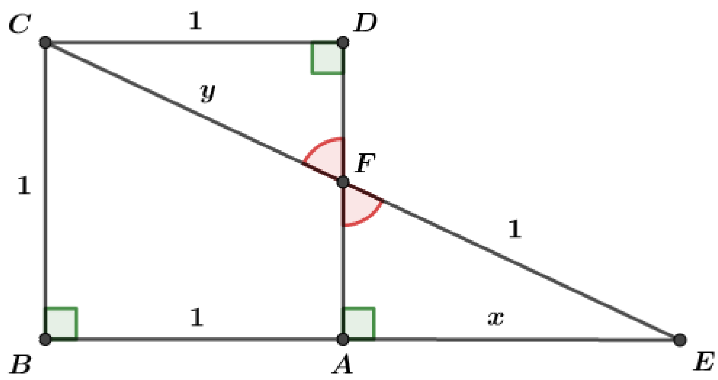
Gabarito: Demonstração

6. Na figura a seguir temos o quadrado $ABCD$ de lado 1. O segmento $\overline{EF}$ mede 1. Determine a equação cuja raiz seja a medida do segmento $\overline{EA}$.



Resolução:

Fazendo $CF = y$, temos:



Note que os triângulos retângulos CFD e EFA são semelhantes, logo:

$$\frac{y}{1}=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔBCE:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2=(1+x)^2+1^2$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2}=x^2+2x+1+1$$

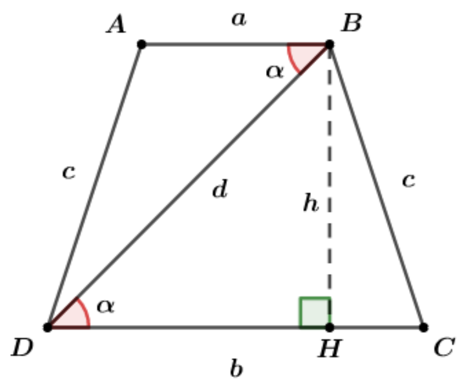
$$x^2+2x+1=x^4+2x^3+2x^2$$

$$x^4+2x^3+x^2-2x-1=0$$

Gabarito: $\boldsymbol{x^4+2x^3+x^2-2x-1=0}$

7. Determinar o ângulo formado pela diagonal e pela base de um trapézio isósceles, sabendo que a altura é igual a base média.

Resolução:



Queremos calcular o valor do ângulo α.

De acordo com o enunciado, temos que a altura possui mesma medida da base média do trapézio isósceles, logo:

$$h=\frac{a+b}{2}$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABD e BDC:

$$\Delta ABD\Rightarrow c^2=a^2+d^2-2adcos\alpha\ \ (I)$$

$$\Delta BDC \Rightarrow c^2 = b^2 + d^2 - 2bdcos\alpha \ \ (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$0 = a^2 - b^2 - 2dcos\alpha(a - b)$$

$$cos\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2d(a-b)} \Rightarrow cos\alpha = \frac{a+b}{2d} \ \ (III)$$

No triângulo retângulo BHD:

$$sen\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{\frac{a+b}{2}}{sen\alpha} \Rightarrow d = \frac{a+b}{2sen\alpha}$$

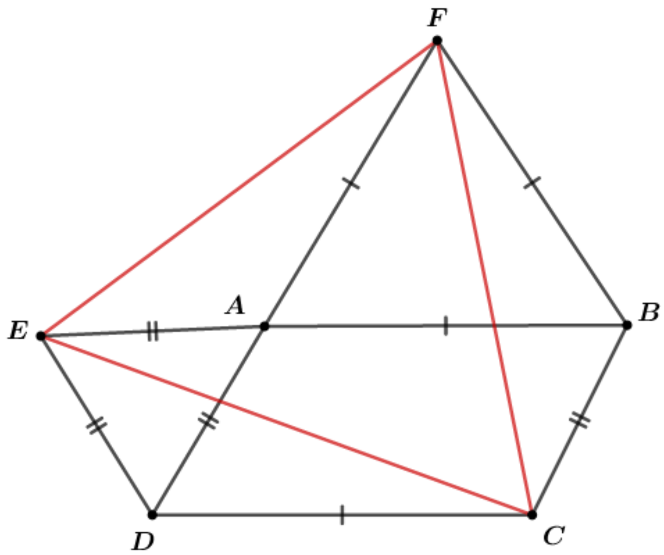
Substituindo em (III):

$$cos\alpha = \frac{a+b}{\frac{2(a+b)}{2sen\alpha}} \Rightarrow cos\alpha = sen\alpha \Rightarrow \alpha = 45°$$

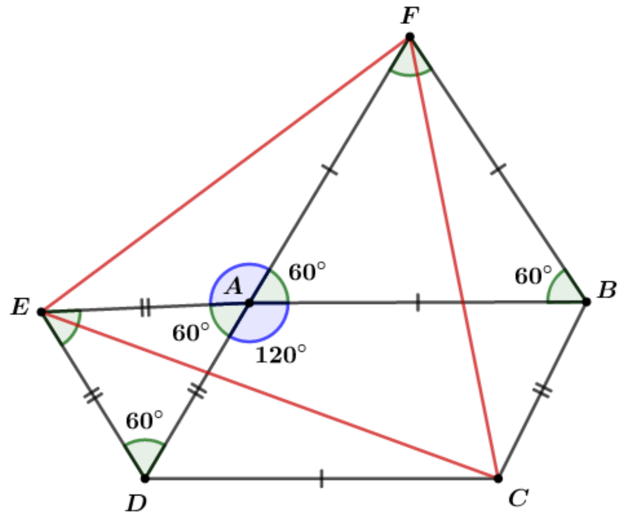
Gabarito: $45°$

8. $ABCD$ é um paralelogramo com triângulos equiláteros ABF e ADE desenhados externamente ao paralelogramo. Prove que o triângulo FCE é equilátero.

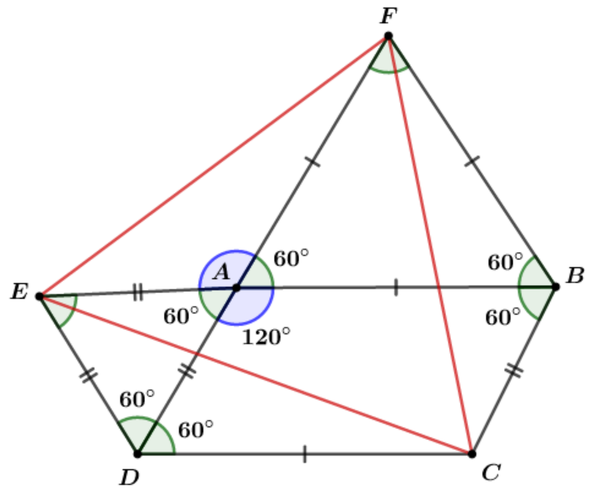
Resolução:



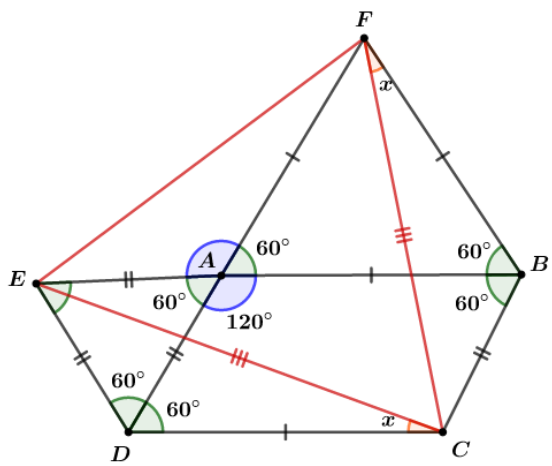
Os triângulos ABF e ADE são equiláteros, logo, $E\hat{A}D = F\hat{A}B = 60°$. Assim, como esses ângulos possuem a mesma medida, esses ângulos são opostos pelo vértice. Portanto, F, A, D estão alinhados. Vamos completar os ângulos:



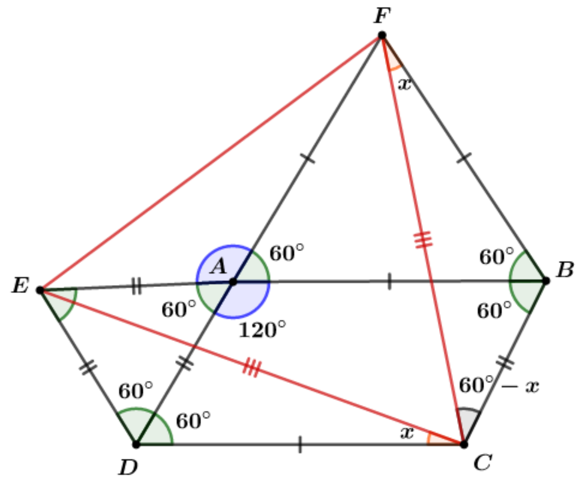
Usando as propriedades do paralelogramo, temos $ADC = ABC = 60°$.



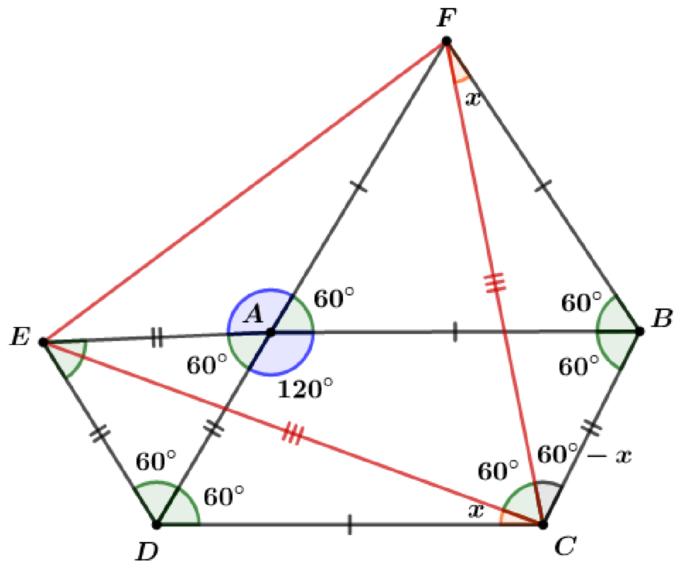
Pelo critério de congruência LAL, temos que os triângulos ECD e CBF são congruentes. Logo, $EC \equiv FC$. Fazendo $ECD = CFB = x$, temos:



Completando os ângulos do triângulo BFC:



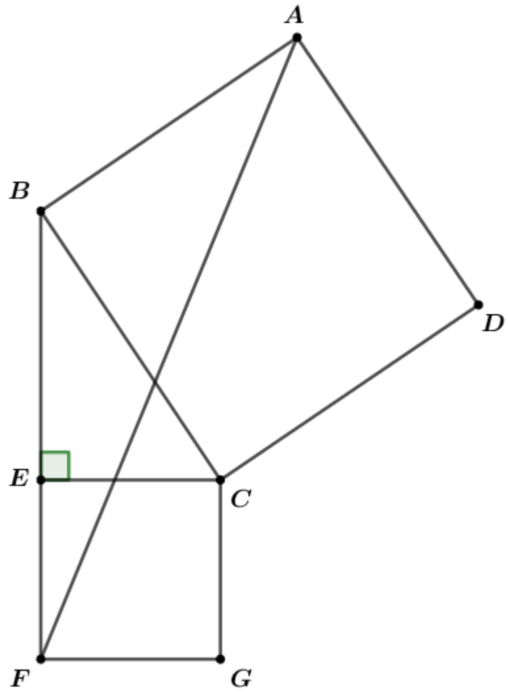
Sendo $B\hat{C}D$ oposto de $B\hat{A}D$ do paralelogramo, temos $B\hat{C}D = 120°$, então, $F\hat{C}E = 60°$:



Sendo $F\hat{C}E = 60°$ e ΔFCE isósceles, temos que os ângulos da base também são iguais a 60°. Portanto ΔFCE é equilátero.

Gabarito: Demonstração

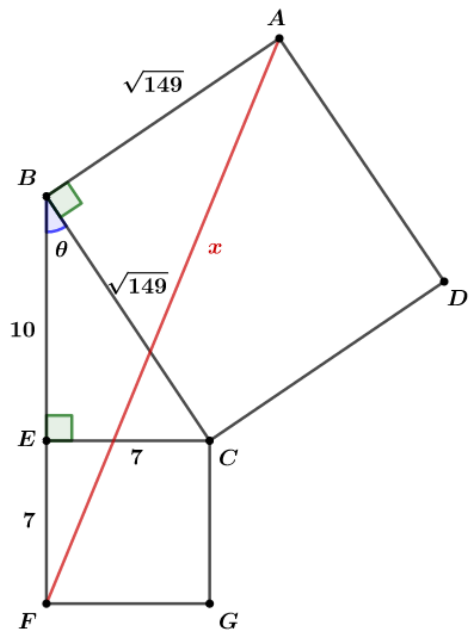
9. Na figura a seguir $ABCD$ e $CEFG$ são quadrados, os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$ são perpendiculares entre si, $\overline{BE} = 10$ e $\overline{EC} = 7$. Determine a medida do segmento $\overline{AF}$.



Resolução:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BEC, temos:

$$BC^2 = 10^2 + 7^2 \Rightarrow BC = \sqrt{149}$$



Vamos aplicar a lei dos cossenos no triângulo ABF:

$$x^2 = \sqrt{149}^2 + 17^2 - 2 \cdot 17 \cdot \sqrt{149} \cdot \cos(90° + \theta)$$

$$x = \sqrt{149 + 289 + 34\sqrt{149}sen(\theta)}$$

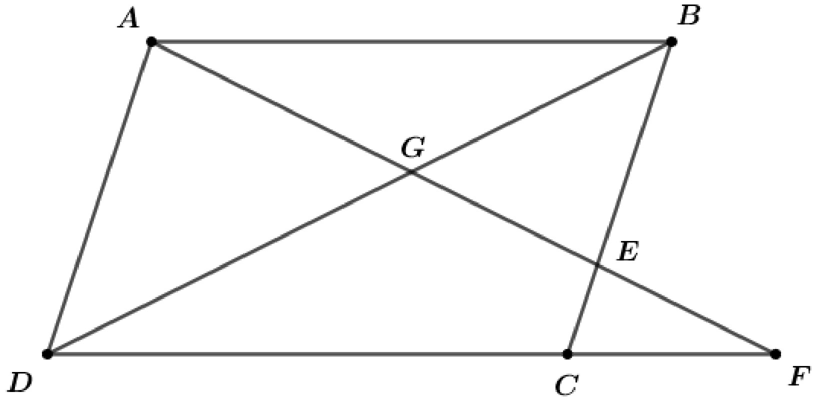
Do triângulo BEC:

$$sen\theta = \frac{7}{\sqrt{149}}$$

$$x = \sqrt{149 + 289 + 34\sqrt{149}\frac{7}{\sqrt{149}}} \Rightarrow x = \sqrt{676} \Rightarrow x = 26$$

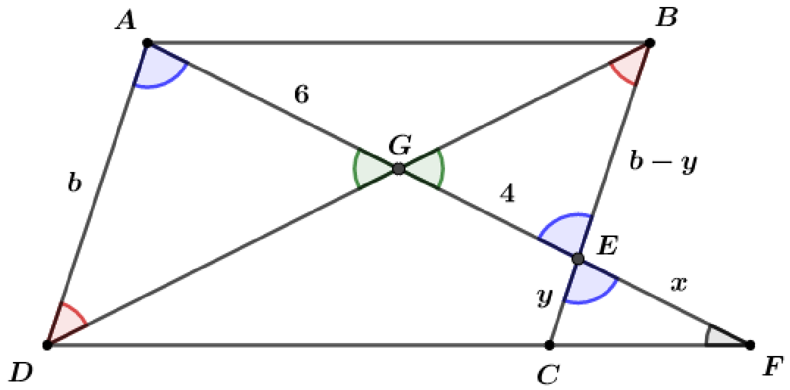
Gabarito: $AF = 26$

10. No paralelogramo $ABCD$, E está em $\overline{BC}$. AE corta a diagonal $\overline{BD}$ em G e $\overline{DC}$ em F, como mostra a figura. Se $AG = 6$ e $GE = 4$, calcule EF.



Resolução:

Vamos inserir as variáveis na figura:



Usando semelhança de triângulos:

$$\Delta ECF \sim \Delta ADF \Rightarrow \frac{x}{10+x} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = \frac{bx}{10+x}$$

$$\Delta BGE \sim \Delta DGA \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{b-y}{b} \Rightarrow 4b = 6b - 6y \Rightarrow y = \frac{b}{3}$$

Igualando as duas identidades:

$$\frac{b}{3} = \frac{bx}{10+x} \Rightarrow 10 + x = 3x \Rightarrow x = 5$$

Gabarito: $EF = 5$

2. CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

2.1. CONCEITOS INICIAIS

2.1.1. NOTAÇÃO

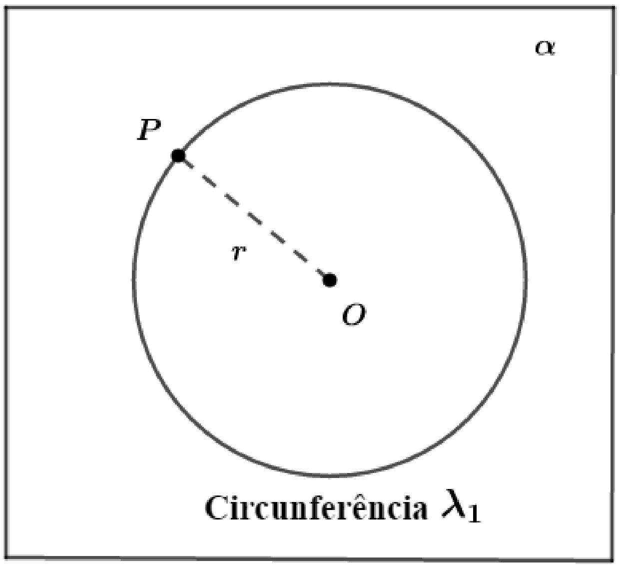
É comum confundir os termos círculo e circunferência. A diferença entre eles é que o primeiro pode ser considerado um disco enquanto o segundo é apenas um anel. Em termos matemáticos, se λ_1 é uma circunferência e λ_2 é um círculo, então para um ponto P pertencente a um plano α:

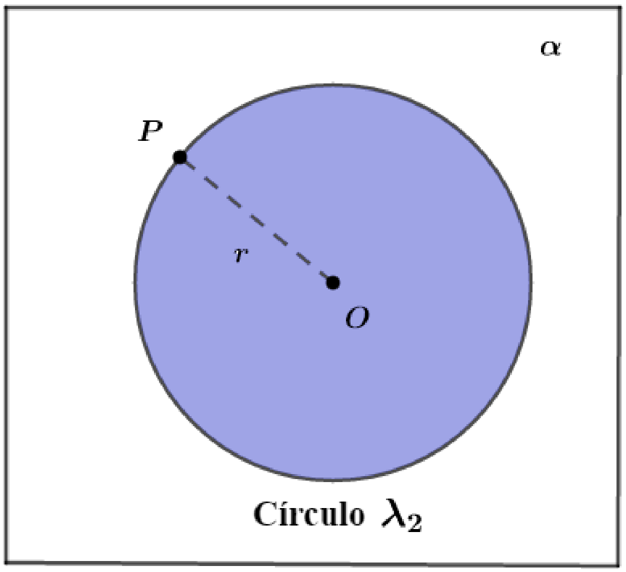
$$\lambda_1 = \{P \in \alpha | d_{P,O} = r\}$$

$$\lambda_2 = \{P \in \alpha | d_{P,O} \leq r\}$$

r é uma distância fixa do plano e é chamado de raio.

$d_{P,O}$ é a distância do ponto P a um ponto O fixo do plano, este ponto é chamado de centro da circunferência ou do círculo.





Chamamos de exterior o conjunto de pontos que distam $x > r$ em relação ao centro O. Todos os pontos que distam $x < r$ em relação ao centro O são chamados de pontos do interior.

Podemos usar a seguinte notação para definir uma circunferência ou círculo de raio r e centro O:

$$\lambda(O, r)$$

Também podemos definir uma circunferência usando 3 pontos distintos no plano, seja A, B, C pontos distintos:

$$\lambda(A; B; C)$$

2.1.2. ELEMENTOS

Os elementos presentes em uma circunferência são: centro, raio, diâmetro, arco, corda e flecha.

Vejamos a definição de cada um deles:

Centro: ponto interno que equidista de todos os pontos da circunferência.

Raio: é a distância do centro a qualquer ponto da circunferência.

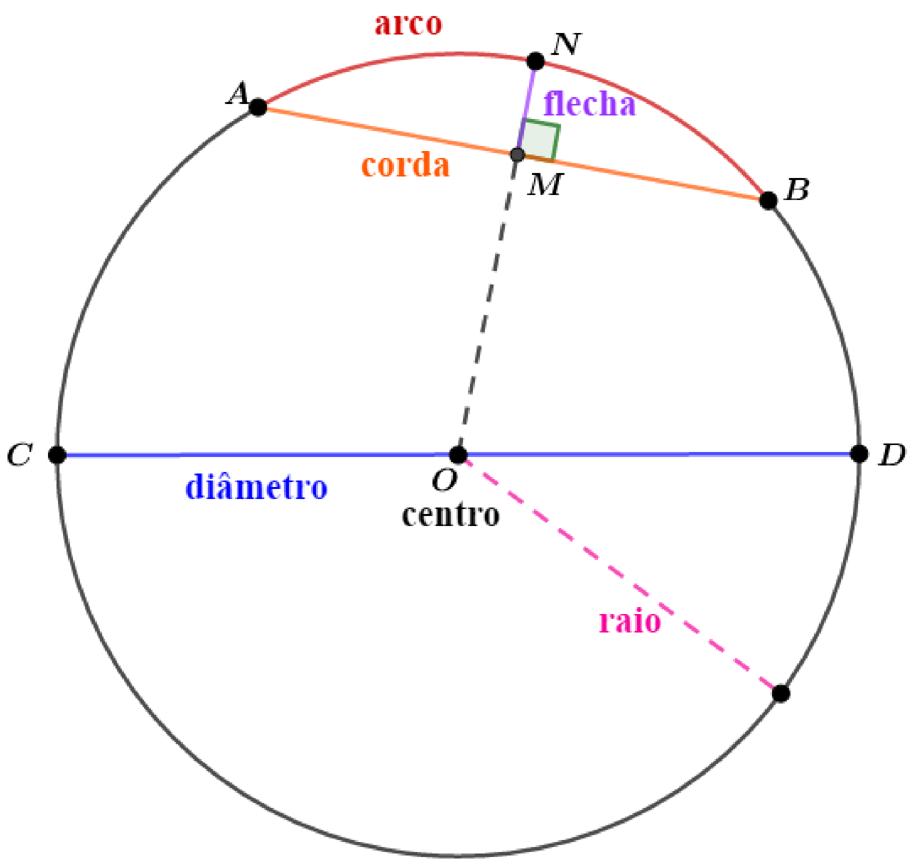
Diâmetro: é o comprimento do segmento de reta que passa pelo centro e toca dois pontos da circunferência. Também podemos dizer que ele é igual a 2 raios.

Arco: é o conjunto de pontos entre dois pontos distintos da circunferência. Esses dois pontos dividem a circunferência em arco maior e arco menor. Normalmente, usamos o arco menor.

Corda: é o segmento de reta que une as extremidades de um arco.

Flecha: é o segmento de reta compreendido entre a corda e o arco e pertence à mediatriz dessa corda.

Observe a figura abaixo os elementos da circunferência:



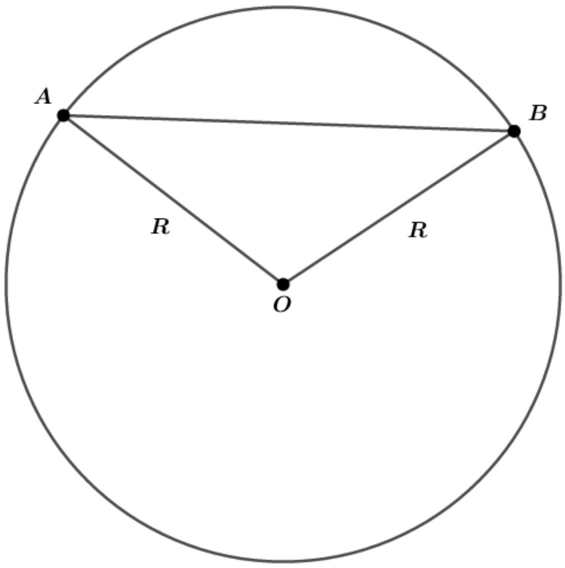
Flecha: $\overline{MN}$

Arco: $\widehat{AB}$

Diâmetro: $\overline{CD}$

Corda: $\overline{AB}$

Note que a maior corda é o diâmetro. Veja:



Se aplicarmos a desigualdade triangular no ΔAOB, encontramos:

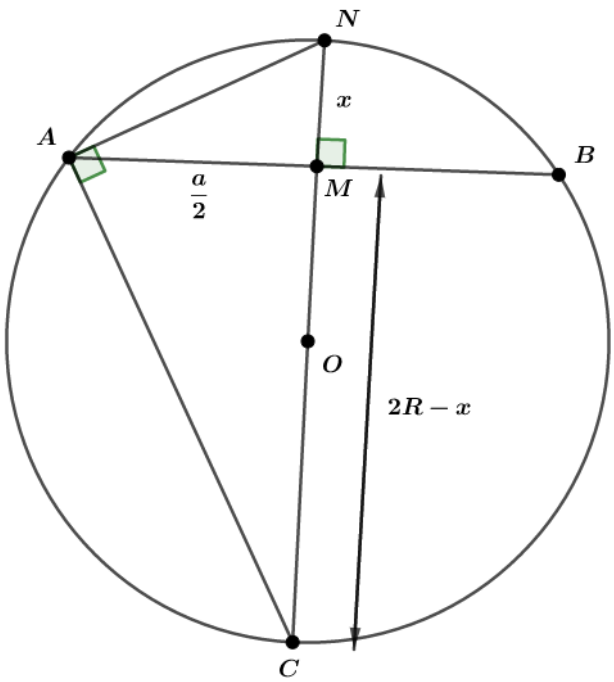
$$R - R < \overline{AB} < R + R \Rightarrow 0 < \overline{AB} < 2R$$

$$\therefore \overline{AB} < 2R$$

$2R$ é a medida da diagonal de uma circunferência, logo, a maior corda é o diâmetro.

2.1.3. CÁLCULO DA FLECHA

Podemos calcular a medida da flecha em função da medida do raio e da corda dada. Seja a a medida da corda $\overline{AB}$ e R o raio da circunferência, assim, temos:



Perceba que $\Delta AMC \sim \Delta NMA$, desse modo:

$$\frac{MC}{AM}=\frac{AM}{NM}\Rightarrow\frac{2R-x}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{a}{2}}{x}\Rightarrow 2Rx-x^2=\frac{a^2}{4}\Rightarrow 4x^2-8Rx+a^2=0$$

Encontrando as raízes:

$$x=\frac{4R\pm\sqrt{16R^2-4a^2}}{4}=R\pm\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_1=R-\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}\text{ e } x_2=R+\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}}}$$

2.2. POSIÇÃO ENTRE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS

2.2.1. CLASSIFICAÇÃO

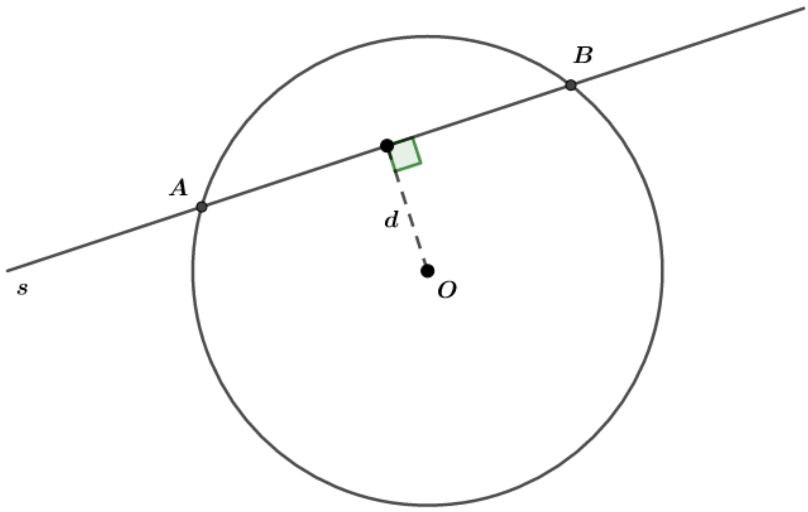
Podemos classificar as retas de acordo com sua posição em relação à circunferência. Temos três classificações:

1) Reta secante

Uma reta é secante quando cruza a circunferência em dois pontos distintos, seja s uma reta secante à circunferência λ de raio R e d a distância da reta em relação ao centro O, então:

$$s\cap\lambda=\{A,B\}$$

$$d<R$$

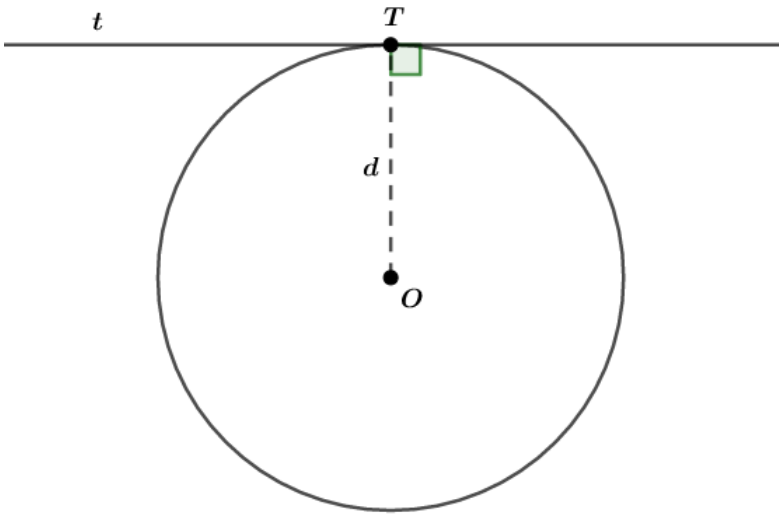


2) Reta tangente

Uma reta é tangente quando intercepta a circunferência em um único ponto. Seja t uma reta tangente à circunferência λ de raio R e d a distância da reta em relação ao centro O:

$$t\cap\lambda=\{T\}$$

$$d=R$$

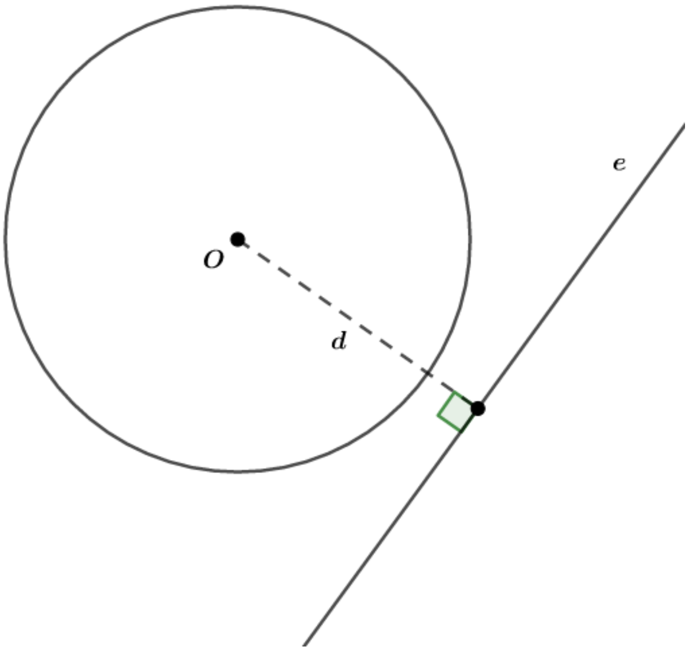


3) Reta exterior

Uma reta é exterior à circunferência quando não intercepta a circunferência. Seja e a reta exterior à circunferência λ de raio R e d a distância da reta em relação ao centro O:

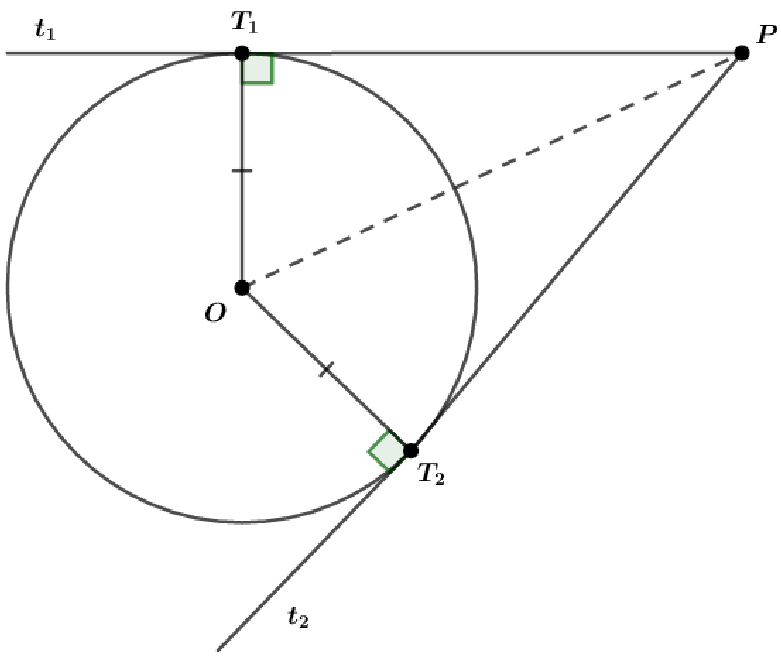
$$e \cap \lambda = \emptyset$$

$$d > R$$



2.2.2. PROPRIEDADE DA TANGENTE

Sejam t_1 e t_2 as retas tangentes à circunferência λ e que passam pelo mesmo ponto P:



Note que os triângulos OT_1P e OT_2P são retângulos, então, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$\Delta OT_1P \Rightarrow OP^2 = OT_1^2 + PT_1^2 \Rightarrow PT_1 = \sqrt{OP^2 - R^2}$$

$$\Delta OT_2P \Rightarrow OP^2 = OT_2^2 + PT_2^2 \Rightarrow PT_2 = \sqrt{OP^2 - R^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{PT_1 = PT_2}$$

Pelo critério de congruência LLL, temos $\Delta OT_1P \equiv \Delta OT_2P$, então:

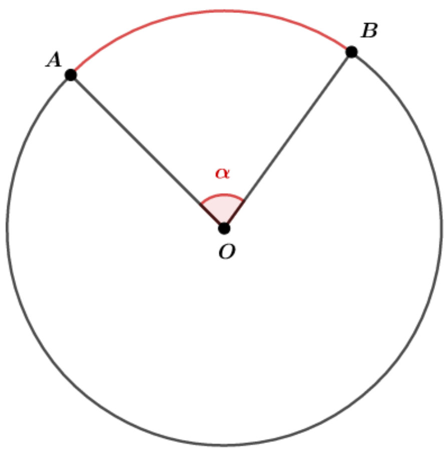
$$O\hat{P}T_1 \equiv O\hat{P}T_2 \Rightarrow \overline{OP} \text{ é bissetriz}$$

2.3. ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Já estudamos alguns conceitos de ângulos na circunferência. Vamos relembrá-los.

2.3.1. ÂNGULO CENTRAL

Chamamos de ângulo central o ângulo que possui seu vértice no centro da circunferência:

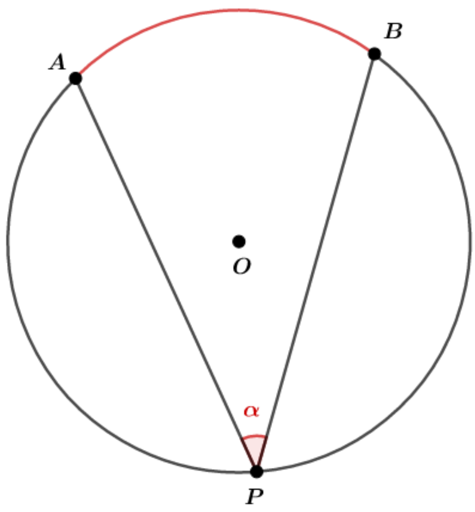


A medida do ângulo central α é dada por:

$$\alpha = \widehat{AB}$$

2.3.2. ÂNGULO INSCRITO

Um ângulo é inscrito a uma circunferência quando possui seu vértice na circunferência:

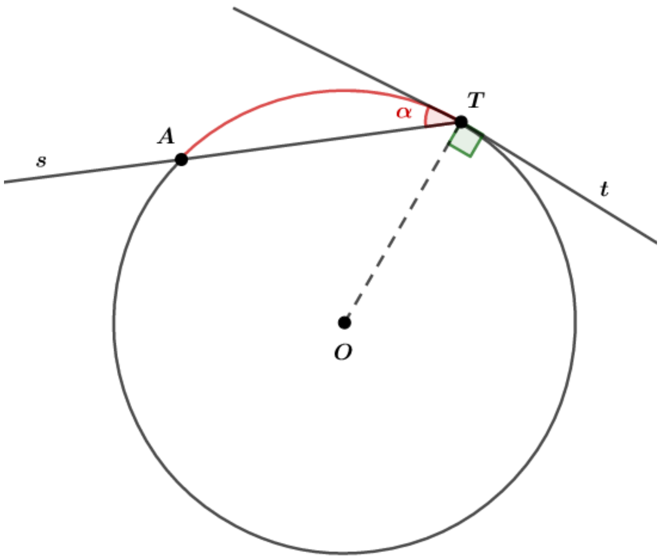


A medida do ângulo inscrito é dada por:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

2.3.3. ÂNGULO EX-INSCRITO

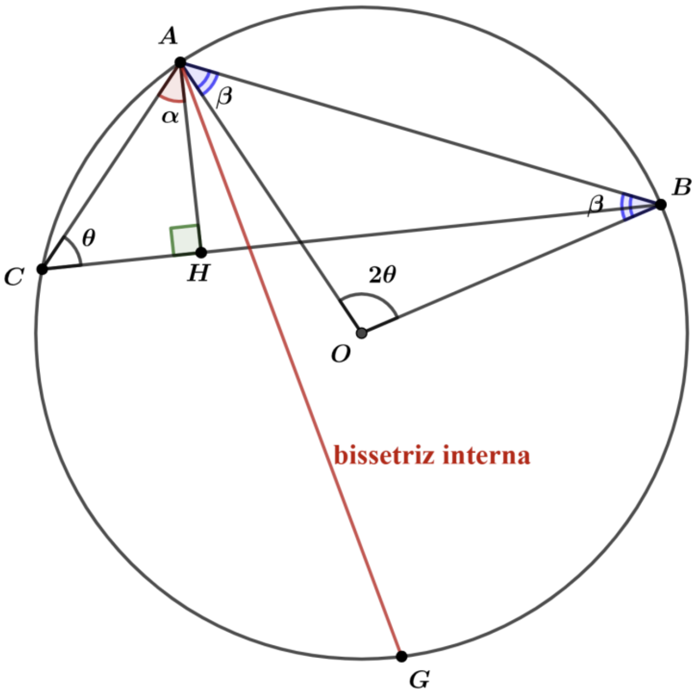
Ângulo ex-inscrito é o menor ângulo entre a reta tangente e a reta secante que passa pelo ponto de tangência:



A medida do ângulo ex-inscrito é igual à medida do ângulo inscrito que enxerga o segmento AT:

$$\alpha = \frac{\widehat{AT}}{2}$$

A isogonal da altura de um triângulo passa pelo circuncentro. A isogonal da altura seria a ceviana simétrica em relação à bissetriz interna que parte do mesmo vértice da altura. Segue a demonstração. Considere o triângulo ABC e seu circuncírculo de centro O:



Note que $A\hat{O}B = 2\theta$ (ângulo central) e $A\hat{C}B = \theta$ (ângulo inscrito que enxerga $\widehat{AB}$). Como o triângulo AOB é isósceles, temos que $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \beta$, logo:

$$2\beta + 2\theta = 180° \Rightarrow \beta = 90° - \theta$$

O triângulo ACH é retângulo, logo:

$$\theta + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \theta = \beta$$

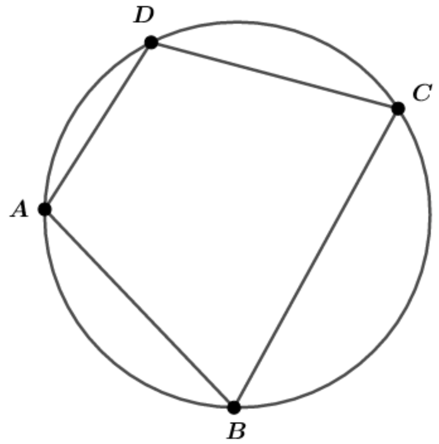
Portanto, concluímos que $\alpha = \beta$ e, consequentemente, $H\hat{A}G = G\hat{A}O$.

2.4. QUADRILÁTERO E CIRCUNFERÊNCIA

2.4.1. QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus quatro vértices pertencem à circunferência.

Exemplo:

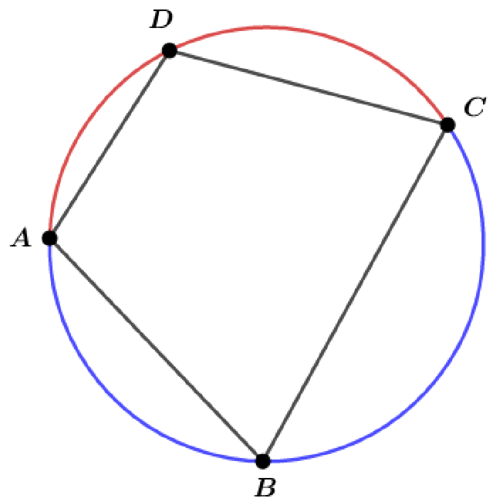


Teorema: Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

Demonstração:

Vamos provar a **primeira parte**:

$$ABCD \text{ é inscritível} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180° \\ \hat{B} + \hat{D} = 180° \end{cases}$$



Como $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são ângulos inscritos à circunferência, temos:

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2}$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

Sabendo que $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 360°$:

$$\widehat{B} + \widehat{D} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{ABC}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

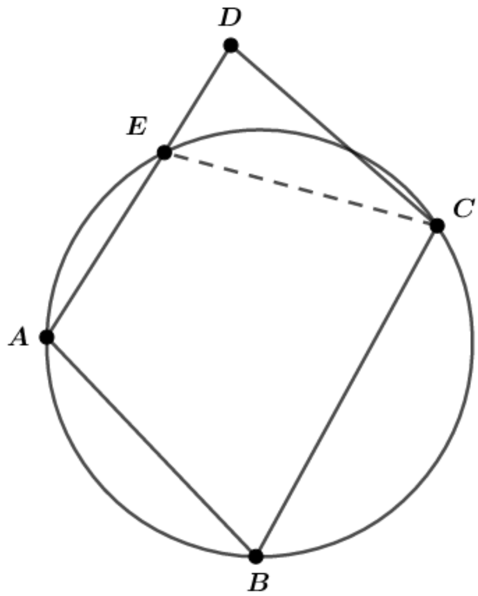
Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a 360°:

$$\widehat{A} + \widehat{C} + \underbrace{\widehat{B} + \widehat{D}}_{180°} = 360° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180°$$

Para a **segunda parte**:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180° \\ \hat{B} + \hat{D} = 180° \end{cases} \Rightarrow ABCD \text{ é inscritível}$$

Supondo que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo não inscritível à circunferência λ com $D \notin \lambda$, então, existe um ponto E pertencente à λ tal que $ABCE$ é inscritível:

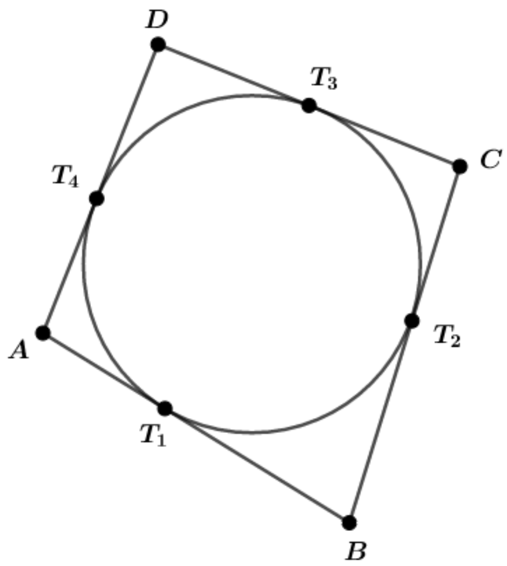


$ABCE$ é inscritível por construção, logo, $\hat{B} + \hat{E} = 180°$. Como E é um ângulo externo ao triângulo DEC, temos pelo teorema do ângulo externo que $\hat{E} > \hat{D}$. Pela hipótese temos $\hat{B} + \hat{D} = 180°$, então, $\hat{D} \equiv \hat{E}$. O que é um absurdo! Portanto, se os ângulos opostos são suplementares, o quadrilátero é inscritível.

2.4.2. QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL

Um quadrilátero convexo é circunscritível se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.

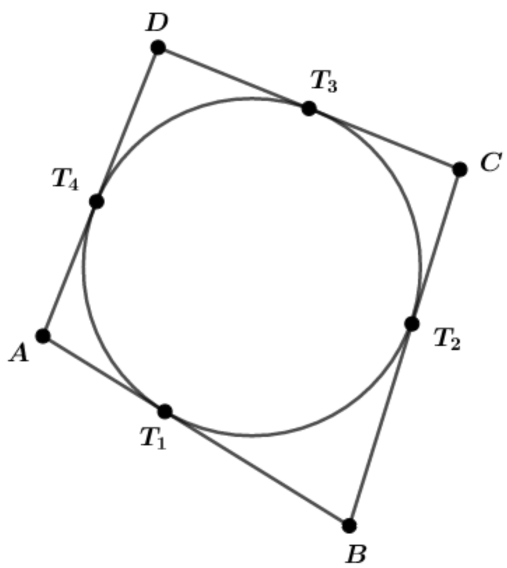
Exemplo:



Com base nesses conceitos, temos dois teoremas que são bastante úteis para resolver questões de geometria plana envolvendo quadriláteros. Vamos estudá-los.

2.4.3. TEOREMA DE PITOT

Um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, a soma dos lados opostos forem iguais.



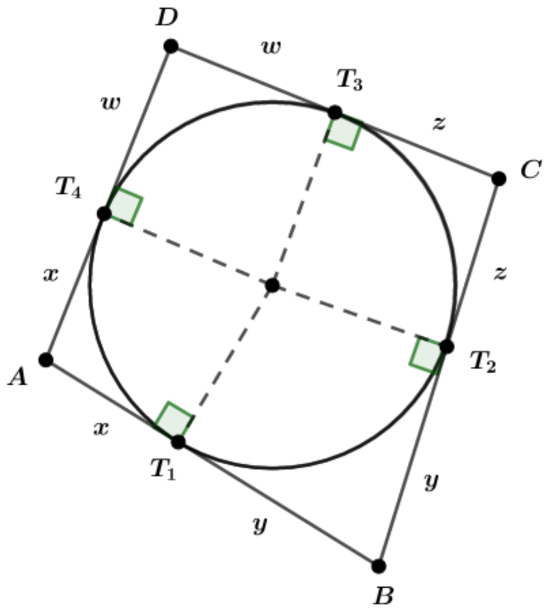
$$\boldsymbol{AB + CD = AD + BC}$$

Demonstração:

Para a primeira parte:

$$ABCD \text{ é circunscritível} \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

Seja $ABCD$ o quadrilátero circunscritível representado abaixo, usando a propriedade das retas tangentes à circunferência, temos:



Analisando a figura, podemos escrever:

$$AB + CD = (x + y) + (z + w) = x + y + z + w$$

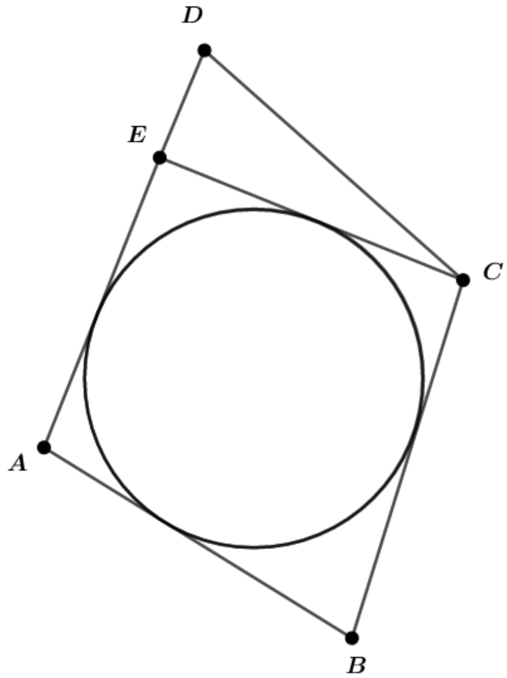
$$AD + BC = (x + w) + (y + z) = x + y + z + w$$

$$\therefore AB + CD = AD + BC$$

Para a segunda parte:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow ABCD \text{ é circunscritível}$$

Supondo que $ABCD$ seja não circunscritível à circunferência λ com $\overline{CD} \cap \lambda = \emptyset$, então, podemos construir o quadrilátero $ABCE$ tal que $\overline{CE}$ tangencia a circunferência λ:



Como $ABCE$ é circunscritível, podemos escrever:

$$AE + BC = AB + CE \ \ (I)$$

Pela hipótese:

$$AB + CD = AD + BC \ \ (II)$$

Somando as expressões (I) e (II):

$$AE + \cancel{BC} + \cancel{AB} + CD = \cancel{AB} + CE + AD + \cancel{BC}$$

$$AE + CD = CE + AD \Rightarrow \cancel{AE} + CD = CE + \cancel{AE} + ED$$

$$\Rightarrow CD = CE + ED$$

Como CED é um triângulo, temos pela desigualdade triangular:

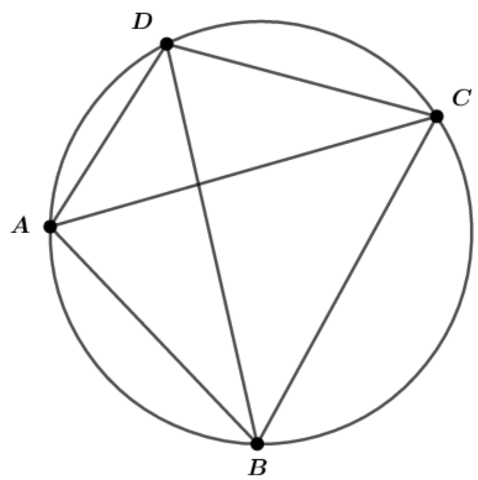
$$CD < CE + ED$$

Logo, chegamos a um absurdo! Portanto:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow ABCD \text{ é circunscritível}$$

2.4.4. TEOREMA DE PTOLOMEU

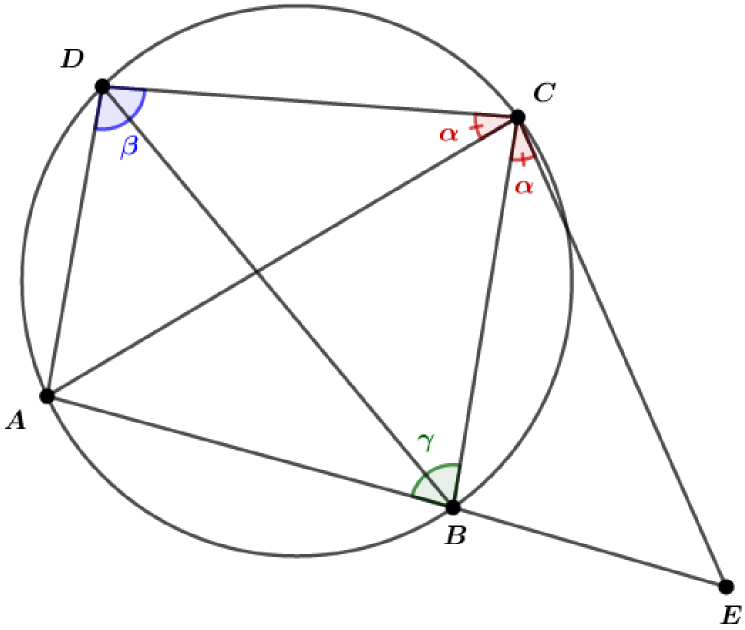
Se o quadrilátero convexo $ABCD$ é inscritível, então o produto de suas diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.



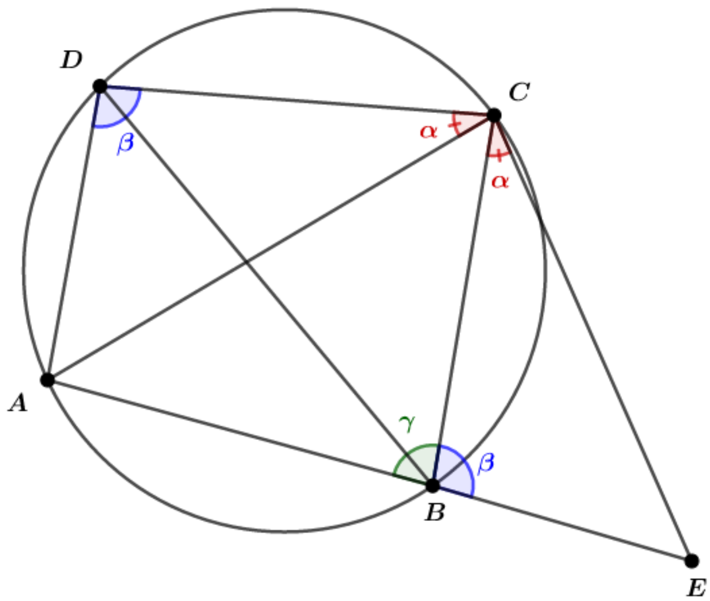
$$\boldsymbol{AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC}$$

Demonstração:

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscritível. Podemos prolongar o lado $\overline{CD}$ tal que $B\hat{C}E \equiv D\hat{C}A$ e E é o prolongamento do lado $\overline{AB}$:



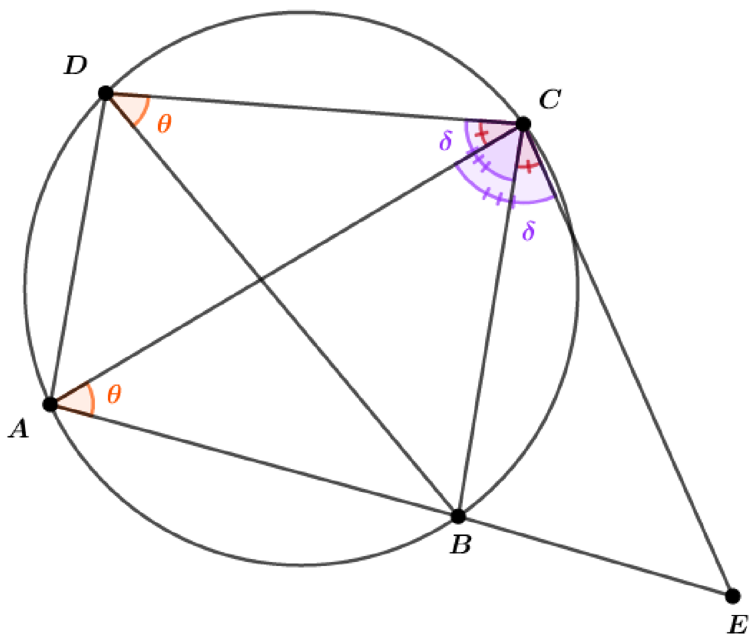
Como $ABCD$ é inscritível, temos $\beta + \gamma = 180°$. Perceba que no vértice B, $C\hat{B}E$ é suplementar de $A\hat{B}C$, então, $C\hat{B}E = \beta$.



Assim, podemos ver que $\Delta ADC \sim \Delta EBC$, então, temos:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BE} \Rightarrow AD \cdot BC = CD \cdot BE \quad (I)$$

Os ângulos inscritos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ enxergam o mesmo arco $\widehat{BC}$, então, $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$. Note que $D\hat{C}B \equiv A\hat{C}E$, pois $A\hat{C}B$ é um ângulo em comum entre eles. Desse modo:



$$\Delta DCB \sim \Delta ACE \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow AE \cdot CD = BD \cdot AC \ \ (II)$$

Podemos ver pela figura que $AE = AB + BE$, substituindo essa relação em (II):

$$(AB + BE) \cdot CD = BD \cdot AC \Rightarrow AB \cdot CD + BE \cdot CD = AC \cdot BD$$

Usando a relação (I), encontramos:

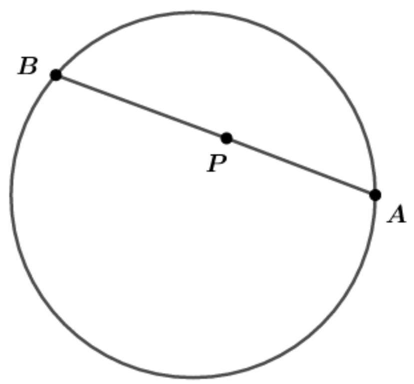
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

2.5. POTÊNCIA DE PONTO

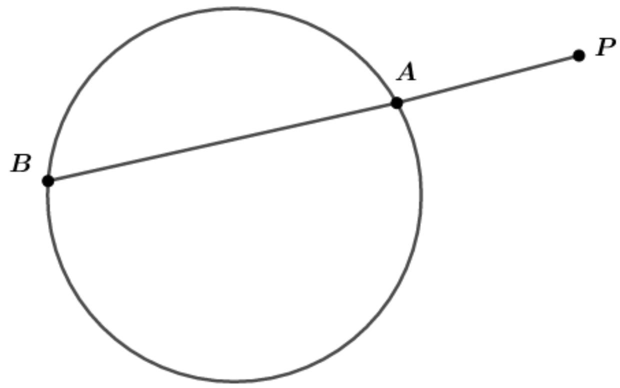
2.5.1. DEFINIÇÃO

Para finalizar o capítulo de circunferência, vamos estudar o que é a potência de um ponto P em relação a uma circunferência λ. Podemos ter dois casos possíveis:

1) P está no interior da circunferência.



2) P está no exterior da circunferência.

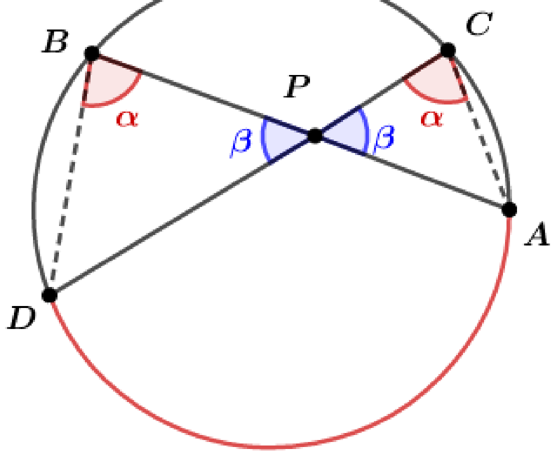


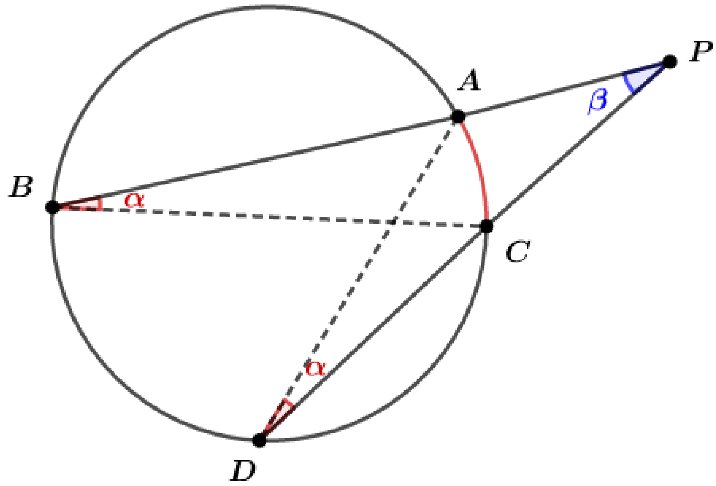
Para qualquer um desses casos, temos pela definição de potência de ponto:

$$Pot_{\lambda}^{P} = PA \cdot PB$$

Lê-se potência do ponto P em relação à circunferência λ.

Vamos ver sua aplicação. Passando por P duas retas concorrentes tal que essas retas interceptam a circunferência nos pontos A, B, C, D, temos:





Analisando as figuras, podemos ver que:

Caso 1)

$$\Delta PBD \sim \Delta PCA \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Caso 2)

$$\Delta PBC \sim \Delta PDA \Rightarrow \frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\boxed{Pot_{\lambda}^{P} = PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

2.5.2. EIXO RADICAL

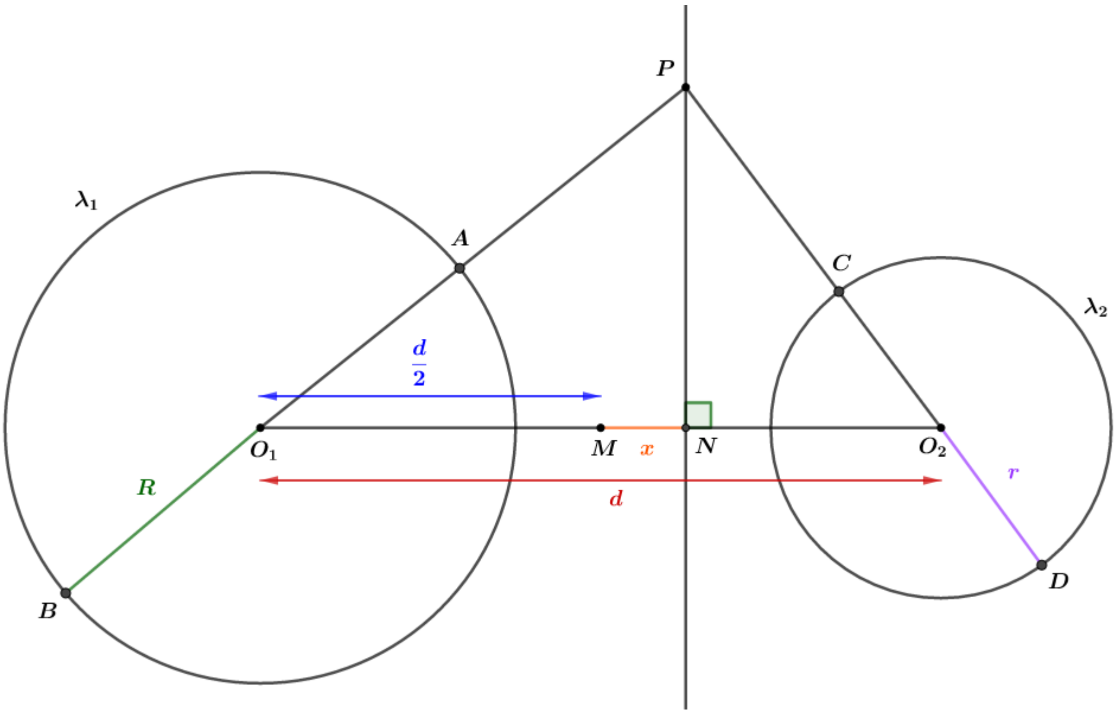
Eixo radical é o lugar geométrico dos pontos do plano que possuem a mesma potência em relação a duas circunferências dadas.

Teorema

Uma propriedade do eixo radical é que o conjunto dos pontos do eixo radical é uma reta perpendicular à reta que liga os centros das duas circunferências.

Demonstração:

Sejam λ_1 e λ_2 duas circunferências localizadas no mesmo plano de raios R e r, respectivamente. Seja P o ponto que possui a mesma potência com relação as duas circunferências, desse modo, temos:



$$Pot_{\lambda_1}^{P} = Pot_{\lambda_2}^{P}$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$(PO_1 - R)(PO_1 + R) = (PO_2 - r)(PO_2 + r)$$

$$PO_1^2 - R^2 = PO_2^2 - r^2$$

$$PO_1^2 - PO_2^2 = R^2 - r^2 \ \ (I)$$

Se $PO_1 > PO_2$, temos $O_1N > O_2N$. Seja M o ponto médio do segmento O_1O_2, assim, temos:

$$\Delta O_1PN \Rightarrow PO_1^2 = PN^2 + O_1N^2 \ \ (II)$$
$$\Delta O_2PN \Rightarrow PO_2^2 = PN^2 + O_2N^2 \ \ (III)$$

Fazendo $(II) - (III)$:

$$PO_1^2 - PO_2^2 = \underbrace{O_1N^2}_{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2} - \underbrace{O_2N^2}_{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}$$

$$PO_1^2 - PO_2^2 = \frac{d^2}{4} + dx + x^2 - \frac{d^2}{4} + dx - x^2$$

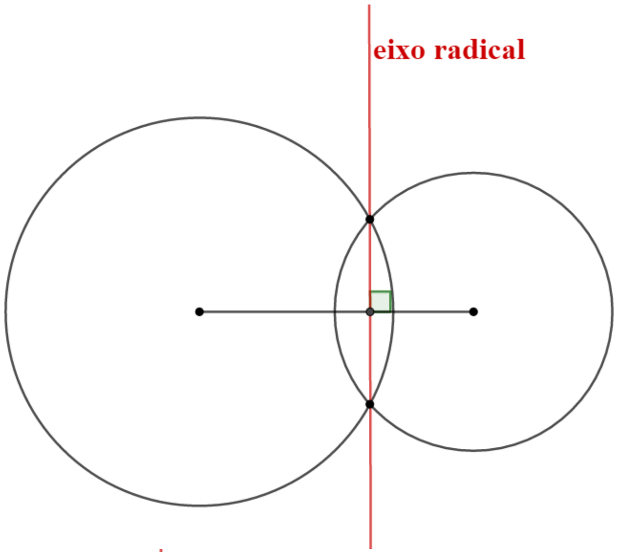
$$PO_1^2 - PO_2^2 = 2dx \Rightarrow x = \frac{PO_1^2 - PO_2^2}{2d}$$

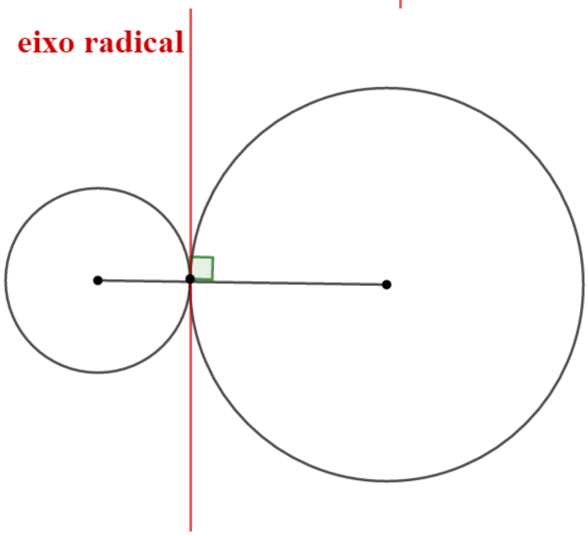
Substituindo (I) na expressão de x:

$$x = \frac{R^2 - r^2}{2d} = cte$$

Como x é um valor constante, temos que N é um ponto fixo sobre o segmentro O_1O_2. Logo, o lugar geométrico de P é a reta perpendicular a O_1O_2 que passa pelo ponto N. Portanto, o eixo radical é perpendicular a O_1O_2.

Se as circunferências forem secantes, o eixo radical será a reta que passa pelos pontos de intersecção. Se as circunferências forem tangentes, o eixo radical conterá o ponto de tangência. Exemplos:





HORA DE PRATICAR!

11. Demonstre que um quadrilátero é circunscritível se e somente se a soma dos lados opostos são iguais.

Resolução:

Esse é o teorema de Pitot, caso não se lembre, veja a demonstração na aula teórica.

Gabarito: Demonstração

12. Demonstre que num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

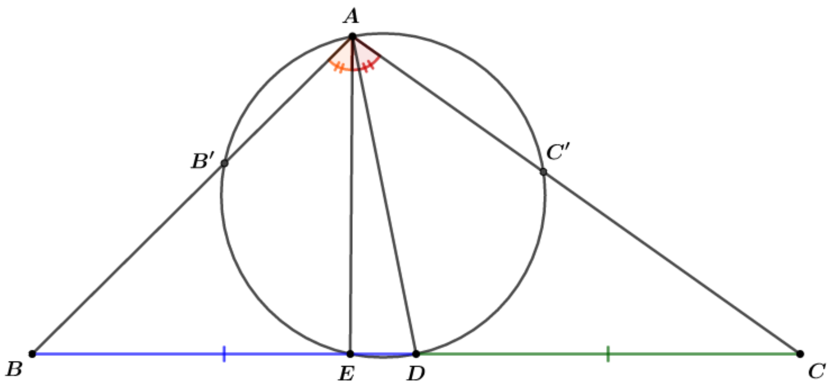
Resolução:

Esse é o teorema de Ptolomeu, caso não se lembre, veja a demonstração na aula teórica.

Gabarito: Demonstração

13. Num triângulo ABC, sejam D e E respectivamente os pés da mediana e da bissetriz baixadas de A. A circunferência circunscrita ao triângulo ADE encontra AB em B' e AC em C'. Demonstrar que $BB' = CC'$.

Resolução:



Usando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{BA}{BE} = \frac{CA}{CE} \quad (I)$$

Como D é mediana:

$$BD = CD \quad (II)$$

Pela potência do ponto B e C:

$$BB' \cdot BA = BE \cdot BD \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{BD}{BB'} \quad (III)$$

$$CC' \cdot CA = CD \cdot CE \Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CC'} \quad (IV)$$

Usando a relação (I), temos de (III) e (IV):

$$\frac{BD}{BB'} = \frac{CD}{CC'}$$

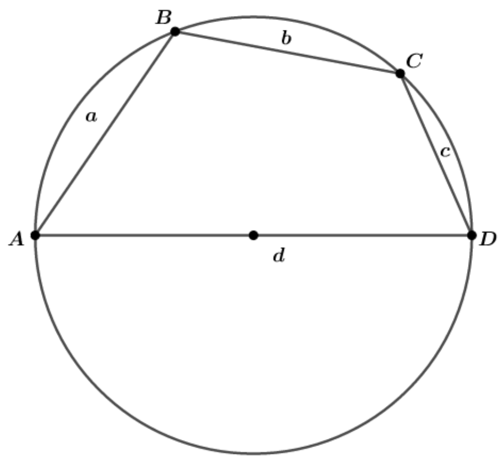
Da relação (II), podemos concluir:

$$BB' = CC'$$

Gabarito: Demonstração

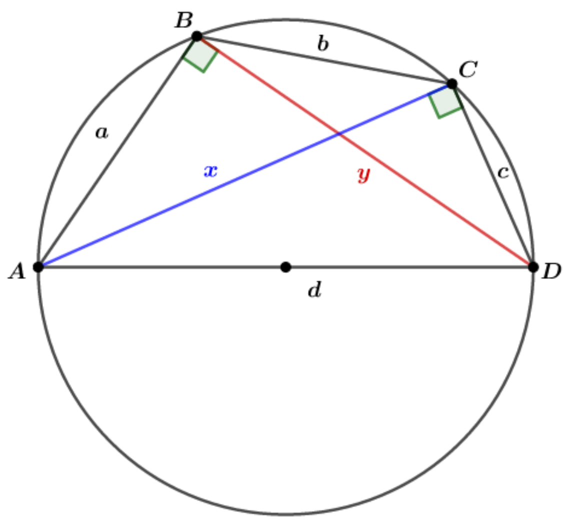
14. Num quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência, o lado AD é um diâmetro. Demonstrar que subsiste entre as medidas a, b, c e d dos lados desse quadrilátero a relação:

$$\left(d^2 - a^2 - b^2 - c^2\right) \cdot d = 2abc$$



Resolução:

Como $\overline{AD}$ é a diagonal da circunferência, se ligarmos os pontos A com C e B com D, formamos os triângulos retângulos ABD e ACD. $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são diagonais do quadrilátero. Desse modo, temos:



Sendo o quadrilátero inscritível, podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$xy = ac + bd \ \ (I)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos:

$$d^2 = x^2 + c^2 \Rightarrow x = \sqrt{d^2 - c^2} \ \ (II)$$

$$d^2 = y^2 + a^2 \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - a^2} \ \ (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$\sqrt{\left(d^2 - c^2\right)\left(d^2 - a^2\right)} = ac + bd$$

Elevando a equação acima ao quadrado:

$$d^4 - a^2d^2 - c^2d^2 + \cancel{a^2c^2} = \cancel{a^2c^2} + b^2d^2 + 2abcd$$

$$\Rightarrow d^4 - a^2d^2 - b^2d^2 - c^2d^2 = 2abcd$$

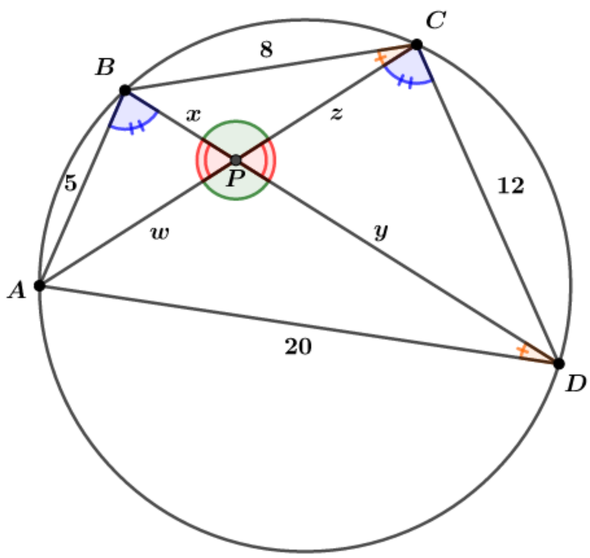
$$\Rightarrow d^3 - a^2d - b^2d - c^2d = 2abc$$

$$\therefore (d^2 - a^2 - b^2 - c^2)d = 2abc$$

Gabarito: Demonstração

15. Calcular as diagonais de um quadrilátero inscrito numa circunferência cujos lados são: $AB = 5; BC = 8; CD = 12$ e $DA = 20$.

Resolução:



Como o quadrilátero é inscritível, podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$(x+y)(z+w) = 8 \cdot 20 + 5 \cdot 12 = 220 \ \ (I)$$

Usando o critério de semelhança AA, temos:

$$\Delta ABP \sim \Delta DCP \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{w}{y} = \frac{5}{12} \ \ (II)$$

$$\Delta BPC \sim \Delta APD \Rightarrow \frac{x}{w} = \frac{z}{y} = \frac{8}{20} \ \ (III)$$

Vamos colocar as variáveis em função de w. De (II):

$$y = \frac{12}{5}w$$

$$z = \frac{12}{5}x$$

De (III):

$$x = \frac{8}{20}w \Rightarrow x = \frac{2}{5}w$$

$$z = \frac{12}{5} \cdot \frac{8}{20}w \Rightarrow z = \frac{24}{25}w$$

Substituindo as identidades em (I):

$$\left(\frac{2}{5}w + \frac{12}{5}w\right)\left(\frac{24}{25}w + w\right) = 220 \Rightarrow \frac{14}{5} \cdot \frac{49}{25} \cdot w^2 = 220 \Rightarrow w = \frac{5}{7}\sqrt{\frac{550}{7}} \cong 6{,}33$$

Substituindo o valor de w nas outras variáveis:

$$x \cong 2{,}53$$

$$y \cong 15{,}20$$

$$z \cong 6{,}08$$

Assim, as diagonais são dadas por:

$$x + y \cong 17{,}73$$

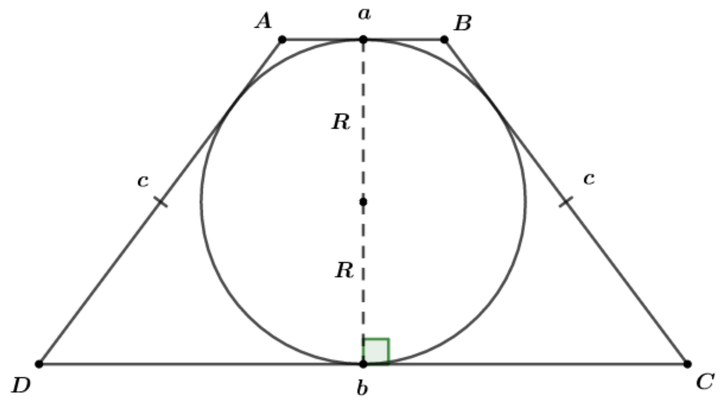
$$z + w \cong 12{,}41$$

Gabarito: $\mathbf{12,41}$ e $\mathbf{17,73}$

16. Prove que o produto das bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo é igual ao quadrado do diâmetro do círculo.

Resolução:

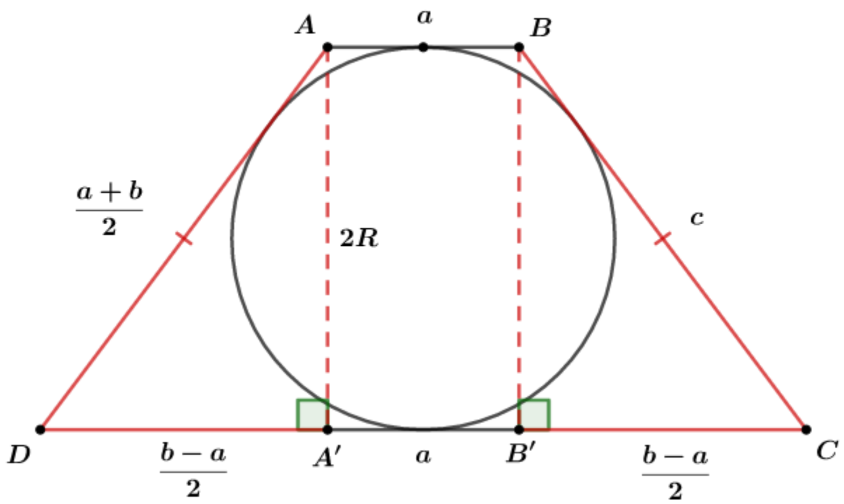
Vamos desenhar a figura da questão e inserir as variáveis:



Queremos provar que $ab = 4R^2$. Sendo o trapézio circunscritível, podemos aplicar o teorema de Pitot:

$$a + b = c + c \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Como o trapézio é isósceles, temos dois triângulos retângulos congruentes dentro dele:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $AA'D$, encontramos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 4R^2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 4R^2$$

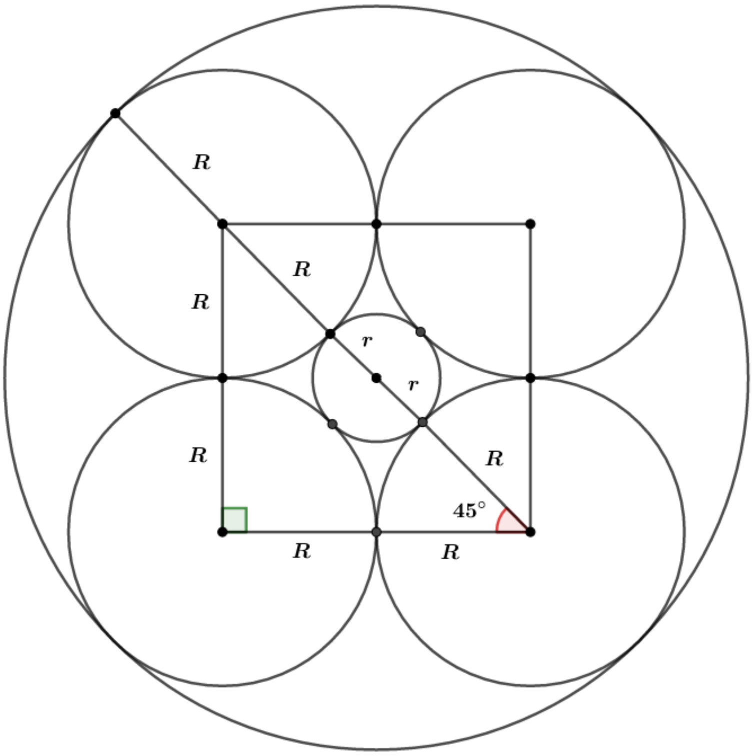
$$\Rightarrow \frac{1}{4}(a+b+b-a)(a+b-b+a) = 4R^2 \Rightarrow \frac{1}{4}(2b)(2a) = 4R^2$$

$$\therefore ab = 4R^2$$

Gabarito: Demonstração

17. Calcular o raio de 4 circunferências iguais, tangentes duas a duas, e tangentes internamente a uma circunferência de raio $5m$.

Resolução:



Os centros das circunferências maiores formam um quadrado de lado $2R$ e a diagonal desse quadrado contém o centro da circunferência menor. Podemos aplicar o seno no triângulo retângulo acima:

$$sen45° = \frac{2R}{2R+2r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(R+r) = R \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2} = R\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow r = R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

O enunciado afirma que as circunferências tangenciam internamente uma circunferência de raio $5m$, desse modo, temos:

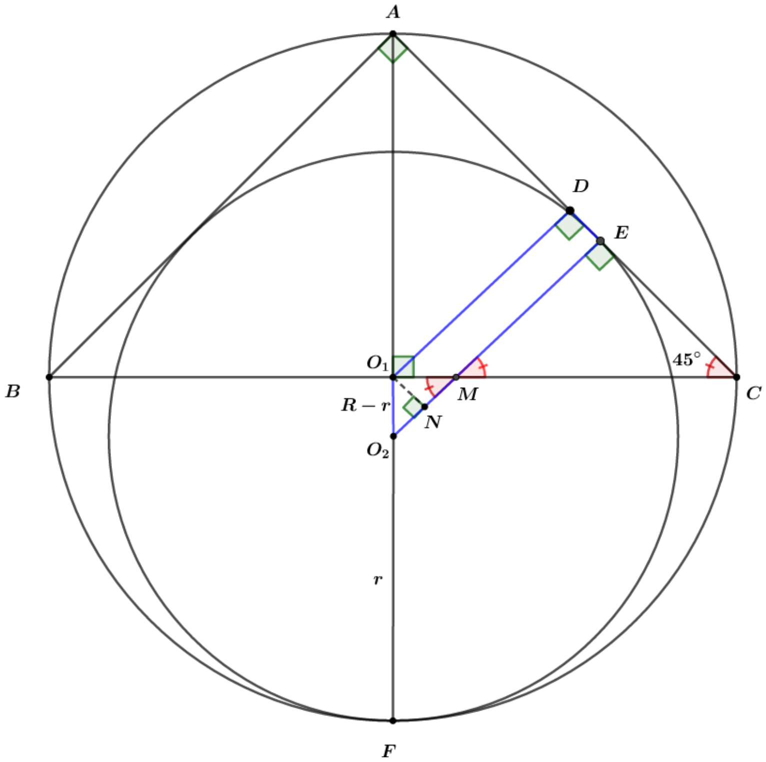
$$2R + r = 5 \Rightarrow 2R + R\left(\sqrt{2}-1\right) = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow R = 5\left(\sqrt{2}-1\right)m$$

Gabarito: $\mathbf{5\left(\sqrt{2}-1\right)}\boldsymbol{m}$

18. Um triângulo retângulo isósceles ABC está inscrito numa circunferência de raio R. Determinar o raio da circunferência que é tangente à primeira e aos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC.

Resolução:

Temos a seguinte figura:



O_1 é o centro da circunferência maior e O_2 é o centro da circunferência menor. Assim, temos $O_1O_2 = R - r$.

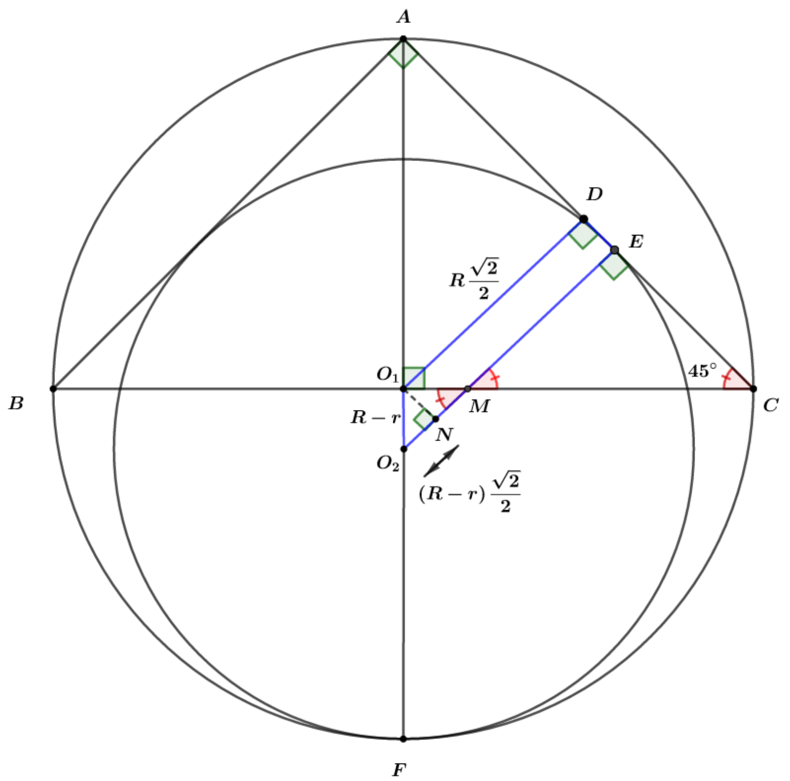
O_1D é a altura do triângulo retângulo ACO_1, sendo $O_1C = R$, temos:

$$O_1C \cdot \cos(45°) = O_1D \Rightarrow O_1D = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

E é o ponto de tangência da circunferência menor, temos $O_2E = r$.

O_2N é cateto do triângulo retângulo isósceles O_1O_2N, logo:

$$O_2N = (R - r)\cos 45° \Rightarrow O_2N = \frac{(R-r)\sqrt{2}}{2}$$



Note que $O_1D = NE$, desse modo, temos:

$$O_2E = O_2N + NE \Rightarrow r = \frac{(R-r)\sqrt{2}}{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2r = 2R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$$

$$r = \frac{R(2\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow r = 2R(\sqrt{2} - 1)$$

Gabarito: $\mathbf{2R(\sqrt{2} - 1)}$

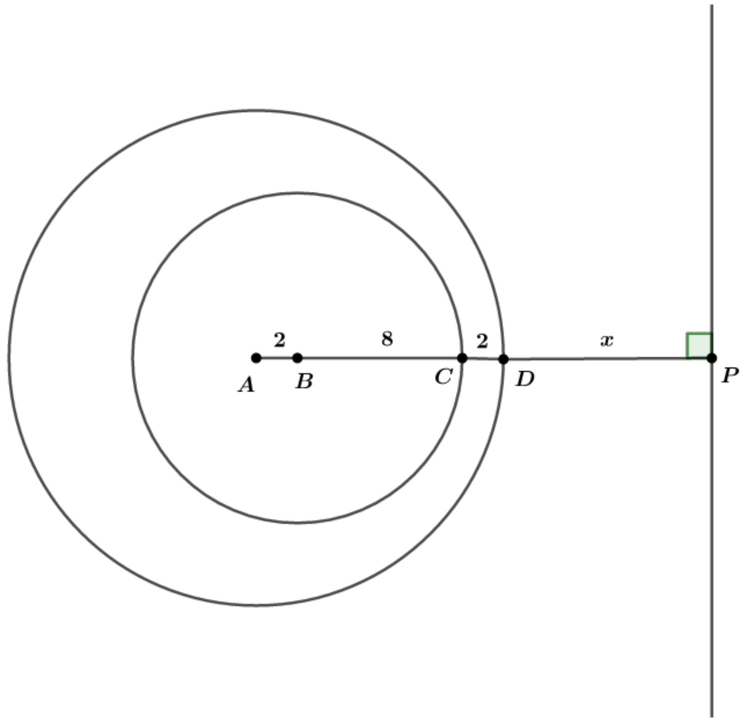
19. Considere dois círculos de centros A e B e raios 12 e 8 tal que $AB = 2$.

a) Calcule a distância de A ao eixo radical desses círculos;

b) O valor da menor potência que um ponto pode possuir em relação aos dois círculos.

Resolução:

De acordo com o enunciado:



a) Sabendo que o eixo radical é o lugar geométrico dos pontos de equipotência entre duas circunferências, temos:

$$(PA + R_A)(PA - R_A) = (PB - R_B)(PB + R_B)$$

$$PA^2 - R_A^2 = P_B^2 - R_B^2$$

$$(x + 12)^2 - 12^2 = (x + 10)^2 - 8^2$$

$$(x + 12)^2 - (x + 10)^2 = 12^2 - 8^2$$

$$(x + 12 + x + 10)(x + 12 - x - 10) = (12 + 8)(12 - 8)$$

$$(2x + 22)(2) = 80$$

$$x = 9$$

$$\therefore PA = x + 12 = 21$$

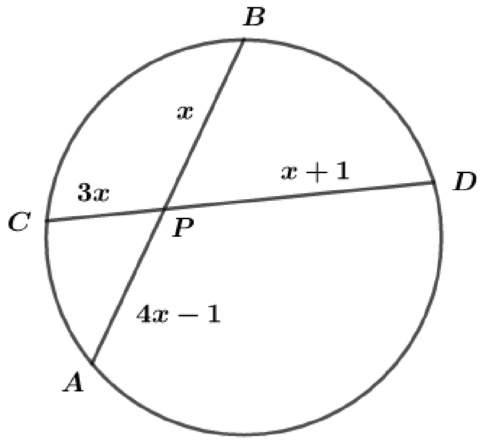
b) O valor da menor potência é dado pela menor distância entre o eixo radical e as circunferências. Isso ocorre quando $x = 9$, assim, temos:

$$Pot_A^P = x(x + 24) = 9(9 + 24) = 297$$

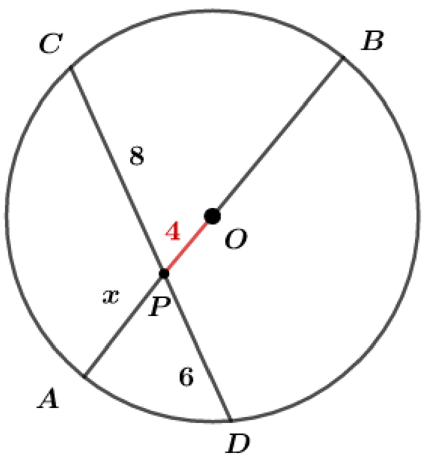
Gabarito: a) 21 b) 297

20. Determine x nas figuras abaixo.

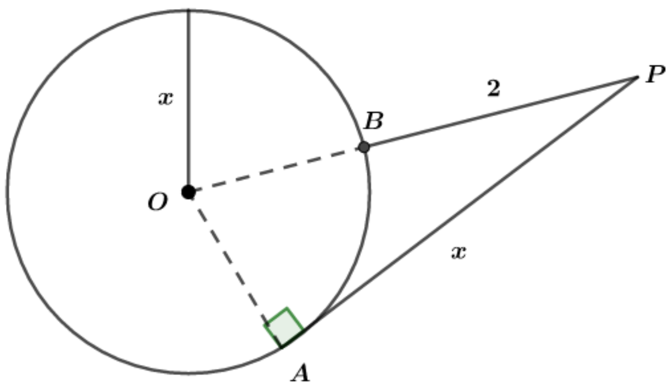
a)



b)



c)



Resolução:

a) De acordo com a figura, a potência do ponto P é dada por:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow (4x - 1)x = 3x(x + 1) \Rightarrow 4x^2 - x = 3x^2 + 3x$$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = 4$$

Como $x \neq 0$, a solução é $x = 4$.

b) Nesse caso, note que $OA = OB = 4 + x$. Desse modo:

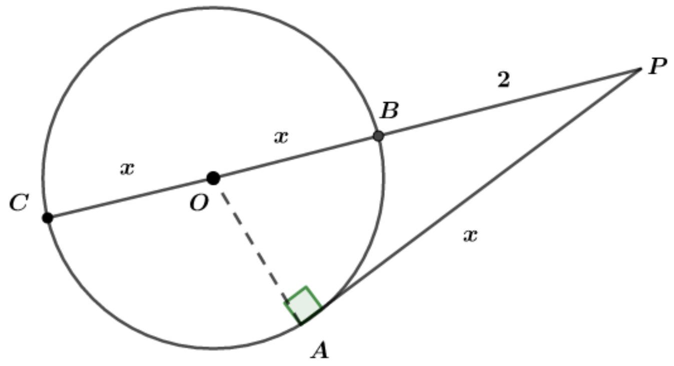
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow x \cdot (4 + 4 + x) = 8 \cdot 6 \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0$$

Raízes:

$$x = -4 \pm \sqrt{64} \Rightarrow x = -12 \; ou \; 4$$

$$\therefore x = 4$$

c) Redesenhando a figura:



$$PB \cdot PC = (PA)^2 \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2x) = x^2 \Rightarrow 4 + 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$$

Raízes:

$$x = 2 \pm \sqrt{8} \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x = 2 + 2\sqrt{2}$$

Gabarito: a) $x = 4$ b) $x = 4$ c) $x = 2 + 2\sqrt{2}$

3. QUESTÕES NÍVEL 1

1. **(CN/2019)**

Um ponto P, pertencente a uma circunferência de raio de 5 unidades, dista 4,8 unidades de um diâmetro dessa circunferência. Qual a soma das distâncias de P até os extremos desse diâmetro?

a) 14

b) 12

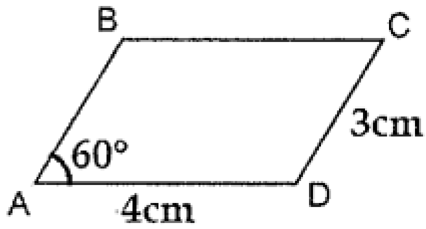
c) 7

d) 6

e) 5

2. **(CN/2018)**

Analise a figura a seguir.



Essa figura representa o paralelogramo ABCD, cujas medidas dos lados são AB = CD = 3cm, BC = AD = 4cm e Â = 60°. Do vértice D traça-se a altura DH relativa ao lado AB, que encontra a diagonal AC no ponto I. Determine, em cm, a medida DI e marque a opção correta.

a) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

b) $\frac{7}{3}$

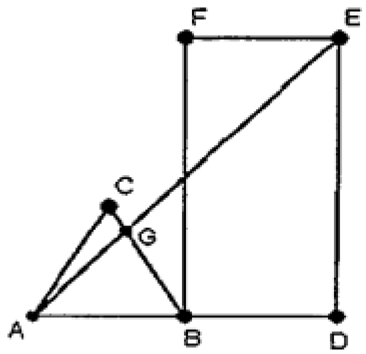
c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{9}{5}$

e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

3. (CN/2018)

Observe a figura a seguir.



O triângulo ABC acima é equilátero de lado igual a 2cm. BDEF é um retângulo de medidas 2cm x 5cm. Além disso, A, B e D estão alinhados. Sendo assim, é correto afirmar que a medida do segmento GB, em centímetros, é:

a) $\frac{20}{5+4\sqrt{3}}$

b) $\frac{11}{4+2\sqrt{3}}$

c) $\frac{8}{3+\sqrt{3}}$

d) $\frac{15}{5+2\sqrt{3}}$

e) $\frac{13}{4+5\sqrt{3}}$

4. (CN/2018)

Seja ABCD um quadrado de lado L, em que AC é uma de suas diagonais. Na semirreta BC, onde B é a origem, marca-se E de tal modo que BC = CE. Seja H a circunferência de centro em C e raio L, e P o ponto de interseção de AE com a circunferência H. Sendo assim, é correto afirmar que o segmento DP tem medida igual a:

a) $\frac{L\sqrt{10}}{5}$

b) $\frac{3L\sqrt{10}}{5}$

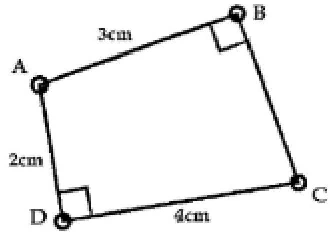
c) $\frac{2L\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{2L\sqrt{10}}{5}$

e) $\frac{L\sqrt{5}}{10}$

5. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura acima apresenta o quadrilátero ABCD, com ângulos retos internos nos vértices B e D, AB = 3 cm, AD = 2cm e CD = 2AD. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) AC < BD e AC + BD < 10 cm

b) AC > BD e AC + BD < 10 cm

c) AC = BD e AC + BD < 10 cm

d) AC > BD e AC + BD < 6 cm

e) AC < BD e AC + BD < 6 cm

6. (CN/2016)

Um retângulo de lados medindo 6 cm e 10 cm deve ser dividido em triângulos retângulos que tenham pelo menos um lado com medida representada por um número inteiro. Quaisquer que sejam dois desses triângulos, eles terão, no máximo, um lado em comum. A maior quantidade de triângulos retângulos que se pode obter, nas condições apresentadas é:

a) menor do que 80.

b) exatamente 80.

c) maior do que 80 e menor do que 240.

d) exatamente 240.

e) maior do que 240.

7. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que AD = 4 e BC = 8, calcule o raio de L e assinale a opção correta.

a) $2\sqrt{10}$

b) $4\sqrt{10}$

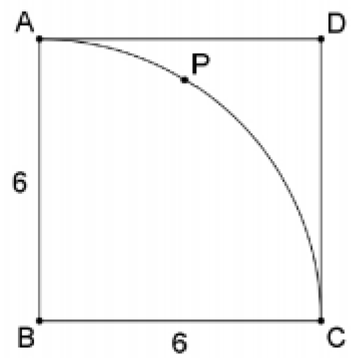
c) $2\sqrt{5}$

d) $4\sqrt{5}$

e) $3\sqrt{10}$

8. **(CN/2013)**

Analise a figura a seguir.



A figura acima exibe o quadrado ABCD e o arco de circunferência APC com centro em B e raio AB = 6. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$ é correto afirmar que o ângulo PCD mede:

a) 36°

b) 30°

c) 28°

d) 24°

e) 20°

9. **(CN/2013)**

Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que BQ = 12 e HQ = 4, qual é o valor QP?

a) 8

b) 6

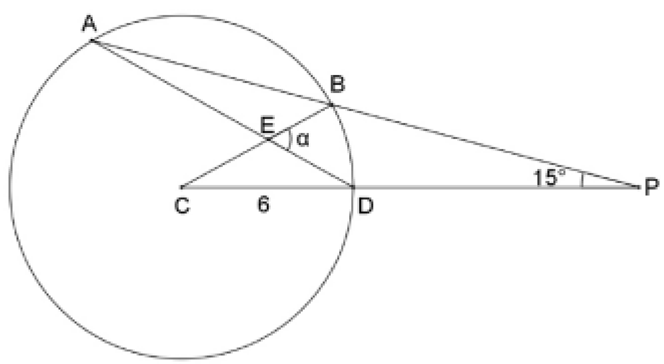
c) 5,5

d) 4,5

e) 4

10. **(CN/2013)**

Analise a figura a seguir.



Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traça-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traça-se ainda os segmentos AD e CB, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo a?

a) 75°

b) 60°

c) 45°

d) 30°

e) 15°

11. (CN/2012)

No retângulo ABCD, o lado BC = 2AB. O ponto P está sobre o lado AB e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta $\overleftrightarrow{PS}$ com S no interior de ABCD e $C \in \overleftrightarrow{PS}$. Marcam-se, ainda $M \in AD$ e $N \in BC$ de modo que MPNS seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{3}{11}$

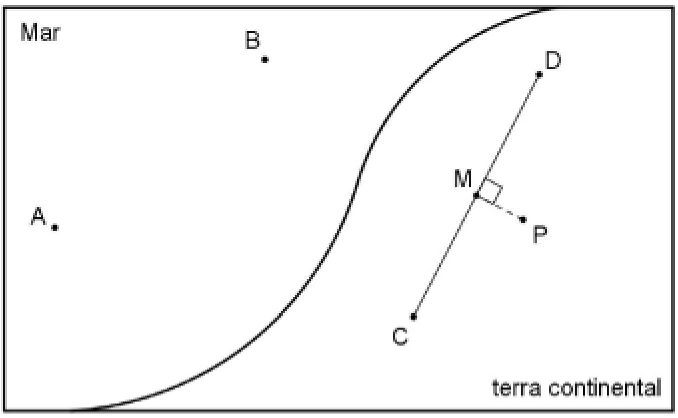
c) $\frac{5}{7}$

d) $\frac{5}{11}$

e) $\frac{7}{11}$

12. (CN/2011)

Observe a figura a seguir:



15

A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos A e B e os pontos C, D, M e P fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\widehat{C}B = A\widehat{D}B = A\widehat{P}D = 30°$, M é o ponto médio de CD = 100m e que PM = 10 m perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:

a) 150m

b) 130m

c) 120m

d) 80m

e) 60m

13. (CN/2011)

Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.

I. Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.

II. Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.

III. Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

14. (CN/2010)

ABCD é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB em A e tangente a K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será

a) $\frac{5L}{6}$

b) $\frac{4L}{5}$

c) $\frac{2L}{3}$

d) $\frac{3L}{5}$

e) $\frac{L}{3}$

15. (CN/2009)

Sobre o lado BC do quadrado ABCD constrói-se um triângulo PBC, sendo o ponto P externo ao quadrado e o quadrilátero PCDB convexo. Se o ângulo PDC é congruente ao ângulo PBC, pode-se afirmar que o quadrilátero PCDB é

a) sempre inscritível em um círculo.

b) sempre circunscritível a um círculo.

c) inscritível em um círculo apenas se for um trapézio.

d) circunscritível a um círculo apenas se for um trapézio.

e) impossível de ser inscrito em um círculo.

16. (CN/2009)

Em um trapézio isósceles ABCD, de base maior AB, está inscrito um arco de circunferência AMB, onde M é ponto médio da base menor CD. O ângulo AÊC, formado pela base maior AB e pelo lado não paralelo BC mede 60°. Qual é a razão entre as medidas da base AB e do comprimento do arco

AMB, sabendo-se que os lados congruentes desse trapézio são tangentes ao arco AMB nos pontos A e B?

a) $\frac{3}{\pi}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

e) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

17. (CN/2009)

Num quadrado ABCD de lado 6cm, traça-se a circunferência K de centro em A e raio 4 cm. Qual é medida, em cm, do raio da circunferência tangente exterior a K e tangente ao lado BC no ponto C?

a) 2,4

b) 2,5

c) 2,6

d) 2,7

e) 2,8

18. (CN/2008)

Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo ABCD. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

a) 120°

b) 135°

c) 150°

d) 165°

e) 175°

19. (CN/2007)

Um móvel P_1 parte, no sentido horário, do ponto A de uma circunferência K_1 de diâmetro $AB = 2$ e, no mesmo instante, um outro móvel P_2 parte, no sentido antihorário, do ponto C de uma circunferência K_2 de diâmetro $BC = 4$. Sabe-se que:

• A, B e C são colineares;

• P_1 e P_2 têm velocidade constante;

• K_1 e K_2 são tangentes exteriores em B;

• P_1 e P_2 mudam de circunferência todas as vezes que passam pelo ponto B;

• P_2 leva 4 segundos para dar uma volta completa em K_2;

• O primeiro encontro de P_1 e P_2 ocorre no ponto B, quando eles passam pela terceira vez por este ponto.

Quantos segundos leva P_1 para dar uma volta completa em K_1?

a) $\frac{24}{7}$
b) $\frac{22}{7}$
c) $\frac{20}{7}$
d) $\frac{18}{7}$
e) $\frac{16}{7}$

20. (CN/2007)

Num triângulo acutângulo qualquer ABC, os pontos D, E e F são, respectivamente, os pés das alturas AD, BE e CF. Traçam-se, a partir de D, as semirretas DE e DF. Uma reta r passa por A, intersectando a semirreta DE em G e a semirreta DF em H. Qualquer que seja a reta r, pode-se afirmar que

a) AG : AH :: DG : DH

b) EG : DE :: FH : DF

C) DG : DH :: DE : DF

d) AG : GE :: AH : HF

e) DE : AG :: DF : AH

21. (CN/2007)

ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semiplano de A em relação à reta suporte BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15°. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:

a) $\mathbf{AC}$

b) $\mathbf{AB}$

c) $\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{2}}$

d) $\frac{\mathbf{HC}}{\mathbf{2}}$

e) $\mathbf{AH}$

22. (CN/2006)

De um ponto P exterior a um círculo de raio 6, traçam-se secantes PXY (PX < PY), X e Y pontos variáveis pertencentes à circunferência desse círculo. Os pontos médios das cordas XY descrevem um arco de circunferência de raio R. Assim sendo, qual será o valor de R, sabendo-se que a tangente PT ao círculo mede 8?

a) 5

b) 6

c) $4\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{3}$

e) 10

23. (CN/2006)

Em um quadrado ABCD de lado 10, toma-se internamente sobre o lado CD o ponto P, que dista 4 do vértice C, e internamente sobre o lado BC, o ponto Q, de modo que os triângulos ADP e PCQ sejam semelhantes, com o segmento CQ menor possível. Nessas condições, o ângulo BAQ será igual ao ângulo

a) APB

b) PAQ

c) PAC

d) BPQ

e) AQP

24. (CN/2004)

Sejam L_1 e L_2 duas circunferências fixas de raios diferentes, que se cortam em A e B. P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano). De P traçam-se retas tangentes à L_1 e L_2, cujos pontos de contatos são R e S. Se PR = PS, pode-se afirmar que P, A e B:

a) estão sempre alinhados.

b) estão alinhados somente em duas posições.

c) estão alinhados somente em três posições.

d) estão alinhados somente em quatro posições.

e) nunca estarão alinhados.

25. (CN/2004)

Dado um triângulo retângulo, seja P o ponto do plano do triângulo equidistante dos vértices. As distâncias de P aos catetos do triângulo são K e L. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por

a) $\frac{K+L}{4}$

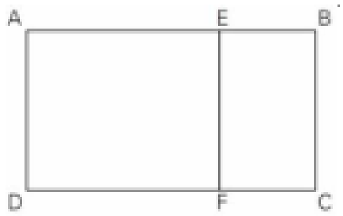
b) $2K + L$

c) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$

e) $\sqrt{K^2 + L^2}$

26. (CN/2004)



Um retângulo ABCD de lados AB = a e BC = b (a > b), é dividido, por um segmento EF, num quadrado AEFD e num retângulo EBCF, semelhante ao retângulo ABCD conforme a figura acima. Nessas condições, a razão entre a e b é aproximadamente igual a

a) $-1,62$

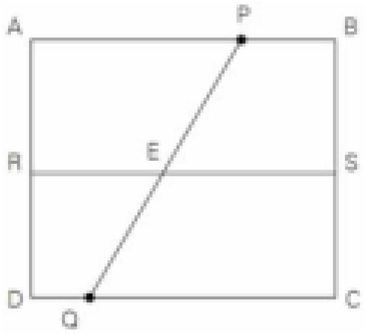
b) $2,62$

c) $3,62$

d) $4,62$

e) $5,62$

27. (CN/2003)



Num quadrado ABCD tem-se os pontos: P, pertencente ao lado AB; Q, pertencente ao lado CD; R, médio de DA; e S, médio de BC. Se PB é o dobro de DQ e E é o ponto de interseção entre PQ e RS, quantos trapézios retângulos semelhantes sempre existirão na figura, sabendo-se que $\mathrm{PB} + \mathrm{DQ} < \mathrm{AB}$?

a) Dois.

b) Três.

c) Quatro.

d) Cinco.

e) Seis.

28. (CN/2003)

Considere uma circunferência A de raio R e diâmetros perpendiculares AB e CD. O raio da menor circunferência tangente interiormente à A e à corda AC, no seu ponto médio, é dado por

a) $\frac{R}{4}$

b) $\frac{R\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{R(2-\sqrt{2})}{4}$

d) $\frac{R(\sqrt{2}+1)}{4}$

e) $\frac{R}{6}$

29. (CN/2002)

Se um segmento $\overline{AB}$ tem 2 cm de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135° desse segmento mede:

a) $\sqrt{2} + 1$

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2} - 1$

d) $\sqrt{3}$

e) $2 - \sqrt{2}$

30. (CN/2002)

Considere um triângulo retângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se x, y e z, $(x < y < z)$ são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então

a) $z = 360° - y$

b) $z = x + y$

c) $x + y + z = 180°$

d) $x + y = 108°$

e) $z = 2x + y$

31. (CN/2002)

Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto $P, P \neq M$, então o segmento $\overline{NP}$ mede

a) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$

b) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$

d) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$

e) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

32. (CN/2001)

Considere um quadrado ABCD e dois triângulos equiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\widehat{D}P$, $B\widehat{Q}P$ e $D\widehat{P}Q$ é igual a:

a) 270°

b) 300°

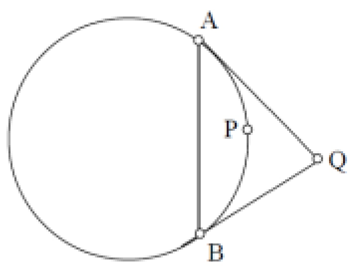
c) 330°

d) 360°

e) 390°

33. (CN/2001)

Observe a figura abaixo:



O ponto P do menor arco AB dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:

a) $\sqrt{30}$

b) $2\sqrt{15}$

c) 16

d) 18

e) $6\sqrt{10}$

34. (CN/2000)

Seja ABCD um quadrilátero qualquer onde os lados opostos NÃO são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremos M (ponto médio do lado AD) e N (ponto médio do lado BC) é:

a) 12,5

b) 14

c) 14,5

d) 16

e) 17

35. (CN/2000)

Suponha que 1 (um) naval (símbolo n) seja a medida de um ângulo convexo, menor que um ângulo reto, inscrito em um círculo de raio r, cujos lados determinam, nesse círculo, um arco de comprimento r. Assim sendo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a:

a) $\frac{\pi n}{4}$

b) $\frac{\pi n}{2}$

c) πn

d) $2\pi n$

e) $4\pi n$

36. (CN/2000)

A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado ABCD. Qual é a medida do ângulo PCB?

a) 30°

b) 45°

c) 60°

d) $75°$

e) 90°

37. (CN/1999)

Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo $D\hat{A}I$ mede 40° e o ângulo $C\hat{B}I$ mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo $A\hat{P}C$ mede:

a) 10°

b) 20°

c) 30°

d) 40°

e) 50°

38. (CN/1998)

Um quadrilátero convexo Q tem diagonais respectivamente iguais a 4 e 6. Assinale, dentre as opções, a única possível para o perímetro de Q.

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

39. (CN/1998)

A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos segmentos tangentes aos dois círculos.

a) 38,5

b) 39

c) 39,5

d) 40

e) 40,5

GABARITO

1. a
2. a
3. a
4. a
5. b
6. e
7. c
8. a
9. e
10. b
11. b
12. Anulada
13. Anulada

14. e
15. a
16. d
17. e
18. b
19. e
20. a
21. a
22. a
23. d
24. a
25. e
26. a
27. a
28. c
29. c
30. b
31. c
32. b
33. b
34. a
35. d
36. d
37. b
38. b
39. d

RESOLUÇÃO

1. (CN/2019)

Um ponto P, pertencente a uma circunferência de raio de 5 unidades, dista 4,8 unidades de um diâmetro dessa circunferência. Qual a soma das distâncias de P até os extremos desse diâmetro?

a) 14

b) 12

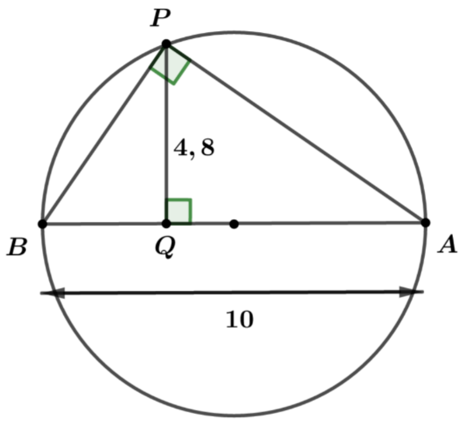
c) 7

d) 6

e) 5

Comentários

O primeiro passo nessa questão é fazer uma figura:



Da semelhança dos triângulos ΔABP e ΔAQP, podemos escrever:

$$\Delta ABP \sim \Delta AQP \Rightarrow \frac{AB}{PB} = \frac{AP}{PQ} \Rightarrow \frac{10}{PB} = \frac{AP}{4{,}8} \Rightarrow PB \cdot AP = 48$$

Do teorema de Pitágoras, temos:

$$AP^2 + PB^2 = 10^2 = 100$$

Note que se multiplicarmos a primeira equação por 2 e somarmos membro a membro com a segunda igualdade, teremos:

$$AP^2 + 2PB \cdot AP + PB^2 = 100 + 96 = 196 = 14^2$$

Além disso, temos que:

$$AP^2 + 2PB \cdot AP + PB^2 = (AP + PB)^2$$

Logo:

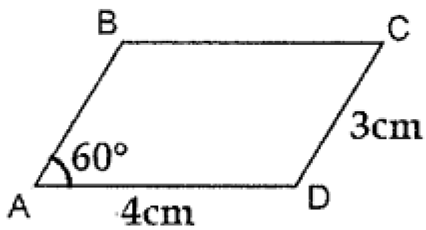
$$AP + PB = \sqrt{14^2} = 14$$

Gabarito: "a".

---

2. (CN/2018)

Analise a figura a seguir.



Essa figura representa o paralelogramo ABCD, cujas medidas dos lados são AB = CD = 3cm, BC = AD = 4cm e Â = 60°. Do vértice D traça-se a altura DH relativa ao lado AB, que encontra a diagonal AC no ponto I. Determine, em cm, a medida DI e marque a opção correta.

a) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

b) $\frac{7}{3}$

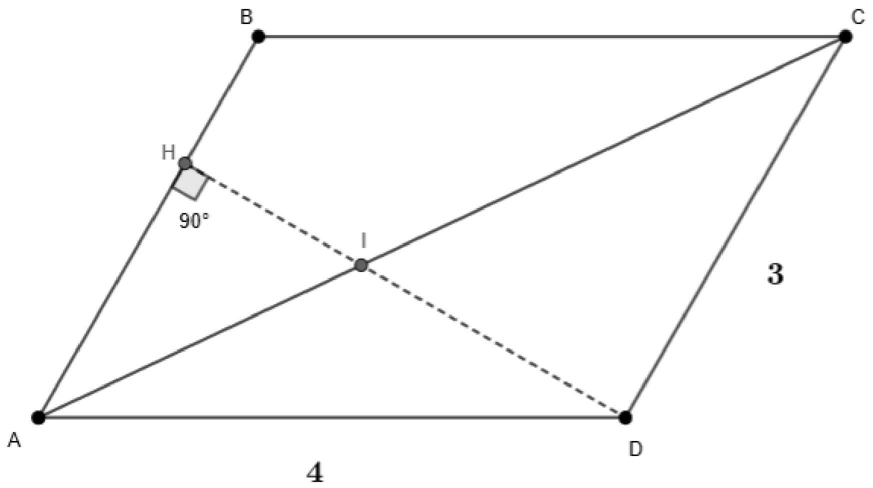
c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{9}{5}$

e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Comentários

Representando graficamente a situação proposta, temos:



O primeiro passo é perceber que, como o $H\hat{A}D = 60°$, então temos que $AH = \frac{4}{2} = 2$. Para ver isso, basta refletir o ΔAHD em torno de DH, do que se obtém um triângulo isósceles de lado 4. Além disso, por Pitágoras, temos que $DH = 2\sqrt{3}$.

Observe que os triângulos ΔAHI e ΔDIC são semelhantes pelo caso LLL. Disso, temos que:

$$\frac{AH}{CD} = \frac{HI}{DI} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{HI}{DI} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}DI$$

Mas:

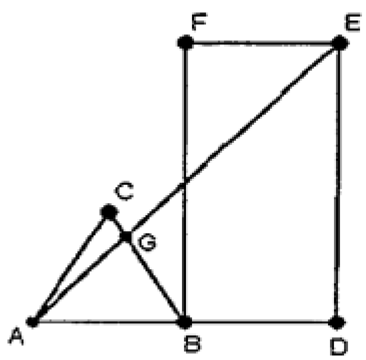
$$DI + HI = DH = 2\sqrt{3} \Rightarrow DI + \frac{2}{3}DI = 2\sqrt{3} \Rightarrow DI = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Gabarito: “a”.

---

3. (CN/2018)

Observe a figura a seguir.



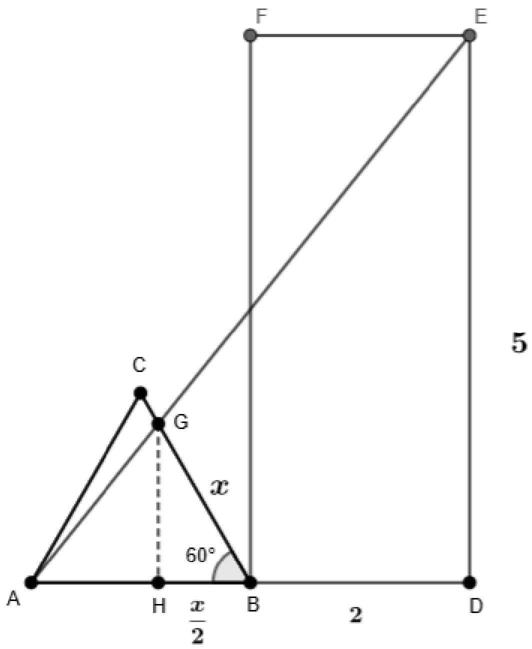
O triângulo ABC acima é equilátero de lado igual a 2cm. BDEF é um retângulo de medidas 2cm x 5cm. Além disso, A, B e D estão alinhados. Sendo assim, é correto afirmar que a medida do segmento GB, em centímetros, é:

a) $\frac{20}{5+4\sqrt{3}}$

b) $\frac{11}{4+2\sqrt{3}}$
c) $\frac{8}{3+\sqrt{3}}$
d) $\frac{15}{5+2\sqrt{3}}$
e) $\frac{13}{4+5\sqrt{3}}$

Comentários

Observe o esquema:



Nele, traçamos a perpendicular GH sobre o lado AB. Como o ângulo ABC é de $60°$, podemos afirmar que a reflexão do triângulo ΔHBG em torno de HG é um triângulo equilátero de lado x. Disso, tiramos que $HB = x/2$.

Além disso, pela construção e como o ângulo BDE é reto, assim como o ângulo AHG, temos que os triângulos retângulos ΔAHG e ΔADE são semelhantes.

Por Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + GH^2 = x^2 \Rightarrow GH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Pela semelhança:

$$\frac{AH}{AD} = \frac{GH}{DE} \Rightarrow \frac{2 - \frac{x}{2}}{4} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{5} \Rightarrow x = \frac{20}{5 + 4\sqrt{3}}$$

Gabarito: “a”.

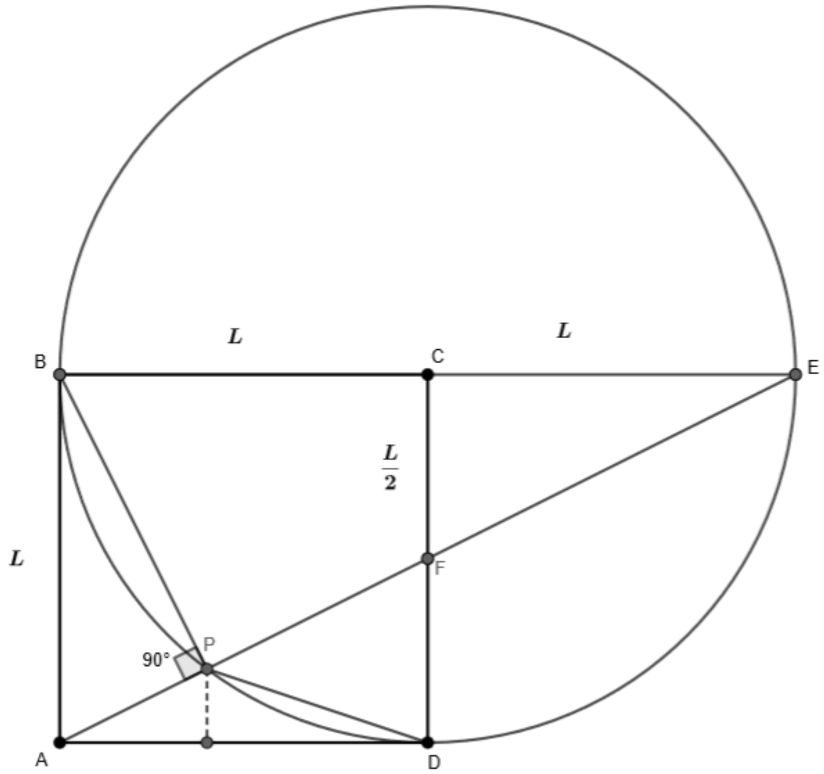
4. (CN/2018)

Seja ABCD um quadrado de lado L, em que AC é uma de suas diagonais. Na semirreta BC, onde B é a origem, marca-se E de tal modo que BC = CE. Seja H a circunferência de centro em C e raio L, e P o ponto de interseção de AE com a circunferência H. Sendo assim, é correto afirmar que o segmento DP tem medida igual a:

a) $\frac{L\sqrt{10}}{5}$
b) $\frac{3L\sqrt{10}}{5}$
c) $\frac{2L\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{2L\sqrt{10}}{5}$
e) $\frac{L\sqrt{5}}{10}$

Comentários

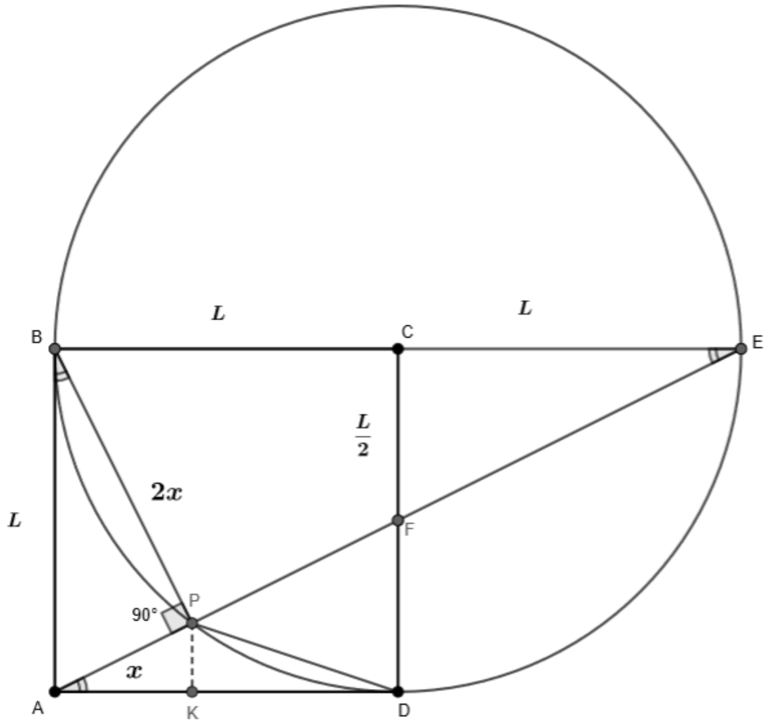
Desenhando a situação proposta, temos:



CF é paralelo a BA e passa pelo ponto médio de BE, logo, é base média, do que segue que $CF = L/2$.

Faça $BP = 2x$.

Como BA é tangente à circunferência, temos que $A\hat{B}P = B\hat{E}P$. Disso, temos que os triângulos retângulos ΔABP e ΔBEP são semelhantes com razão 2. Assim, podemos afirmar que $AP = x$.



Por Pitágoras:

$$L^2 = 4x^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{5}}$$

E ainda:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2 = FE^2 \Rightarrow FE = \frac{\sqrt{5}}{2}L$$

Da semelhança entre ΔAPK e ΔFCE:

$$\frac{AP}{AK} = \frac{EF}{CE} \Rightarrow \frac{\frac{L}{\sqrt{5}}}{AK} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}L}{L} \Rightarrow AK = \frac{2L}{5}$$

Como $AK + KD = L$, temos que $KD = \frac{3L}{5}$.

Além disso, ainda pela semelhança:

$$\frac{PK}{AK} = \frac{\frac{L}{2}}{L} \Rightarrow PK = \frac{L}{5}$$

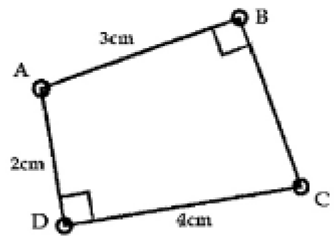
Por fim, aplicando Pitágoras ao ΔKPD:

$$\left(\frac{L}{5}\right)^2 + \left(\frac{3L}{5}\right)^2 = PD^2 \Rightarrow PD = \frac{\sqrt{10}}{5}L$$

Gabarito: “a”.

5. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura acima apresenta o quadrilátero ABCD, com ângulos retos internos nos vértices B e D, AB = 3 cm, AD = 2cm e CD = 2AD. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) AC < BD e AC + BD < 10 cm

b) AC > BD e AC + BD < 10 cm

c) AC = BD e AC + BD < 10 cm

d) AC > BD e AC + BD < 6 cm

e) AC < BD e AC + BD < 6 cm

Comentários

Vamos usar o teorema de Pitágoras no triângulo ΔACD:

$$2^2 + 4^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}\ cm$$

Usando Pitágoras no ΔABC:

$$3^2 + BC^2 = AC^2 = 20 \Rightarrow BC = \sqrt{11}\ cm$$

Como $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180°$, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível. Logo, podemos usar o teorema de Ptolomeu para calcular BD:

$$2 \cdot \sqrt{11} + 3 \cdot 4 = 2\sqrt{5} \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{11} + 12}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55} + 6\sqrt{5}}{5}$$

Veja que $AC > BD$, pois:

$$2\sqrt{5} > \frac{2\sqrt{11} + 12}{2\sqrt{5}} \Rightarrow\ 20 - 12 > 2\sqrt{11} \Rightarrow 8 > 2\sqrt{11} \Rightarrow 64 > 44$$

Ainda temos que:

$$AC + BD = 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{55} + 6\sqrt{5}}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{55}}{5}$$

Mas $\sqrt{5} > 2 \Rightarrow 16\sqrt{5} > 32 \Rightarrow \frac{16\sqrt{5}}{5} > \frac{32}{5} > \frac{30}{5} = 6.$

Dessa forma, a única alternativa possível é a b.

Gabarito: "b".

---

6. (CN/2016)

Um retângulo de lados medindo 6 cm e 10 cm deve ser dividido em triângulos retângulos que tenham pelo menos um lado com medida representada por um número inteiro. Quaisquer que sejam dois desses triângulos, eles terão, no máximo, um lado em comum. A maior quantidade de triângulos retângulos que se pode obter, nas condições apresentadas é:

a) menor do que 80.

b) exatamente 80.

c) maior do que 80 e menor do que 240.

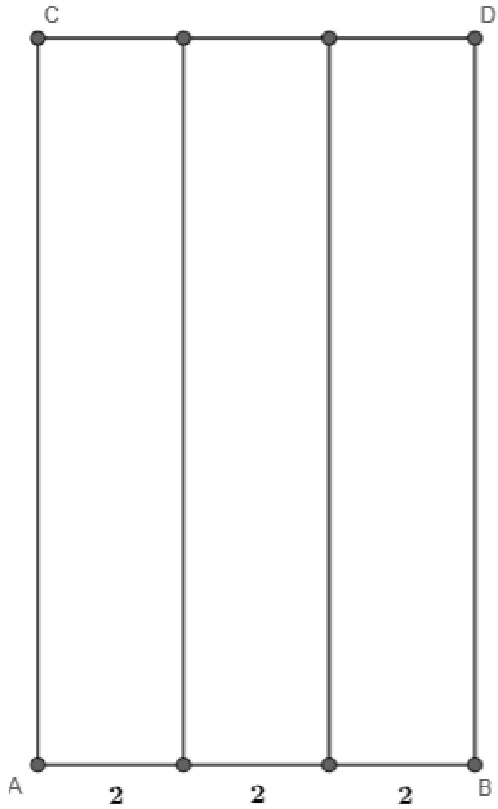
d) exatamente 240.

e) maior do que 240.

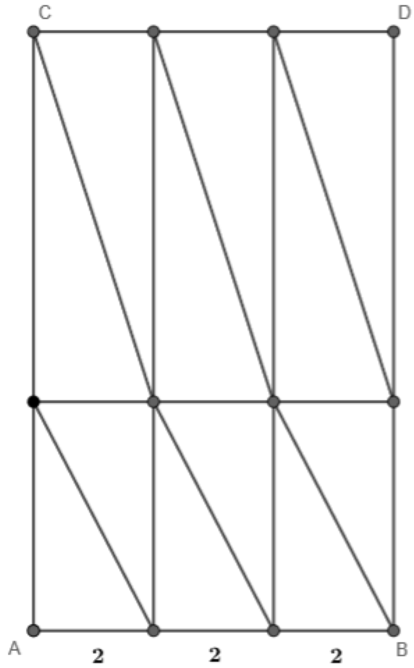
Comentários

O número de triângulos com um dos lados inteiros é tão grande quanto se queira. De fato, basta traçar paralelas a um dos lados de modo a cortá-lo em divisões inteiras.

Veja, por exemplo:



Veja que, se traçarmos um número qualquer de paralelas ao lado AB, poderemos formar a quantidade que quisermos de triângulos. Observe, por exemplo, com 1 paralela:



Temos 12 triângulos retângulos com pelo menos um lado inteiro. Note que podemos subdividir o lado AC da maneira que quisermos usando paralelas ao lado AB e após isso traçar as diagonais para formar os triângulos retângulos.

Dessa forma, temos uma infinidade de triângulos.

Gabarito: "e".

---

7. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que AD = 4 e BC = 8, calcule o raio de L e assinale a opção correta.

a) $2\sqrt{10}$

b) $4\sqrt{10}$

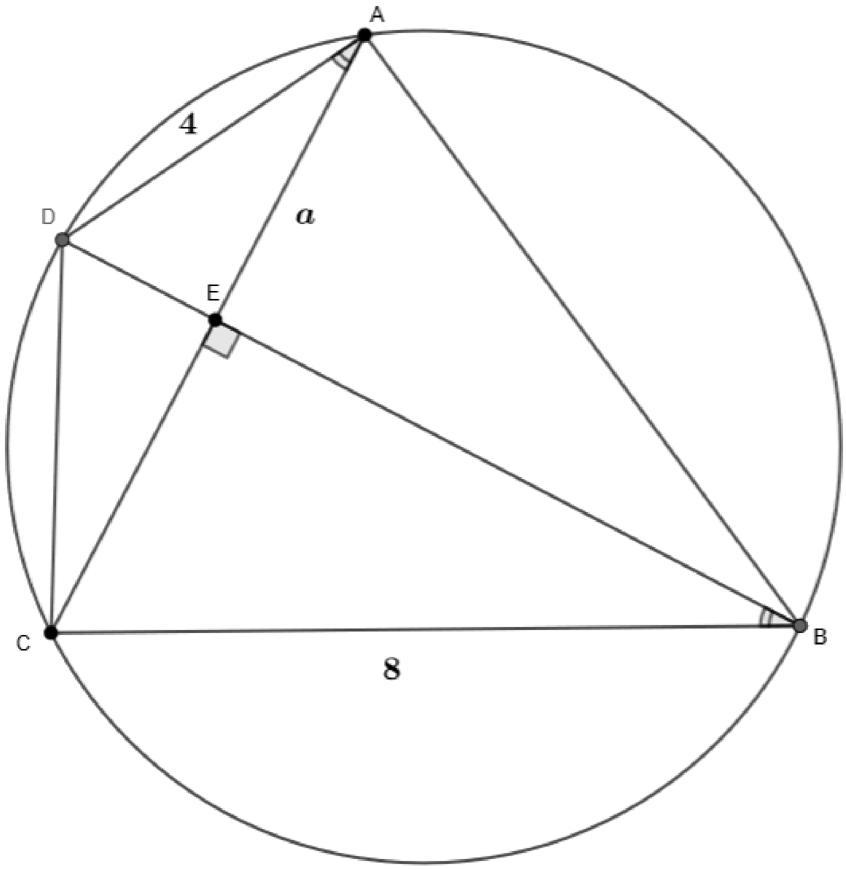
c) $2\sqrt{5}$

d) $4\sqrt{5}$

e) $3\sqrt{10}$

Comentários

Fazendo o esboço da situação descrita:



Veja que os ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são iguais, pois "olham" para um mesmo arco (DC) sobre a circunferência L.

Disso, temos que os triângulos ΔDEA e ΔCBE são semelhantes (AA). Dessa forma, podemos escrever:

$$\frac{4}{8} = \frac{a}{EB} \Rightarrow EB = 2a$$

Aplicando Pitágoras ao ΔAEB, temos:

$$a^2 + 4a^2 = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5}a$$

Do triângulo ΔCEB:

$$sen\left(E\hat{C}B\right) = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}$$

Da Lei dos Senos:

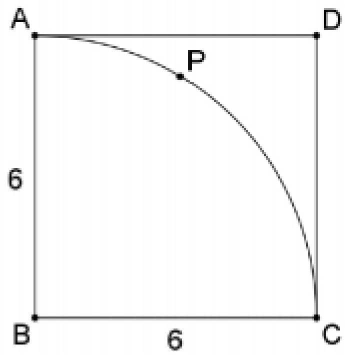
$$2R = \frac{AB}{sen\,(E\hat{C}B)} = \frac{\sqrt{5}a}{\frac{a}{4}} = 4\sqrt{5} \Rightarrow R = 2\sqrt{5}$$

Gabarito: "c".

---

8. (CN/2013)

Analise a figura a seguir.



A figura acima exibe o quadrado ABCD e o arco de circunferência APC com centro em B e raio AB = 6. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$ é correto afirmar que o ângulo PCD mede:

a) 36°

b) 30°

c) 28°

d) 24°

e) 20°

Comentários

Da definição de ângulo, em radiano, temos que o ângulo $A\hat{B}P$ é dado por:

$$A\hat{B}P = \frac{\frac{3\pi}{5}}{6} = \frac{\pi}{10}$$

Como $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$P\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

O ΔPBC é isósceles, com $BP = BC$, do que segue que:

$$B\hat{P}C = \frac{\pi - \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

Por fim, temos que:

$$B\hat{C}D = P\hat{C}D + B\hat{P}C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P\hat{C}D = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}\ ou\ 36°$$

Gabarito: "a".

---

9. (CN/2013)

Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que BQ = 12 e HQ = 4, qual é o valor QP?

a) 8

b) 6

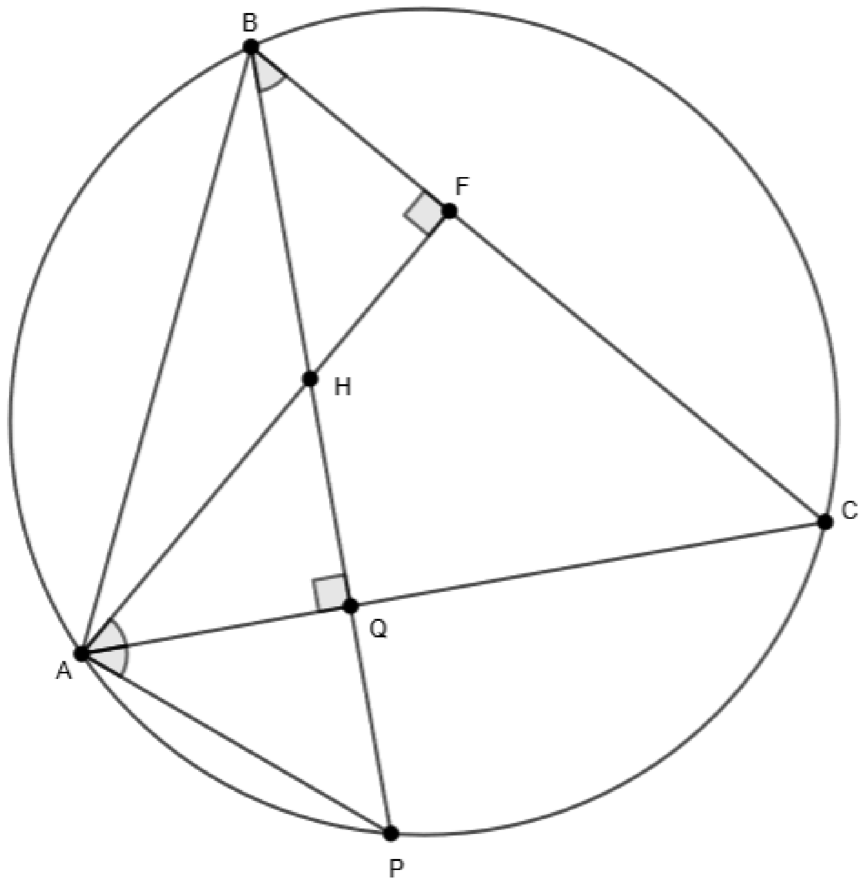
c) 5,5

d) 4,5

e) 4

Comentários

Esboçando a situação proposta, temos:



Observe que o quadrilátero $AQFB$ é inscritível, uma vez que os ângulos $A\hat{Q}B$ e $A\hat{F}B$ são iguais e "olham" para o mesmo seguimento (AB). Disso, temos que $Q\hat{B}F = F\hat{A}Q$.

Além disso, veja que o $P\hat{B}C$ subentende o arco PC, assim como o ângulo $P\hat{A}C$, do que segue que eles são iguais, isto é, $P\hat{A}C = P\hat{B}C = Q\hat{B}F = F\hat{A}Q$.

Com a igualdade dos ângulos $P\hat{A}Q$ e $Q\hat{A}H$, temos que os triângulos ΔPAQ e ΔQAH são congruentes pelo caso ALA, já que compartilham o lado AQ.

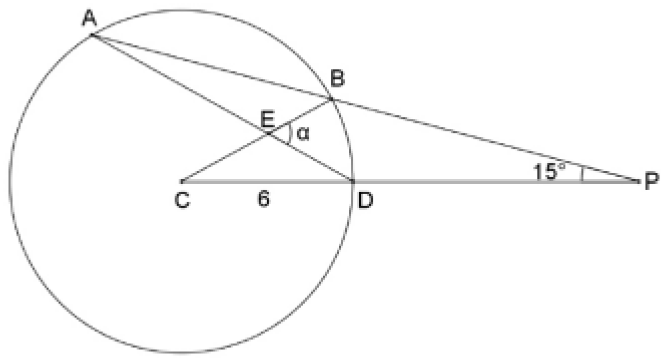
Daí, segue o resultado que $PQ = QH = 4$.

Gabarito: "e".

---

10. (CN/2013)

Analise a figura a seguir.



Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traça-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traça-se ainda os segmentos AD e CB, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo a?

a) 75°

b) 60°

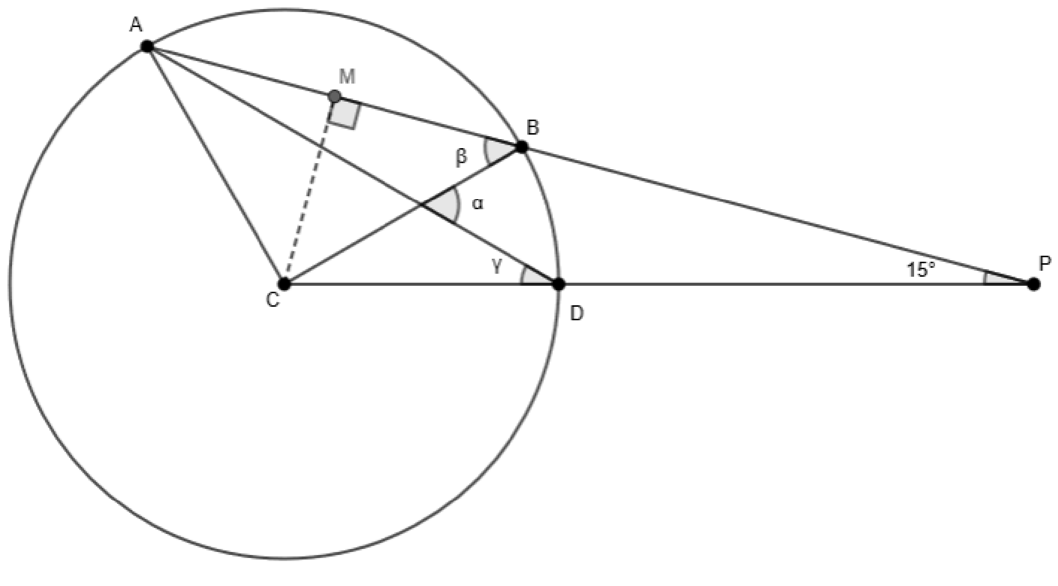
c) 45°

d) 30°

e) 15°

Comentários

Observe o esquema abaixo:



Do enunciado, $CM = 3\sqrt{2}$. Disso, temos que:

$$sen\ \beta = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ou seja, $\beta = 45°$.

Como γ é externo ao triângulo ΔADP, temos que $D\hat{A}P = \gamma - 15°$. Além disso, $C\hat{A}D = \gamma$ e $C\hat{A}D + D\hat{A}P = C\hat{A}B = C\hat{B}A = \beta = 45° \Rightarrow \gamma + \gamma - 15° = 45° \Rightarrow \gamma = 30°$.

Por fim, temos que α é externo ao ΔEAB, do que segue que:

$$\alpha = D\hat{A}P + \beta = 30° - 15° + 45° = 60°$$

Gabarito: "b".

11. (CN/2012)

No retângulo ABCD, o lado BC = 2AB. O ponto P está sobre o lado AB e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta $\overleftrightarrow{PS}$ com S no interior de ABCD e $C \in \overleftrightarrow{PS}$. Marcam-se, ainda $M \in AD$ e $N \in BC$ de modo que MPNS seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{3}{11}$

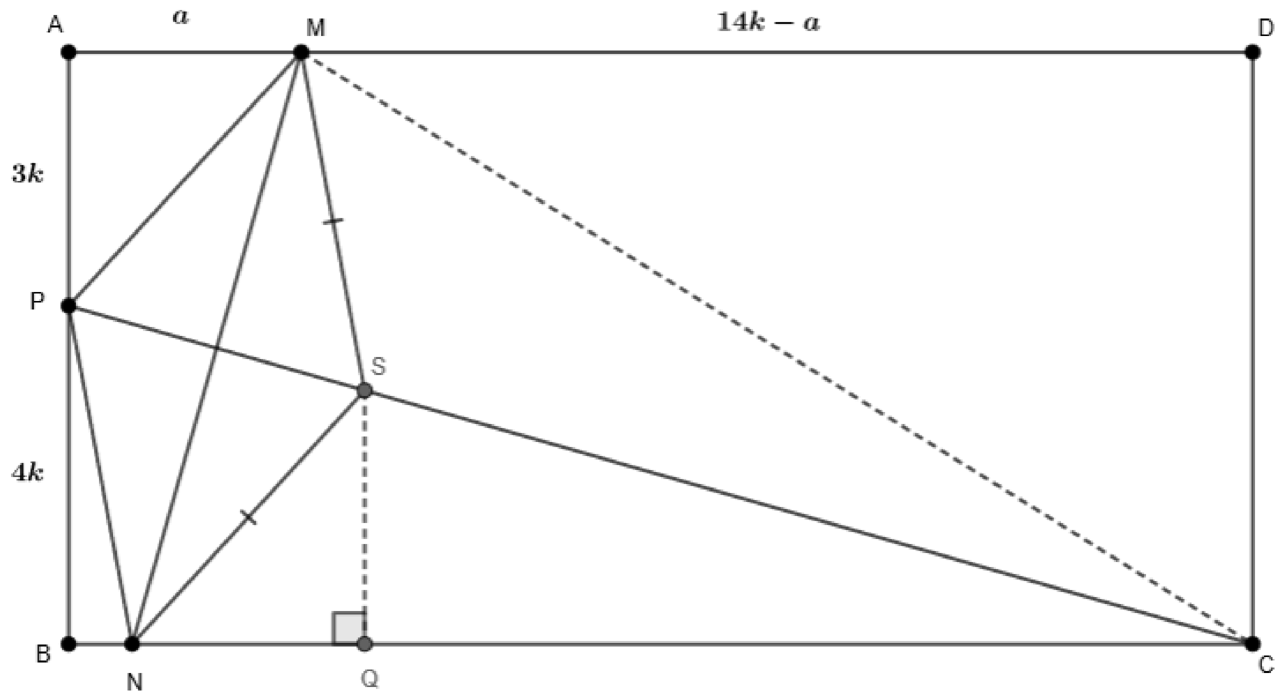
c) $\frac{5}{7}$

d) $\frac{5}{11}$

e) $\frac{7}{11}$

Comentários

Observe o esquema abaixo que representa a situação descrita:



Veja que a reta PS é mediatriz do seguimento MN, já que $PS \perp MN$ e $MS = SN$. Como C está sobre essa mediatriz, segue que $MC = NC$.

Perceba ainda que BC é paralelo a AD e PM é paralelo a SN, pelo fato de $PMSN$ ser um losango. Disso, temos que os ângulos $S\hat{N}Q$ e $A\hat{M}P$ são iguais e os triângulos $AMP\ e\ SNP$ são congruentes pelo caso ALA, já que $SN = MP$.

Logo, temos que $SQ = AP = 3k$ e $NQ = AM = a$. Da semelhança entre os triângulos $PCB\ e\ SCQ$, temos:

$$\frac{4k}{3k} = \frac{14k}{QC} \Rightarrow QC = \frac{21k}{2}$$

Assim, temos que $NC = NQ + QC = a + \frac{21k}{2}$. Mas $MC = NC$, do que segue que $MC = a + \frac{21k}{2}$.

Dessa forma, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo MDC:

$$MD^2 + DC^2 = MC^2$$

$$(14k - a)^2 + (7k)^2 = \left(a + \frac{21k}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{11k}{4}$$

Por fim, podemos calcular BN:

$$BN + NQ + QC = BC$$

$$BN + a + QC = 14k \Rightarrow BN + \frac{11k}{4} + \frac{21k}{2} = 14k \Rightarrow BN = \frac{3k}{4}$$

Do que que segue a razão:

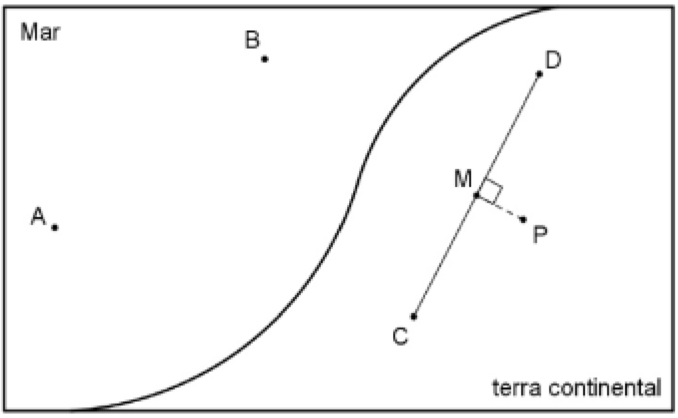
$$\frac{BN}{AM} = \frac{\frac{3k}{4}}{\frac{11k}{4}} = \frac{3}{11}$$

Gabarito: "b".

---

12. (CN/2011)

Observe a figura a seguir:



15

A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos A e B e os pontos C, D, M e P fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}D = 30°$, M é o ponto médio de CD = 100m e que PM = 10 m perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:

a) 150m

b) 130m

c) 120m

d) 80m

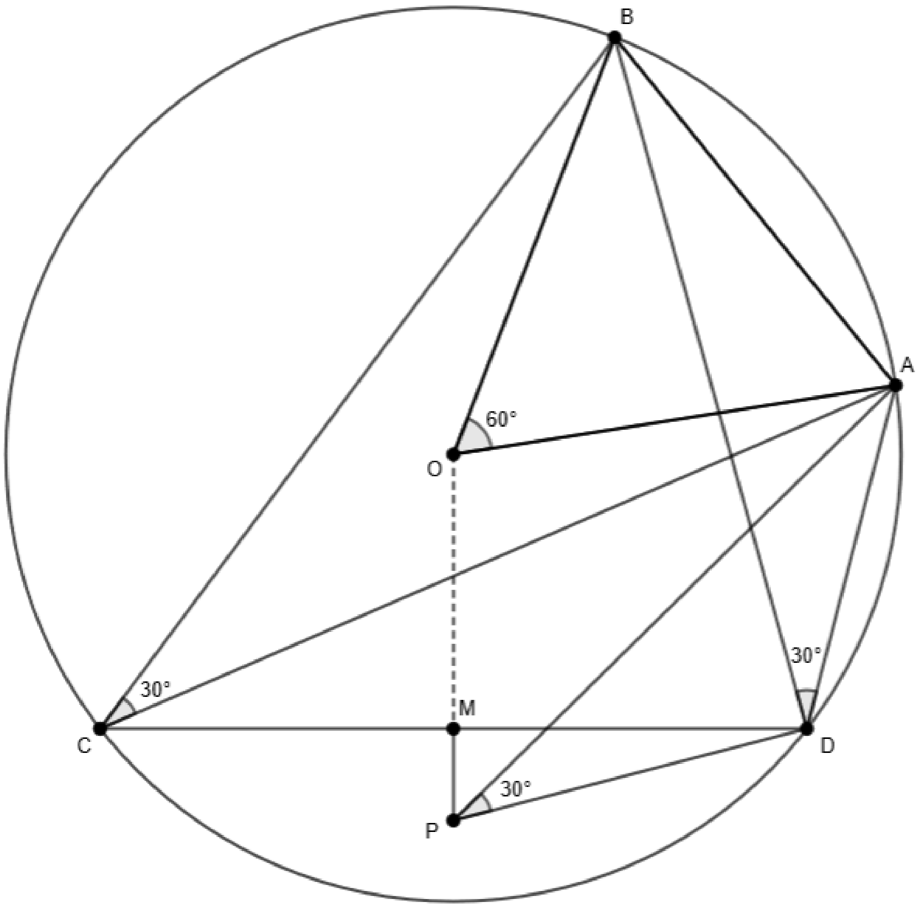
e) 60m

Comentários

Seja O o centro de uma circunferência que possui CD como corda. Veja que A corresponde à intersecção da reta que passa por P e faz $30°$ com o seguimento PD e a circunferência.

Além disso, observe que como $A\hat{C}B = A\hat{D}B = 30°$, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, isto é, está inscrito na circunferência que possui CD como corda.

Veja ainda que o ângulo central $A\hat{O}B = 2 \cdot 30° = 60°$, do que segue que o triângulo AOB é equilátero e AB é igual ao raio da circunferência:



Mas o ponto O não está fixo, pois qualquer ponto sobre a mediatriz de CD pode ser o centro da circunferência que satisfaz às condições do enunciado, ou seja, a distância $OD = R = AB$ não está fixa.

Gabarito: Anulada.

---

13. (CN/2011)

Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.

I. Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.

II. Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.

III. Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Comentários

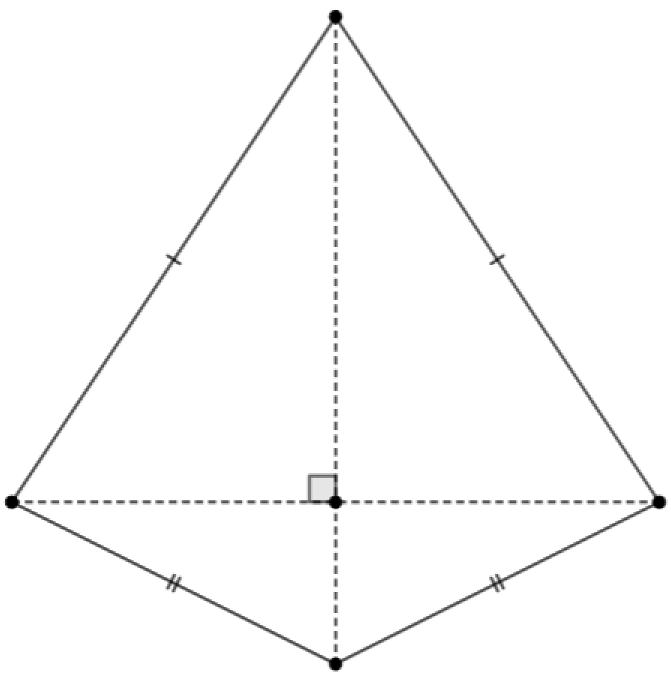
Vamos analisar cada afirmação.

Afirmação I:

Falsa, pois um losango não necessariamente é um quadrado e possui diagonais perpendiculares.

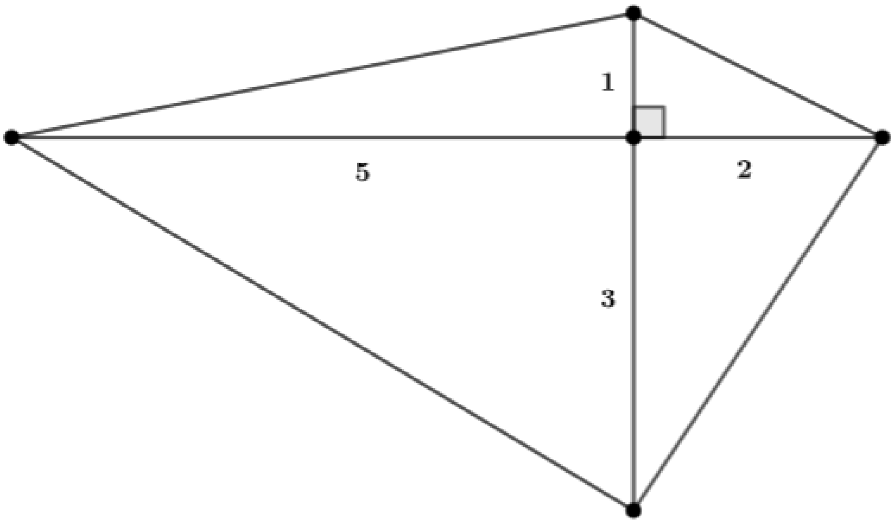
Afirmação II:

Falsa, pois a justaposição de dois triângulos isósceles de bases iguais mas lados congruentes não necessariamente iguais forma um quadrilátero com diagonais perpendiculares:



Afirmação III:

Falsa, pois podemos justapor 4 triângulos retângulos de hipotenusas distintas e lados compartilhados, veja:



Gabarito: Anulada.

---

14. (CN/2010)

ABCD é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB em A e tangente a K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será

a) $\frac{5L}{6}$

b) $\frac{4L}{5}$

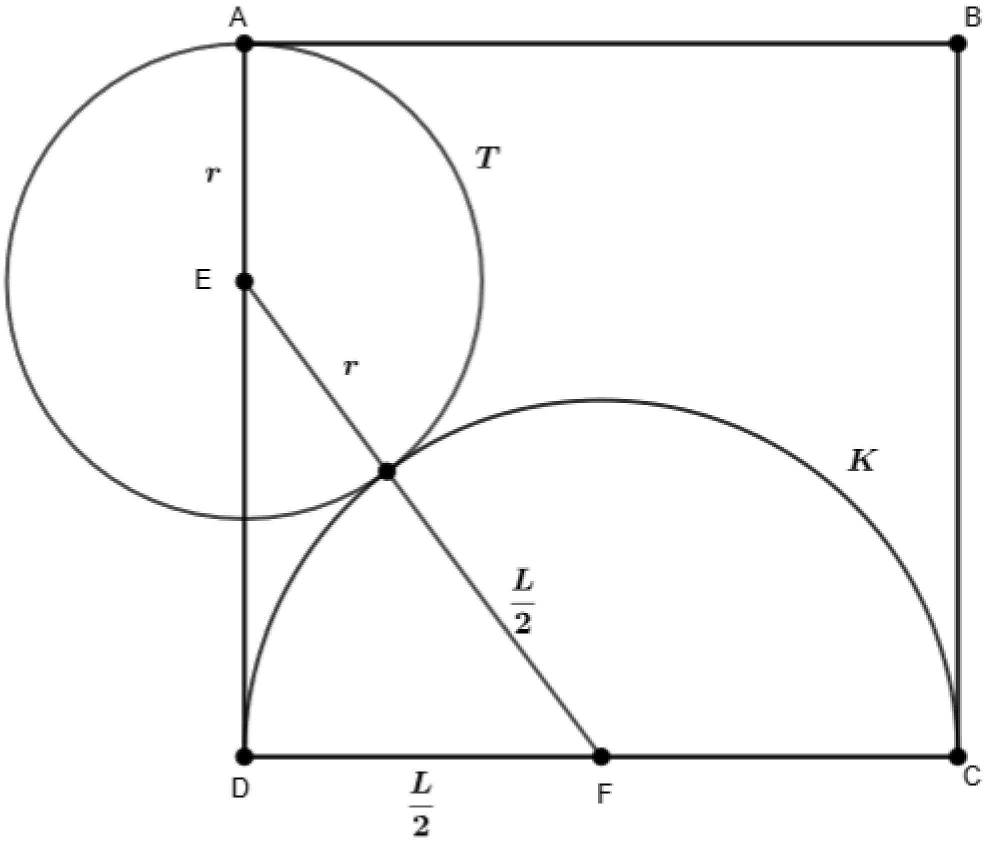
c) $\frac{2L}{3}$

d) $\frac{3L}{5}$

e) $\frac{L}{3}$

Comentários

O primeiro passo é, naturalmente, fazer um esboço da situação:



Veja que $ED = L - r$. Aplicando Pitágoras ao ΔEDF:

$$(L-r)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 - 2Lr + r^2 + \frac{L^2}{4} = r^2 + Lr + \frac{L^2}{4}$$

Ou seja:

$$L^2 - 2Lr = Lr \Rightarrow r = \frac{L}{3}$$

Gabarito: "e".

15. (CN/2009)

Sobre o lado BC do quadrado ABCD constrói-se um triângulo PBC, sendo o ponto P externo ao quadrado e o quadrilátero PCDB convexo. Se o ângulo PDC é congruente ao ângulo PBC, pode-se afirmar que o quadrilátero PCDB é

a) sempre inscritível em um círculo.

b) sempre circunscritível a um círculo.

c) inscritível em um círculo apenas se for um trapézio.

d) circunscritível a um círculo apenas se for um trapézio.

e) impossível de ser inscrito em um círculo.

Comentários

Do estudo da geometria plana, uma condição suficiente para que um quadrilátero seja inscritível em uma circunferência é que ângulos que "olham" para o mesmo seguimento e, consequentemente, para o mesmo arco, sejam iguais.

Nesse caso, os ângulos $P\hat{D}C$ e $P\hat{B}C$ "olham" para o lado PC e são iguais, do que segue que o quadrilátero convexo $BPCD$ é sempre inscritível.

Gabarito: "a".

16. (CN/2009)

Em um trapézio isósceles ABCD, de base maior AB, está inscrito um arco de circunferência AMB, onde M é ponto médio da base menor CD. O ângulo AÊC, formado pela base maior AB e pelo lado não paralelo BC mede 60°. Qual é a razão entre as medidas da base AB e do comprimento do arco AMB, sabendo-se que os lados congruentes desse trapézio são tangentes ao arco AMB nos pontos A e B?

a) $\frac{3}{\pi}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

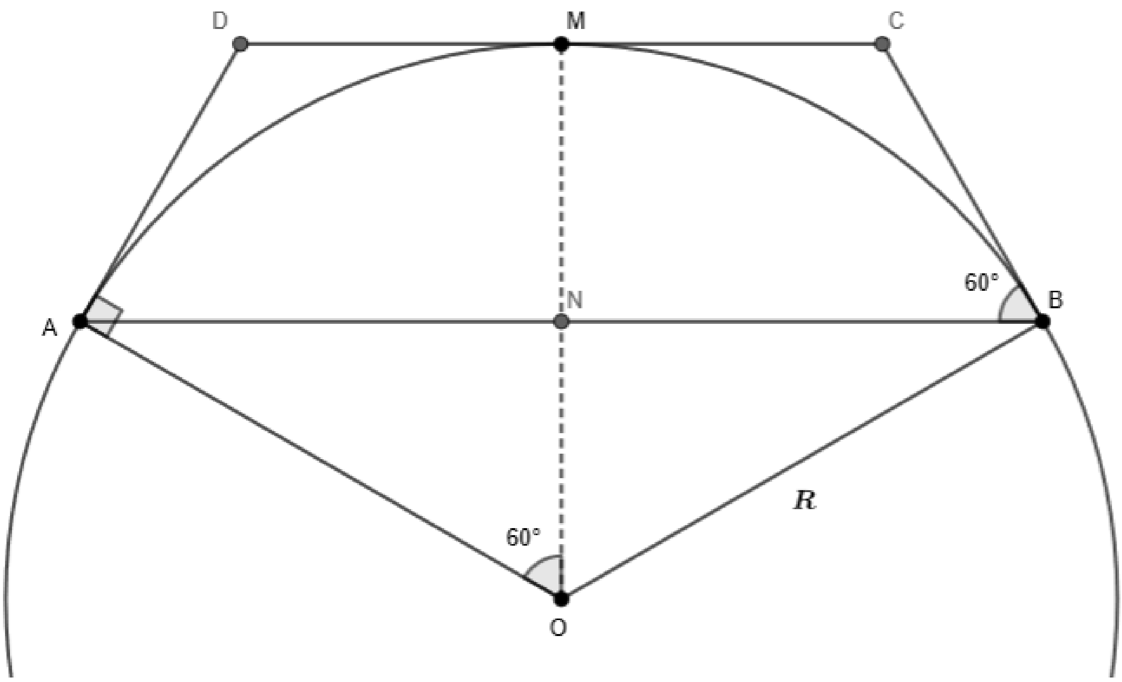
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

e) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Comentários

Um bom esboço é fundamental para a resolução dessa questão. Observe a figura abaixo:



Como o arco é tangente ao lado não paralelo, segue que o ângulo $N\hat{B}O = 90° - 60° = 30°$. Disso, segue que $N\hat{O}B = 90° - 30° = 60° \Rightarrow A\hat{O}B = 120°$. Da definição de ângulo em radiano, temos que:

$$\frac{arco\ AMB}{R} = \frac{2\pi}{3}$$

Veja que $AB = 2 \cdot R \cdot sen\ 60° = R\sqrt{3}$. Logo:

$$\frac{arco\ AMB}{R}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{arco\ AMB}{\sqrt{3}R}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{arco\ AMB}{AB}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Por fim:

$$\frac{AB}{arco\ AMB}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

Gabarito: "d".

---

17. (CN/2009)

Num quadrado ABCD de lado 6cm, traça-se a circunferência K de centro em A e raio 4 cm. Qual é medida, em cm, do raio da circunferência tangente exterior a K e tangente ao lado BC no ponto C?

a) 2,4

b) 2,5

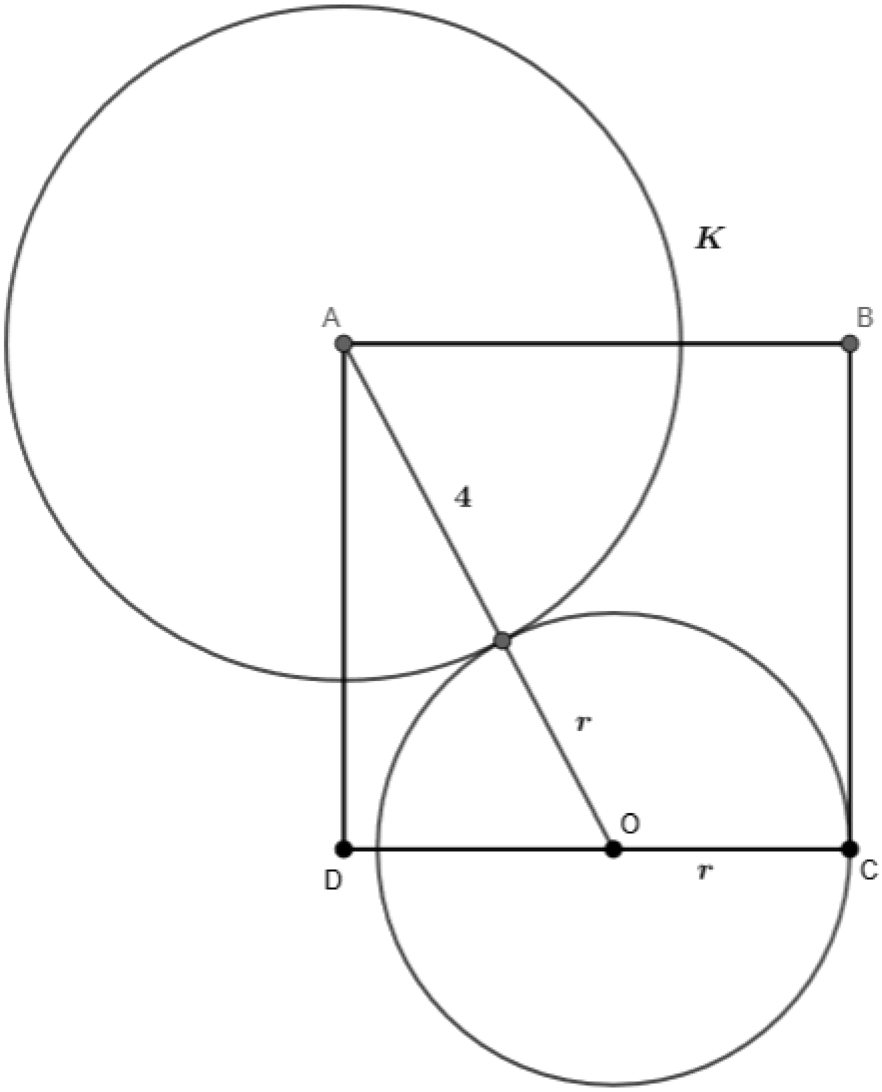
c) 2,6

d) 2,7

e) 2,8

Comentários

A circunferência tangente exterior a K tem centro sobre o lado CD, já que é tangente a BC em C e CD é perpendicular a BC. Disso, podemos esboçar a seguinte figura:



Basta aplicar o teorema de Pitágoras ao ΔADO:

$$AD^2 + DO^2 = AO^2 \Rightarrow 6^2 + (6-r)^2 = (4+r)^2 \Rightarrow 36 + 36 - 12r + r^2 = 16 + 8r + r^2$$

Disso, temos que:

$$r = 2{,}8\ cm$$

Gabarito: "e".

---

18. (CN/2008)

Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo ABCD. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

a) 120°

b) 135°

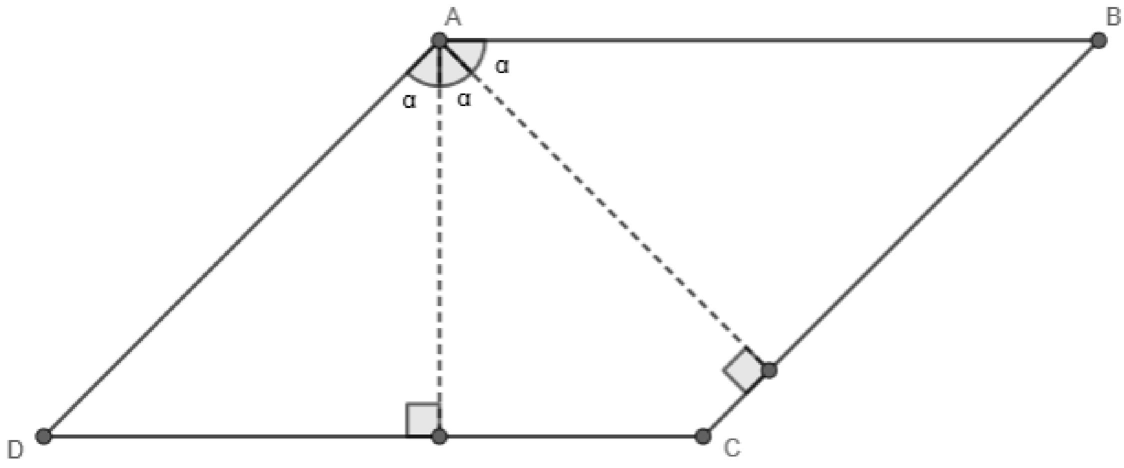
c) 150°

d) 165°

e) 175°

Comentários

Esboçando a situação:



Da figura acima, podemos ver que:

$$A\hat{D}C = 90° - \alpha$$

Como os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{D}C$ são alternados de um paralelogramo, temos:

$$D\hat{A}B + A\hat{D}C = 3\alpha + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$$

O maior ângulo interno do paralelogramo é dado por:

$$3\alpha = 3 \cdot 45° = 135°$$

Gabarito: "b".

---

19. (CN/2007)

Um móvel P_1 parte, no sentido horário, do ponto A de uma circunferência K_1 de diâmetro $AB = 2$ e, no mesmo instante, um outro móvel P_2 parte, no sentido antihorário, do ponto C de uma circunferência K_2 de diâmetro $BC = 4$. Sabe-se que:

• A, B e C são colineares;

• P_1 e P_2 têm velocidade constante;

• K_1 e K_2 são tangentes exteriores em B;

• P_1 e P_2 mudam de circunferência todas as vezes que passam pelo ponto B;

• P_2 leva 4 segundos para dar uma volta completa em K_2;

• O primeiro encontro de P_1 e P_2 ocorre no ponto B, quando eles passam pela terceira vez por este ponto.

Quantos segundos leva P_1 para dar uma volta completa em K_1?

a) $\frac{24}{7}$

b) $\frac{22}{7}$

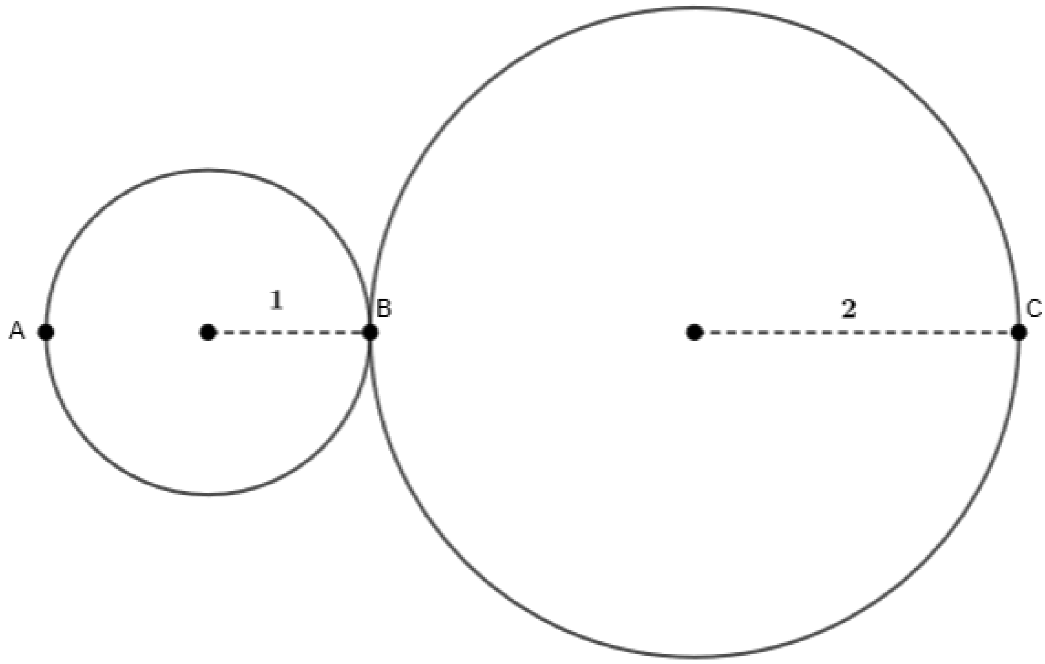
c) $\frac{20}{7}$

d) $\frac{18}{7}$

e) $\frac{16}{7}$

Comentários

O percurso pode ser esquematizado como segue:



Vamos chamar de v_1 a velocidade de P_1 e de v_2 a velocidade de P_2. Podemos calcular a velocidade v_2 usando o fato de que P_2 demora $4\ s$ para dar uma volta em K_2. Logo:

$$v_2 = \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi$$

Sabemos ainda que eles se encontram pela primeira vez na terceira vez que ambos passam por B, de modo que sempre mudem de trajetória quando passam por B. Para calcular o tempo de encontro:

$$\Delta t = \frac{CB + BA + AB + BC + CB}{\pi} = \frac{2\pi + \pi + \pi + 2\pi + 2\pi}{\pi} = 8\ s$$

Para calcular v_1, basta ver que nesse mesmo tempo P_1 percorreu:

$$v_1 = \frac{AB + BC + CB + BA + AB}{8} = \frac{\pi + 2\pi + 2\pi + 2\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

Por fim, o tempo que ele demora para percorrer a trajetória:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{8}} = \frac{16}{7}\ s$$

Gabarito: "e".

---

20. (CN/2007)

Num triângulo acutângulo qualquer ABC, os pontos D, E e F são, respectivamente, os pés das alturas AD, BE e CF. Traçam-se, a partir de D, as semirretas DE e DF. Uma reta r passa por A, intersectando a semirreta DE em G e a semirreta DF em H. Qualquer que seja a reta r, pode-se afirmar que

a) AG : AH :: DG : DH

b) EG : DE :: FH : DF

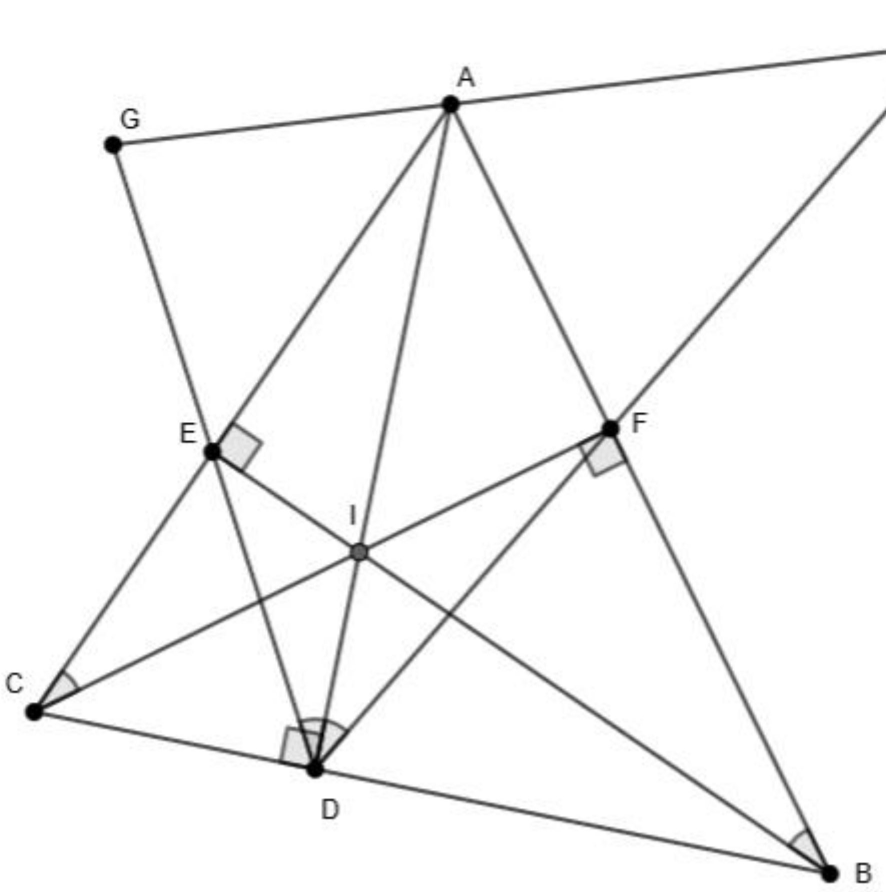
C) DG : DH :: DE : DF

d) AG : GE :: AH : HF

e) DE : AG :: DF : AH

Comentários

Observe a figura abaixo:



Os quadriláteros $IDBF\ e\ IECD$ são inscritíveis, pois possuem ângulos opostos suplementares. Disso, temos:

$$I\widehat{D}F = I\widehat{B}F\ e\ E\widehat{C}I = E\widehat{D}I$$

Além disso, o quadrilátero $EFBC$ também é inscritível, pois os ângulos $CEB\ e\ CFB$ são iguais e "olham" para o mesmo lado do quadrilátero. Disso, temos que:

$$E\widehat{C}I = I\widehat{B}F$$

Essa última igualdade nos garante que:

$$I\widehat{D}F = I\widehat{B}F = E\widehat{C}I = E\widehat{D}I$$

Isto é, DA é bissetriz interna do ΔGHD. Aplicando o teorema da bissetriz interna a esse triângulo, temos:

$$\frac{GA}{AH} = \frac{GD}{DH}$$

Gabarito: “a”.

21. (CN/2007)

ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semiplano de A em relação à reta suporte BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15°. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:

a) $\mathbf{AC}$

b) $\mathbf{AB}$

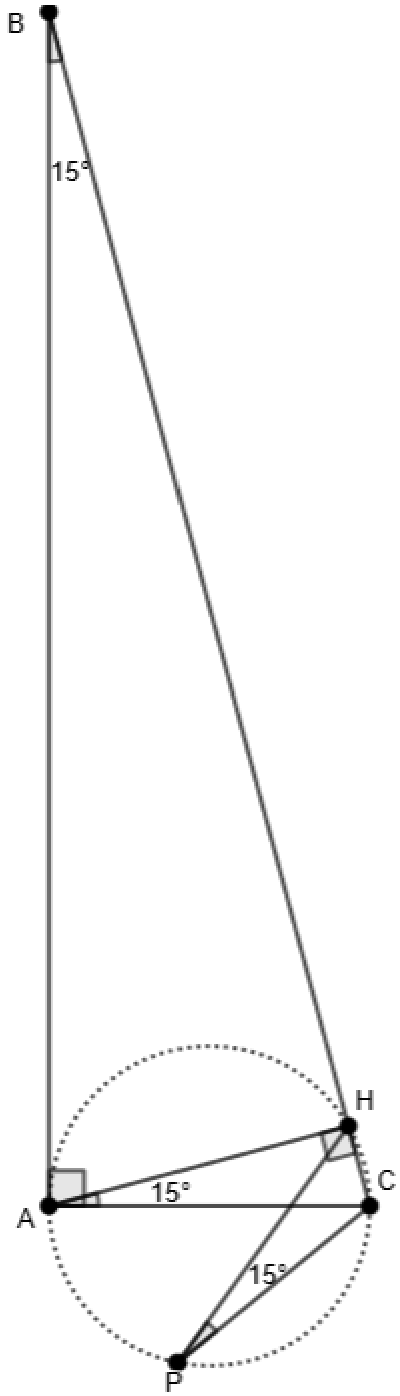
c) $\mathbf{\frac{BC}{2}}$

d) $\mathbf{\frac{HC}{2}}$

e) $\mathbf{AH}$

Comentários

Fazendo um esquema da situação proposta, temos:



O passo mais importante nessa questão é perceber que o quadrilátero $AHCP$ é inscritível, pois $H\hat{A}C = 15° = H\hat{P}C$ e "olham" para o mesmo seguimento, HC.

Perceba que, como o ângulo $A\widehat{H}C = 90°$, temos que o seguimento AC é um diâmetro da circunferência à qual o quadrilátero $AHCP$ está inscrito.

Por fim, como PH é uma corda dessa circunferência, seu valor máximo é de um diâmetro, isto é:

$$PH_{máx} = AC$$

Gabarito: "a".

22. (CN/2006)

De um ponto P exterior a um círculo de raio 6, traçam-se secantes PXY (PX < PY), X e Y pontos variáveis pertencentes à circunferência desse círculo. Os pontos médios das cordas XY descrevem um arco de circunferência de raio R. Assim sendo, qual será o valor de R, sabendo-se que a tangente PT ao círculo mede 8?

a) 5

b) 6

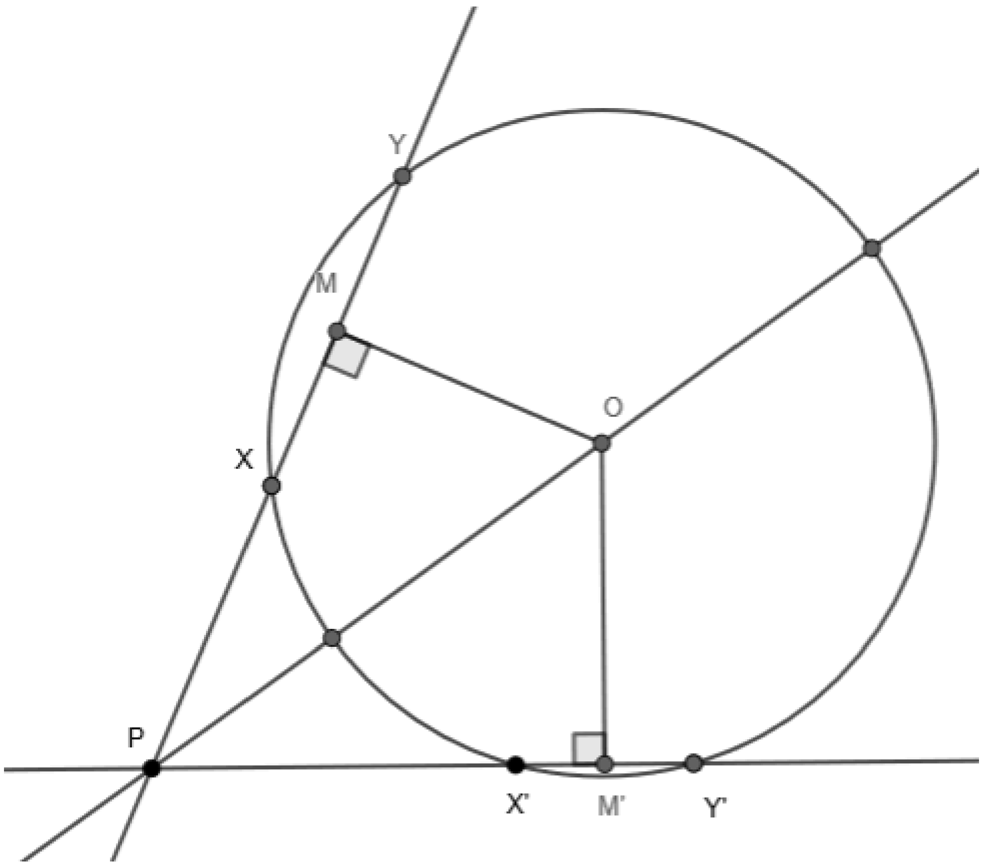
c) $4\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{3}$

e) 10

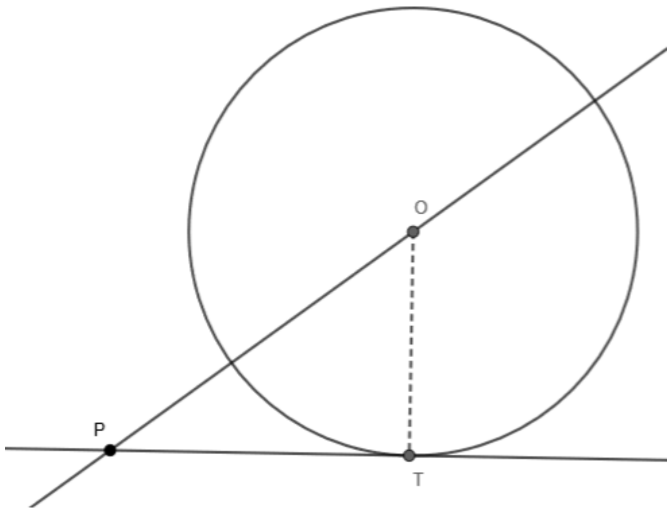
Comentários

O primeiro passo é identificar a circunferência sobre a qual os pontos médios estão. Para isso, vamos representar três possíveis secantes: uma passando pelo centro do círculo de raio 6 e as outras duas em lados opostos relativos à essa secante, veja:



Perceba que, quaisquer que sejam as secantes, o quadrilátero $PMOM'$ é inscritível, pois seus ângulos opostos $P\widehat{M}O$ e $P\widehat{M'}O$ são suplementares. Além disso, como $P\widehat{M}O = 90°$, o diâmetro dessa circunferência corresponde ao seguimento PO.

Da potência do ponto P relativa ao círculo de raio 6:



$$PT^2 = PO^2 - OT^2 \Rightarrow 8^2 = PO^2 - 6^2 \Rightarrow PO = 10$$

Como o diâmetro PO mede 10, $R = 5$.

Gabarito: "a".

---

23. (CN/2006)

Em um quadrado ABCD de lado 10, toma-se internamente sobre o lado CD o ponto P, que dista 4 do vértice C, e internamente sobre o lado BC, o ponto Q, de modo que os triângulos ADP e PCQ sejam semelhantes, com o segmento CQ menor possível. Nessas condições, o ângulo BAQ será igual ao ângulo

a) APB

b) PAQ

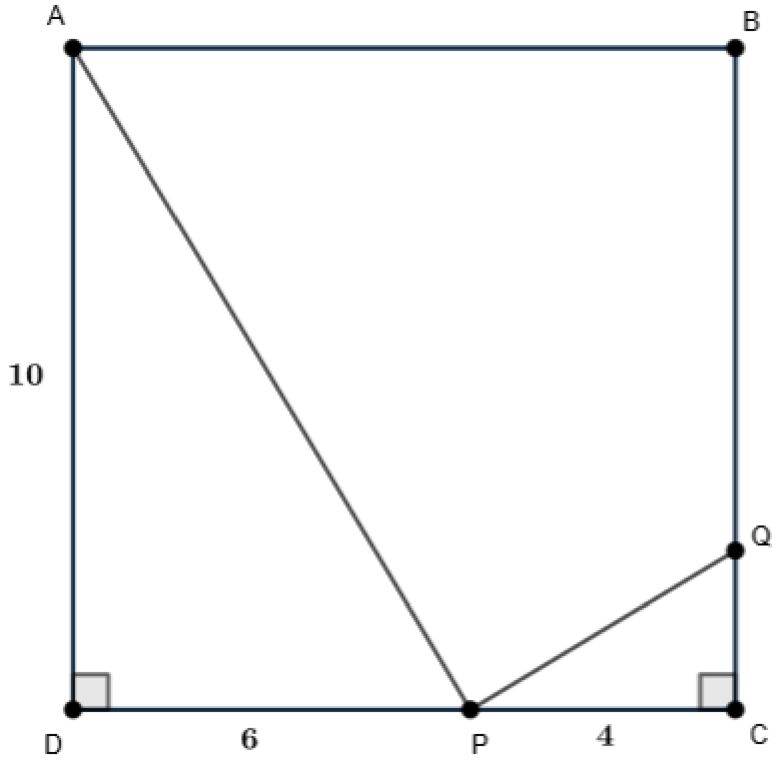
c) PAC

d) BPQ

e) AQP

Comentários

Fazendo um diagrama inicial, temos:



Como os $\Delta APD\ e\ \Delta PQC$ são semelhantes e o CQ é o menor possível, devemos ter que:

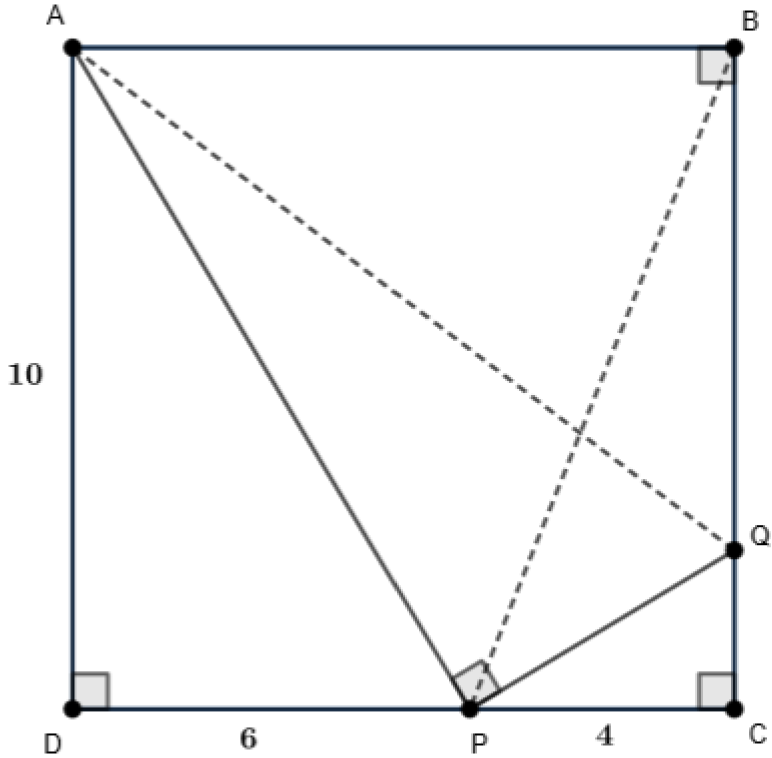
$$\frac{CQ}{4} = \frac{6}{10} \Rightarrow CQ = 2{,}4$$

Mais importante que isso é o fato de que, como essa é a ordem da semelhança, devemos ter:

$$Q\hat{P}C = D\hat{A}P = 90° - D\hat{P}A$$

Disso, temos que $D\hat{P}A + A\hat{P}Q + Q\hat{P}C = 180° \Rightarrow A\hat{P}Q = 90°$.

Assim, temos a seguinte situação:



Observe então que o quadrilátero $ABQP$ é inscritível pois os ângulos opostos $A\hat{P}Q$ e $A\hat{B}Q$ são suplementares. Daí, segue que:

$$B\hat{A}Q = B\hat{P}Q$$

Gabarito: "d".

24. (CN/2004)

Sejam L_1 e L_2 duas circunferências fixas de raios diferentes, que se cortam em A e B. P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano). De P traçam-se retas tangentes à L_1 e L_2, cujos pontos de contatos são R e S. Se PR = PS, pode-se afirmar que P, A e B:

a) estão sempre alinhados.

b) estão alinhados somente em duas posições.

c) estão alinhados somente em três posições.

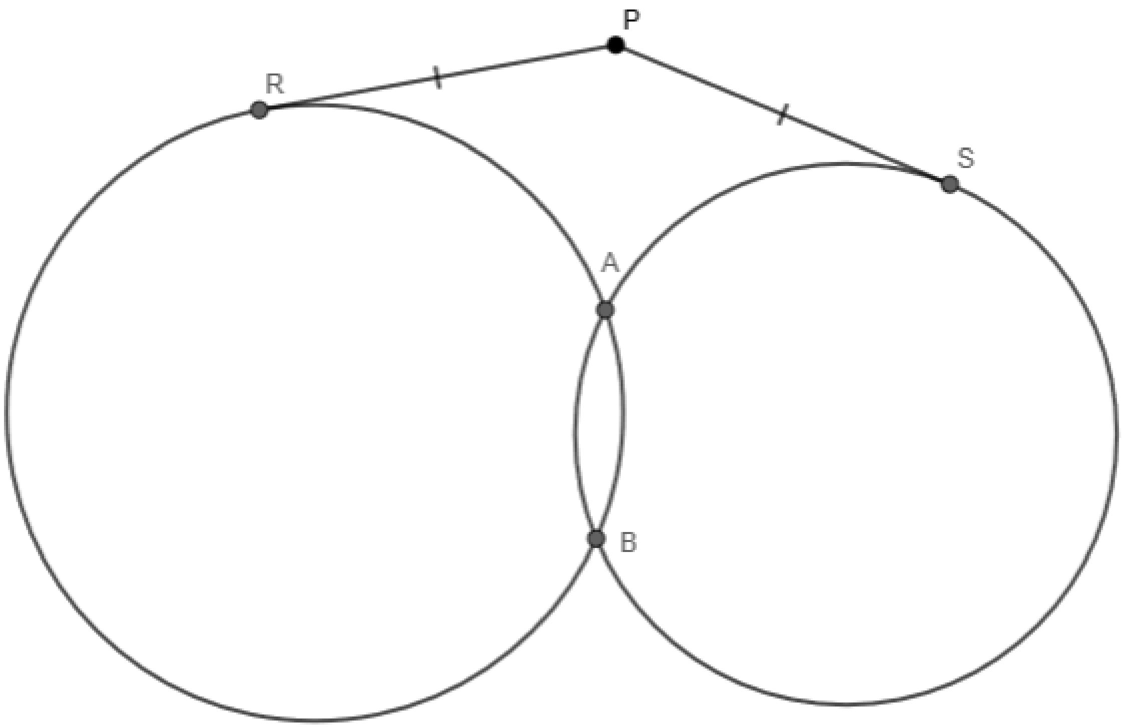
d) estão alinhados somente em quatro posições.

e) nunca estarão alinhados.

Comentários

Esta questão consiste em uma aplicação direta da potência de ponto às duas circunferências.

Suponha que a reta AP intersecta L_1 em B_1 e L_2 em B_2.



Da potência do ponto P em relação à L_1:

$$PR^2 = PB_1 \cdot PA$$

Da potência do ponto P em relação à L_2:

$$PS^2 = PB_2 \cdot PA$$

Mas $PS = PR$, ou seja, $PS^2 = PR^2$:

$$PR^2 = PB_1 \cdot PA = PS^2 = PB_2 \cdot PA \Rightarrow PB_1 = PB_2$$

Isso somente é possível se $B_1 = B_2$, isto é, os pontos são o mesmo ponto. Isso implica que eles estão na intersecção de L_1 e L_2. Logo, $B_1 = B_2 = B$.

Disso, segue que $A, B\ e\ P$ estão sempre alinhados.

Gabarito: “a”.

---

25. (CN/2004)

Dado um triângulo retângulo, seja P o ponto do plano do triângulo equidistante dos vértices. As distâncias de P aos catetos do triângulo são K e L. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por

a) $\frac{K+L}{4}$

b) $2K + L$

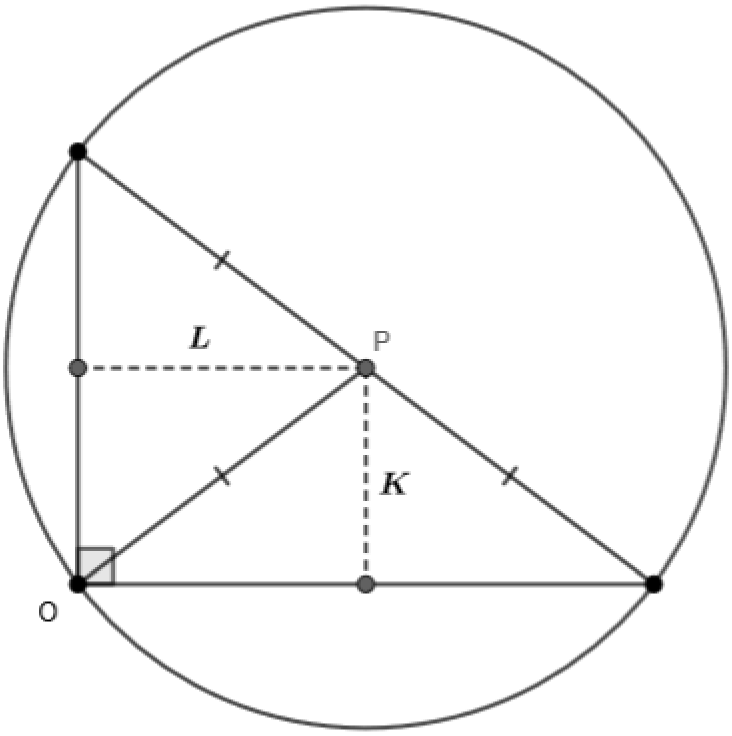
c) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$

e) $\sqrt{K^2 + L^2}$

Comentários

Perceba que P é o centro do circuncírculo do triângulo retângulo fornecido, pois o centro deste círculo é definido por esta propriedade. Como o triângulo é retângulo, ele corresponde ao ponto médio da hipotenusa:



Veja que a mediana OP mede, pelo teorema de Pitágoras:

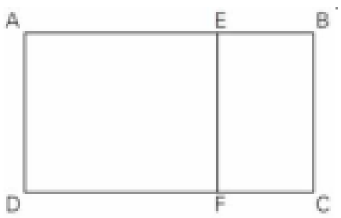
$$OP^2 = K^2 + L^2 \Rightarrow OP = \sqrt{K^2 + L^2}$$

Mas a mediana corresponde ao raio do círculo circunscrito desse triângulo.

Gabarito: "e".

---

26. (CN/2004)



Um retângulo ABCD de lados AB = a e BC = b (a > b), é dividido, por um segmento EF, num quadrado AEFD e num retângulo EBCF, semelhante ao retângulo ABCD conforme a figura acima. Nessas condições, a razão entre a e b é aproximadamente igual a

a) $-1,62$

b) $2,62$

c) $3,62$

d) $4,62$

e) $5,62$

Comentários

Como $AEFD$ é um quadrado, $AD = AE = b$.

Disso, segue que:

$$EB = AB - AE = a - b$$

Da semelhança entre os retângulos:

$$\frac{EB}{AD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1$$

Faça $\frac{a}{b} = x$:

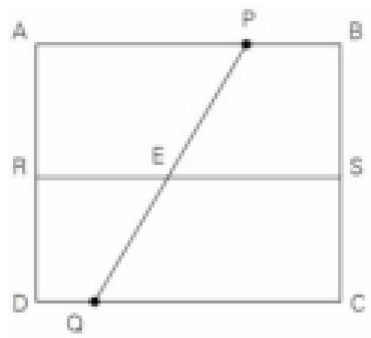
$$x - \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo essa equação usando Bháskara e lembrando que $x > 0$, pois representa a razão entre duas medidas, temos que:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$$

Gabarito: "a".

27. (CN/2003)



Num quadrado ABCD tem-se os pontos: P, pertencente ao lado AB; Q, pertencente ao lado CD; R, médio de DA; e S, médio de BC. Se PB é o dobro de DQ e E é o ponto de interseção entre PQ e RS, quantos trapézios retângulos semelhantes sempre existirão na figura, sabendo-se que $\mathrm{PB} + \mathrm{DQ} < \mathrm{AB}$?

a) Dois.

b) Três.

c) Quatro.

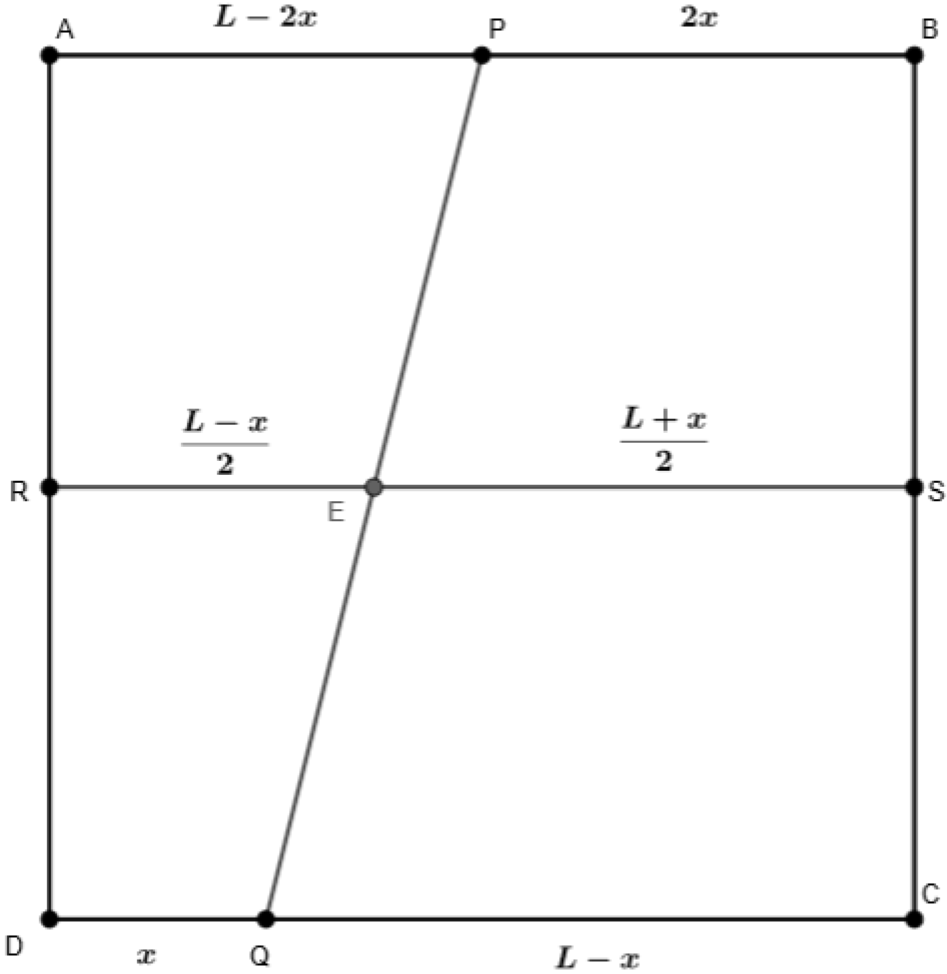
d) Cinco.

e) Seis.

Comentários

Para que duas figuras sejam semelhantes elas devem possuir lados proporcionais e ângulos internos iguais.

Observe a figura abaixo que representa a situação proposta com as medidas destacadas:



Temos um total de 6 trapézios, a saber:

$$APQD, PBCQ, APRE, REQD, PBSE\ e\ ESCQ$$

Desses, observe que somente os trapézios $PBCQ\ e\ REQD$ possuem lados proporcionais independentes da medida $x\ de\ DQ$:

$$\frac{PB}{DQ} = \frac{QC}{RE} = \frac{BC}{RD} = \frac{PQ}{EQ} = 2$$

Para os outros trapézios temos que as razões entre os lados sempre dependerão de x.

Gabarito: "a".

---

28. (CN/2003)

Considere uma circunferência A de raio R e diâmetros perpendiculares AB e CD. O raio da menor circunferência tangente interiormente à A e à corda AC, no seu ponto médio, é dado por

a) $\frac{R}{4}$

b) $\frac{R\sqrt{2}}{4}$

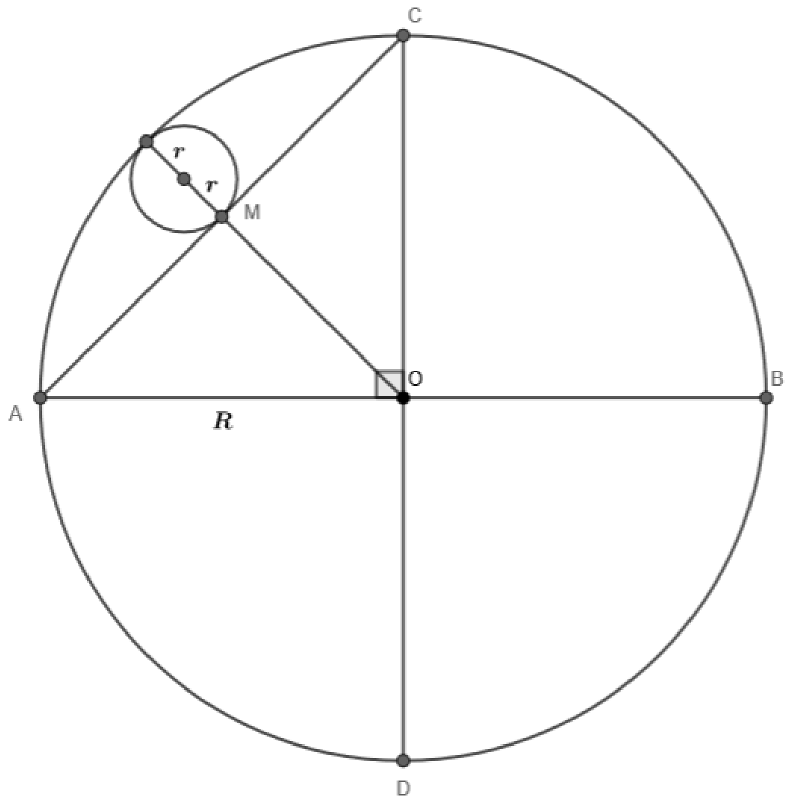
c) $\frac{R(2-\sqrt{2})}{4}$

d) $\frac{R(\sqrt{2}+1)}{4}$

e) $\frac{R}{6}$

Comentários

Fazendo um esquema da situação levando em consideração que a circunferência tangente é a menor possível, temos:



Como o ΔAOC é retângulo, a mediana OM corresponde à metade da hipotenusa $AC = R\sqrt{2}$, isto é:

$$OM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Observando a figura, temos a relação:

$$R = 2r + OM = 2r + \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2r = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R$$

Gabarito: “c”.

29. (CN/2002)

Se um segmento $\overline{AB}$ tem 2 cm de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135° desse segmento mede:

a) $\sqrt{2}+1$

b) $\sqrt{2}$

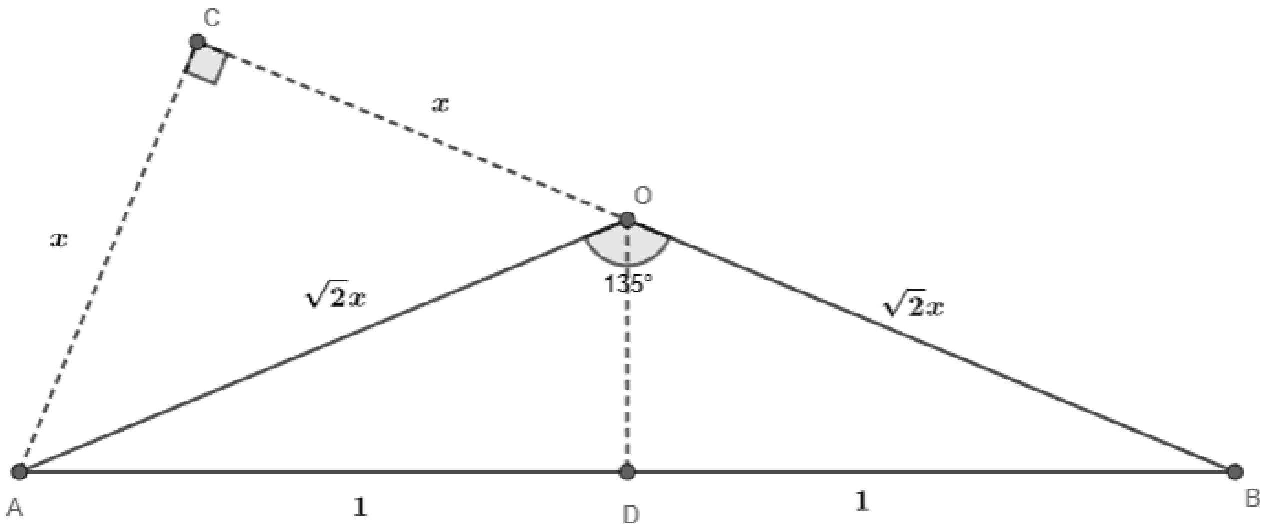
c) $\sqrt{2}-1$

d) $\sqrt{3}$

e) $2-\sqrt{2}$

Comentários

Observe o esquema:



A flecha corresponde ao seguimento OD. Observe que C é a projeção de A sobre a reta OB e que $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{45°}{2} \Rightarrow COA = 45°$. Disso, temos que o triângulo OAC é isósceles e retângulo e do teorema de Pitágoras temos que $AO = OB = \sqrt{2}x$.

Aplicando Pitágoras ao ΔACB, temos:

$$x^2 + x^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Aplicando Pitágoras ao ΔOBD:

$$OD^2 + 1^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 = 2x^2 = 2\left(2-\sqrt{2}\right) \Rightarrow OD^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Por fim, perceba que:

$$3 - 2\sqrt{2} = 1^2 - 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

Logo:

$$OD = \sqrt{2} - 1$$

Gabarito: "c".

---

30. (CN/2002)

Considere um triângulo retângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se x, y e z, $(x < y < z)$ são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então

a) $z = 360° - y$

b) $z = x + y$

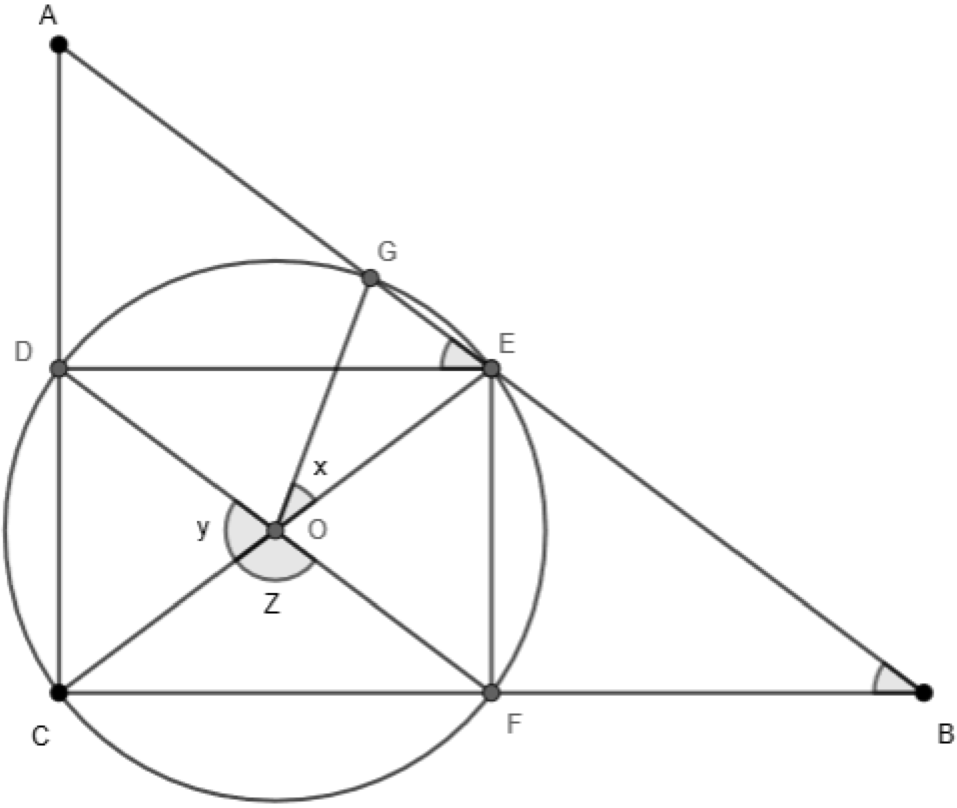
c) $x + y + z = 180°$

d) $x + y = 108°$

e) $z = 2x + y$

Comentários

Observe a seguinte figura:



Veja que $CE = EB$, pois corresponde à mediana relativa à hipotenusa. Olhando para o arco EF:

$$E\hat{C}F = \frac{E\hat{O}F}{2} = \frac{y}{2}$$

Do que foi dito acima, temos que o triângulo CEB é isósceles e $E\hat{B}C = E\hat{C}F = \frac{y}{2}$.

DE é base média, do que segue que é paralelo ao seguimento CB. Disso, temos que $G\hat{E}D = E\hat{B}C = y/2$.

Olhando para o arco DG, vemos que:

$$D\hat{O}G = 2G\hat{E}D = y$$

Mas:

$$D\hat{O}G + G\hat{O}E = D\hat{O}E = C\hat{O}F \Rightarrow y + x = z$$

Gabarito: "b".

31. (CN/2002)

Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, $P \neq M$, então o segmento $\overline{NP}$ mede

a) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$

b) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$

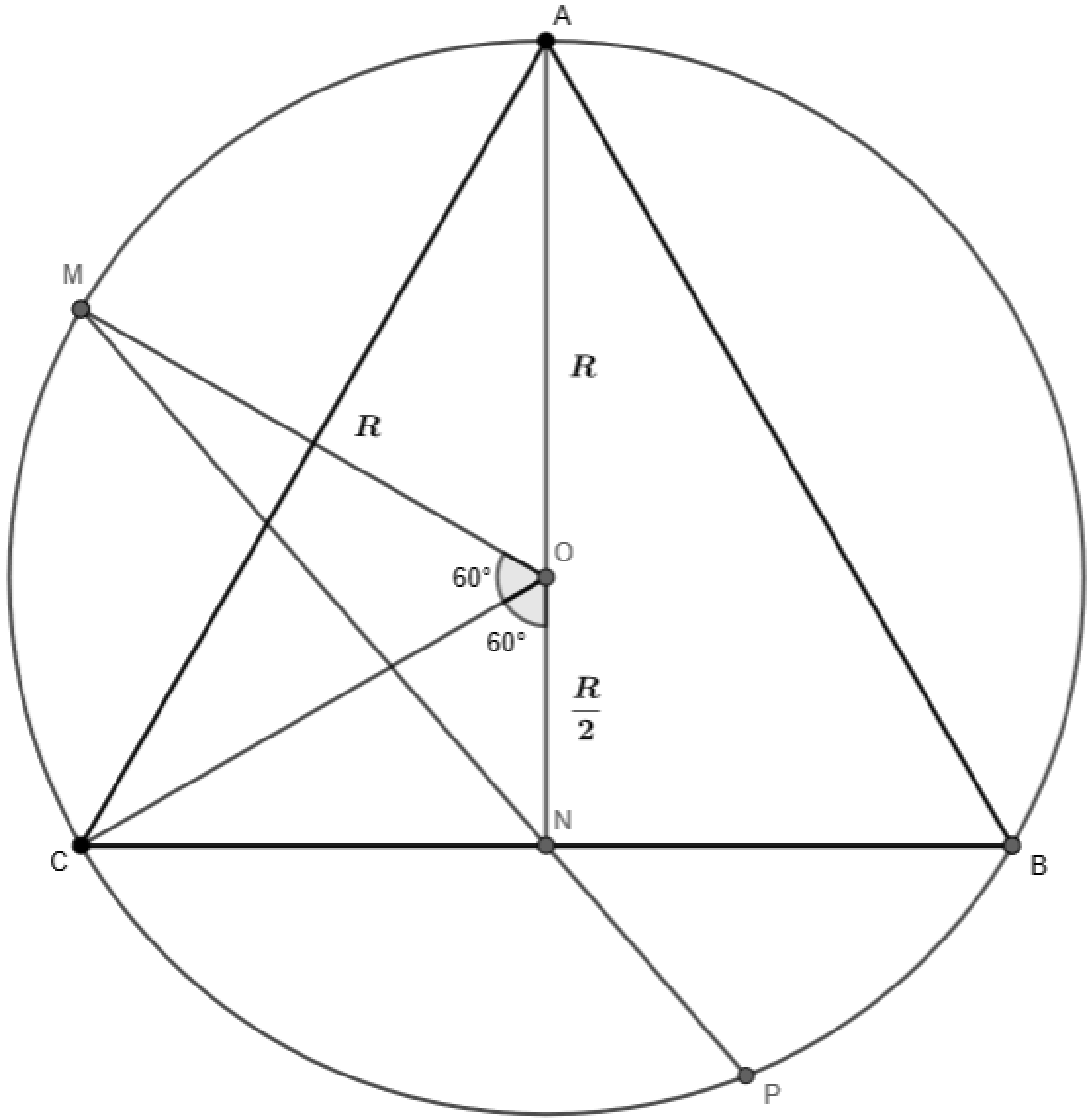
c) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$

d) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$

e) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

Comentários

Observe a situação representada abaixo:



Como N é ponto médio de CB, temos que $CN = NB$. Além disso:

$$CN = OC sen\, 60° \Rightarrow CN = NB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Potência do ponto N em relação à circunferência:

$$MN \cdot NP = CN \cdot NB = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$$

Aplicando o teorema dos cossenos ao ΔMON:

$$MN^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \cdot R \cdot \frac{R}{2} \cdot \cos 120° \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{7}R}{2}$$

Por fim:

$$\frac{\sqrt{7}R}{2} \cdot NP = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow NP = \frac{3R\sqrt{7}}{14}$$

Gabarito: “c”.

32. (CN/2001)

Considere um quadrado ABCD e dois triângulos equiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P$, $B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:

a) 270°

b) 300°

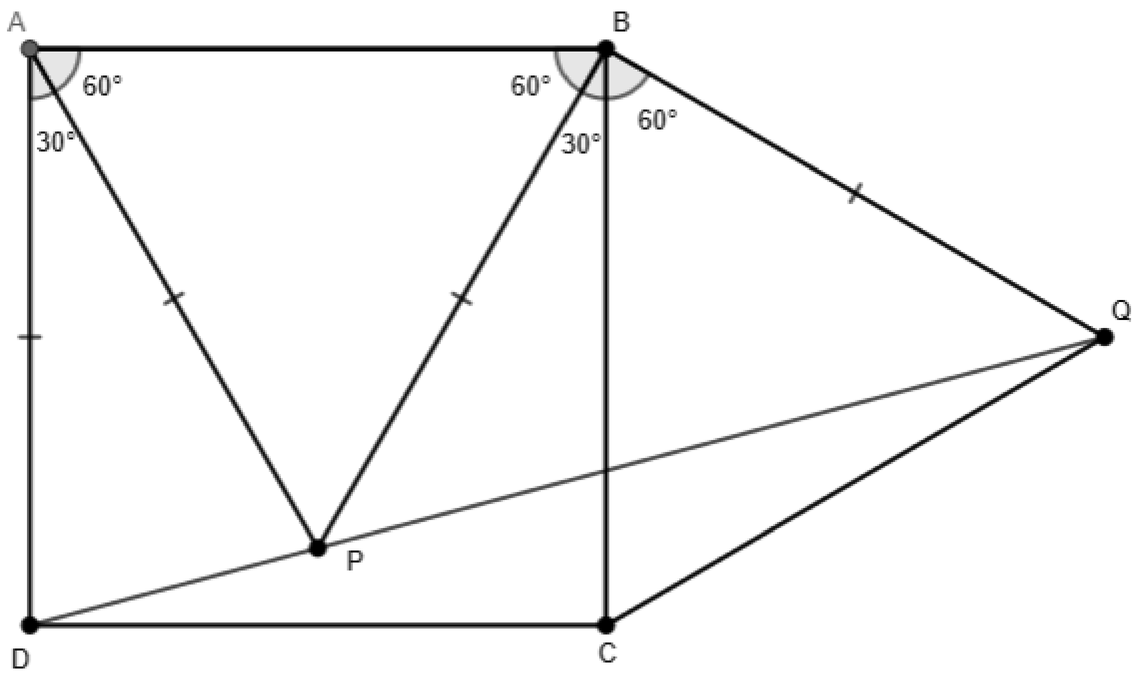
c) 330°

d) 360°

e) 390°

Comentários

A situação é representada pela seguinte figura:



O triângulo PBQ é isósceles, do que segue que $B\hat{Q}P = B\hat{P}Q$.

O triângulo APD é isósceles, do que segue que $A\hat{D}P = A\hat{P}D$.

Veja que:

$$A\hat{P}D + D\hat{P}Q + B\hat{P}Q + B\hat{P}A = 360°$$

Ou ainda:

$$A\hat{D}P + D\hat{P}Q + B\hat{Q}P + 60° = 360°$$

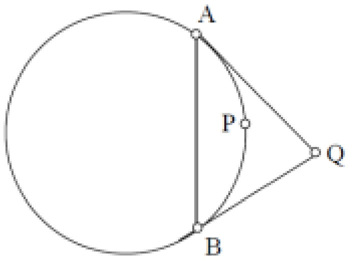
Logo:

$$A\widehat{D}P + D\widehat{P}Q + B\widehat{Q}P = 300°$$

Gabarito: "b".

33. (CN/2001)

Observe a figura abaixo:



O ponto P do menor arco AB dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:

a) $\sqrt{30}$

b) $2\sqrt{15}$

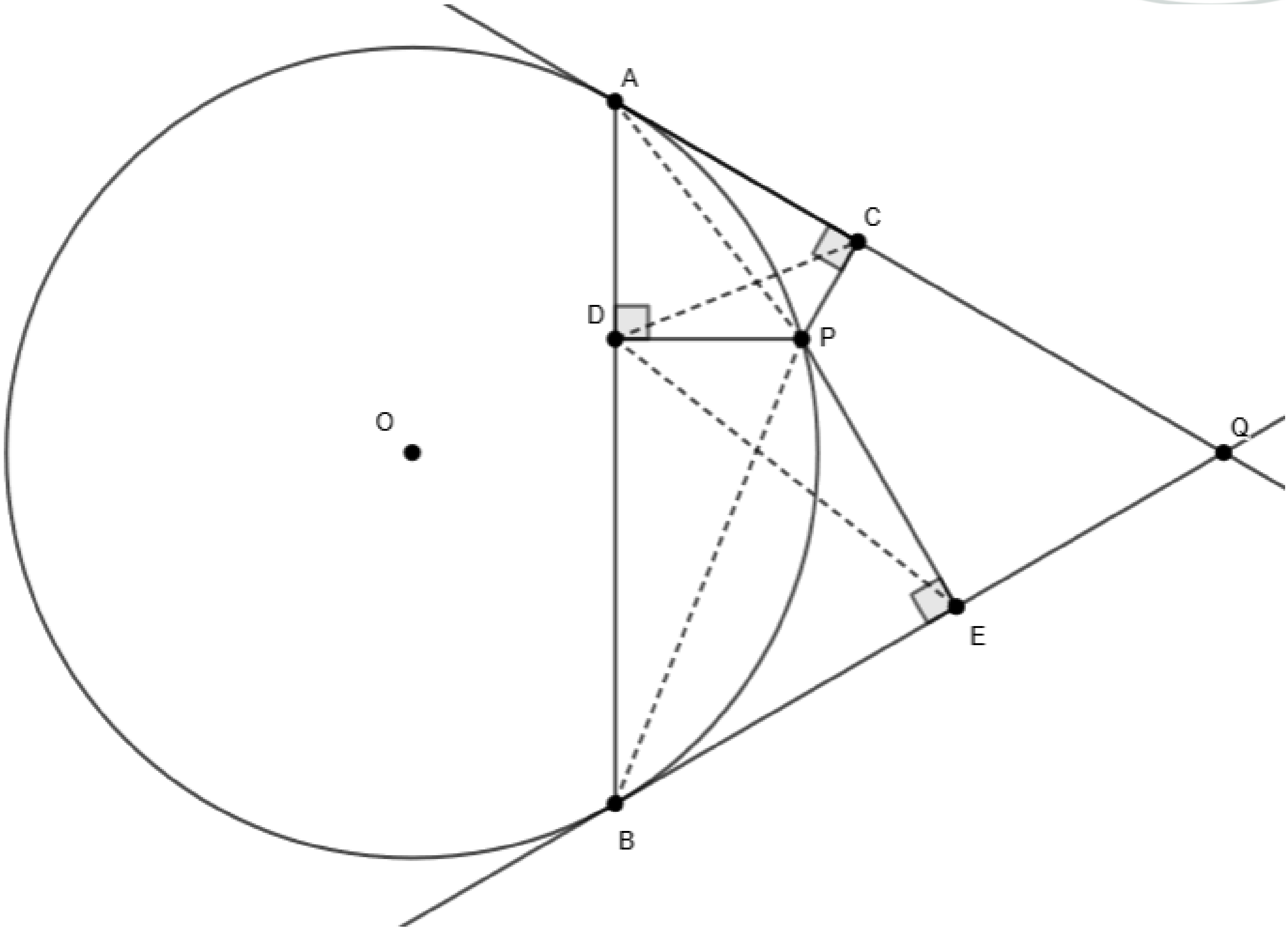
c) 16

d) 18

e) $6\sqrt{10}$

Comentários

Observe o seguinte esquema onde são traçadas as perpendiculares relevantes:



Veja inicialmente que os quadriláteros $ACPD$ e $DPEB$ são inscritíveis, pois possuem ângulos opostos que somam $180°$.

Da tangência dos seguimentos AQ e BQ, temos que:

$$C\hat{A}P = \frac{A\hat{O}P}{2}$$

$$E\hat{B}P = \frac{P\hat{O}B}{2}$$

Além disso, olhando para a circunferência, temos que:

$$P\hat{A}B = \frac{P\hat{O}B}{2} \; e \; P\hat{B}A = \frac{A\hat{O}P}{2}$$

Assim, segue que:

$$P\hat{A}B = E\hat{B}P \; e \; C\hat{A}P = P\hat{B}A$$

Do fato de os quadriláteros $ACPD \; e \; DPEB$ serem inscritíveis, temos:

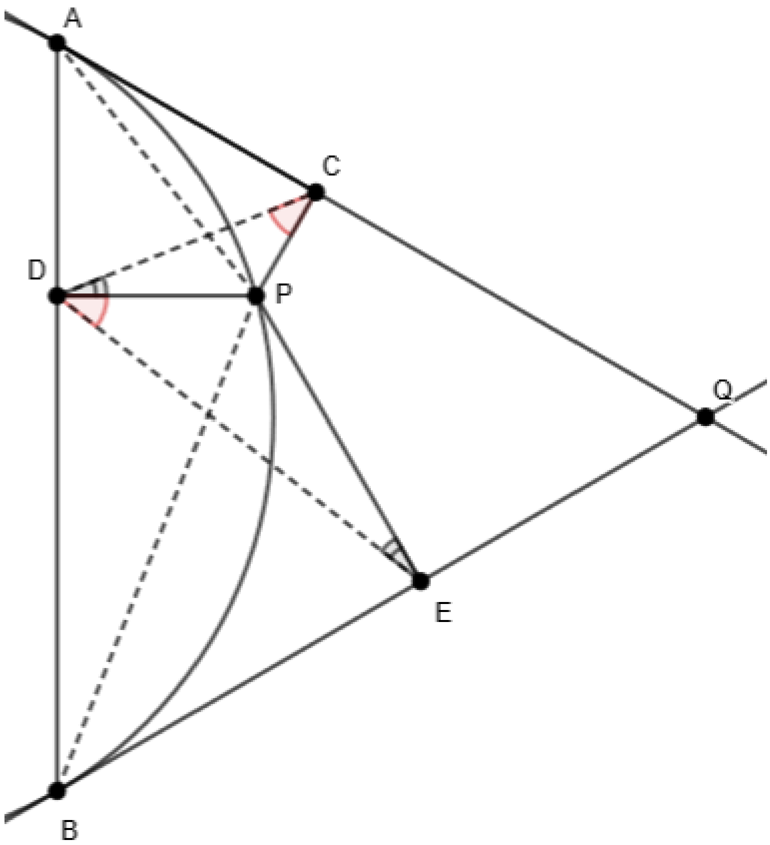
$$P\hat{B}A = P\hat{E}D \; e \; P\hat{B}E = P\hat{D}E$$

$$C\hat{A}P = C\hat{D}P \; e \; P\hat{A}B = P\hat{C}D$$

Disso, concluímos que:

$$P\hat{E}D = C\hat{D}P \; e \; P\hat{D}E = P\hat{C}D$$

Do que segue que os triângulos PCD e PDE são semelhantes pelo caso AAA. Veja a relação entre os ângulos de forma mais clara:



Da semelhança, podemos escrever:

$$\frac{DP}{CP} = \frac{PE}{DP} \Rightarrow DP = \sqrt{CP \cdot PE} = \sqrt{6 \cdot 10} = 2\sqrt{15}$$

Gabarito: "b".

---

34. (CN/2000)

Seja ABCD um quadrilátero qualquer onde os lados opostos NÃO são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremos M (ponto médio do lado AD) e N (ponto médio do lado BC) é:

a) 12,5

b) 14

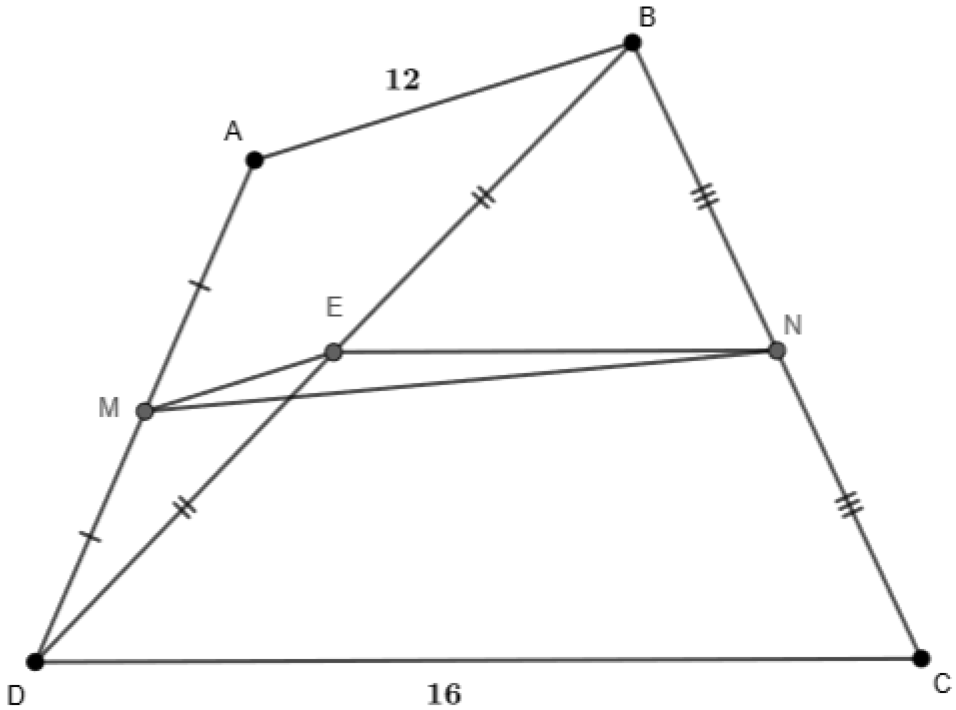
c) 14,5

d) 16

e) 17

Comentários

A ideia para resolver essa questão é traçar a diagonal DB do quadrilátero $ABCD$, veja:



Seja E o ponto médio da diagonal BD. Disso, temos que EN é base média do ΔBDC, do que temos que:

$$EN = \frac{16}{2} = 8$$

Analogamente para o triângulo ABD:

$$ME = \frac{12}{2} = 6$$

Por fim, aplicando a desigualdade triangular ao ΔMEN:

$$MN < ME + EN = 8 + 6 = 14 \Rightarrow MN < 14$$

Assim a única alternativa que representa um valor possível para MN é a alternativa a.

Gabarito: "a".

35. (CN/2000)

Suponha que 1 (um) naval (símbolo n) seja a medida de um ângulo convexo, menor que um ângulo reto, inscrito em um círculo de raio r, cujos lados determinam, nesse círculo, um arco de comprimento r. Assim sendo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a:

a) $\frac{\pi n}{4}$

b) $\frac{\pi n}{2}$

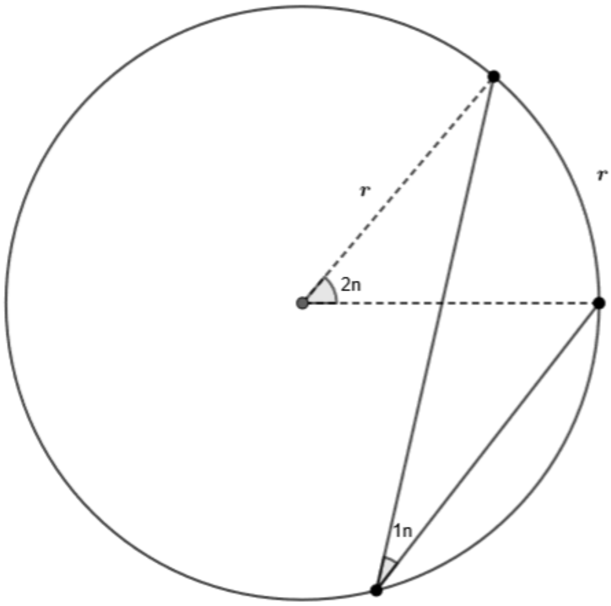
c) πn

d) $2\pi n$

e) $4\pi n$

Comentários

A ideia para a resolução dessa questão é expressar a relação entre a medida naval (n) e a medida angular em radianos.



Para isso, veja que o ângulo central correspondente mede $2n$. Da definição de um ângulo em radianos temos que $2n$ mede:

$$\frac{r}{r} = 1\, rad$$

Ou seja, temos $2n$ a cada 1 rad. Para $\pi\, rad$, que é a soma dos ângulos internos de um triângulo, teremos:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{2n}{1} \Rightarrow x = 2\pi n$$

Gabarito: "d".

36. (CN/2000)

A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado ABCD. Qual é a medida do ângulo PCB?

a) 30°

b) 45°

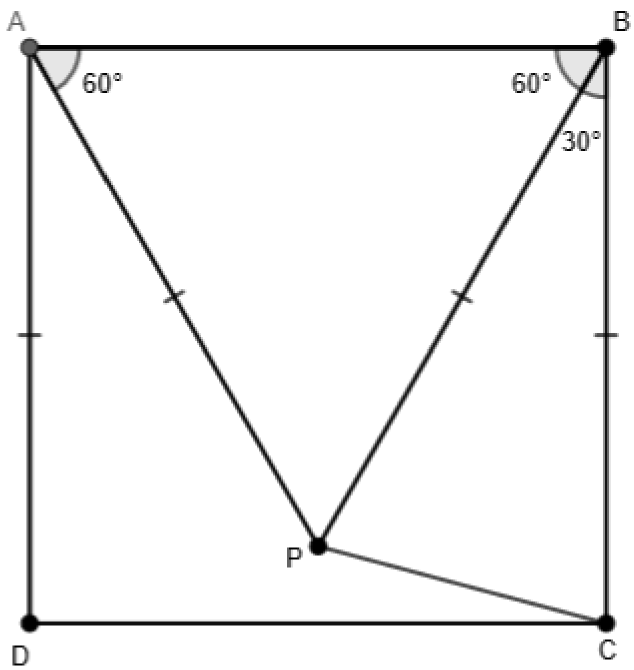
c) 60°

d) 75°

e) 90°

Comentários

Representando a situação graficamente:



Como o triângulo PBC é isósceles e $P\hat{B}C = 90° - 60° = 30°$, temos que $P\hat{C}B = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Gabarito: "d".

---

37. (CN/1999)

Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo $D\hat{A}I$ mede 40° e o ângulo $C\hat{B}I$ mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo $A\hat{P}C$ mede:

a) 10°

b) 20°

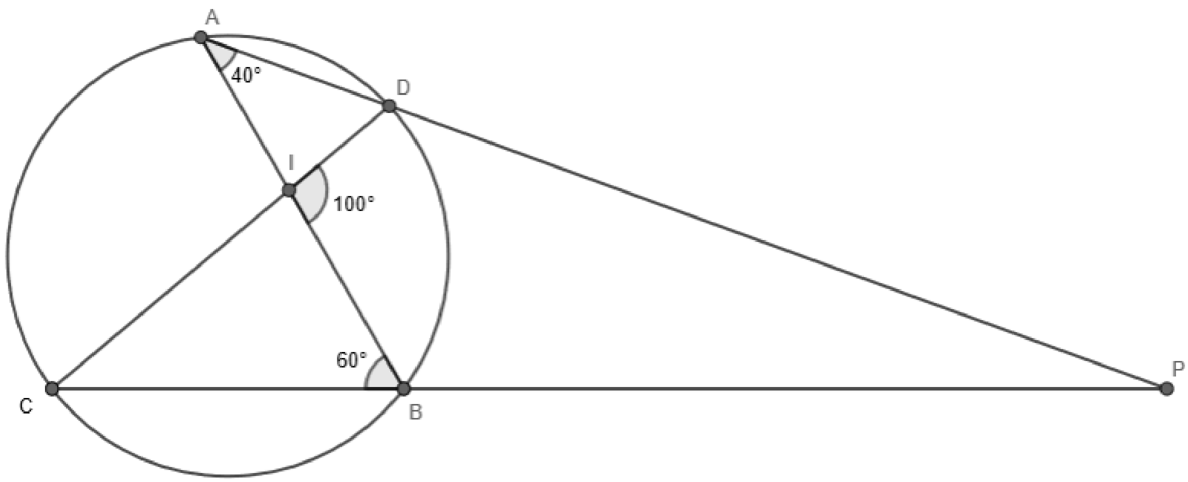
c) 30°

d) 40°

e) 50°

Comentários

Observe o esquema abaixo:



Olhando para o arco DB, temos que $D\hat{A}I = D\hat{C}B = 40°$.

Como o ângulo $D\hat{I}B$ é externo ao triângulo IBC, segue que:

$$D\hat{I}B = I\hat{C}B + I\hat{B}C = 40° + 60° = 100°$$

Veja ainda que $I\hat{B}P = 180° - 60° = 120°$. Olhando para o arco AC, temos que $A\hat{B}C = A\widehat{D}C = 60°$ e $I\widehat{D}P = 180° - 60° = 120°$.

Por fim, olhando para o quadrilátero $DIBP$:

$$100° + 120° + 120° + A\hat{P}C = 360° \Rightarrow A\hat{P}C = 20°$$

Gabarito: "b".

---

38. (CN/1998)

Um quadrilátero convexo Q tem diagonais respectivamente iguais a 4 e 6. Assinale, dentre as opções, a única possível para o perímetro de Q.

a) 10

b) 15

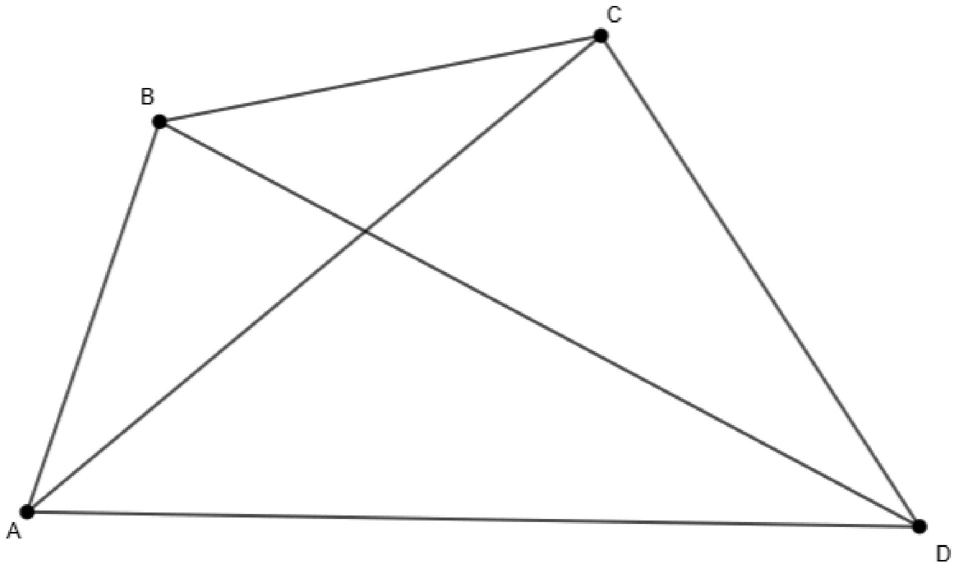
c) 20

d) 25

e) 30

Comentários

Observe a seguinte figura:



Onde $AC = 4\ e\ BD = 6$. Seja p o perímetro desse quadrilátero.

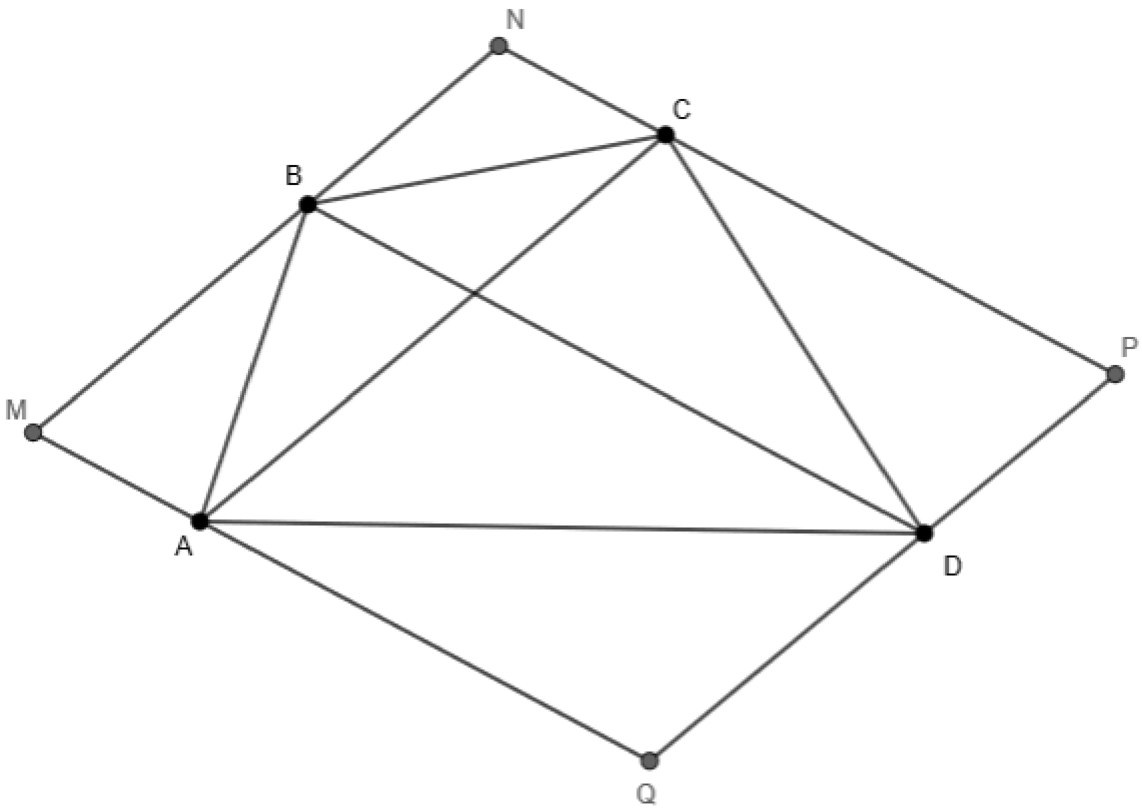
Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos $BDC\ e\ BAD$, temos:

$$BC + CD > BD\ e\ BA + AD > BD \Rightarrow BC + CD + BA + AD > 2BD = 12$$

Ou seja:

$$p > 12$$

Por outro lado, observe a seguinte construção:



Construímos o quadrilátero $MNPQ$, de modo que $MN \parallel AC \parallel QP$ e $MQ \parallel BD \parallel NP$.

Logo, temos que $MNPQ$ é um paralelogramo e $MN = QP = AC = 4$ e $MQ = NP = BD = 6$.

Aplicando a desigualdade triangular ao:

$$\Delta AMB: MB + MA > AB$$

$$\Delta AQD: AQ + QD > AD$$

$$\Delta DPC: DP + PC > CD$$

$$\Delta CBN: CN + NB > BC$$

Somando as desigualdades membro a membro:

$$MB + NB + MA + AQ + QD + DP + PC + CN > p$$

Ou ainda:

$$MN + QP + MQ + NP > p \Rightarrow 20 > p$$

Do que temos que:

$$20 > p > 12$$

A única possibilidade, dentre as alternativas, é $p = 15$.

Gabarito: "b".

---

39. (CN/1998)

A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos segmentos tangentes aos dois círculos.

a) 38,5

b) 39

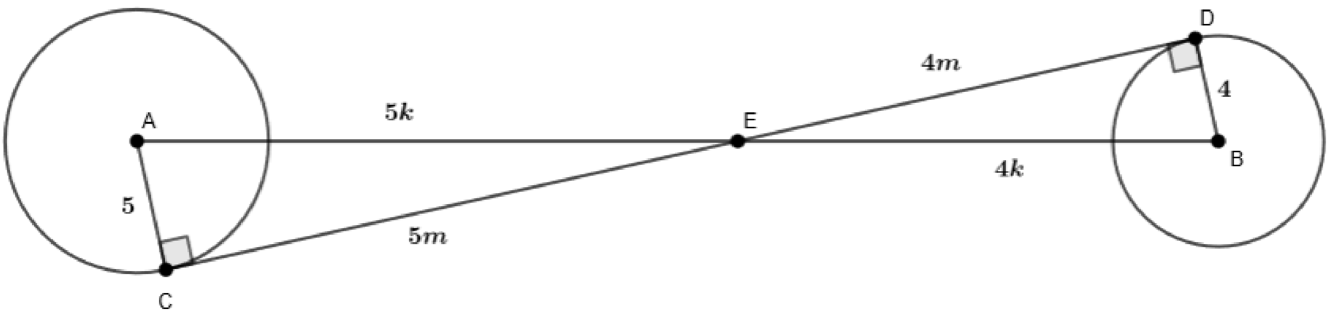
c) 39,5

d) 40

e) 40,5

Comentários

Observe a figura abaixo:



O seguimento AB representa a distância entre os centros, do que temos $AB = 41$.

Além disso, da semelhança entre os triângulos $ACE\ e\ BDE$:

$$\frac{AC}{DB} = \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = \frac{5}{4}$$

Para simplificar, fizemos:

$$AE = 5k, EB = 4k, CE = 5m\ e\ ED = 4m$$

Veja que:

$$5k + 4k = 41 \Rightarrow k = \frac{41}{9}$$

Aplicando Pitágoras ao ΔACE:

$$5^2 + (5m)^2 = (5k)^2 \Rightarrow 1 + m^2 = k^2 \Rightarrow m^2 = \left(\frac{41}{9}\right)^2 - 1 \Rightarrow m = \frac{40}{9}$$

Por fim, a medida do seguimento CD, tangente aos dois círculos vale:

$$CD = CE + ED = 5m + 4m = 9m = 9 \cdot \frac{40}{9} = 40$$

Gabarito: "d".

---

4. QUESTÕES NÍVEL 2

40. (EFOMM/2019)

Foram construídos círculos concêntricos de raios $5\ cm$ e $13\ cm$. Em seguida, foi construído um segmento de reta com maior comprimento possível, contido internamente na região interna ao círculo maior e externa ao menor. O valor do segmento é

a) $8,5\ cm$

b) $11,75\ cm$

c) $19,25\ cm$

d) $24\ cm$

e) $27\ cm$

41. (EFOMM/2009)

A, B e C são pontos consecutivos no sentido anti-horário de uma circunferência de raio r. O menor arco AB tem comprimento igual a r. Tomando-se como unidade u a medida do ângulo agudo $A\hat{C}B$, qual é o valor do seno de $\frac{\pi}{6}u$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

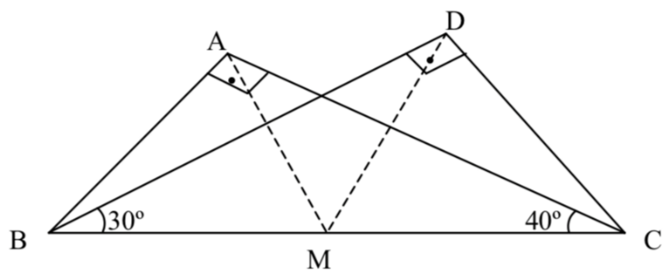
c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

42. (EFOMM/2005)

Na figura abaixo, determine a medida do ângulo $A\widehat{M}D$, sabendo que M é o ponto médio de $\overline{BC}$.



a) $30°$

b) $40°$

c) $45°$

d) $50°$

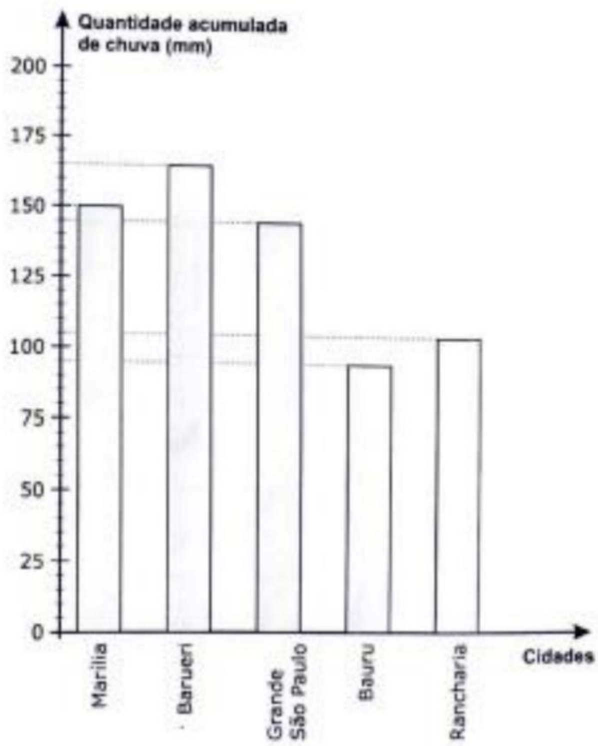
e) $60°$

43. (AFA/2021)

Fevereiro de 2020 destacou-se por uma quantidade expressiva de chuva em quase todo território nacional. Entre os dias 08 e 14, foram registradas significativas concentrações de chuvas na região Sudeste do Brasil.

A atuação da Zona de Convergência do Atlântico Sul (ZCAS), do Vértice do Ciclônico de Altos Níveis (VCAN), da Zona de Convergência Intertropical (ZCIT), combinadas com a termodinâmica, proporcionaram áreas de instabilidades, favorecendo acumulados de chuvas significativos.

No gráfico a seguir, estão destacadas algumas cidades do Sudeste e a quantidade acumulada de chuva no período acima mencionado.



Para uma melhor visualização e comparação dos dados acima, foi construído um gráfico de setores.

Considere x **o ângulo central correspondente à cidade de Barueri no gráfico de setores.**

Em relação a x **é corretor afirmar que**

a) $sen\frac{2\pi}{3} > sen\, x$

b) $\cos x > \cos\frac{\pi}{6}$

c) $sen\, x = sen\frac{\pi}{4} + sen\frac{3\pi}{4}$

d) $\cos x = sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$

GABARITO

40. d
41. e
42. b
43. d

RESOLUÇÃO

40. (EFOMM/2019)

Foram construídos círculos concêntricos de raios $5\ cm$ **e** $13\ cm$**. Em seguida, foi construído um segmento de reta com maior comprimento possível, contido internamente na região interna ao círculo maior e externa ao menor. O valor do segmento é**

a) $8,5\ cm$

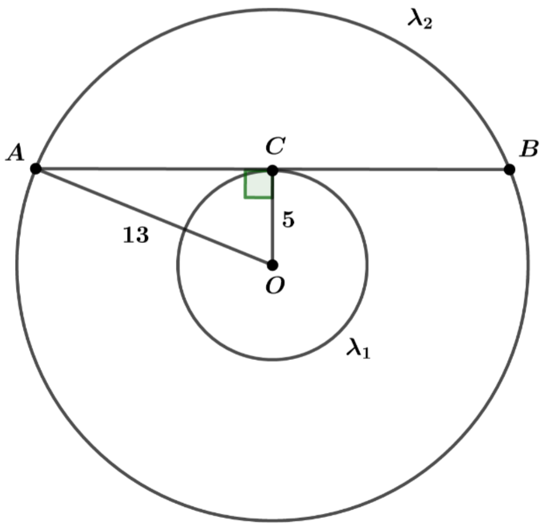
b) $11,75\ cm$

c) $19,25\ cm$

d) $24\ cm$

e) $27\ cm$

Comentários



Da figura, AB é tangente à circunferência interna para que AB tenha o maior comprimento possível. Logo, C é ponto médio e, desse modo, aplicando-se o teorema de Pitágoras no ΔACO:

$$13^2 = 5^2 + AC^2$$

$$169 = 25 + AC^2$$

$$AC^2 = 144 \Rightarrow AC = 12$$

$$\therefore AB = 2 \cdot 12 = 24\ cm$$

Gabarito: “d”.

---

41. (EFOMM/2009)

A, B e C são pontos consecutivos no sentido anti-horário de uma circunferência de raio r. O menor arco AB tem comprimento igual a r. Tomando-se como unidade u a medida do ângulo agudo $A\hat{C}B$, qual é o valor do seno de $\frac{\pi}{6}u$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

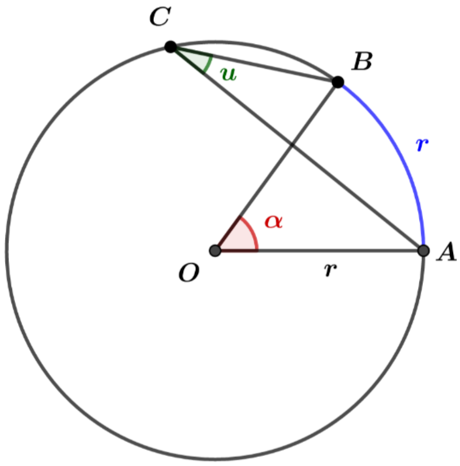
c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Comentários

Precisamos calcular o valor do ângulo u. Vejamos a figura:



O ângulo α é dado por:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

Assim, como C enxerga o mesmo arco $\widehat{AB}$ e O é o centro da circunferência, temos:

$$u = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$sen\left(\frac{\pi}{6}u\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

Usando a fórmula do arco metade do seno:

$$\cos x = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x \Rightarrow sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Sendo $\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2} < \pi$, temos seno positivo, logo:

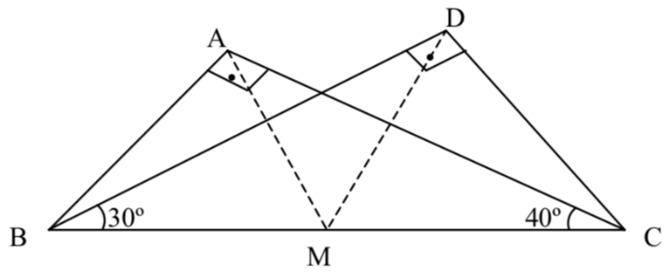
$$\Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Gabarito: "e".

---

42. (EFOMM/2005)

Na figura abaixo, determine a medida do ângulo $A\widehat{M}D$, sabendo que M é o ponto médio de $\overline{BC}$.



a) $30°$

b) $40°$

c) $45°$

d) $50°$

e) $60°$

Comentários

Da figura, $A\hat{B}D = 20°\ e\ D\hat{C}A = 20°$. Como BC é hipotenusa comum aos triângulos retângulos ABC e BCD, temos que BC é diâmetro da circunferência que circunscreve ambos os triângulos, logo, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, sendo M o centro da circunferência.

Portanto, $A\hat{M}D$ é o ângulo central referente ao arco $\widehat{AD}$. Assim, $A\hat{M}D = 2A\hat{B}D$:

$$A\hat{M}D = 2 \cdot 20° = 40°$$

Gabarito: "b".

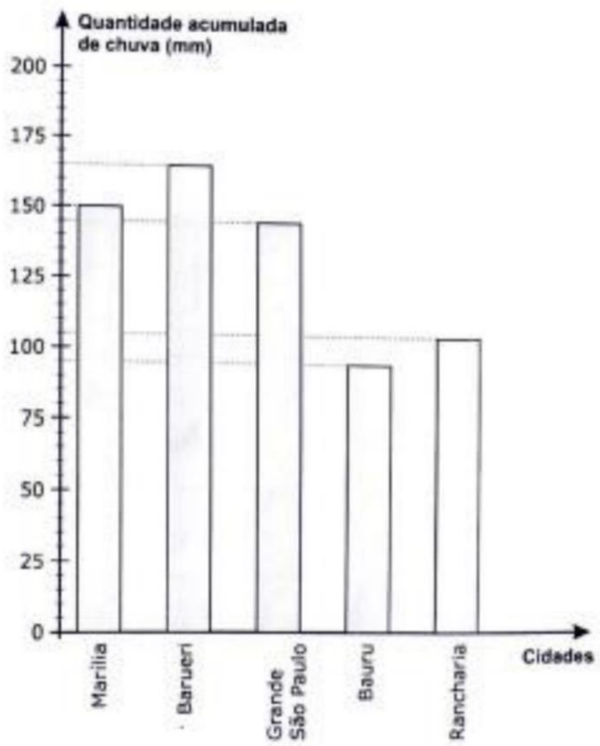
---

43. (AFA/2021)

Fevereiro de 2020 destacou-se por uma quantidade expressiva de chuva em quase todo território nacional. Entre os dias 08 e 14, foram registradas significativas concentrações de chuvas na região Sudeste do Brasil.

A atuação da Zona de Convergência do Atlântico Sul (ZCAS), do Vértice do Ciclônico de Altos Níveis (VCAN), da Zona de Convergência Intertropical (ZCIT), combinadas com a termodinâmica, proporcionaram áreas de instabilidades, favorecendo acumulados de chuvas significativos.

No gráfico a seguir, estão destacadas algumas cidades do Sudeste e a quantidade acumulada de chuva no período acima mencionado.



Para uma melhor visualização e comparação dos dados acima, foi construído um gráfico de setores.

Considere x o ângulo central correspondente à cidade de Barueri no gráfico de setores.

Em relação a x é corretor afirmar que

a) $sen\frac{2\pi}{3} > sen\, x$

b) $\cos x > \cos\frac{\pi}{6}$

c) $sen\, x = sen\frac{\pi}{4} + sen\frac{3\pi}{4}$

d) $\cos x = sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$

Comentários

Do gráfico, podemos extrair as seguintes informações:

Cidade	Quantidade acumulada de chuva (mm)
Marília	150
Barueri	165
Grande São Paulo	145
Bauru	95
Rancharia	105

Com esses dados, queremos construir um gráfico de setores e analisar o ângulo central representado pela cidade de Barueri. Para isso, basta vermos qual a porcentagem do gráfico a cidade de Barueri representará.

Veja que o total de chuva acumulada nas cidades é

$$T = 150 + 165 + 145 + 95 + 105$$

$$T = 660$$

Como Barueri possui 165 mm de chuva acumulada, temos:

$$P_{Barueri} = \frac{165}{660} = 0{,}25 = 25\%$$

Logo, ela ocupa 25% do gráfico de setores. O seu ângulo central será

$$x = 0{,}25 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Analisando as alternativas:

a) $sen \frac{2\pi}{3} > sen\ x$

Falsa, pois $senx = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

b) $\cos x > \cos\frac{\pi}{6}$

Falsa, pois $\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

c) $sen\ x = sen\frac{\pi}{4} + sen\frac{3\pi}{4}$

Falsa, pois $senx = 1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = sen\frac{\pi}{4} + sen\frac{3\pi}{4}$.

d) $\cos x = sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$

Verdadeira.

$$\cos x = 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$$

Gabarito: D

---

5. QUESTÕES NÍVEL 3

44. (ITA/2021)

Determine o raio da circunferência circunscrita a um trapézio isósceles cujas bases e altura têm comprimentos 4, 2 e 3, respectivamente.

45. (ITA/2020)

Seja A um ponto externo a circunferência λ de centro O e raio r. Considere uma reta passando por A e secante a λ nos pontos C e D tal que o segmento AC é externo a λ e tem comprimento igual a

r. Seja B o ponto de λ tal que O pertence ao segmento AB. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a) $25°$.

b) $30°$.

c) $35°$.

d) $40°$.

e) $45°$.

46. (ITA/2018)

Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere pontos A e B tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A,r) = 3$, $d(B,r) = 6$ e $d(A,B) = 15$. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N. Determine a menor distância possível entre os pontos M e N.

47. (ITA/2018)

Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem $AB = 3\ cm$, $BC = 7cm$ e $CA = 8cm$. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

a) 2

b) $2\sqrt{2}$

c) 3

d) $2\sqrt{3}$

e) $7/2$

48. (ITA/2016)

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}} cm^2$. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

49. (ITA/2016)

Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo em PQR, em cm^2, é igual a

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

50. (ITA/2015)

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

a) 5

b) 6

c) 8

d) 10

e) 15

51. (ITA/2015)

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

a) $\frac{21}{8}$

b) $\frac{27}{8}$

c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{37}{8}$

e) $\frac{45}{8}$

52. (ITA/2015)

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

a) 5.

b) 6.

c) 8.

d) 10.

e) 15.

53. (ITA/2014)

Considere o trapézio $ABCD$ de bases AB e CD. Sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente. Então, se AB tem comprimento x e CD tem comprimento $y < x$, MN é igual a

a) $x - y$
b) $\frac{1}{2}(x - y)$
c) $\frac{1}{3}(x - y)$
d) $\frac{1}{3}(x + y)$
e) $\frac{1}{4}(x + y)$

54. (ITA/2012)

Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \sqrt{3}/2\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$ e $c = 1/2\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

55. (ITA/2006)

Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G.

Se $EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3$ e $AG = 6$, então GF vale

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

56. (ITA/2001)

Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

57. (ITA/2000)

Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm. Seja t a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede

a) 1 cm
b) 1,5 cm
c) 2 cm
d) 2,5 cm
e) 3 cm

58. (ITA/1998)

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) $23°$
b) $32°$
c) $36°$
d) $40°$
e) $45°$

59. (IME/2019)

Em um setor circular de $45°$, limitado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ iguais a R, inscreve-se um quadrado $MNPQ$, onde $\overline{MN}$ está apoiado em $\overline{OA}$ e o ponto Q sobre o raio $\overline{OB}$. Então, o perímetro do quadrado é:

a) $4R$
b) $2R$
c) $2R\sqrt{2}$
d) $4R\sqrt{5}$
e) $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$

60. (IME/2019)

Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

61. (IME/2018)

Considere um triângulo ABC onde $BC = a$, $AB = c$, $AC = b, c > b$. O círculo inscrito a esse triângulo tangencia BC, em D e DE é um diâmetro desse círculo. A reta que tangencia o círculo e que passa por E intercepta AB em P e AC em Q. A reta AE intercepta BC no ponto R. Determine os segmentos de reta EQ e DR em função dos lados do triângulo: a, b e c.

62. (IME/2016)

Considere quatro pontos distintos coplanares. Das distâncias entre esses pontos, quatro delas valem a e duas delas valem b. O valor máximo da relação $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é

a) 2
b) $1 + \sqrt{3}$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $1 + 2\sqrt{2}$
e) $2 + 2\sqrt{3}$

63. (IME/2016)

Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro O no ponto C' segundo um ângulo de $45°$. Sejam A e B os pontos externos desta corda, e a distância AC' igual a $\sqrt{3} + 1$ cm. O raio do círculo mede 2 cm, e C é a extremidade do diâmetro mais distante de C'. O prolongamento do segmento AO intercepta BC em A'. Calcule a razão em que A' divide BC.

GABARITO

44. $R = \sqrt{5}$
45. b
46. $d(M,N) = 10\sqrt{2}$
47. a
48. b
49. e
50. $p_{PMN} = 5$
51. e
52. a
53. b
54. a
55. d
56. c
57. b
58. c

59. e

60. $ED = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}$

61. $EQ = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}$ e $DR = c - b$

62. c

63. $\frac{A'B}{A'C} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

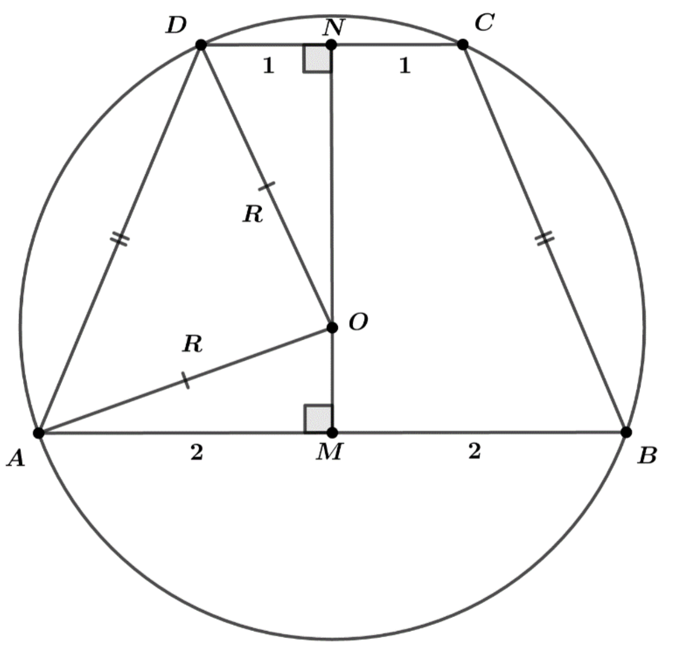
RESOLUÇÃO

44. (ITA/2021)

Determine o raio da circunferência circunscrita a um trapézio isósceles cujas bases e altura têm comprimentos 4, 2 e 3, respectivamente.

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



nos triângulos NOD e MOA, obtemos:

$$NO = \sqrt{R^2 - 1}$$

$$MO = \sqrt{R^2 - 4}$$

Logo:

$$NO + OM = MN \Rightarrow \sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - 4} = 3$$

Elevando ao quadrado:

$$R^2 - 1 + R^2 - 4 + 2\sqrt{R^4 - 5R^2 + 4} = 9$$

$$2\sqrt{R^4 - 5R^2 + 4} = 14 - 2R^2$$

$$\sqrt{R^4 - 5R^2 + 4} = 7 - R^2$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$R^4 - 5R^2 + 4 = R^4 - 14R^2 + 49$$

$$9R^2 = 45 \Rightarrow R^2 = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

Gabarito: $R = \sqrt{5}$

45. (ITA/2020)

Seja A um ponto externo a circunferência λ de centro O e raio r. Considere uma reta passando por A e secante a λ nos pontos C e D tal que o segmento AC é externo a λ e tem comprimento igual a r. Seja B o ponto de λ tal que O pertence ao segmento AB. Se o ângulo $B\widehat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\widehat{O}D$ é igual a

a) $25°$.

b) $30°$.

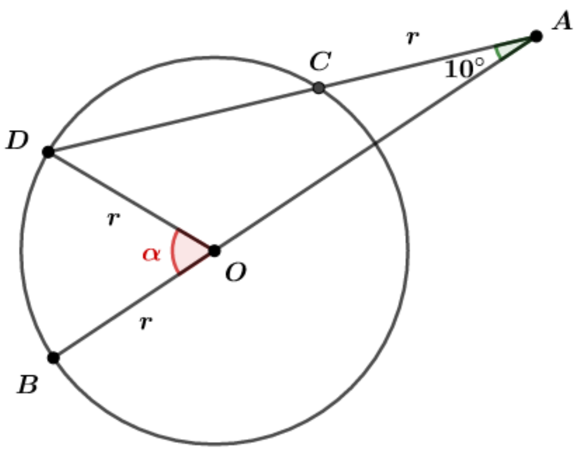
c) $35°$.

d) $40°$.

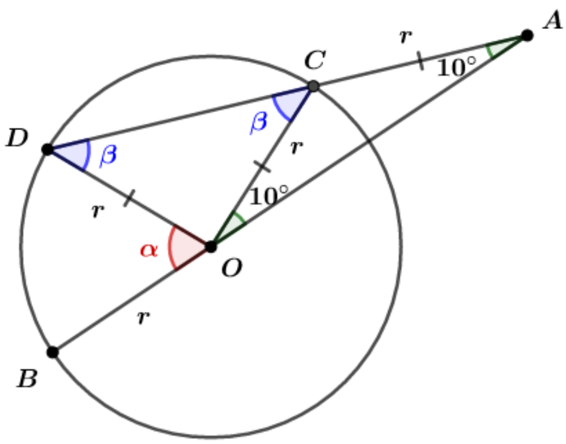
e) $45°$.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

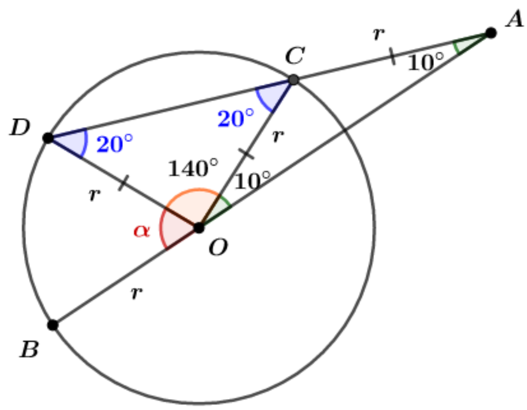


Queremos determinar α. Perceba que OCA é um triângulo isósceles, pois $CO = CA = r$. Logo:



Como β é ângulo externo ao ΔOCA, então $\beta = 10° + 10° = 20°$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser $180°$, temos:

$$C\hat{O}D + \beta + \beta = 180° \Rightarrow C\hat{O}D = 180° - 40° = 140°$$



Assim, α é dada por:

$$\alpha + 140° + 10° = 180° \therefore \alpha = 30°$$

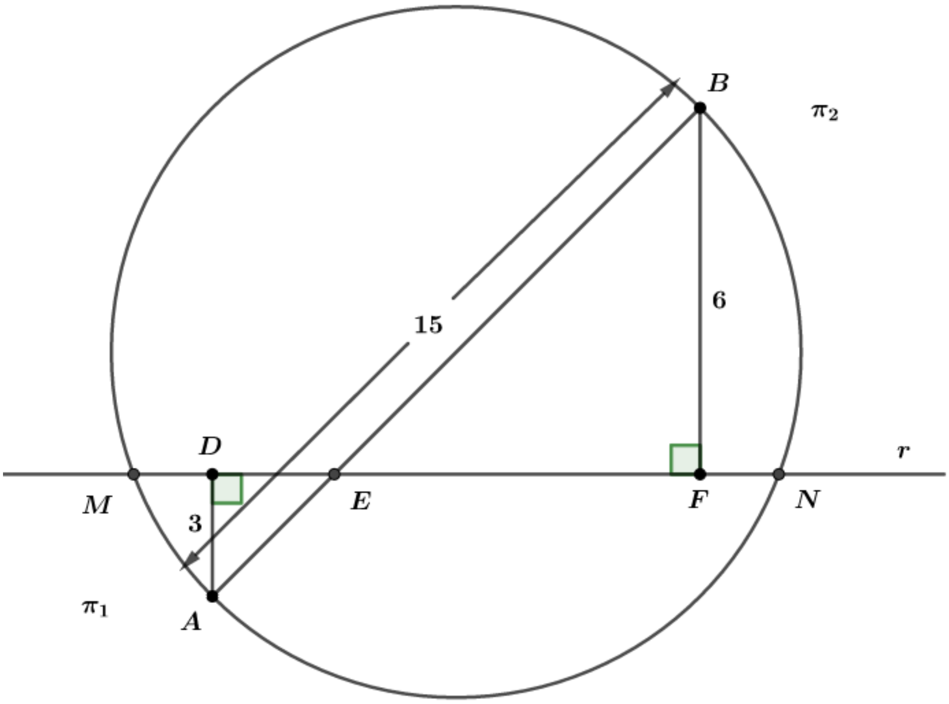
Gabarito: “b”.

46. (ITA/2018)

Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere pontos A e B tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3$, $d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N. Determine a menor distância possível entre os pontos M e N.

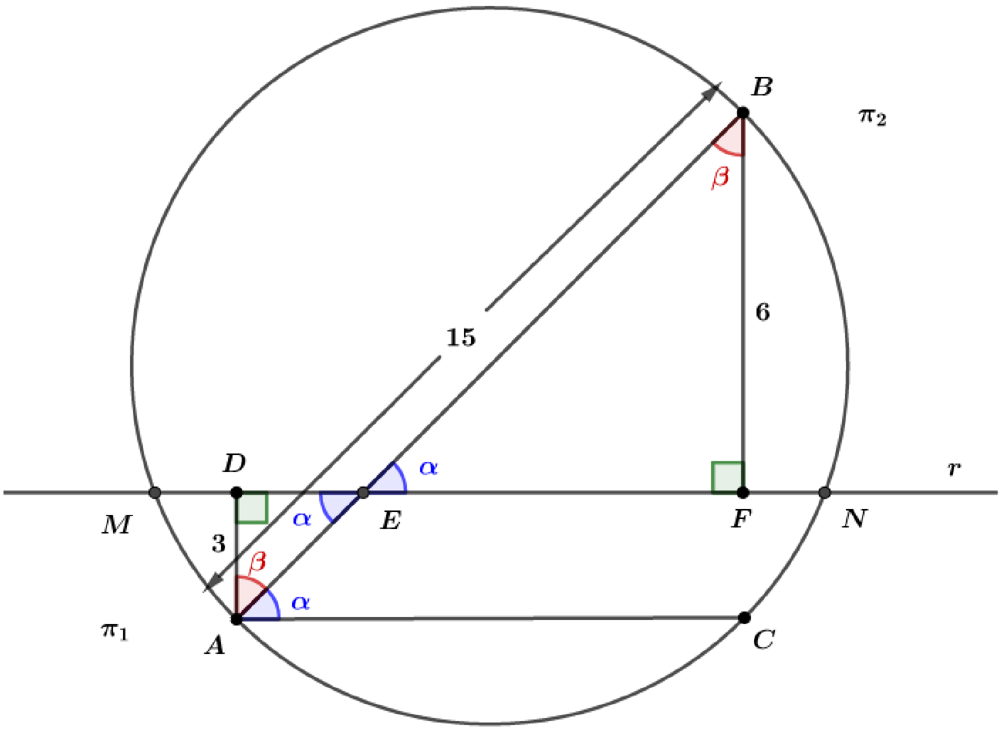
Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

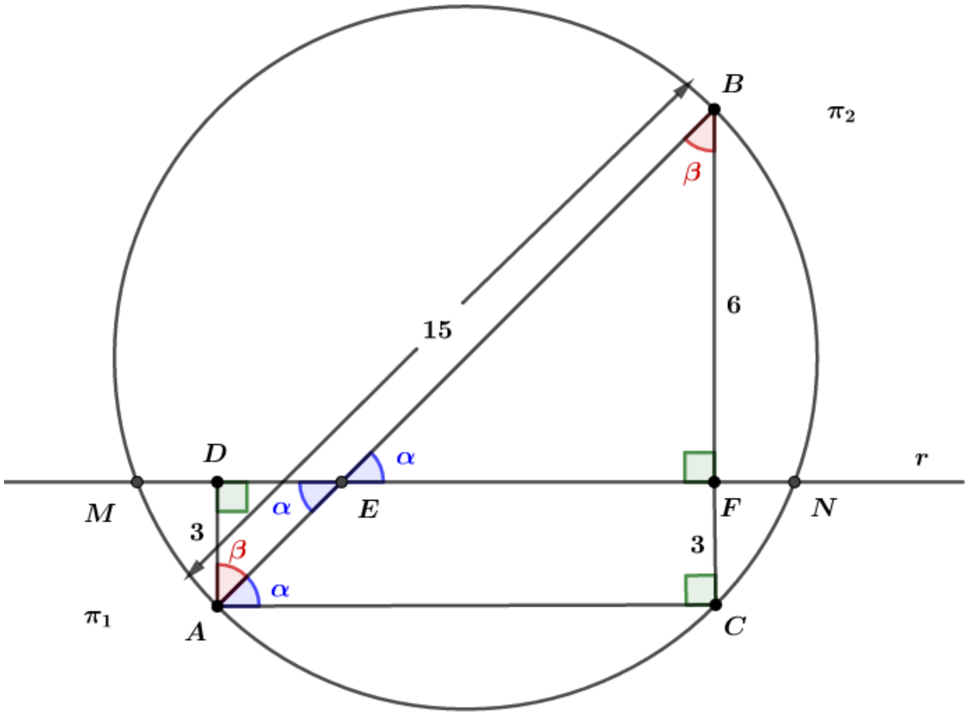


Como $A\hat{E}D$ e $B\hat{E}F$ são opostos pelo vértice, podemos definir $A\hat{E}D = B\hat{E}F = \alpha$. ΔAED e ΔBFE são retângulos, então, os triângulos AED e BFE são semelhantes com $E\hat{A}D = E\hat{F}B$.

Se passarmos uma reta paralela à reta r e que passa pelo ponto A, obtemos pela propriedade dos ângulos de retas paralelas $A\hat{E}D = E\hat{A}C$:



Podemos ver que $\alpha + \beta = 90°$. Então, se estendermos o segmento BF de modo a interceptar o ponto C, obtemos o triângulo retângulo ABC com $\widehat{C} = 90°$. Logo, ΔABC é inscritível com AB sendo a diagonal da circunferência.



Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC:

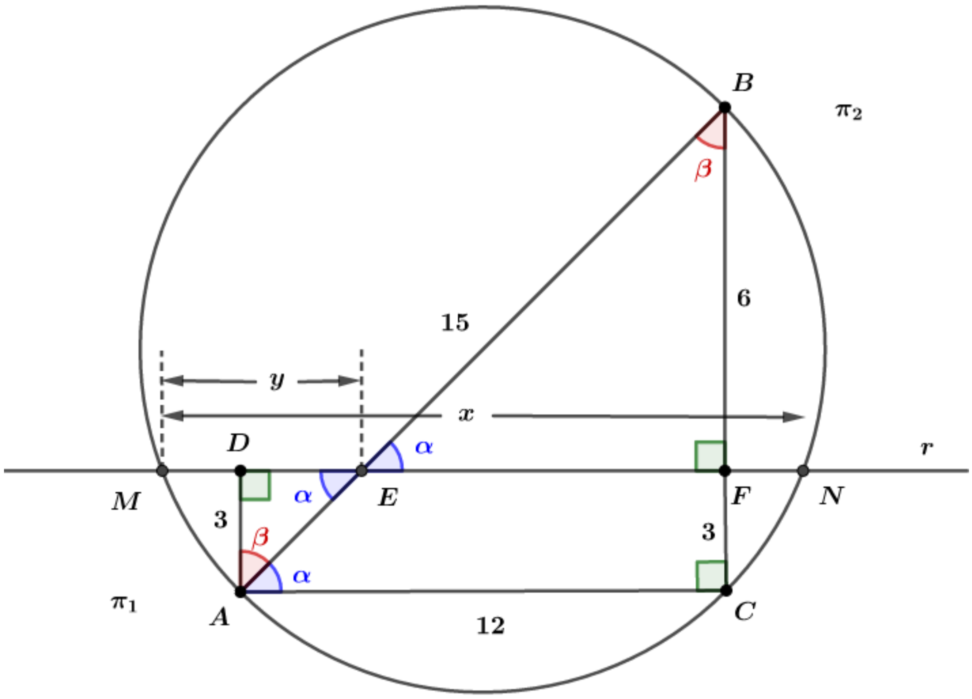
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$15^2 = 9^2 + AC^2$$

$$AC = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144}$$

$$AC = 12$$

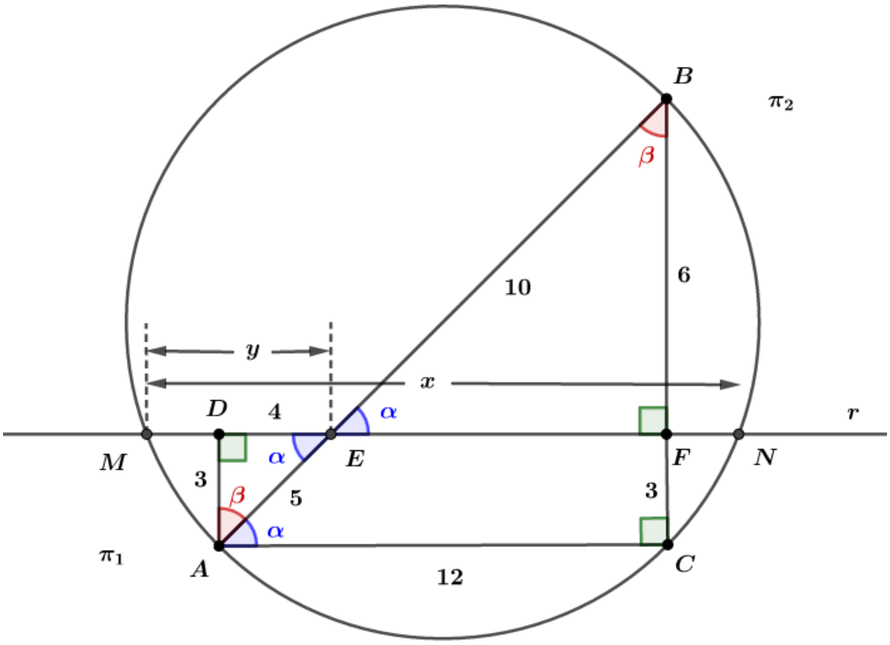
Fazendo $MN = x$ e $ME = y$:



Podemos ver que os triângulos ABC e AED são semelhantes, então:

$$\Delta ABC \sim \Delta AED \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \frac{15}{9} \cdot 3 \Rightarrow AE = 5$$

$$\Delta AED \Rightarrow DE = 4$$



Usando o teorema das cordas, temos:

$$AE \cdot EB = ME \cdot EN$$

$$5 \cdot 10 = y \cdot (x - y)$$

$$x = \frac{50}{y} + y$$

Aplicando a desigualdade das médias, obtemos:

$$(desigualdade\ das\ médias)\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

$$x = \frac{50}{y} + y \Rightarrow \frac{\frac{50}{y} + y}{2} \geq \sqrt{\frac{50}{y} y}$$

$$x \geq 2\sqrt{50}$$

$$x \geq 10\sqrt{2}$$

Portanto, sendo $d(M, N) = x$, o menor valor de $d(M, N)$ é dado por:

$$x = 10\sqrt{2}$$

Gabarito: $d(M, N) = 10\sqrt{2}$

47. (ITA/2018)

Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem $AB = 3\ cm, BC = 7cm$ e $CA = 8cm$. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

a) 2

b) $2\sqrt{2}$

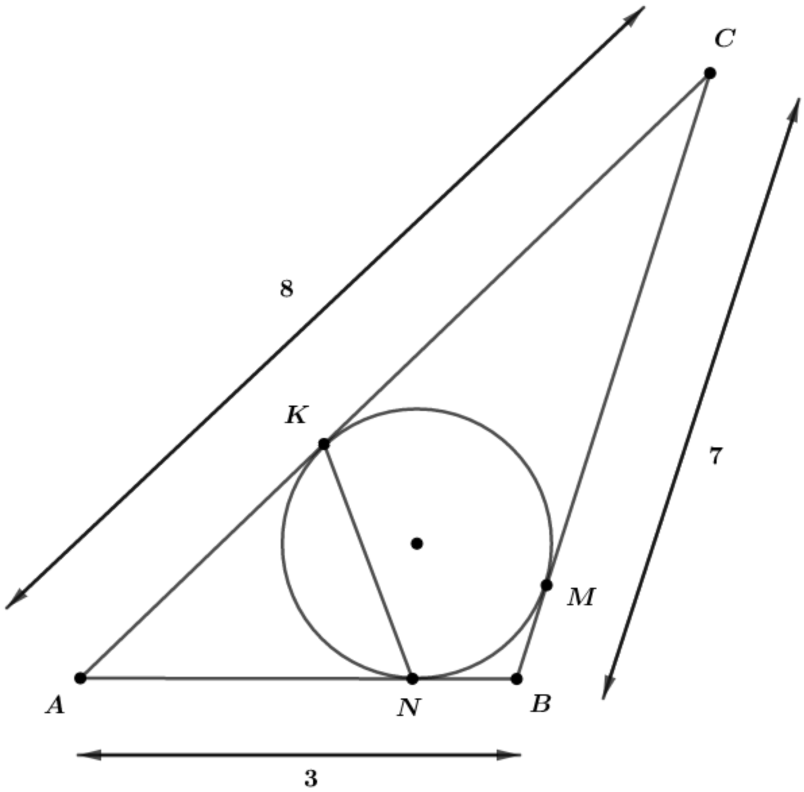
c) 3

d) $2\sqrt{3}$

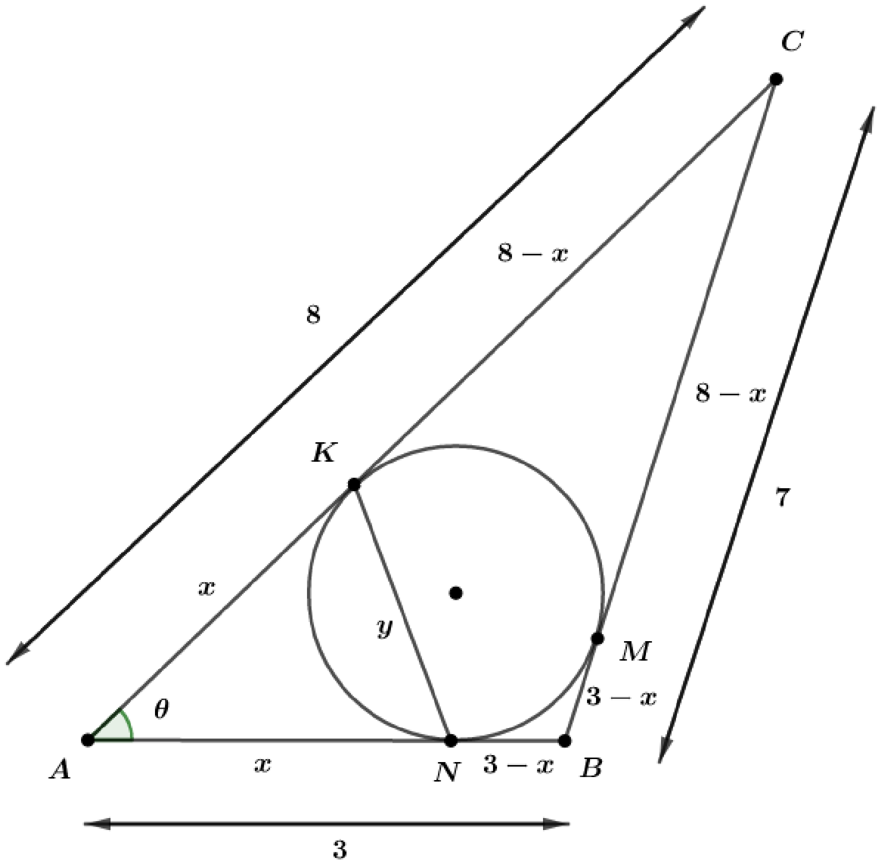
e) $7/2$

Comentários

Temos a seguinte figura:



Pela propriedade das tangentes, temos $AK = AN, BN = BM, CM = CK$. Fazendo $AN = AK = x$, encontramos $CM = CK = 8 - x$ e $BN = BM = 3 - x$:



Como $BC = 7$, temos:

$$BC = BM + CM \Rightarrow 7 = 3 - x + 8 - x \Rightarrow x = 2$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC para encontrar o valor de θ:

$$7^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot cos\theta$$

$$64 + 9 - 49 = 48cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Novamente, aplicando a lei dos cossenos no triângulo ANK para encontrar o valor de $NK = y$:

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2cos\theta$$

$$y^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2$$

$$\therefore NK = 2\ cm$$

Gabarito: "a".

48. (ITA/2016)

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}cm^2$. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

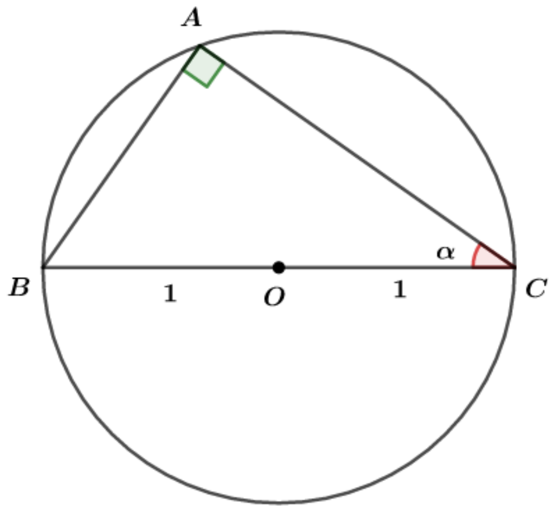
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

Comentários

Como o triângulo está inscrito na circunferência de raio 1 cm e possui o maior lado igual a 2, temos que ele é retângulo e o maior lado é a hipotenusa. Assim, temos a seguinte figura:



O enunciado nos dá o valor da área do triângulo. Precisamos calcular o valor da base e da altura do triângulo. Vamos encontrar uma relação entre os catetos e o ângulo α.

$$AB = 2sen\alpha$$

$$AC = 2cos\alpha$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2sen\alpha \cdot 2cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = sen(2\alpha)$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 45° \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$$

Como $\alpha = 22{,}5° < 45°$, temos que o cosseno de α é maior que o seno desse ângulo. Logo, o menor lado é dado por:

$$AB = 2 \operatorname{sen} 22{,}5°$$

Lembrando que $\operatorname{sen}(A) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2A)}{2}}$, temos:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(45°)}{2}} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Gabarito: "b".

49. (ITA/2016)

Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo em PQR, em cm², é igual a

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

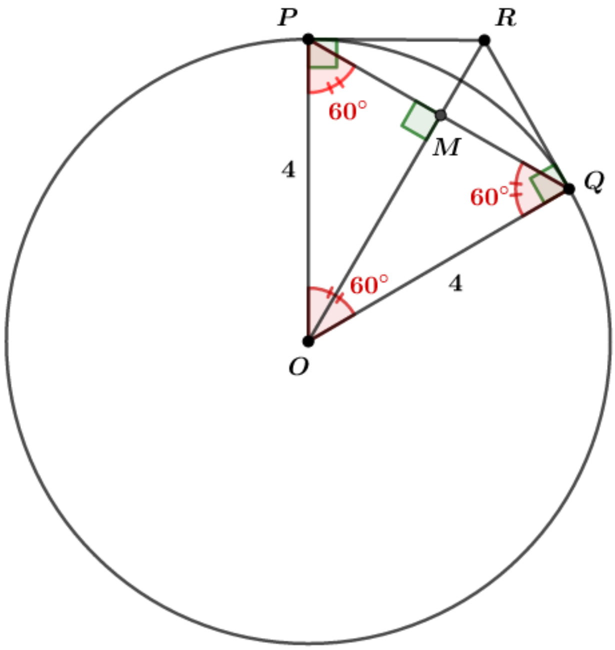
c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

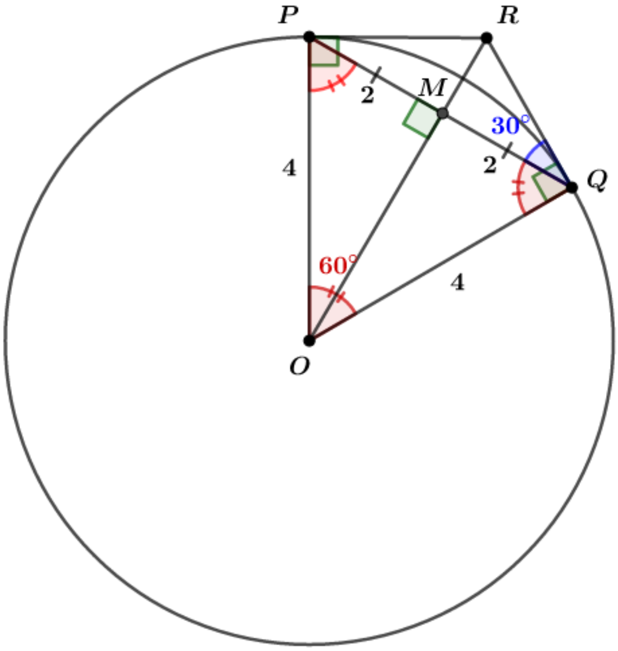
e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Seja O o centro da circunferência λ. Como o comprimento de PQ é igual ao raio da circunferência, temos que OPQ é um triângulo equilátero de medida 4 cm. Então, temos:



Sendo P, Q tangentes à circunferência e $O\hat{P}M \equiv O\hat{Q}M \equiv 60°$, temos $M\hat{P}R \equiv M\hat{Q}R \equiv 30°$. Logo, ΔPQR é isósceles com $PR = QR$ e M é a mediatriz do triângulo PQR:



A altura RM é dada por:

$$tg30° = \frac{RM}{2} \Rightarrow RM = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Calculando a área do triângulo PQR:

$$A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A_{PQR} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

Gabarito: "e".

---

50. (ITA/2015)

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

a) 5

b) 6

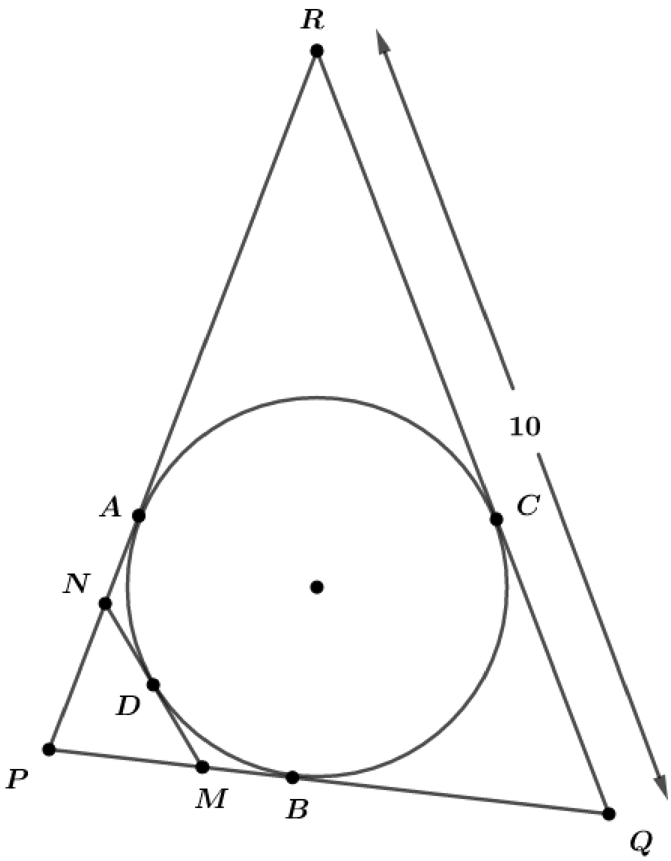
c) 8

d) 10

e) 15

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



O perímetro é 25, então:

$$PR + PQ + 10 = 25 \Rightarrow PR + PQ = 15$$

A, B, C, D são os pontos de tangência.

Queremos calcular o perímetro do ΔPMN:

$$p_{PMN} = PM + PN + MN$$

Como A, B, C são os pontos de tangência, temos:

$$NA = ND$$

$$MD = MB$$

$$PA = PB$$

$$QB = QC$$

$$RA = RC$$

Desse modo:

$$p_{PMN} = PB - MB + PA - NA + ND + MD$$

$$p_{PMN} = PB + PA$$

Escrevendo PB e PA em função de PQ e PR:

$$p_{PMN} = PQ - QB + PR - RA$$

Como $PQ + PR = 15$, $QB = QC$, $RA = RC$ e $RC + QC = 10$, temos:

$$p_{PMN} = PQ + PR - (QC + RC)$$
$$p_{PMN} = 15 - 10 = 5$$

Gabarito: $\boldsymbol{p_{PMN} = 5}$

51. (ITA/2015)

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

a) $\frac{21}{8}$

b) $\frac{27}{8}$

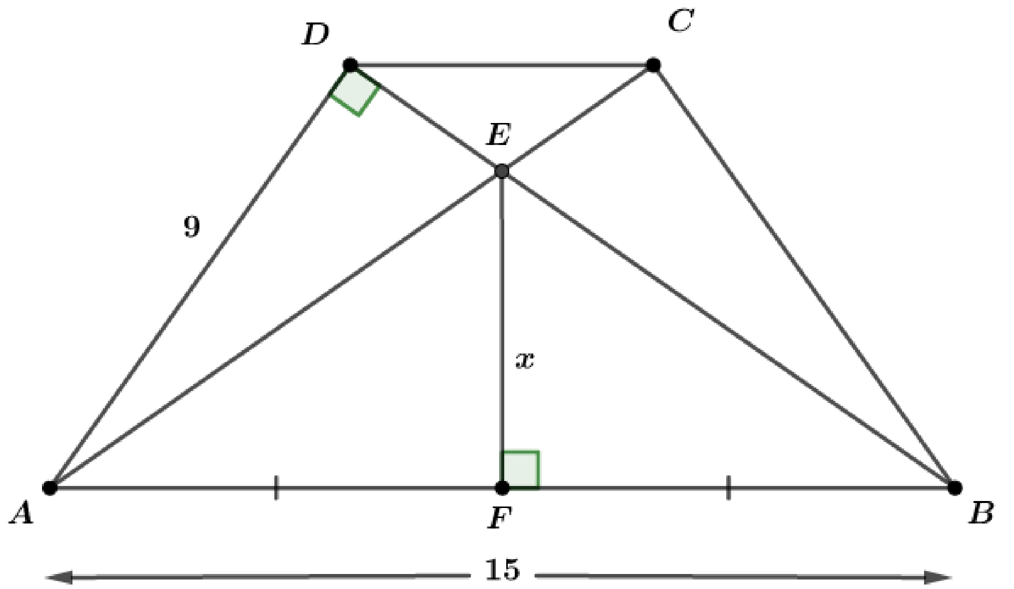
c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{37}{8}$

e) $\frac{45}{8}$

Comentários

Desenhando a figura do enunciado, obtemos:



Como o trapézio é isósceles, temos F é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Então:

$$AF = BF = \frac{15}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔADB:

$$15^2 = 9^2 + BD^2 \Rightarrow BD = 12$$

Os triângulos BFE e BDA são congruentes, logo:

$$\frac{EF}{FB} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{x}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \frac{45}{8}$$

Gabarito: "e".

52. (ITA/2015)

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

a) 5.

b) 6.

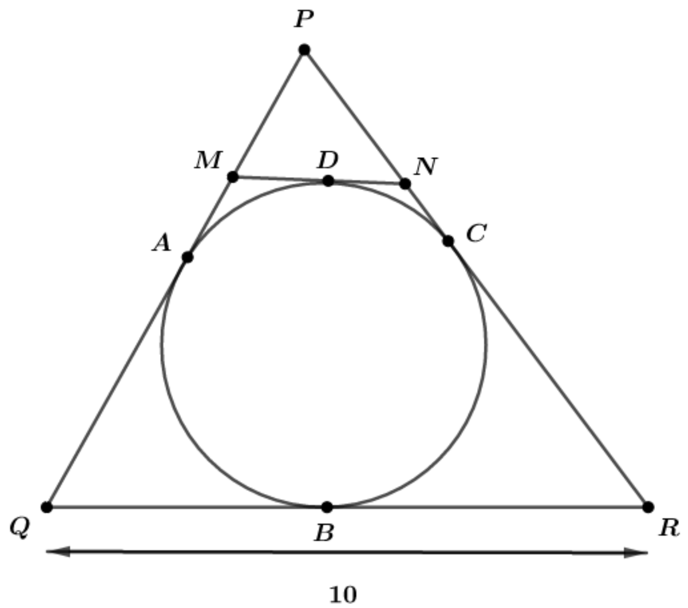
c) 8.

d) 10.

e) 15.

Comentários

Vamos desenhar a figura da questão:



O enunciado diz que o perímetro do triângulo PQR vale 25. Seja p_{PQR} o perímetro do triângulo:

$$p_{PQR} = PQ + PR + QR = 25 \Rightarrow PQ + PR = 15 \ \ (I)$$

Vamos analisar o quadrilátero $MNRQ$. Pelas propriedades de potência de ponto, temos:

$$MA = MD \text{ e } ND = NC \ \ (II)$$

O perímetro pedido é dado por:

$$p_{PMN} = PM + MN + PN \Rightarrow p_{PMN} = PM + MD + ND + PN$$

Usando a relação (II):

$$\Rightarrow p_{PMN} = PM + MA + PN + NC \Rightarrow p_{PMN} = PA + PC$$

Pelas propriedades dos pontos de tangência, podemos afirmar:

$$QB = QA \text{ e } RB = RC \ \ (III)$$

Então, da relação (I):

$$PQ + PR = 15 \Rightarrow PA + QA + RC + PC = 15$$

Usando a relação (III):

$$PA + \underbrace{QB + RB}_{QR} + PC = 15 \Rightarrow \underbrace{PA + PC}_{p_{PMN}} = 15 - \underbrace{QR}_{10} \Rightarrow p_{PMN} = 5$$

Gabarito: "a".

53. (ITA/2014)

Considere o trapézio $ABCD$ de bases AB e CD. Sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente. Então, se AB tem comprimento x e CD tem comprimento $y < x$, MN é igual a

a) $x - y$

b) $\frac{1}{2}(x - y)$

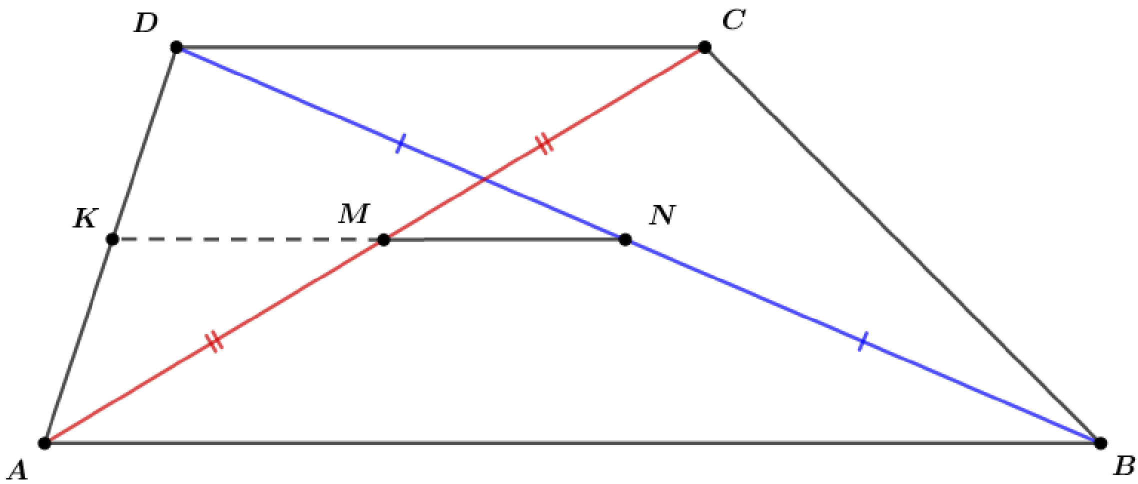
c) $\frac{1}{3}(x - y)$

d) $\frac{1}{3}(x + y)$

e) $\frac{1}{4}(x + y)$

Comentários

De acordo com o texto, temos o seguinte desenho:



$$AB = x \text{ e } CD = y$$

MN é paralelo aos segmentos AB e CD. Logo, KM e KN são as bases médias dos triângulos ADC e ADB, respectivamente. Assim, temos:

$$KN = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$$

$$KM = \frac{CD}{2} = \frac{y}{2}$$

A medida de MN é dada por:

$$MN = KN - KM = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(x - y)$$

Gabarito: "b".

54. (ITA/2012)

Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \sqrt{3}/2\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$ e $c = 1/2\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

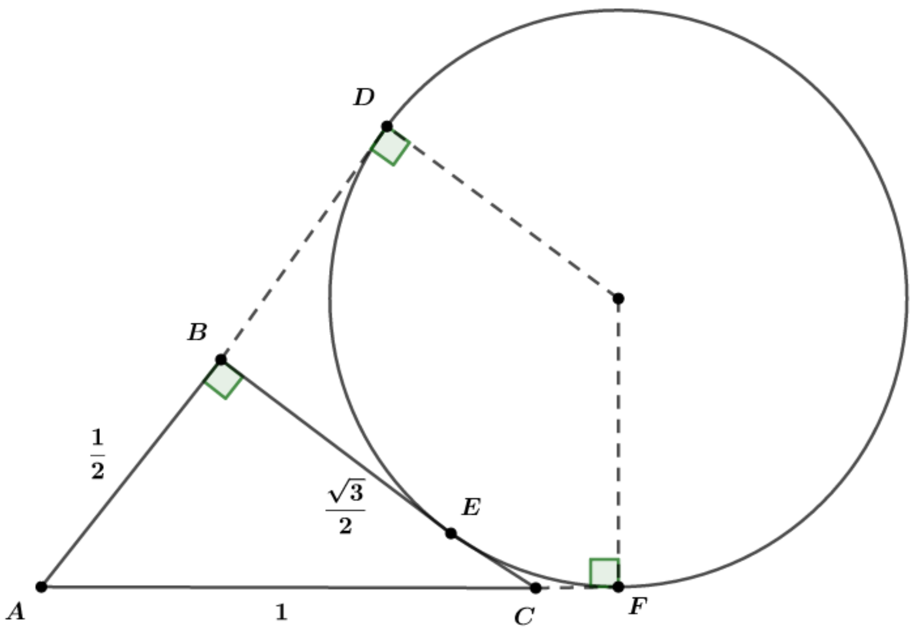
Comentários

Perceba o valor dos lados, podemos ver que eles satisfazem o teorema de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

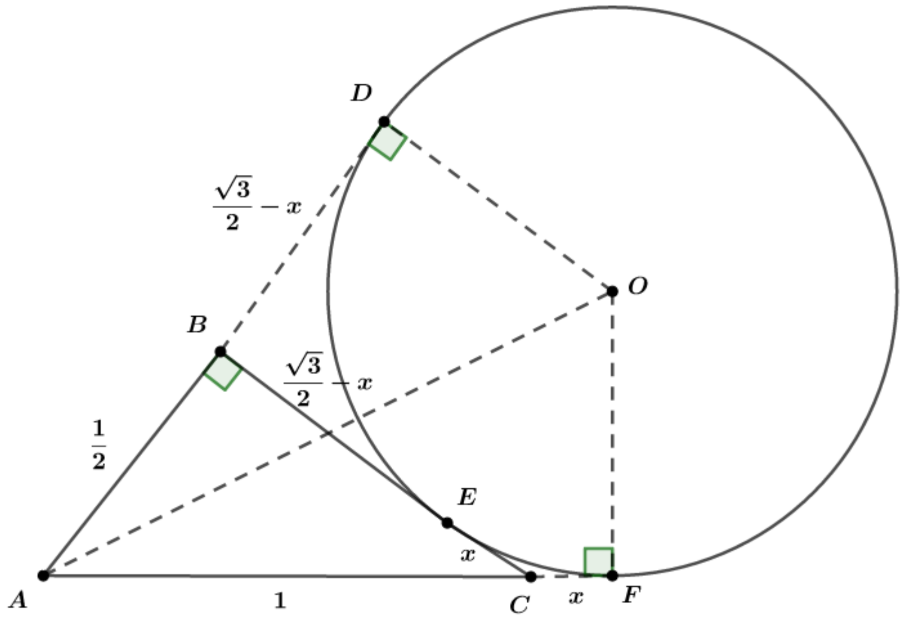
Portanto, o triângulo ABC é retângulo em B. Desenhando a figura:



Fazendo $CF = x$, temos:

$$CF = CE = x$$

$$BE = BD = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$$



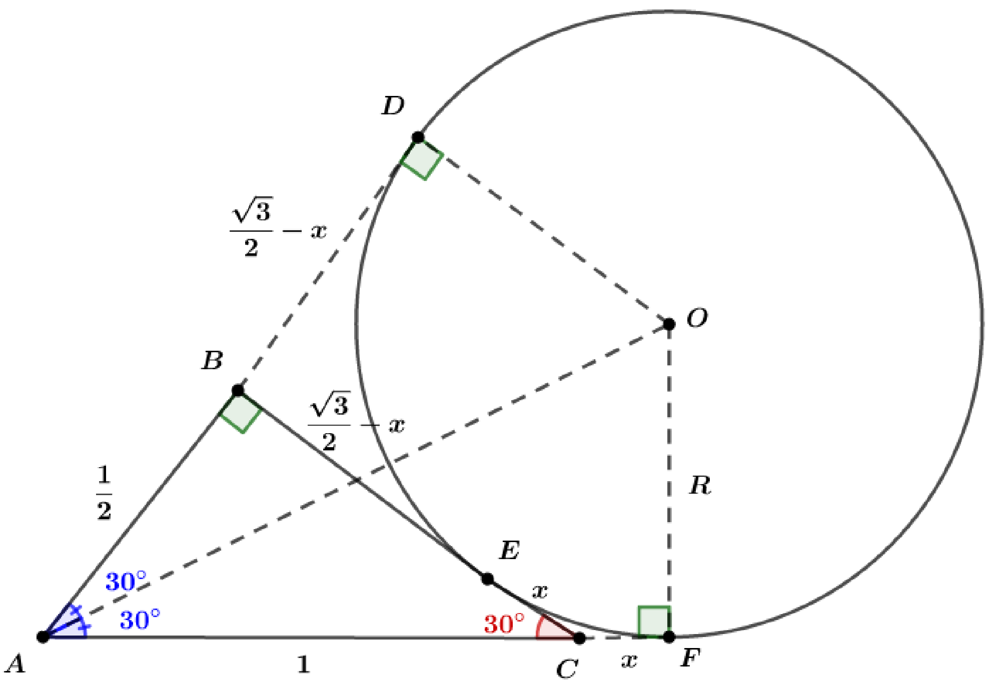
Como a circunferência é ex-inscrita ao triângulo, temos que seu centro é o ex-incentro do triângulo. Logo, $\overline{AO}$ é a bissetriz de $B\hat{A}C$. Portanto, $D\hat{A}O = F\hat{A}O$. Assim, os triângulos ADO e AFO são semelhantes com lados $AF = AD$:

$$AF = AD$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - x = 1 + x$$

$$2x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$



Analisando o triângulo AFO:

$$tg30° = \frac{R}{1+x}$$

$$R = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

Gabarito: "a".

55. (ITA/2006)

Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G.

Se $EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3$ e $AG = 6$, então GF vale

a) 1

b) 2

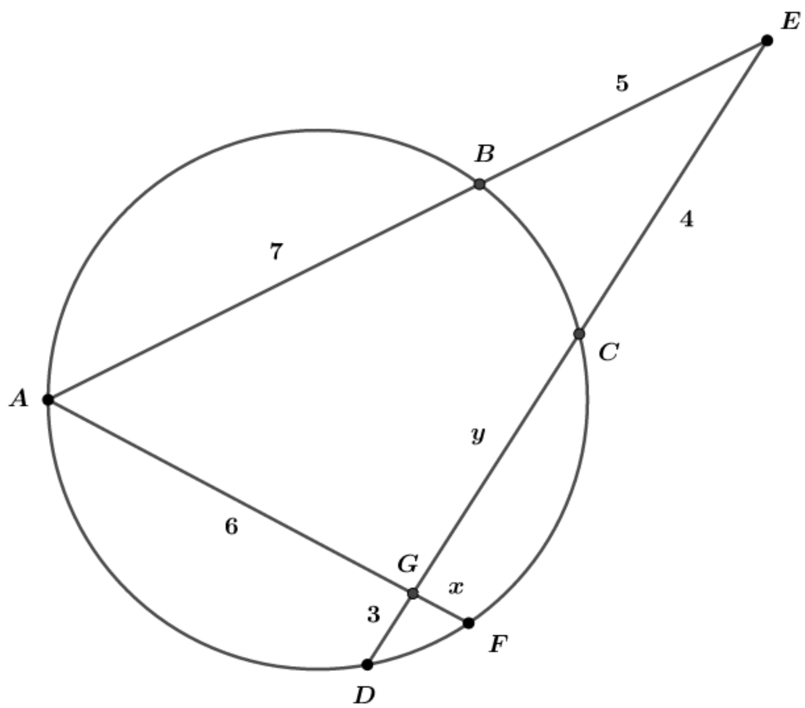
c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

De acordo com o texto, temos o seguinte desenho:



Analisando a potência do ponto E, temos:

$$EB \cdot EA = EC \cdot ED$$

$$5 \cdot (5 + 7) = 4 \cdot (4 + y + 3)$$

$$y = 15 - 7$$

$$y = 8$$

Analisando a potência do ponto G:

$$AG \cdot GF = CF \cdot GD$$

$$6x = 3 \cdot 8$$

$$x = 4$$

$$\therefore GF = 4$$

Gabarito: "d".

56. (ITA/2001)

Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

a) 12

b) 11

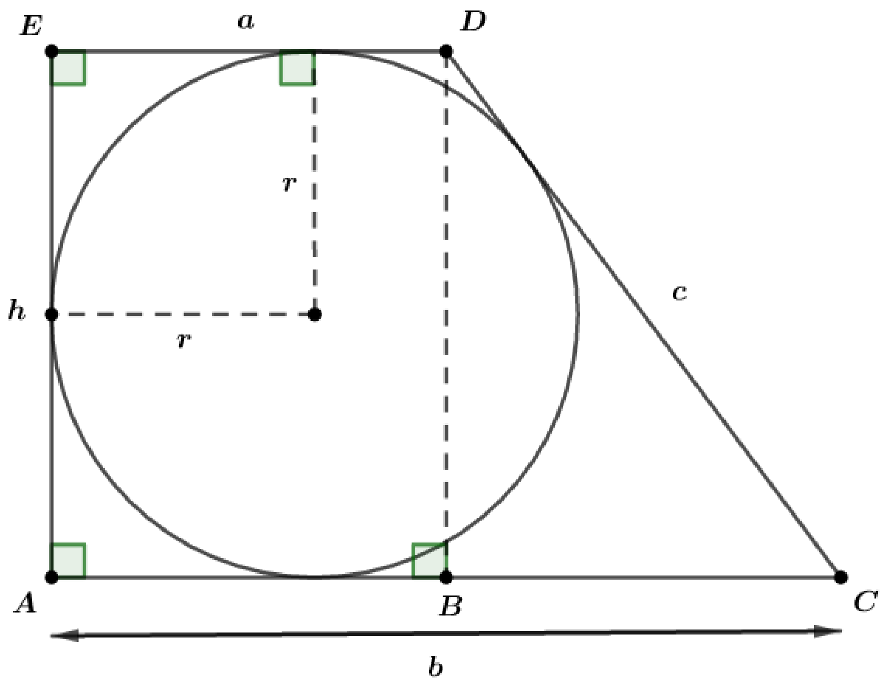
c) 10

d) 9

e) 8

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



O texto diz que:

$$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a$$

$$c - h = 2 \Rightarrow c = 2 + h$$

Analisando a figura, vemos que $h = 2r$.

Desse modo, $c = 2 + 2r$.

Como o trapézio é circunscritível, temos a seguinte relação:

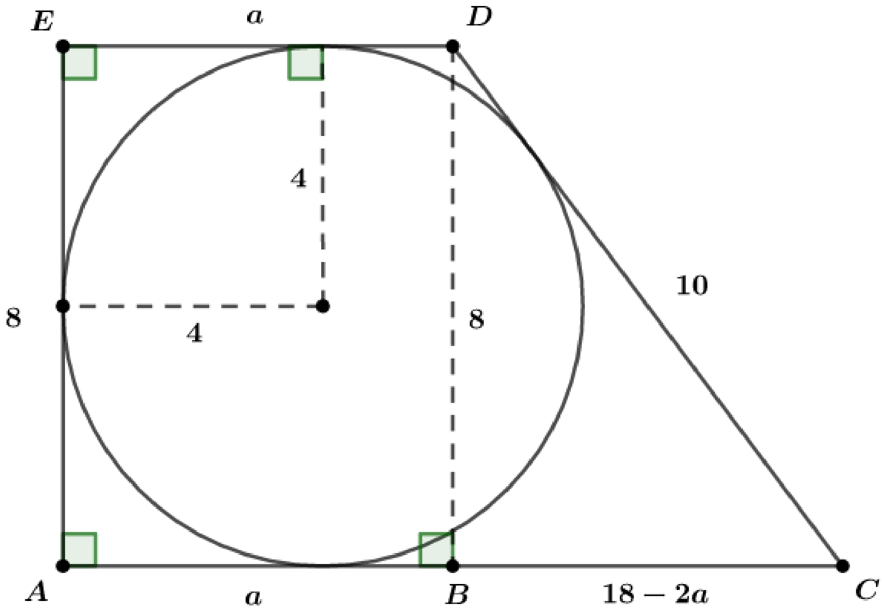
$$AE + CD = ED + AC$$

$$2r + (2 + 2r) = a + b$$

$$2 + 4r = 18$$

$$4r = 16 \Rightarrow r = 4$$

Analisando o trapézio, vemos que temos um triângulo retângulo BCD de altura $2r = 8$, base $b - a = 18 - 2a$ e hipotenusa $c = 2 + 2r = 10$.



Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 8^2 + (18 - 2a)^2$$

$$(18 - 2a)^2 = 100 - 64$$

$$(18 - 2a)^2 = 36$$

$$|18 - 2a| = 6$$

$$|9 - a| = 3$$

$$(9 - a) = \pm 3$$

$$a = 9 \mp 3$$

$$a = 6 \; ou \; a = 12$$

Se $a = 12$, temos $b = 18 - a = 6$ e consequentemente $b < a$, o que não condiz que as condições do problema já que a é a base menor.

Assim, temos $a = 6$.

Portanto:

$$a + r = 6 + 4 = 10$$

Gabarito: “c”.

57. (ITA/2000)

Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm. Seja t a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede

a) 1 cm

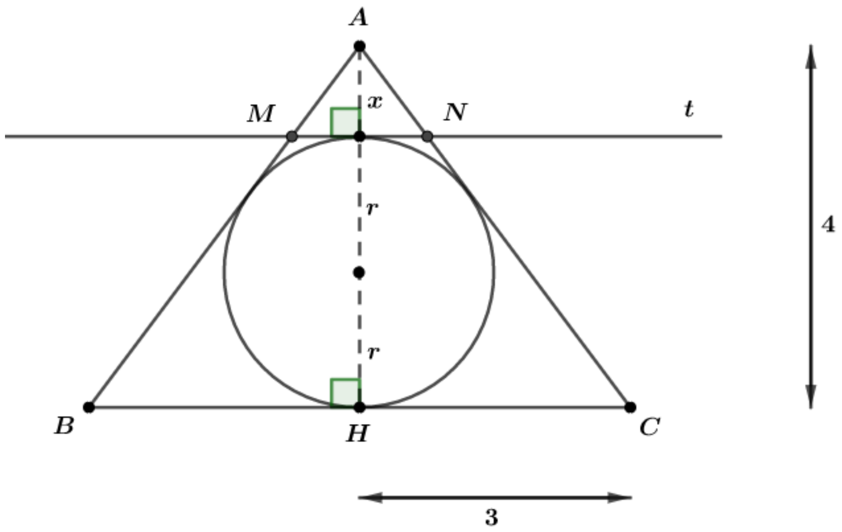
b) 1,5 cm

c) 2 cm

d) 2,5 cm

e) 3 cm

Comentários



Como ΔABC é isósceles, temos que $\overleftrightarrow{AH}$ é a reta mediatriz da base BC. Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAHC, encontramos a hipotenusa:

$$AC = 5\ cm$$

A área de um triângulo pode ser escrita como:

$$A = \frac{bh}{2} = pr$$

Onde p é o semiperímetro do triângulo e r é o raio da circunferência inscrita a ele. Desse modo:

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{5 + 5 + 6}{2} \cdot r \Rightarrow r = \frac{3}{2}\ cm$$

$$x = 4 - 2r = 1\ cm$$

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{x + 2r} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = 6 \cdot \left(\frac{1}{1 + 3}\right) \Rightarrow MN = \frac{3}{2} = 1,5\ cm$$

Gabarito: “b”.

58. (ITA/1998)

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) $23°$

b) $32°$

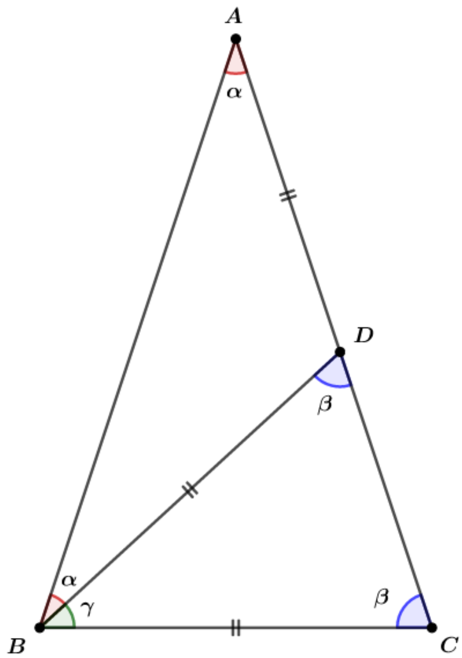
c) $36°$

d) $40°$

e) $45°$

Comentários

Como $AD \equiv BD \equiv BC$, temos que ΔDAB e ΔBCD são isósceles. Assim, temos:



Como β é ângulo externo ao triângulo DAB, temos $\beta = 2\alpha$. Sendo ΔABC e ΔBCD isósceles com um dos ângulos da base em comum, temos $\Delta ABC \sim \Delta BCD$. Desse modo:

$$A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B \equiv 2\alpha$$

Logo, $\gamma = \alpha$.

Somando os ângulos internos do triângulo ABC, encontramos:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$$

Gabarito: "c".

59. (IME/2019)

Em um setor circular de $45°$, limitado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ iguais a R, inscreve-se um quadrado $MNPQ$, onde $\overline{MN}$ está apoiado em $\overline{OA}$ e o ponto Q sobre o raio $\overline{OB}$. Então, o perímetro do quadrado é:

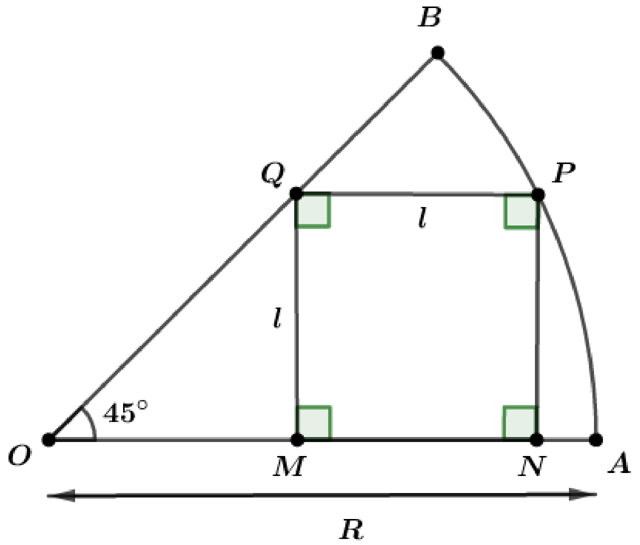
a) $4R$

b) $2R$

c) $2R\sqrt{2}$
d) $4R\sqrt{5}$
e) $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$

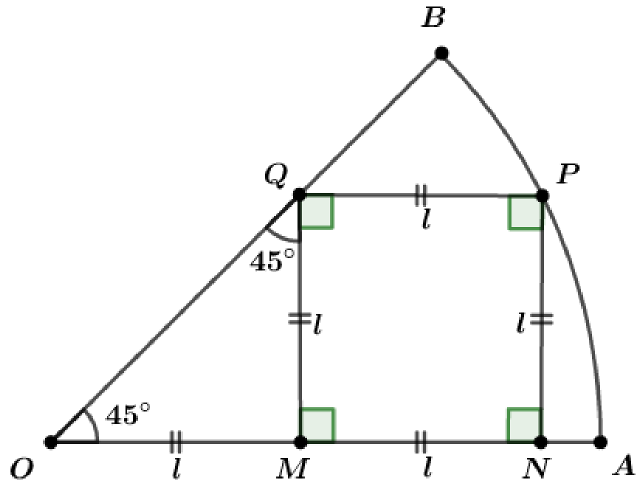
Comentários

Vamos desenhar a figura da questão:

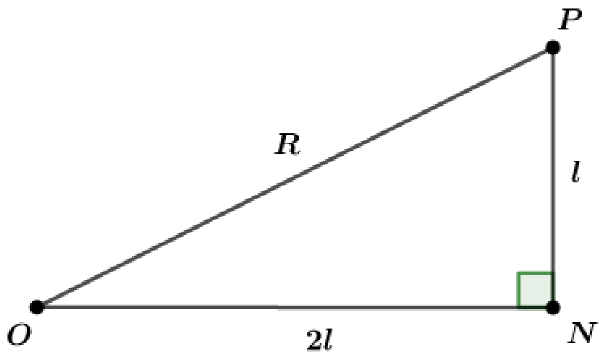


Precisamos calcular o valor do lado l do quadrado em função de R.

Como ΔOMQ é retângulo e $Q\hat{O}M = 45°$, temos $O\hat{Q}M = 45°$. Portanto, ΔOMQ é isósceles com $OM = QM = l$.



Vamos analisar o triângulo retângulo OPN:



Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$R^2 = (2l)^2 + l^2 \Rightarrow \boxed{l = \frac{R\sqrt{5}}{5}}$$

O perímetro do quadrado é dado por:

$$\boxed{(2p)_{MNPQ} = 4l = \frac{4R\sqrt{5}}{5}}$$

Gabarito: "e".

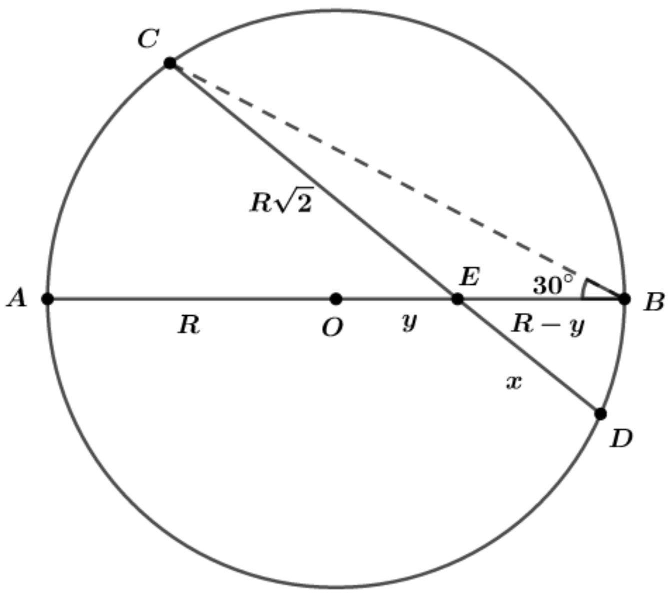
---

60. (IME/2019)

Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte situação:



A questão pede para calcular o valor de $\overline{ED} = x$. Podemos usar a propriedade da potência do ponto E e escrever:

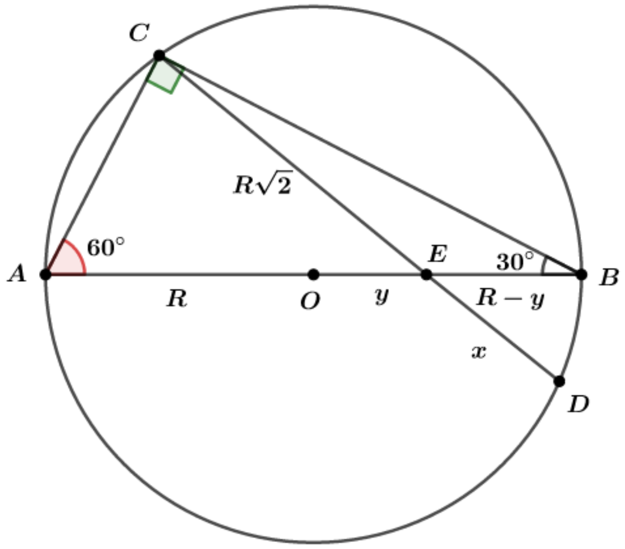
$$EC \cdot ED = EA \cdot EB$$

$$R\sqrt{2} \cdot x = (R + y) \cdot (R - y)$$

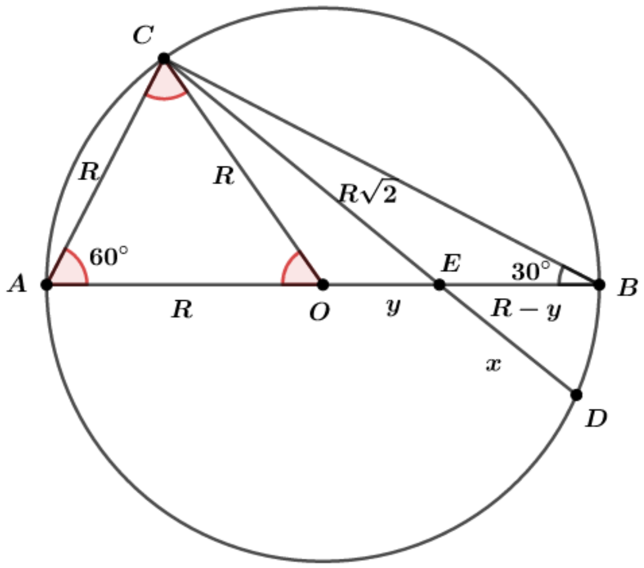
$$\boxed{R\sqrt{2} \cdot x = R^2 - y^2} \quad (I)$$

Para calcular x, precisamos encontrar o valor de y.

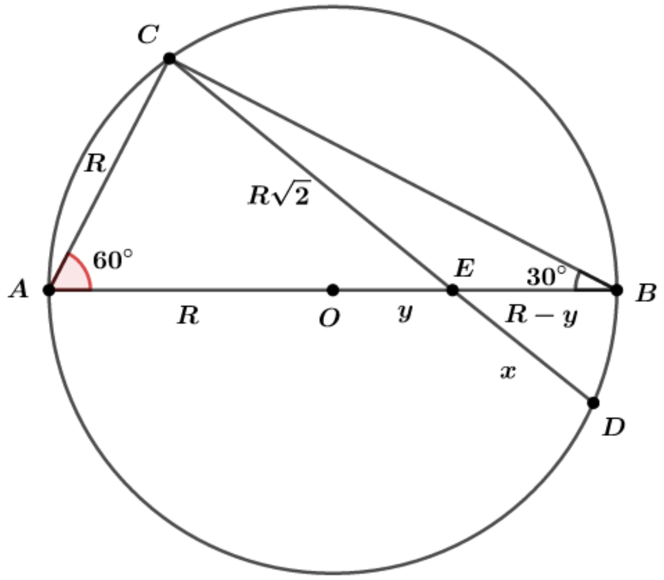
Como AB é diâmetro da circunferência, temos que o ΔABC é retângulo em $\widehat{C}$. Assim, $C\hat{A}B = 60°$.



O é o centro da circunferência, então, $OA = OC$. Assim, ΔAOC é isósceles com $C\hat{A}O = A\hat{C}O = 60°$. Consequentemente, $A\hat{O}C = 60°$ e, portanto, ΔAOC é equilátero de lado R.



Podemos usar a lei dos cossenos no ΔAEC e encontrar o valor de y:



$$\left(R\sqrt{2}\right)^2 = R^2 + (R+y)^2 - 2R(R+y)\underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}}$$

$$2R^2 = R^2 + R^2 + 2Ry + y^2 - R^2 - Ry$$

$$y^2 + Ry - R^2 = 0$$

Raízes:

$$y = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

Como $y > 0$, temos:

$$y = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Substituindo y na equação (I), obtemos o valor de $\overline{ED}$:

$$R\sqrt{2}\cdot x = R^2 - y^2$$

$$\Rightarrow R\sqrt{2}\cdot x = R^2 - \left(\frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x = R\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right)$$

$$\boxed{x = \frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{ED = \frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}}$

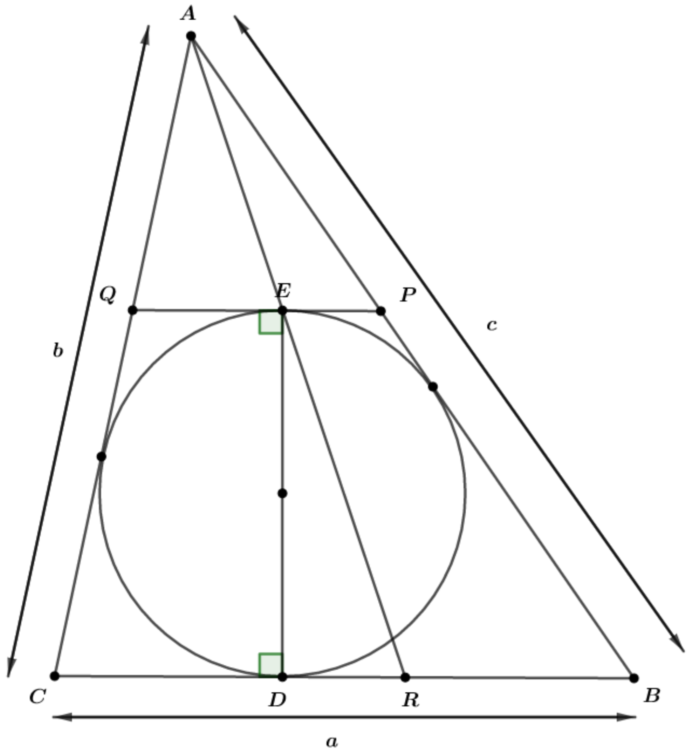
61. (IME/2018)

Considere um triângulo ABC onde $BC = a$, $AB = c$, $AC = b, c > b$. O círculo inscrito a esse triângulo tangencia BC, em D e DE é um diâmetro desse círculo. A reta que tangencia o círculo e

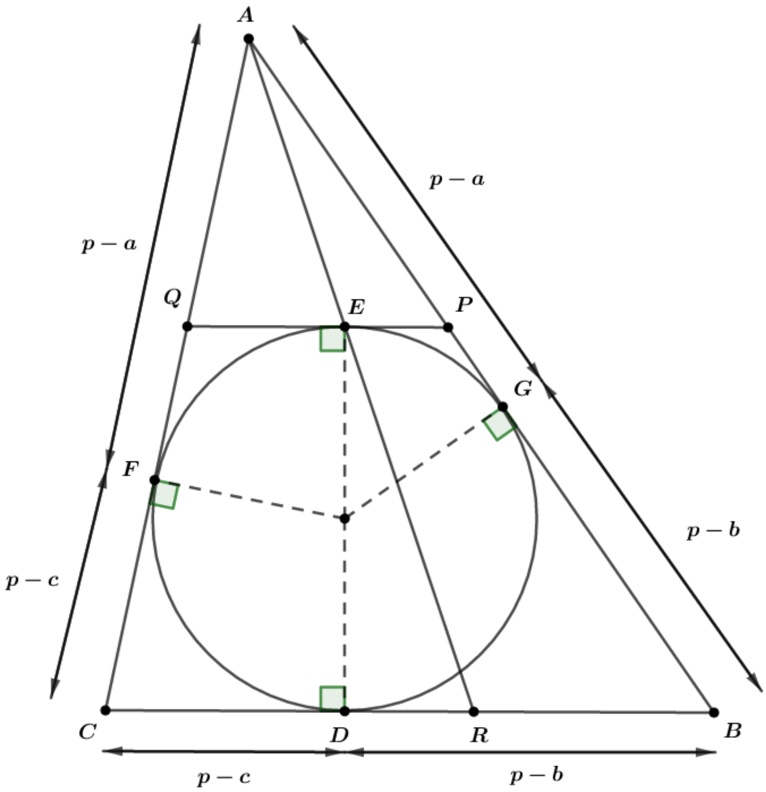
que passa por E intercepta AB em P e AC em Q. A reta AE intercepta BC no ponto R. Determine os segmentos de reta EQ e DR em função dos lados do triângulo: a, b e c.

Comentários

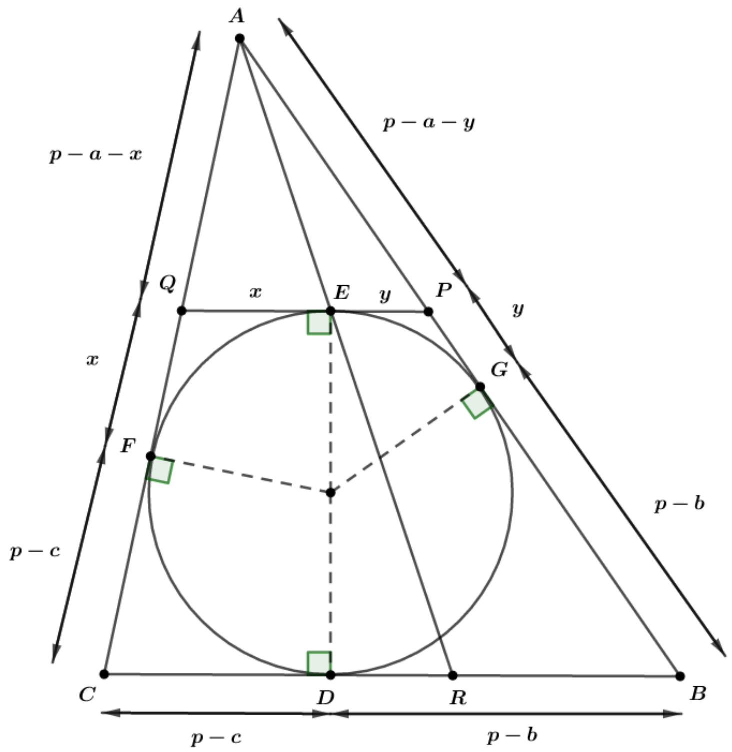
Dos dados do texto, temos a seguinte figura:



Usando as propriedades dos pontos de tangência e escrevendo os lados em função do semiperímetro p, temos:



Sendo Q e P externo à circunferência, podemos escrever a relação $QE = QF = x$ e $PE = PG = y$.



Perceba que os triângulos AQP e ACB são semelhantes, então, podemos escrever a razão de semelhança igual à razão entre seus perímetros:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{p_{AQP}}{p_{ACB}} = \frac{p-a-x+p-a-y+x+y}{2p} = \frac{p-a}{p}$$

$$\frac{p-a-x}{b} = \frac{p-a}{p}$$

$$p(p-a) - px = (p-a)b$$

$$x = \frac{(p-a)(p-b)}{p}$$

$$x = \frac{\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$x = \frac{\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$x = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}$$

$$\therefore EQ = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}$$

ΔAQE e ΔACR são semelhantes, então:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{EQ}{CR}$$

$$\frac{p-a}{p} = \frac{x}{CR}$$

$$\frac{1}{CR} = \frac{p-a}{p} \cdot \frac{1}{x}$$

Substituindo o valor de x na equação:

$$\frac{1}{CR} = \frac{p-a}{p} \cdot \frac{p}{(p-a)(p-b)}$$

$$CR = p - b$$

Sabemos que $CR = CD + DR$, desse modo:

$$CD + DR = p - b$$

$$p - c + DR = p - b$$

$$\therefore DR = c - b$$

Gabarito: $\boldsymbol{EQ = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}}$ **e** $\boldsymbol{DR = c - b}$

---

62. (IME/2016)

Considere quatro pontos distintos coplanares. Das distâncias entre esses pontos, quatro delas valem a e duas delas valem b. O valor máximo da relação $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é

a) 2

b) $1 + \sqrt{3}$

c) $2 + \sqrt{3}$

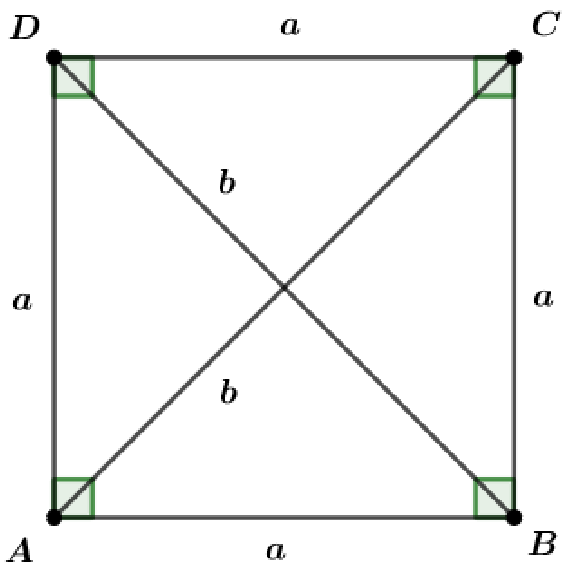
d) $1 + 2\sqrt{2}$

e) $2 + 2\sqrt{3}$

Comentários

Temos que pensar em todas as situações possíveis para essas condições.

O primeiro caso, podemos pensar em um quadrado de lado a e diagonal b. Assim, temos:

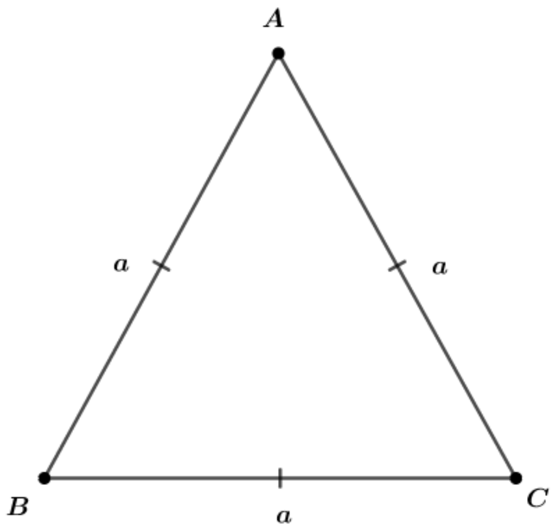


Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD:

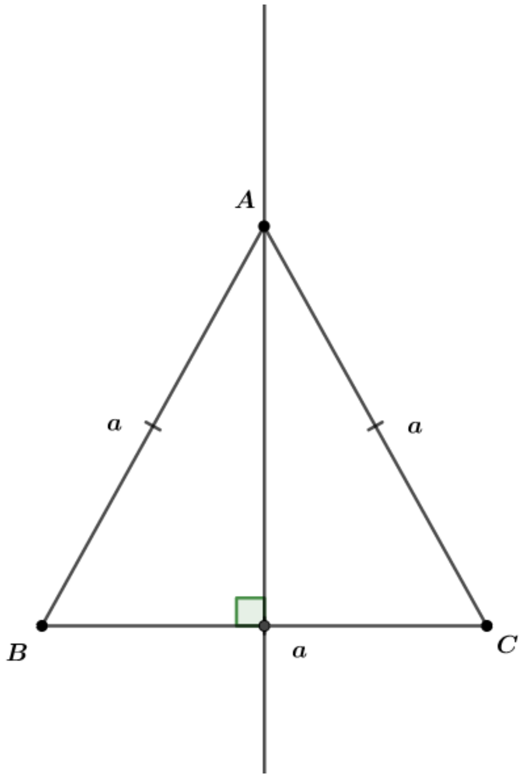
$$b^2 = a^2 + a^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2$$

O segundo caso, podemos pensar em um triângulo equilátero de lados a.

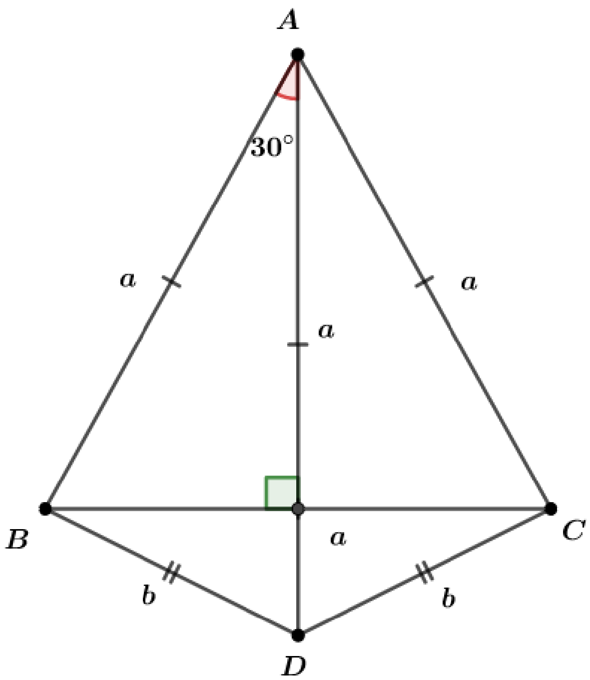


Sabemos que a mediatriz de um segmento equidista das extremidades do segmento. Assim, o quarto ponto estará localizado na mediatriz do segmento. Tomando-se o segmento BC como referência, temos:



O quarto ponto D poderá estar abaixo ou acima do vértice A.

Se estiver abaixo de A, temos:



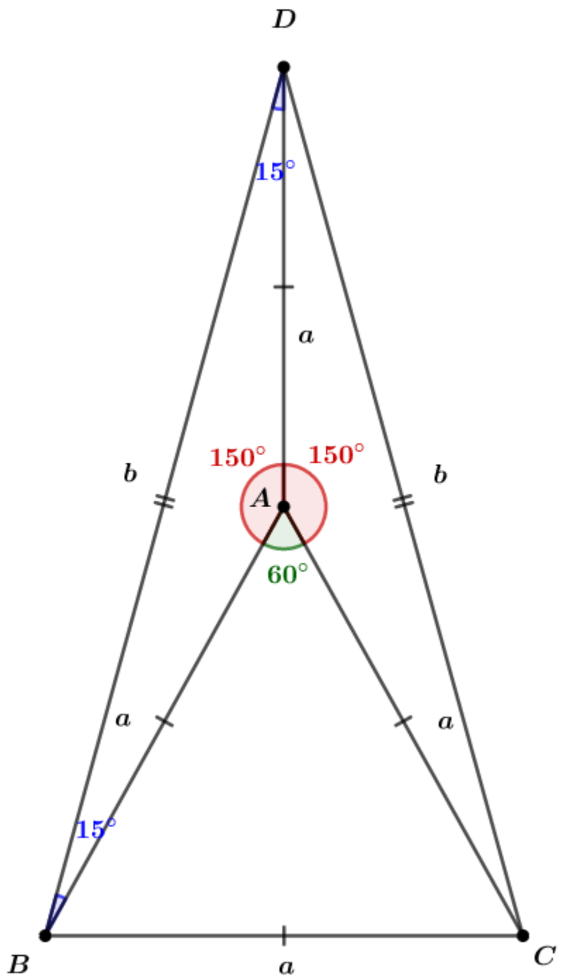
Usando o teorema dos cossenos no triângulo ABD:

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(30°)$$

$$b^2 = 2a^2 - a^2 \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 - \sqrt{3}$$

Se D estiver acima de A:



Podemos aplicar o teorema dos cossenos no ΔABD:

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(150°)$$

$$b^2 = 2a^2 + \frac{2a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3}$$

Como $2 + \sqrt{3} > 2 > 2 - \sqrt{3}$, temos que o maior valor de b^2/a^2 é dado por:

$$\frac{b^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3}$$

Gabarito: "c".

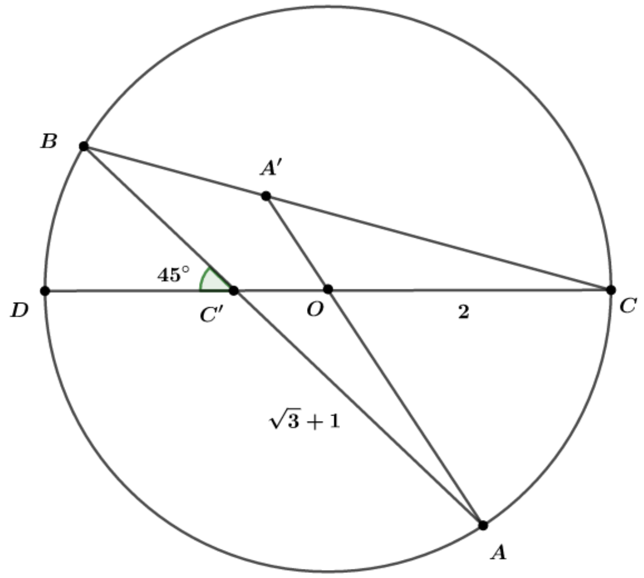
---

63. (IME/2016)

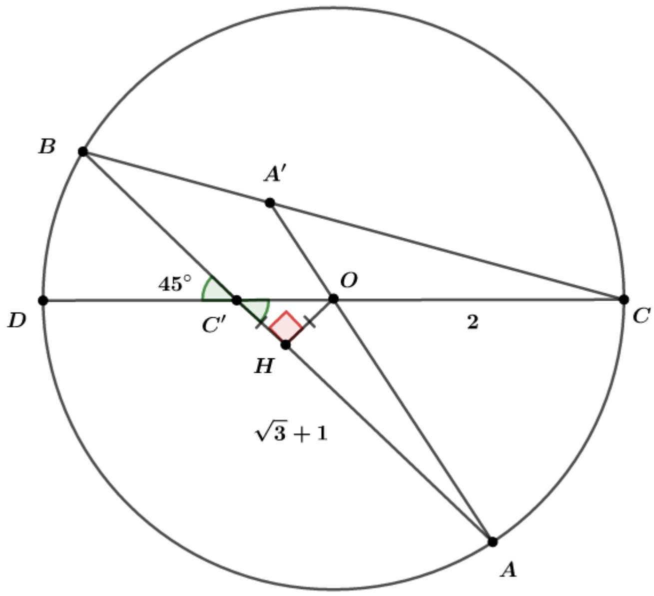
Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro O no ponto C' segundo um ângulo de $45°$. Sejam A e B os pontos externos desta corda, e a distância AC' igual a $\sqrt{3} + 1$ cm. O raio do círculo mede 2 cm, e C é a extremidade do diâmetro mais distante de C'. O prolongamento do segmento AO intercepta BC em A'. Calcule a razão em que A' divide BC.

Comentários

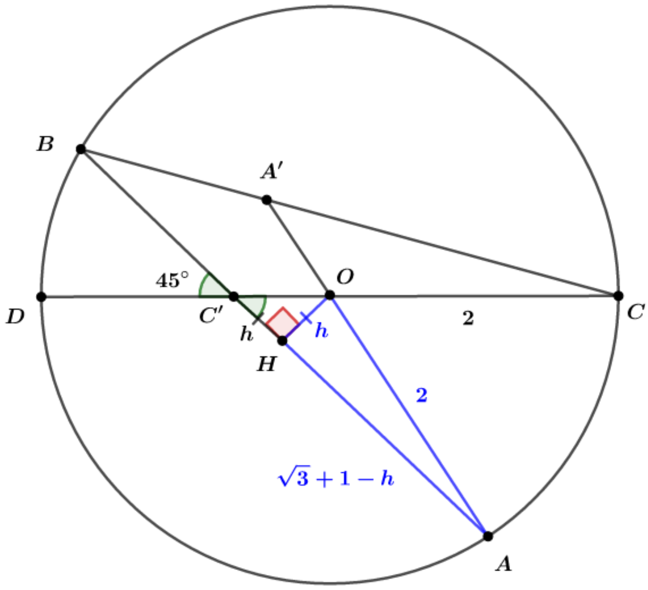
Desenhando a figura do texto, temos:



Vamos projetar a altura do vértice O do triângulo AOC':



Como $O\widehat{C}'H = 45°$, temos que o triângulo retângulo é isósceles com $C^{'}H = OH$. Assim, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAOH:

$$2^2 = h^2 + \left(\sqrt{3} + 1 - h\right)^2$$

$$4 = h^2 + 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$2h^2 - 2\left(\sqrt{3} + 1\right)h + 2\sqrt{3} = 0$$

$$h^2 - \left(\sqrt{3} + 1\right)h + \sqrt{3} = 0$$

Encontrando as raízes:

$$h = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - 4\sqrt{3}}}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$$

$$h = \sqrt{3}\ ou\ h = 1$$

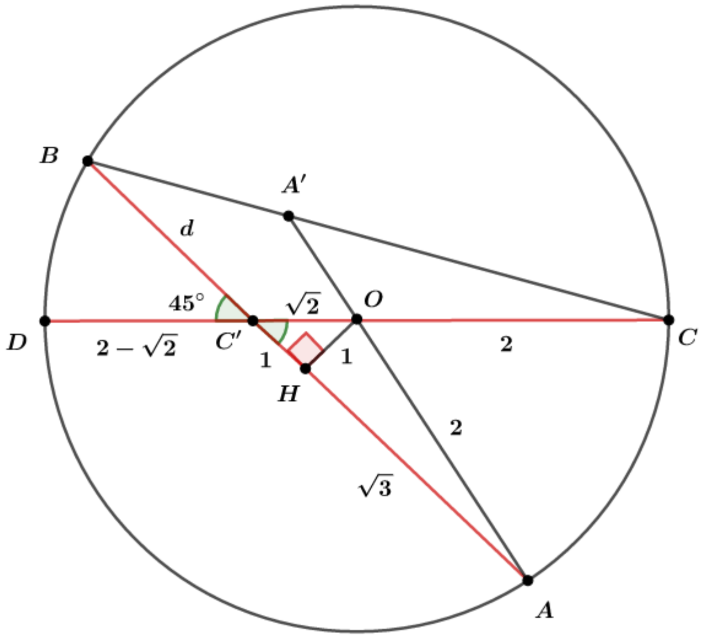
Se $h = \sqrt{3}$, temos pelo $\Delta OHC'$:

$$OC'^2 = 2h^2 = 6$$

$$OC' = \sqrt{6} > 2$$

Absurdo! Pois, $OC' < 2$.

Logo, $h = 1$ e $OC' = \sqrt{2}$:



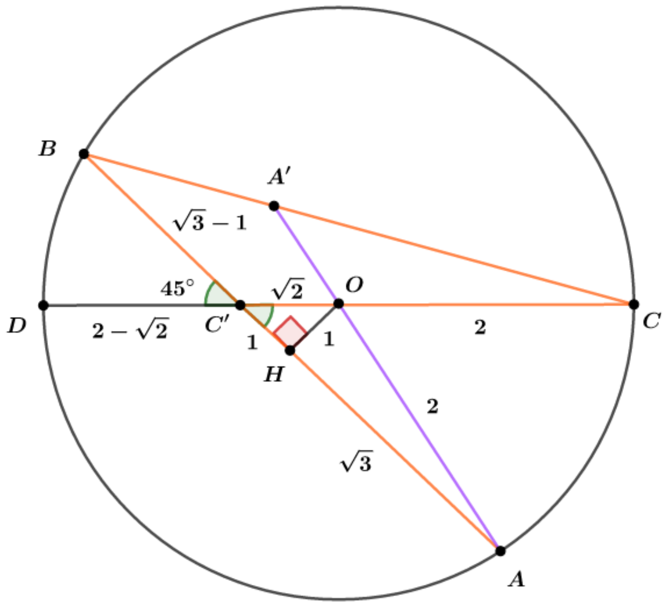
Pela potência do ponto C', temos a seguinte relação:

$$DC' \cdot C'C = BC' \cdot C'A$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = d\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$d = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$d = \sqrt{3} - 1$$



Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo BCC':

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{OC}{OC'} \cdot \frac{AC'}{AB} = 1$$

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC'} \cdot \frac{OC'}{OC}$$

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$$

$$\therefore \frac{A'B}{A'C} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

Gabarito: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

---

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final dessa aula, a próxima possui os tópicos mais cobrados da geometria plana. Então, prepare-se para resolver diversos exercícios!

Nessa aula, o importante é entender os diferentes tipos de quadriláteros e saber as propriedades válidas para cada um deles. Para as circunferências, saiba aplicar os teoremas de Pitot e Ptolomeu. Também é importante saber as consequências de uma figura ser inscritível ou circunscritível e conhecer o conceito de potência de ponto.

Sempre que precisar nos procure no fórum de dúvidas ou se preferir:

FALE COMIGO

/profvictorso

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.