



ITA 2023



GEOMETRIA PLANA I

AULA 07

Prof. Victor So





Sumário

INTRODUÇÃO	5
1. GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA	6
1.1. NOÇÕES PRIMITIVAS	6
1.1.1. PONTO	6
1.1.2. RETA	6
1.1.3. PLANO	6
1.2. POSTULADOS	7
1.2.1. POSTULADO DA EXISTÊNCIA	7
1.2.2. POSTULADO DA DETERMINAÇÃO	8
1.2.3. POSTULADO DA INCLUSÃO	9
1.2.4. POSTULADO DA SEPARAÇÃO	9
1.2.5. POSTULADOS DE EUCLIDES	10
1.3. DEFINIÇÕES	13
1.3.1. RETAS CONCORRENTES	13
1.3.2. RETAS PARALELAS	13
1.3.3. RETAS REVERSAS	14
2. SEGMENTO DE RETA	14
2.1. CLASSIFICAÇÃO DOS SEGMENTOS	15
2.1.1. CONGRUENTES	15
2.1.2. COLINEARES	15
2.1.3. CONSECUTIVOS	15
2.1.4. ADJACENTES	16
2.1.5. COMENSURÁVEIS	16
2.1.6. INCOMENSURÁVEIS	17
2.2. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO	17
2.3. RAZÃO DE SECÇÃO DE UM SEGMENTO	18
2.3.1. INTERNA	18
2.3.2. EXTERNA	19
2.4. DIVISÃO HARMÔNICA	19
2.4.1. DEFINIÇÃO	19
2.4.2. PROPRIEDADES	20
2.4.3. DISTÂNCIA ENTRE OS CONJUGADOS HARMÔNICOS	21
2.4.4. MÉDIA HARMÔNICA	23
2.4.5. DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO	23
2.5. SEGMENTO ORIENTADO	25
2.6. RAZÃO DE SECÇÃO DE SEGMENTOS ORIENTADOS	26
3. ÂNGULOS	31
3.1. REGIÃO CONVEXA E REGIÃO CÔNCAVA	31
3.2. DEFINIÇÃO DE ÂNGULO	32
3.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS	33
3.3.1. ÂNGULO ADJACENTE	33



3.3.2. ÂNGULO CONSECUTIVO	33
3.3.3. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE	34
3.3.4. ÂNGULO RETO, AGUDO, OBTUSO E RASO	35
3.3.5. ÂNGULO COMPLEMENTAR, SUPLEMENTAR, REPLEMENTAR E EXPLEMENTAR	36
3.4. Unidades usuais de medidas	37
3.4.1. Grau	37
3.4.2. Grado	38
3.4.3. Radiano	38
3.5. BISSETRIZ	40
3.5.1. DEFINIÇÃO	40
3.5.2. UNICIDADE DA BISSETRIZ	40
4. TRIÂNGULOS	49
4.1. DEFINIÇÃO	49
4.2. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS	50
4.2.1. QUANTO AOS LADOS	50
4.2.2. QUANTO AOS ÂNGULOS	51
4.2.3. SÍNTESE DE CLAIRAUT	51
4.3. CEVIANAS NOTÁVEIS	52
4.3.1. ALTURA	52
4.3.2. MEDIANA	52
4.3.3. BISSETRIZES INTERNA E EXTERNA	53
4.4. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO	53
4.5. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	54
4.5.1. POSTULADO <i>LAL</i> (LADO-ÂNGULO-LADO)	54
4.5.2. TEOREMA <i>ALA</i> (ÂNGULO-LADO-ÂNGULO)	54
4.5.3. TEOREMA <i>LLL</i> (LADO-LADO-LADO)	55
4.5.4. TEOREMA <i>LAAO</i> (LADO-ÂNGULO ADJACENTE-ÂNGULO OPOSTO)	55
4.6. CONSEQUÊNCIA DO POSTULADO <i>LAL</i>	56
4.6.1. TRIÂNGULO ISÓSCELES	56
4.6.2. TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO	56
4.6.3. DESIGUALDADES NO TRIÂNGULO	58
4.7. ÂNGULOS DE RETAS PARALELAS	60
4.8. TEOREMA ANGULAR DE TALES	63
4.9. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	65
5. QUESTÕES NÍVEL 1	81
GABARITO	96
RESOLUÇÃO	97
6. QUESTÕES NÍVEL 2	137
GABARITO	140
RESOLUÇÃO	140



7. QUESTÕES NÍVEL 3	148
GABARITO	150
RESOLUÇÃO	150
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA	159
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	159



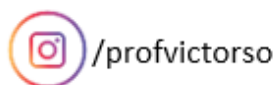
INTRODUÇÃO

Olá,

Vamos iniciar o estudo da Geometria Plana. Nessa aula, veremos alguns conceitos primitivos como o que é um ponto, reta e plano. Estudaremos os principais postulados da geometria plana, segmentos de reta, razões de secção e razão harmônicas. Também estudaremos ângulos e um pouco de triângulos.

Essa aula é uma introdução à Geometria Plana e, por esse motivo, não haverá muitas questões de concursos anteriores.

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!





1. GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

A geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana, é a parte da matemática que estuda a construção e propriedades de figuras planas como triângulos, circunferência, quadriláteros etc.

Antes de iniciar, devemos aprender as noções primitivas de ponto, reta e plano e os postulados que relacionam esses entes geométricos.

1.1. NOÇÕES PRIMITIVAS

As noções primitivas são apresentadas sem definição. Vejamos:

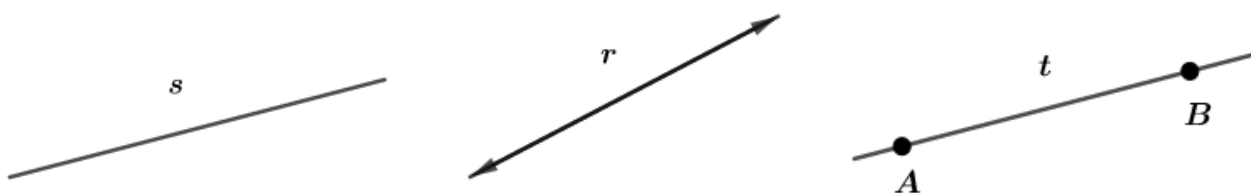
1.1.1. PONTO

Representamos o ponto por letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C, D, E, \dots Devemos entender o ponto como a menor parte dos entes geométricos. Ele é adimensional.



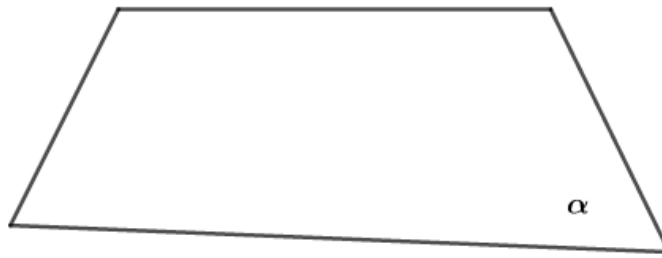
1.1.2. RETA

Usamos as letras minúsculas do alfabeto para representar uma reta: a, b, c, d, \dots A reta é o ente geométrico cujas extremidades não possuem limites, ela é contínua em ambos os lados. Por esse motivo, podemos usar setas para indicar a continuidade da reta nos dois sentidos. No exemplo abaixo, temos as retas r, s, t . No caso da reta t , \overline{AB} é um segmento de reta.



1.1.3. PLANO

Usualmente, representamos o plano com letras minúsculas gregas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Assim como a reta, ele deve ser entendido como um plano ilimitado sem bordas que o limite.



1.2. POSTULADOS

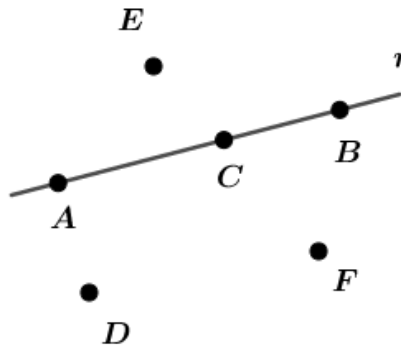
Postulados, também conhecido como axiomas, são proposições primitivas que dispensam demonstrações. Elas são aceitas como verdades incontestáveis. Vamos estudá-las.

1.2.1. POSTULADO DA EXISTÊNCIA

Numa reta, existem infinitos pontos dentro e fora dela.

Num plano, existem infinitos pontos.

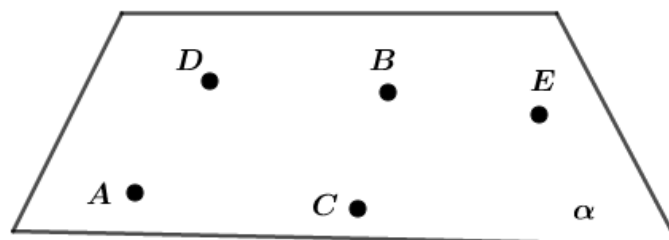
Vejam alguns exemplos:



Nesse caso, os pontos A, B, C estão localizados dentro da reta r e os pontos D, E, F estão fora dela. Simbolicamente, podemos dizer que:

$$A, B, C \in r$$

$$D, E, F \notin r$$





$$A, B, C, D, E \in \alpha$$

No plano α , temos infinitos pontos.

1.2.2. POSTULADO DA DETERMINAÇÃO

Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

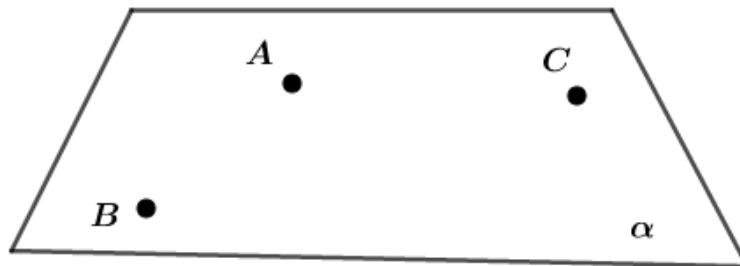
Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Exemplos:



$$\text{Se } A \neq B, \exists r \text{ tal que } r = \overleftrightarrow{AB}.$$

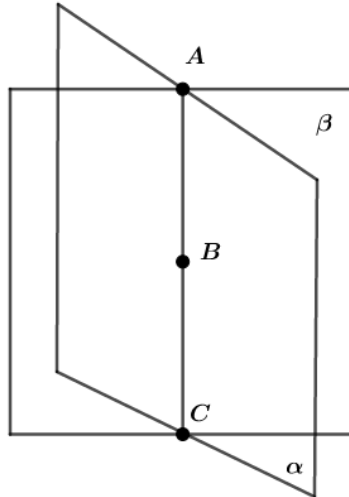
Os pontos A, B determinam uma única reta r .



Se A, B, C são não colineares, então $\exists \alpha$ tal que $\alpha = (A, B, C)$.

Nesse caso, temos 3 pontos não colineares, isto é, não pertencentes a uma mesma reta. Elas determinam um único plano α .

Vejamos o caso de 3 pontos colineares:

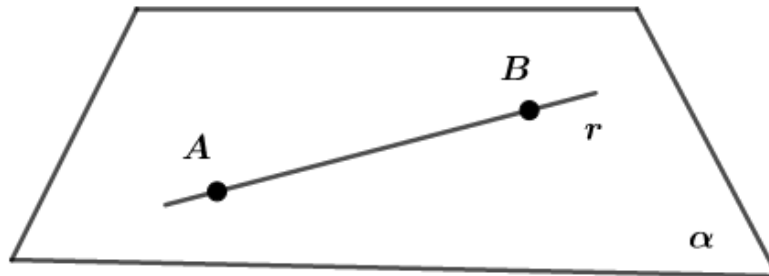


3 pontos colineares não determinam um único plano, já que podemos ter vários planos passando por eles.

1.2.3. POSTULADO DA INCLUSÃO

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

Exemplo:

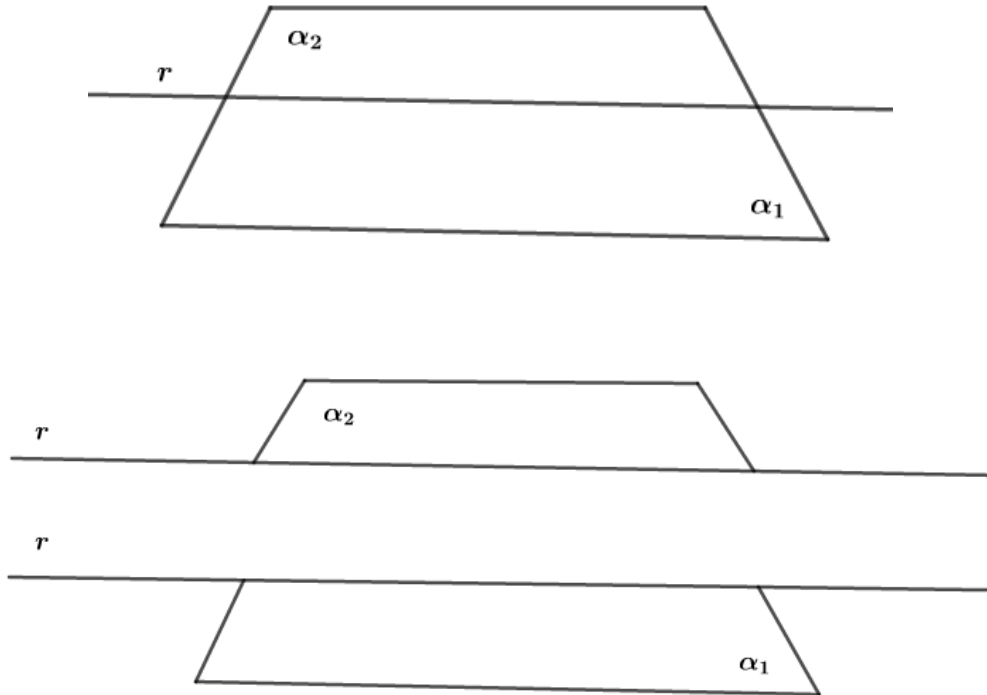


$$\text{Se } A \neq B \in \alpha, \text{ então } r = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow r \subset \alpha.$$

1.2.4. POSTULADO DA SEPARAÇÃO

Toda reta r de um plano α separa-o em dois semiplanos α_1 e α_2 e a origem dos semiplanos é a reta dada.

Exemplo:



Perceba que r divide o plano em dois semiplanos: α_1 e α_2 .

1.2.5. POSTULADOS DE EUCLIDES

Os postulados de Euclides são divididos em cinco:

TOME
NOTA!



Postulado I: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os une.

Postulado II: Qualquer segmento de reta pode ser prolongado a uma reta.

Postulado III: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência cujo centro é o ponto dado e o raio é a distância dada.

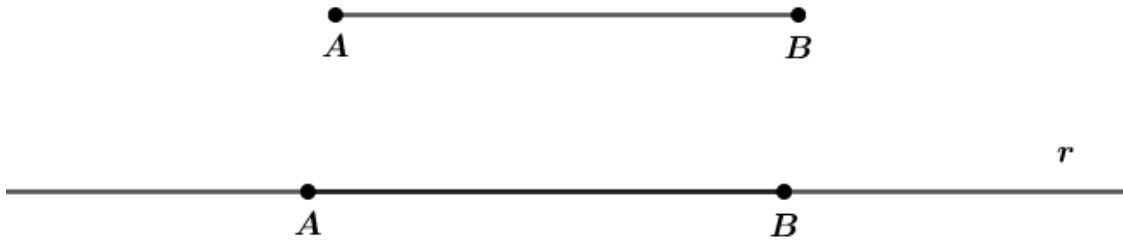
Postulado IV: Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado V: Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

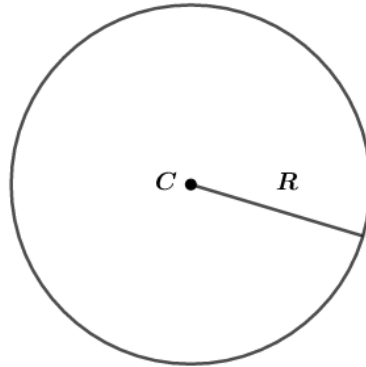
Comentários:

Postulado I: Esse postulado é semelhante ao postulado da determinação.

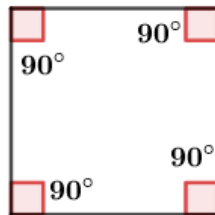
Postulado II: Se prolongarmos infinitamente um segmento de reta, podemos obter uma reta:



Postulado III:



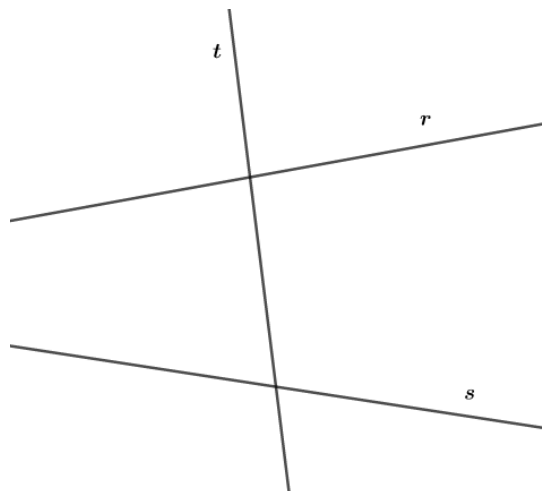
Postulado IV:



Postulado V: Vamos interpretar o texto e desenhar o que está escrito.

“Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos...”

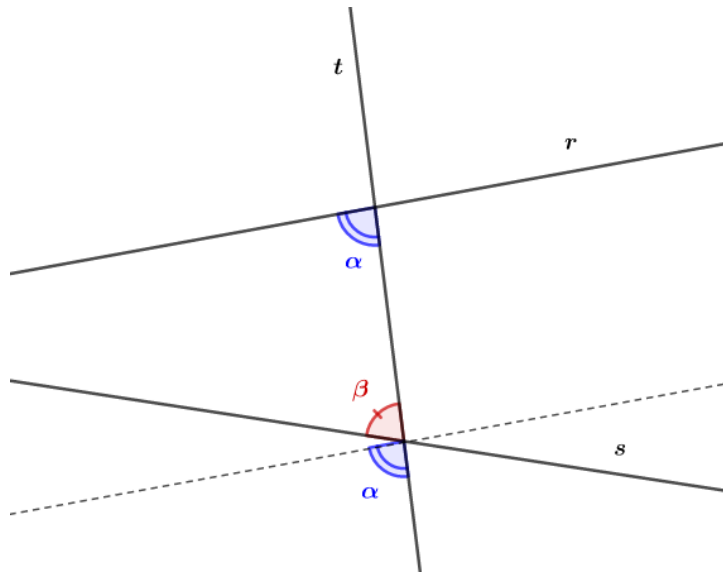
De acordo com essa parte do texto, temos a seguinte figura:



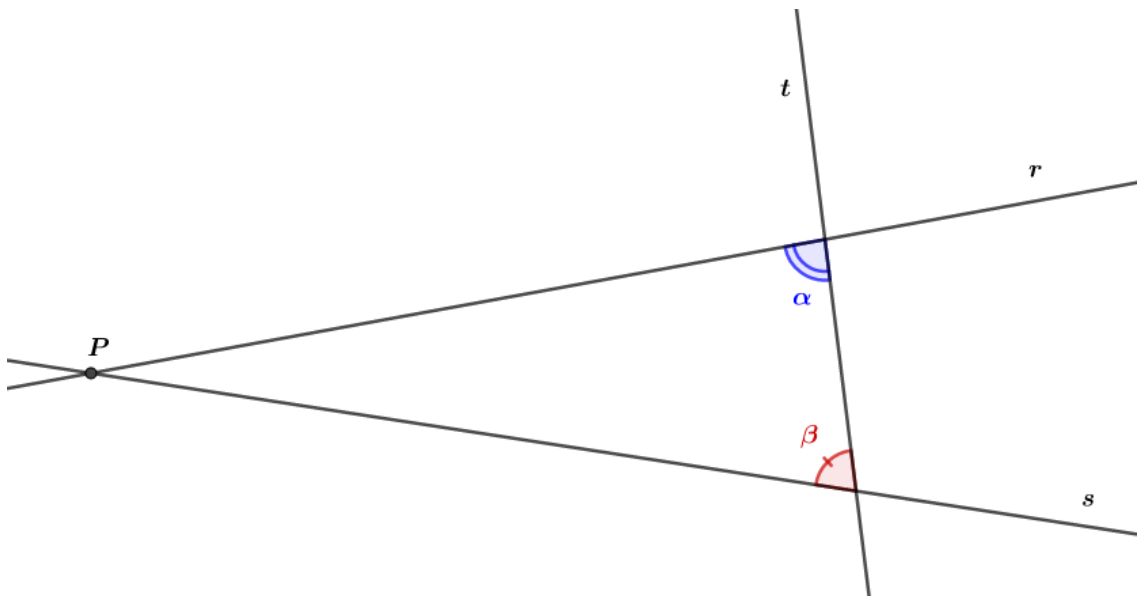
A reta t intercepta as retas r e s .



O lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos (180°), no exemplo acima, é o lado esquerdo, veja:



Perceba que $\alpha + \beta < 180^\circ$. Assim, o prolongamento das retas se encontrará no lado onde a soma desses ângulos é menor que 180° . O prolongamento das retas r e s se encontram no ponto P :



Esse postulado é conhecido como Postulado das Paralelas. Segundo o matemático Playfair, temos um axioma equivalente ao quinto postulado de Euclides:

Dado um ponto P que não está contido numa reta r , existe uma única reta s no plano de P e r tal que s contém P e $s \cap r = \emptyset$.

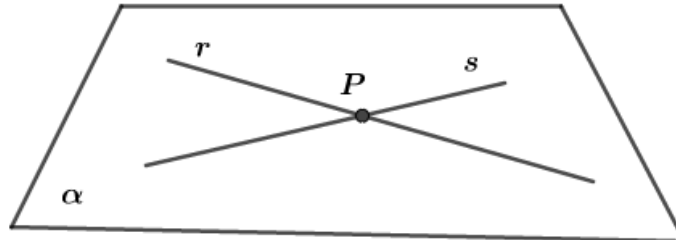
Esse axioma diz que existe uma única reta s paralela à reta r que passa pelo ponto P fora de r .



1.3. DEFINIÇÕES

1.3.1. RETAS CONCORRENTES

Duas retas distintas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

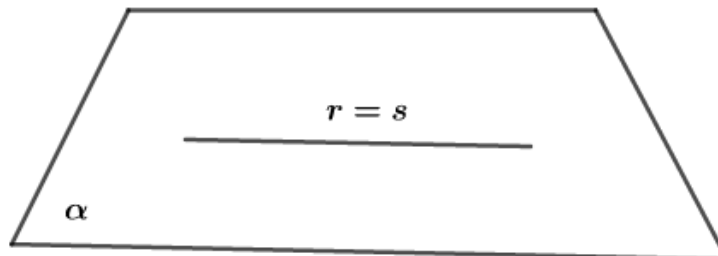


$$r \cap s = P$$

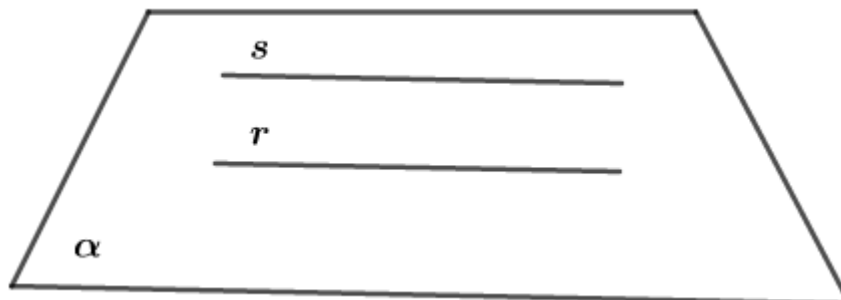
1.3.2. RETAS PARALELAS

Se as retas r e s são paralelas e distintas entre si, então $r \cap s = \emptyset$. Simbolicamente, $r//s$ representa que a reta r é paralela à reta s . Temos duas possibilidades para $r//s$:

1) r e s são coincidentes:



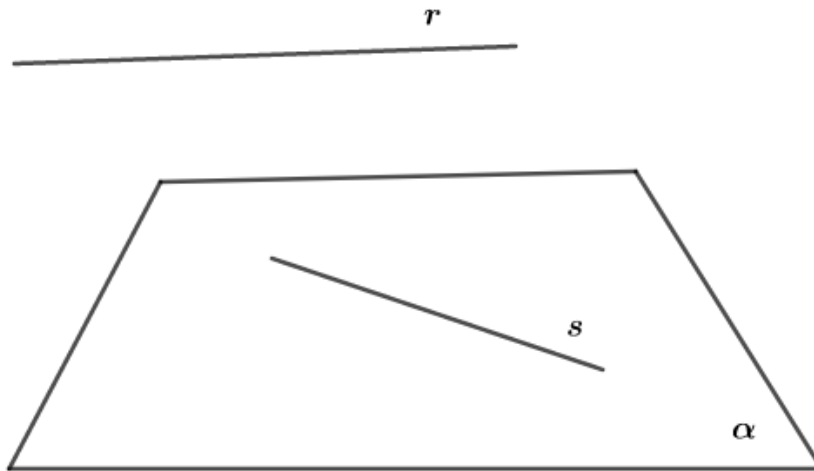
2) r e s são distintas:





1.3.3. RETAS REVERSAS

Duas retas são reversas se, e somente se, não pertencem a um mesmo plano.



$$(r \text{ e } s \text{ são reversas}) \Leftrightarrow (\nexists \alpha \text{ tal que } r, s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset)$$

Perceba que retas reversas não se interceptam e não podem ser paralelas entre si.

2. SEGMENTO DE RETA

Vimos que um segmento de reta é uma parte de uma reta e que a reta é infinita por definição. Vamos estudar as notações usuais para os diferentes tipos de retas:

Reta \overleftrightarrow{AB} :



Segmento de reta \overline{AB} :



Semirreta \overrightarrow{AB} :



Semirreta \overleftarrow{BA} :



Usualmente, representamos a medida do segmento \overline{AB} por $med(\overline{AB})$ ou simplesmente AB .



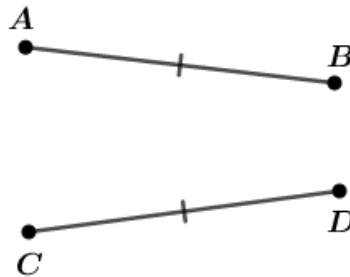
2.1. CLASSIFICAÇÃO DOS SEGMENTOS

2.1.1. CONGRUENTES

Dois segmentos de reta são congruentes quando eles possuem as mesmas medidas. Usamos o símbolo \equiv para indicar a congruência.

Exemplo:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$$



2.1.2. COLINEARES

Dois segmentos de reta são colineares quando eles pertencem a uma mesma reta suporte.

Exemplo:

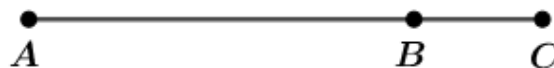


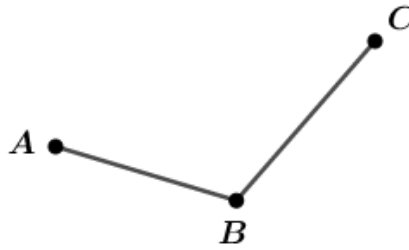
2.1.3. CONSECUTIVOS

Dois segmentos de reta são consecutivos quando eles possuem uma extremidade comum.

Exemplo:

\overline{AB} e \overline{BC} são consecutivos

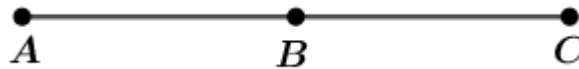




2.1.4. ADJACENTES

Dois segmentos de reta são adjacentes quando são colineares e consecutivos e possuem apenas uma extremidade comum.

Exemplo:



\overline{AB} e \overline{BC} são adjacentes, pois possuem apenas o ponto B comum:

$$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$$



MN e NP não são adjacentes, pois possuem mais de uma extremidade em comum:

$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \overline{NP}$$

2.1.5. COMENSURÁVEIS

Dizemos que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis se, e somente se, existe uma unidade de segmento $u \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\overline{AB} = n \cdot u$ e $\overline{CD} = m \cdot u$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$. De modo mais simples, comensurável significa que algo pode ser medido. Assim, se AB é comensurável, podemos escrevê-lo como um múltiplo natural de uma unidade de segmento.

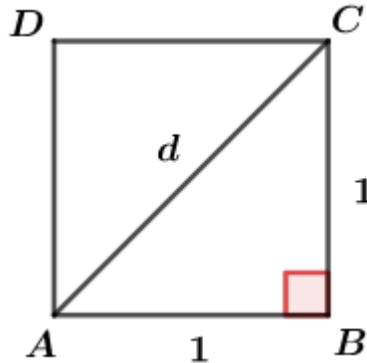
Também podemos dizer que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis quando a razão entre eles for um número racional. Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n \cdot u}{m \cdot u} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_+^*$$



2.1.6. INCOMENSURÁVEIS

Quando não pudermos medir os segmentos, dizemos que eles são incomensuráveis. Podemos tomar a diagonal e o lado de um quadrado como exemplo:



Como o triângulo ABC é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor da diagonal:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

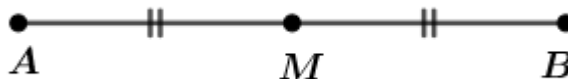
Assim, fazendo a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_+$$

Logo, como a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional, dizemos que o lado do quadrado não é comensurável com sua diagonal.

2.2. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Um ponto M é chamado de ponto médio de um segmento \overline{AB} quando $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e M está entre A e B .



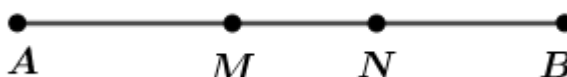
Vamos provar a unicidade do ponto médio do segmento \overline{AB} :

Supondo que o ponto médio não é único, podemos ter os pontos médios M e N distintos tal que:

$$\overline{AM} \equiv \overline{MB} \text{ e } \overline{AN} \equiv \overline{NB}$$

Temos dois casos:

Caso 1)





M está entre A e N , então $\overline{AN} > \overline{AM}$

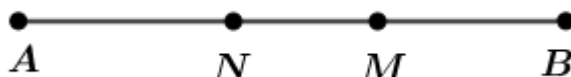
N está entre M e B , então $\overline{MB} > \overline{NB}$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{AM} \equiv \overline{MB} > \overline{NB}$$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{NB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$.

Caso 2)



N está entre A e M , então $\overline{AM} > \overline{AN}$

M está entre N e B , então $\overline{NB} > \overline{MB}$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{AN} \equiv \overline{NB} > \overline{MB}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{MB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Portanto, o ponto médio do segmento \overline{AB} é único.

2.3. RAZÃO DE SECÇÃO DE UM SEGMENTO

2.3.1. INTERNA

Dizemos que M divide o segmento \overline{AB} internamente na razão k quando:

$$\frac{AM}{MB} = k$$



Perceba que $M \in \overline{AB}$ e $AM + MB = AB$. \overline{AM} e \overline{MB} são chamados de segmentos aditivos.

Exemplo:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



2.3.2. EXTERNA

Dizemos que N divide o segmento AB externamente na razão k quando:

$$\frac{AN}{NB} = k$$



Nesse caso, $N \notin \overline{AB}$, $N \in \overleftrightarrow{AB}$ e $|AN - NB| = AB$. \overline{AN} e \overline{NB} são segmentos subtrativos.

Exemplo:



$$\frac{AN}{NB} = \frac{6}{2} = 3$$

2.4. DIVISÃO HARMÔNICA

2.4.1. DEFINIÇÃO

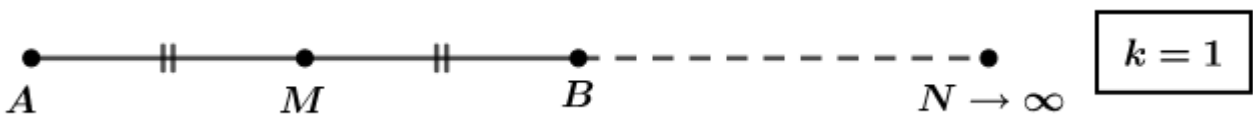
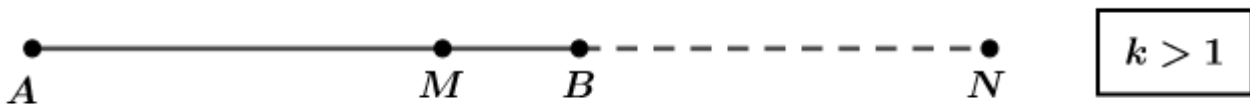
Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento \overline{AB} na razão k quando:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k \quad (k \in \mathbb{R}_+)$$



Esses pontos são chamados de conjugados harmônicos de \overline{AB} na razão k .

Para cada valor de k , temos as seguintes situações:





$$k = 0$$

2.4.2. PROPRIEDADES

P1) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}, k < 1$

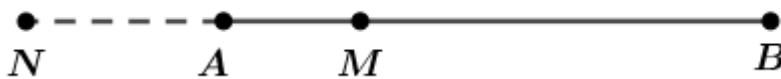
P2) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}, k > 1$

P3) Se O é o ponto médio de \overline{AB} , então: $OA^2 = OM \cdot ON$

Demonstrações:

P1) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}, k < 1$

Para $k < 1$, temos a seguinte situação:



$$0 < k < 1$$

Pela definição de divisão harmônica:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$$

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN + AB}$$

$$AM(AN + AB) = AN(AB - AM)$$

$$AM \cdot AN + AM \cdot AB = AN \cdot AB - AN \cdot AM$$

$$2AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AB$$

Dividindo a equação acima por $AM \cdot AN \cdot AB$:

$$\frac{2AM \cdot AN}{AM \cdot AN \cdot AB} = \frac{AN \cdot AB}{AM \cdot AN \cdot AB} - \frac{AM \cdot AB}{AM \cdot AN \cdot AB}$$

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}$$

P2) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}, k > 1$

Para $k > 1$:



$$k > 1$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$$

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$

$$AM(AN - AB) = AN(AB - AM)$$

$$AM \cdot AN - AM \cdot AB = AN \cdot AB - AN \cdot AM$$

$$2AM \cdot AN = AN \cdot AB + AM \cdot AB$$

Dividindo a equação acima por $AM \cdot AN \cdot AB$:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

P3) Se C é o ponto médio de \overline{AB} , então: $CA^2 = CM \cdot CN$

Se C é o ponto médio de \overline{AB} , então:



Pela definição de divisão harmônica:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$$

$$\frac{CA + CM}{CB - CM} = \frac{CN + CA}{CN - CB}$$

Como C é o ponto médio do segmento \overline{AB} , temos $CB = CA$, substituindo na equação:

$$\frac{CA + CM}{CA - CM} = \frac{CN + CA}{CN - CA}$$

$$(CA + CM)(CN - CA) = (CN + CA)(CA - CM)$$

$$CA \cdot CN - CA^2 + CM \cdot CN - CA \cdot CM = CA \cdot CN - CM \cdot CN + CA^2 - CA \cdot CM$$

$$2CA^2 = 2CM \cdot CN$$

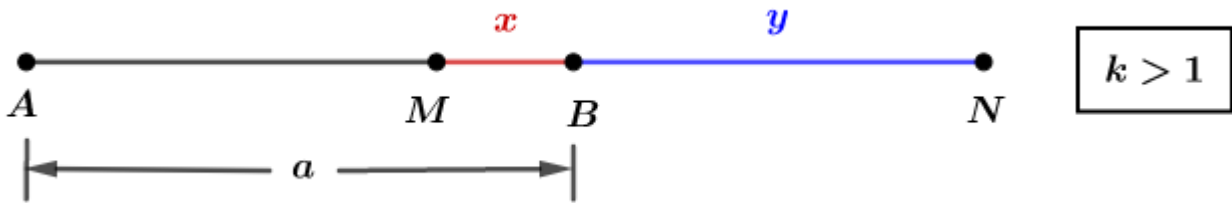
$$CA^2 = CM \cdot CN$$

2.4.3. DISTÂNCIA ENTRE OS CONJUGADOS HARMÔNICOS

Podemos calcular a distância entre os conjugados harmônicos se forem dados a medida de AB e a razão k .



Vamos analisar a situação para $k > 1$.



Dados $AB = a$ e a razão harmônica k , temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{a-x}{x} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = k \Rightarrow a-x = kx \Rightarrow x = \frac{a}{k+1}$$

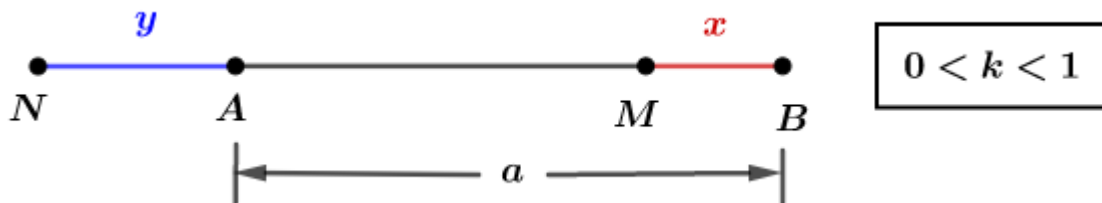
$$\frac{AN}{NB} = \frac{a+y}{y} \Rightarrow \frac{a+y}{y} = k \Rightarrow a+y = ky \Rightarrow y = \frac{a}{k-1}$$

A distância entre os conjugados harmônicos é dada por:

$$MN = x + y = \frac{a}{k+1} + \frac{a}{k-1} = \frac{2ak}{k^2-1}$$

$$MN = \frac{2ak}{k^2-1}$$

Para $0 < k < 1$:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{a-x}{x} = k \Rightarrow a-x = xk \Rightarrow x = \frac{a}{1+k}$$

$$\frac{AN}{NB} = \frac{y}{a+y} = k \Rightarrow y = ak + ky \Rightarrow y = \frac{ak}{1-k}$$

Calculando a distância entre os conjugados harmônicos:

$$MN = y + a - x = \frac{ak}{1-k} + a - \frac{a}{1+k} = \frac{(ak(1+k) + a(1-k^2) - a(1-k))}{1-k^2}$$

$$MN = \frac{2ak}{1-k^2}$$

Portanto, para qualquer valor de k , temos:

$$MN = \frac{2ak}{|k^2-1|}$$



2.4.4. MÉDIA HARMÔNICA

Dados AM e AN , podemos escrever AB como a média harmônica de AM e AN .

Para $k > 1$:



$$k > 1$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$$

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$

$$AM \cdot AN - AB \cdot AM = AB \cdot AN - AM \cdot AN$$

$$AB(AM + AN) = 2AM \cdot AN$$

$$AB = \frac{2AM \cdot AN}{AM + AN}$$

Portanto:

$$AB = \frac{2}{\frac{1}{AN} + \frac{1}{AM}}$$

Essa fórmula é válida apenas para o caso $k > 1$.

2.4.5. DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO

Dado o ponto X , dizemos que X divide o segmento AB em média e extrema razão quando satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB} = \varphi$$

φ , lê-se “phi”, é conhecido como a razão áurea ou número de ouro. Vamos calcular seu valor. Temos a seguinte figura:



$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$$

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$



$$a^2 - ab - b^2 = 0 \quad (I)$$

A razão áurea é dada por:

$$\varphi = \frac{AX}{XB} = \frac{a}{b}$$

Então, dividindo a equação (I) por b^2 , temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Substituindo $\varphi = a/b$:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Para encontrar o valor da razão, devemos calcular as raízes da equação. Lembrando que a razão sempre é um número não negativo, temos:

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

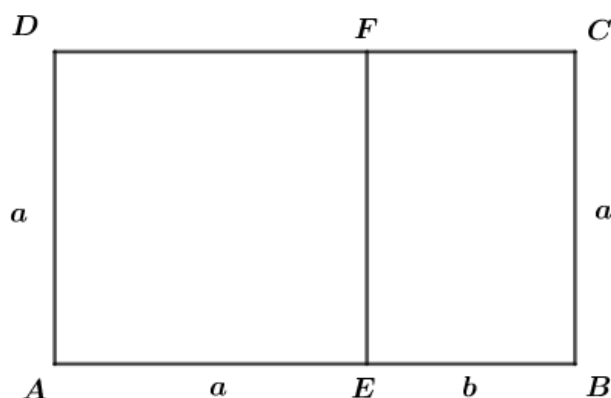
Como $\varphi > 0$, temos:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1,618$$

CURIOSIDADE



Você sabia que podemos calcular a razão áurea usando um retângulo e um triângulo? Eles são conhecidos como retângulo áureo e triângulo áureo. Vejamos: Para o retângulo áureo, temos a seguinte figura:



Pela figura, vemos que o polígono $AEFD$ é um quadrado de lado a . EF foi construído de tal forma que os retângulos $ABCD$ e $EBCF$ sejam semelhantes (os lados são proporcionais na mesma ordem), então:

$$\begin{aligned} ABCD &\sim EBCF \\ \frac{AB}{AD} &= \frac{BC}{BE} \end{aligned}$$



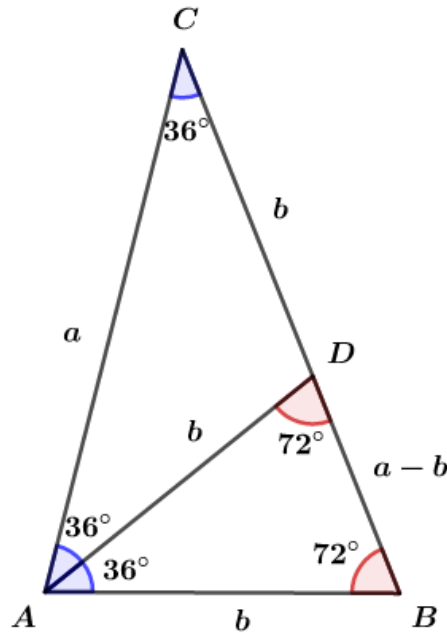
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

Já calculamos as raízes dessa equação, resolvendo-a, encontramos a razão áurea:

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Para o triângulo áureo:



AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Os triângulos ABC e ABD são isósceles. Como eles possuem os mesmos ângulos internos, podemos usar a propriedade da semelhança de triângulos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ABD$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

2.5. SEGMENTO ORIENTADO

Quando fixamos o sentido de percurso de uma reta, considerado positivo e indicado por uma seta, obtemos uma reta orientada. Vejamos um exemplo:



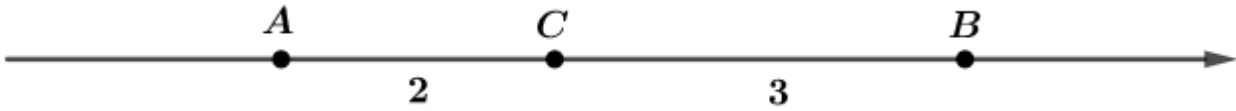


A reta r é orientada. O segmento $\overline{AB} \subset r$ é um segmento orientado cuja direção é a mesma de r e o sentido vai de A para B .

Para indicar a medida de um segmento orientado \overline{AB} , usamos a notação:

$$|\overline{AB}| = med(\overline{AB})$$

Exemplo:



$$\overline{AC} + \overline{BC} = 2 + (-3) = -1$$

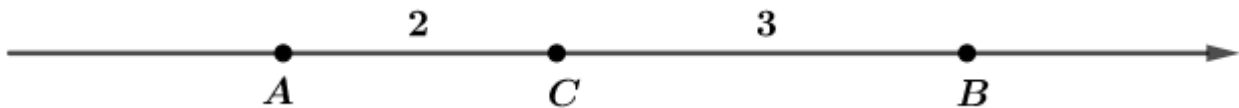
$$\overline{AC} + \overline{CB} = 2 + 3 = 5 = \overline{AB}$$

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 5 + (-5) = 0$$

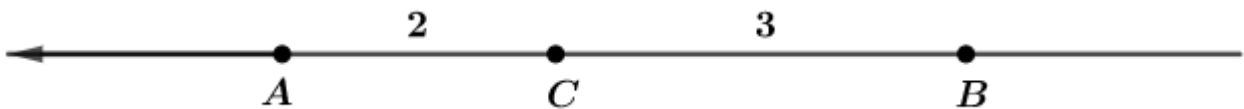
Perceba que o segmento orientado \overline{AB} possui sentido de A para B e o segmento orientado \overline{BA} possui sentido de B para A . Quando o sentido é contrário ao sentido de percurso da reta, devemos colocar o sinal negativo na medida do segmento.

2.6. RAZÃO DE SECÇÃO DE SEGMENTOS ORIENTADOS

Quando usamos segmentos orientados, a ordem com que os segmentos são apresentados importa no cálculo da razão. Vejamos alguns exemplos:



$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

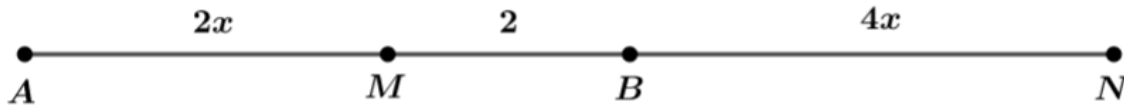


$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$



Exercícios de Fixação

- Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.



Resolução:

Se os pontos formam uma divisão harmônica, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{2x + 2 + 4x}{4x}$$

$$x = \frac{6x + 2}{4x}$$

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Como a razão de segmentação deve ser um número positivo, obtemos:

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

Gabarito: $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$

2. Os conjugados harmônicos M e N dividem o segmento \overline{AB} de 40 cm na razão 4. Calcule MN .

Resolução:

Como a razão é $k = 4 > 1$, podemos usar a seguinte fórmula para distância entre os conjugados harmônicos:

$$MN = \frac{2ak}{k^2 - 1}$$

Pelo enunciado $a = \overline{AB} = 40$:

$$MN = \frac{2(40)(4)}{4^2 - 1}$$

$$MN = \frac{320}{15} = \frac{64}{3}$$

Gabarito: $MN = 64/3$

3. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k$, com $k > 1$. Se C é o ponto médio de MN , a razão CA/CB vale:

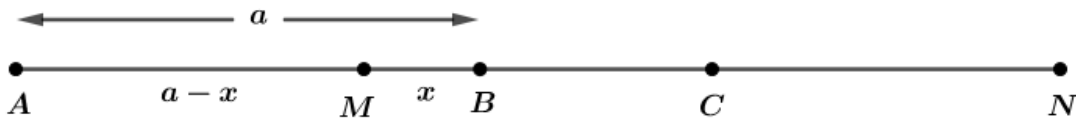
- a) k
- b) $2k$
- c) k^2
- d) $k^2 - 1$



e) Nenhuma das anteriores.

Resolução:

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Calculando o valor de x :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{a - x}{x} = k \Rightarrow a - x = kx \Rightarrow x = \frac{a}{k + 1}$$

Vimos que a distância entre os conjugados harmônicos é dada por:

$$MN = \frac{2ak}{k^2 - 1}$$

Como C é o ponto médio de MN , temos:

$$CM = CN = \frac{ak}{k^2 - 1}$$

Queremos calcular a razão CA/CB :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AB + CB}{CB}$$

$$CB = CM - x$$

$$CB = \frac{ak}{k^2 - 1} - \frac{a}{k + 1}$$

$$CB = \frac{ak - a(k - 1)}{k^2 - 1}$$

$$CB = \frac{a}{k^2 - 1}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{a + \frac{a}{k^2 - 1}}{\frac{a}{k^2 - 1}}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{(k^2 - 1 + 1)}{\left(\frac{1}{k^2 - 1}\right)}$$

$$\frac{CA}{CB} = k^2$$

Gabarito: "c"

4. Demonstre a unicidade do ponto médio de um segmento \overline{AB} .

Resolução:

Como vimos na aula teórica:



Supondo que o ponto médio não é único, podemos ter os pontos médios M e N distintos tal que:

$$\overline{AM} \equiv \overline{MB} \text{ e } \overline{AN} \equiv \overline{NB}$$

Temos dois casos:

Caso 1)



M está entre A e N , então $\overline{AN} > \overline{AM}$

N está entre M e B , então $\overline{MB} > \overline{NB}$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{AM} \equiv \overline{MB} > \overline{NB}$$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{NB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$.

Caso 2)



N está entre A e M , então $\overline{AM} > \overline{AN}$

M está entre N e B , então $\overline{NB} > \overline{MB}$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{AN} \equiv \overline{NB} > \overline{MB}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{MB}$$

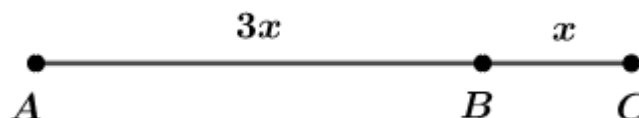
Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Portanto, o ponto médio do segmento \overline{AB} é único.

Gabarito: Demonstração

5. A, B e C são três pontos distintos de uma reta. Se $AB = 3BC$ e $AC = 32$ cm, determine as medidas dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} .

Resolução:



O enunciado afirma que $AC = 32$, então:

$$AC = 3x + x = 4x = 32$$

$$x = 8$$

$$\Rightarrow AB = 3x = 24$$



$$\Rightarrow BC = x = 8$$

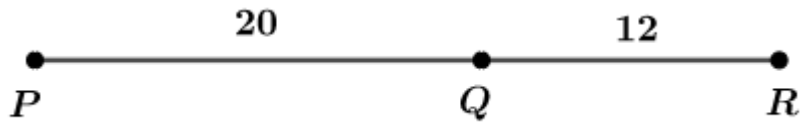
Gabarito: $AB = 24$ e $BC = 8$

6. P, Q e R são pontos colineares, determine PR , sendo $PQ = 20$ cm e $QR = 12$ cm.

Resolução:

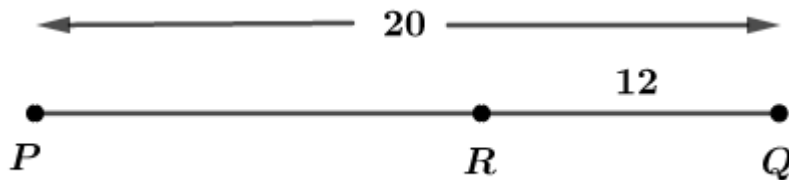
Temos duas possibilidades:

1)



$$PR = 20 + 12 = 32$$

2)



$$PR = 20 - 12 = 8$$

Gabarito: $PR = 32$ ou 8

7. \overline{AB} e \overline{BC} são segmentos adjacentes, cujos pontos médios são M e N , respectivamente.

Demonstrar que $MN = \frac{1}{2}(AB + BC)$.

Resolução:

Como \overline{AB} e \overline{BC} são segmento adjacentes, temos a seguinte figura:



De acordo com a figura:

$$MN = BM + BN$$

$$BM = \frac{1}{2}AB$$

$$BN = \frac{1}{2}BC$$

$$MN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC$$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AB + BC)$$

Gabarito: Demonstração



8. M é o ponto médio de um segmento \overline{AB} e C é um ponto da reta \overleftrightarrow{AB} externo ao segmento \overline{AB} . Demonstrar que $MC = \frac{1}{2}(CA + CB)$.

Resolução:



$$MC = MB + CB$$

De acordo com a figura:

$$CA = CB + AB$$

$$AB = 2MB$$

$$CA = CB + 2MB \Rightarrow MB = \frac{CA - CB}{2}$$

$$MC = \frac{CA - CB}{2} + CB$$

$$\Rightarrow MC = \frac{1}{2}(CA + CB)$$

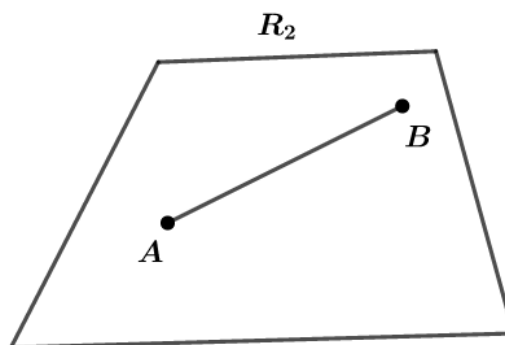
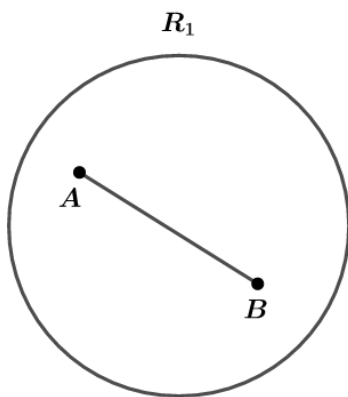
Gabarito: Demonstração

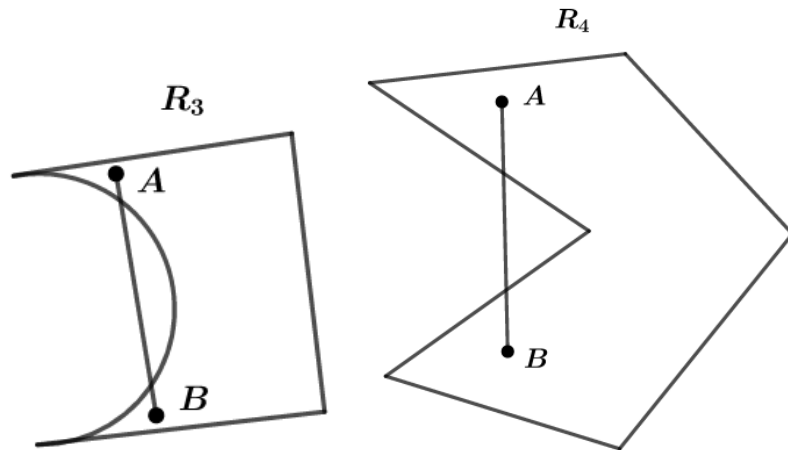
3. ÂNGULOS

3.1. REGIÃO CONVEXA E REGIÃO CÔNCAVA

Um conjunto de pontos é convexo se, e somente se, para todo par de pontos A e B do conjunto, o segmento \overline{AB} está inteiramente contida no conjunto. Caso contrário, esse conjunto de pontos é côncavo.

Exemplos:





Perceba que para os conjuntos R_1 e R_2 , todos os pontos A e B dentro desses conjuntos estão inteiramente contidos no conjunto. Isso não ocorre para os conjuntos R_3 e R_4 . Logo, os conjuntos R_1 e R_2 são convexos e os conjuntos R_3 e R_4 são côncavos.

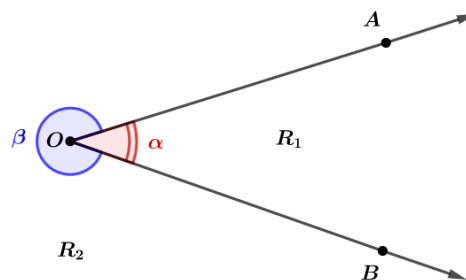
Usando símbolos matemáticos:

$$R \text{ é convexa} \Leftrightarrow (\forall A, B \in R \text{ e } A \neq B \rightarrow \overline{AB} \subset R)$$

$$R \text{ é côncava} \Leftrightarrow (\exists A, B \in R \text{ e } A \neq B \rightarrow \overline{AB} \not\subset R)$$

3.2. DEFINIÇÃO DE ÂNGULO

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas não colineares de mesma origem.



O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo.

Perceba que, caso as semirretas não sejam opostas, o ângulo determina duas regiões angulares, um convexo e um côncavo. A região interna do ângulo R_1 é convexa e a região externa R_2 é côncava. α é a notação usada para representar o ângulo da região convexa e β é o ângulo da região côncava. Também podemos usar a notação $\alpha = \widehat{AOB} = \widehat{O}$.

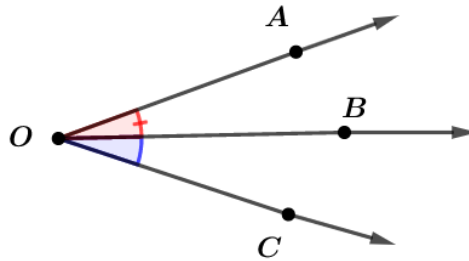


3.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

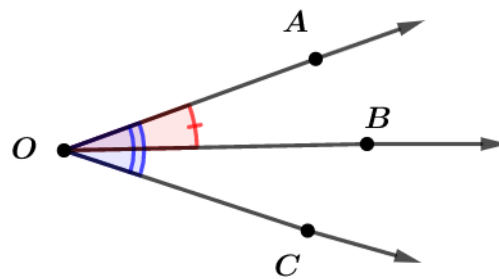
3.3.1. ÂNGULO ADJACENTE

Dois ângulos são adjacentes se, e somente se, possuem o mesmo vértice, um lado comum e não tem pontos internos comuns.

Exemplos:



$\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$ são adjacentes

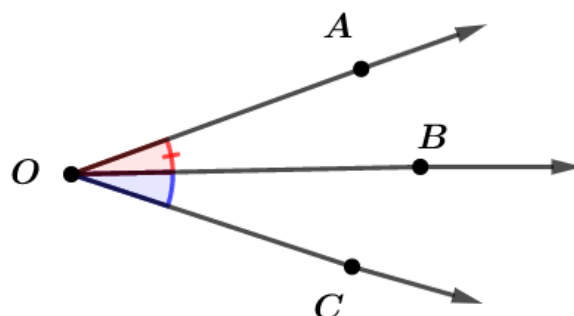


$\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A\hat{O}C}$ não são adjacentes, pois $\widehat{A\hat{O}B}$ possui pontos internos comuns com $\widehat{A\hat{O}C}$

3.3.2. ÂNGULO CONSECUTIVO

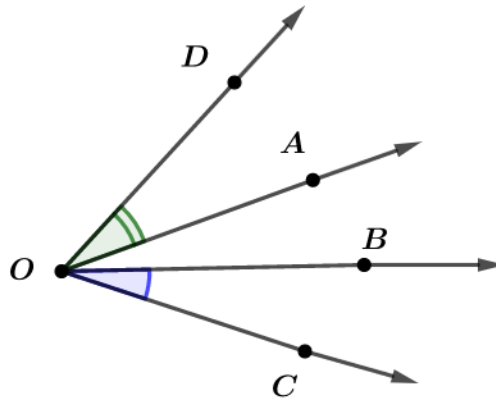
Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles coincide com o lado do outro.

Exemplos:

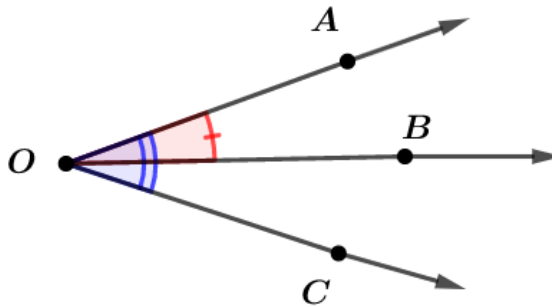




$\widehat{AÔB}$ e $\widehat{BÔC}$ são consecutivos, pois possuem o lado \overrightarrow{OB} em comum



$\widehat{AÔD}$ e $\widehat{BÔC}$ não são consecutivos, pois não possuem lado em comum

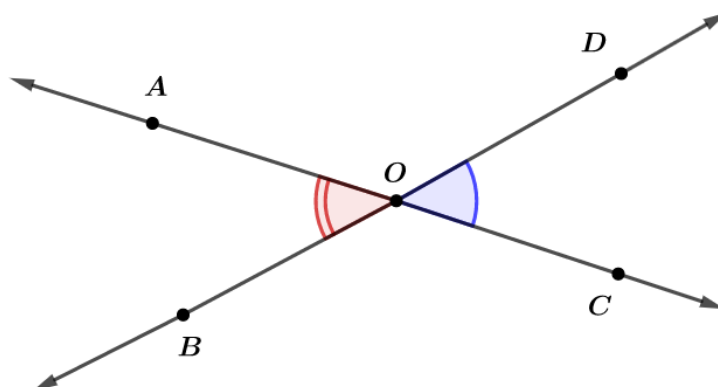


$\widehat{AÔC}$ e $\widehat{AÔB}$ são consecutivos, pois possuem o lado \overrightarrow{OA} em comum

3.3.3. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro. Conseqüentemente, esses ângulos são iguais.

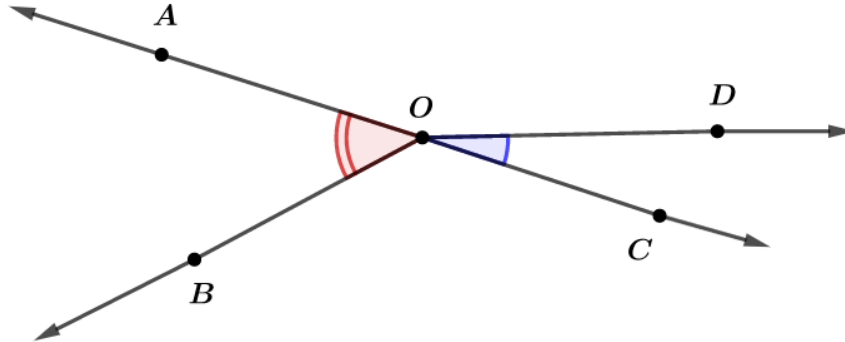
Exemplos:





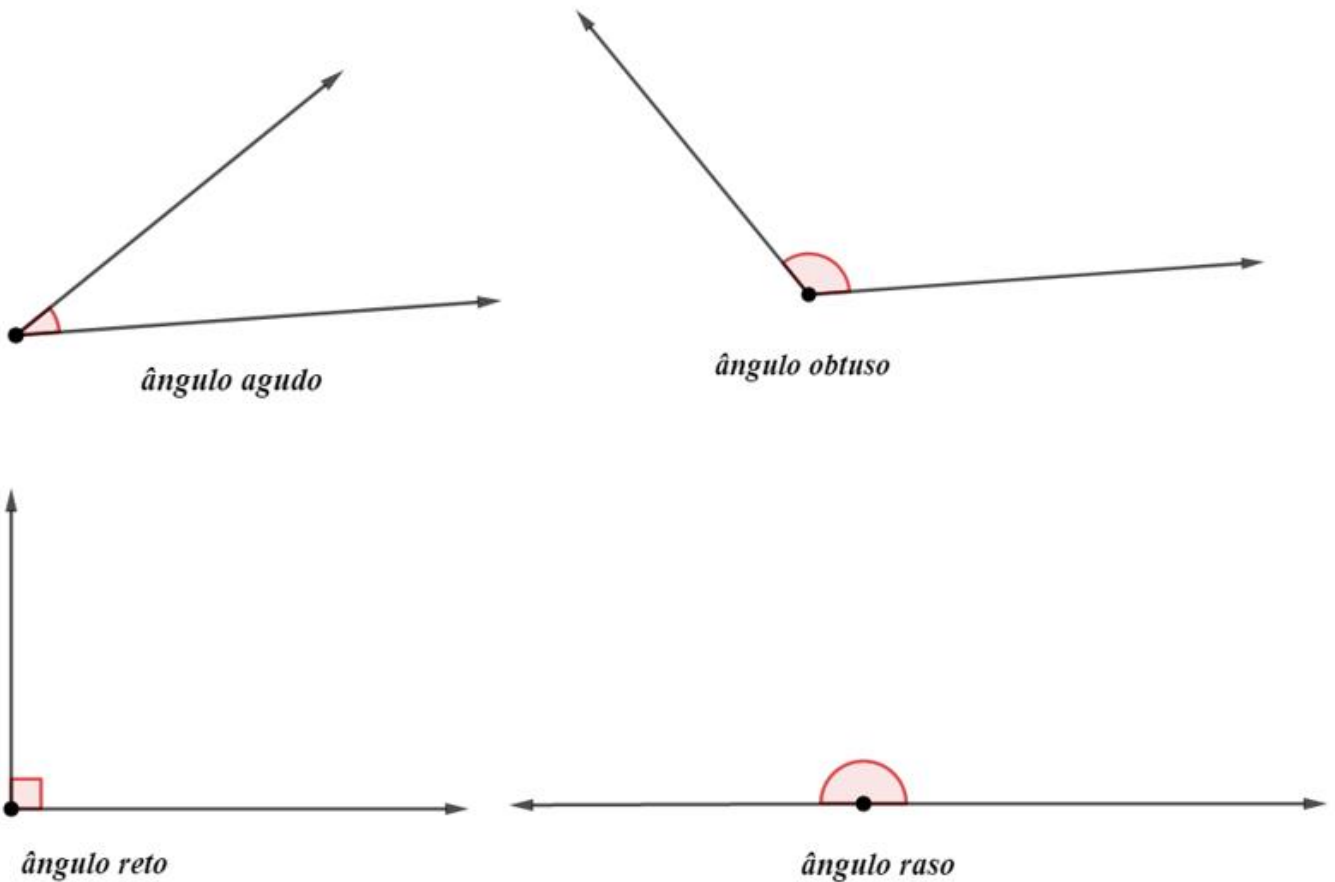
$\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$ são opostos pelo vértice

Como \overrightarrow{OD} é o oposto de \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} é o oposto de \overrightarrow{OA} , temos $\hat{A}OB + \hat{A}OD = 180^\circ$ e $\hat{C}OD + \hat{A}OD = 180^\circ$, logo $\hat{A}OB = \hat{C}OD$.



$\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$ não são opostos pelo vértice, pois o lado \overrightarrow{OD} não é a semirreta oposta de \overrightarrow{OB}

3.3.4. ÂNGULO RETO, AGUDO, OBTUSO E RASO



Ângulo agudo é todo ângulo menor do que 90° .

Ângulo obtuso é todo ângulo maior do que 90° .

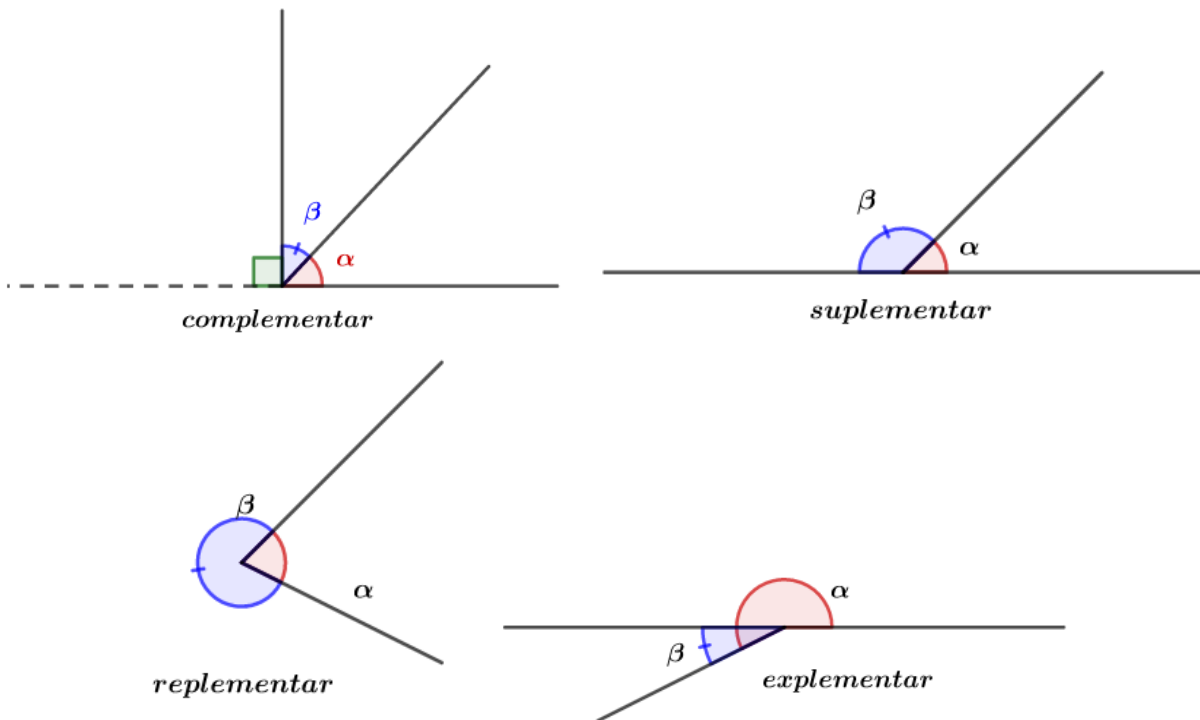
Ângulo reto é todo ângulo igual a 90° .



Ângulo raso é todo ângulo igual a 180° .

Tipo de Ângulo	Condição
Agudo	$< 90^\circ$
Obtuso	$> 90^\circ$
Reto	$= 90^\circ$
Raso	$= 180^\circ$

3.3.5. ÂNGULO COMPLEMENTAR, SUPLEMENTAR, REPLEMENTAR E EXPLEMENTAR

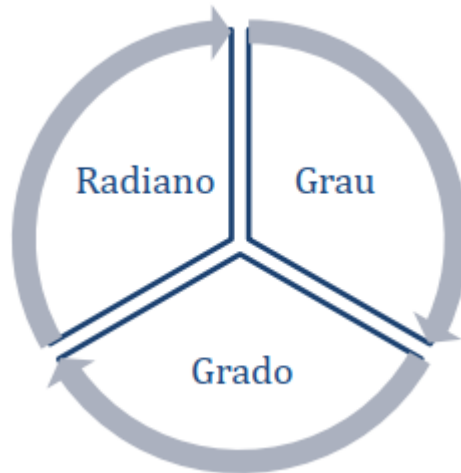


Classificação para α e β	Condição
Complementar	$\alpha + \beta = 90^\circ$
Suplementar	$\alpha + \beta = 180^\circ$
Replementar	$\alpha + \beta = 360^\circ$
Explementar	$\alpha - \beta = 180^\circ$



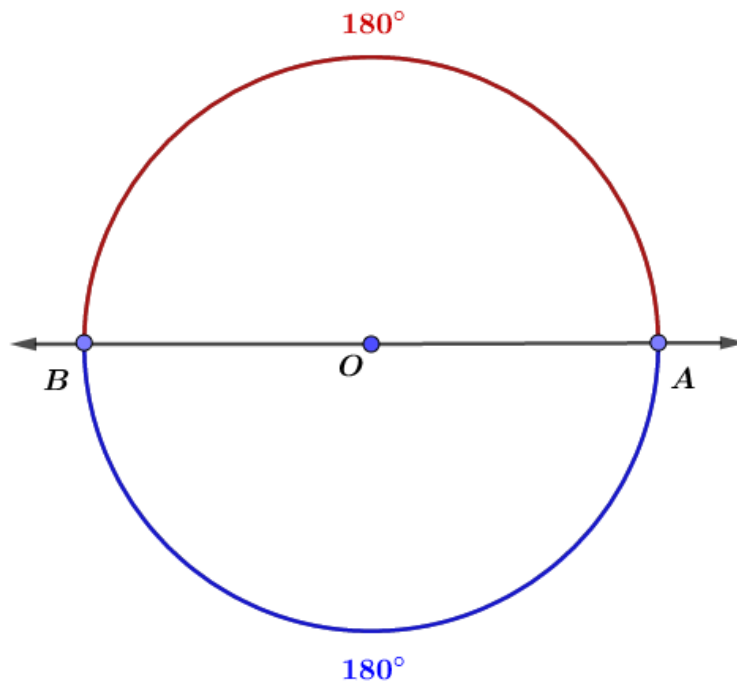
3.4. Unidades usuais de medidas

Atualmente, temos três unidades de medidas mais famosos: grau, grado e radiano. Vamos estudar cada um deles:



3.4.1. Grau

Um grau (1°) é a unidade de medida determinada pela divisão de uma circunferência em 360 partes iguais. Assim, se dividimos uma circunferência no meio, cada arco que obtemos terá a medida de 180° .



O grau pode ser subdividido em duas outras:

Definimos **um minuto** por $1'$ e ele equivale a $1/60$ do ângulo de um grau.

Um segundo é representado por $1''$ e equivale a $1/60$ do ângulo de um minuto.



Dessa forma, temos as seguintes relações:

$$1' = \frac{1^\circ}{60} \text{ e } 1'' = \frac{1'}{60}$$

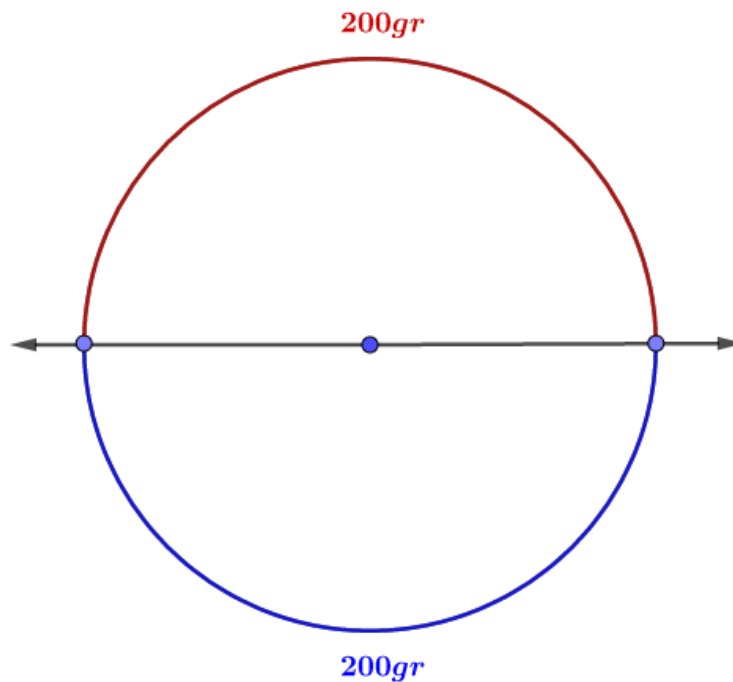
$$1^\circ = 60' \text{ (60 minutos)}$$

$$1' = 60'' \text{ (60 segundos)}$$

As medidas acima são conhecidas como sistema sexagesimal.

3.4.2. Grado

Um grado (1 gr) é a unidade de medida determinada pela divisão da circunferência em 400 partes iguais. Dessa forma, se dividimos a circunferência no meio, cada arco terá a medida de 200 gr .



3.4.3. Radiano

Um radiano (1 rad) é a unidade de medida igual ao comprimento do raio da circunferência. O comprimento total de uma circunferência é dado por:

$$C = 2\pi r$$

Onde r é o raio da circunferência e C é o seu comprimento total.

π , lê-se “pi”, e seu valor numérico é aproximadamente:

$$\pi \cong 3,14$$

Então, usando a fórmula:

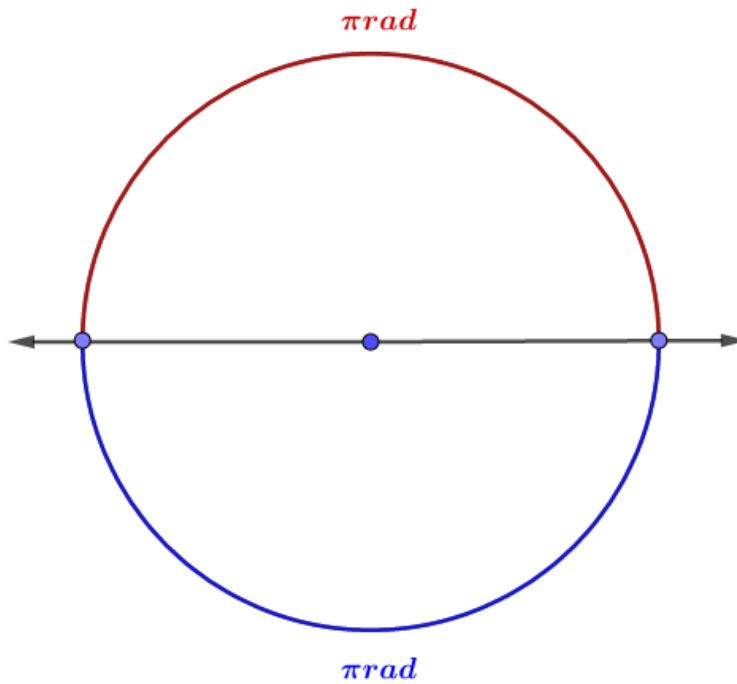


$$\widehat{AB} = \frac{\text{comprimento de } \widehat{AB}}{\text{comprimento da unidade}}$$

E tomando \widehat{AB} como o arco de uma volta completa na circunferência, temos:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

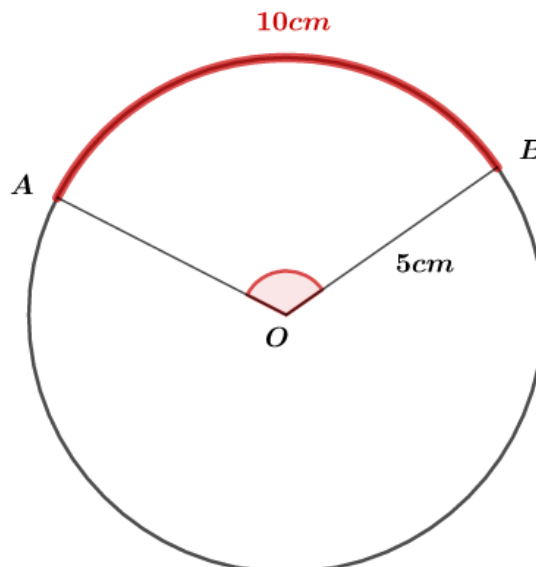
Assim, o arco de uma volta completa corresponde a $2\pi \text{ rad}$.



Veja o exemplo:

1) Um arco de circunferência \widehat{AB} mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos:

Temos a seguinte figura:



Vamos usar a fórmula da medida do arco:



$$\widehat{AB} = \frac{\text{comprimento } \widehat{AB}}{\text{comprimento raio}}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 2 \text{ rad}$$

Vimos os três principais tipos de medidas usadas para os ângulos. Podemos estabelecer a seguinte equivalência entre elas:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400 \text{ gr}$$

A tabela abaixo esquematiza essas relações:

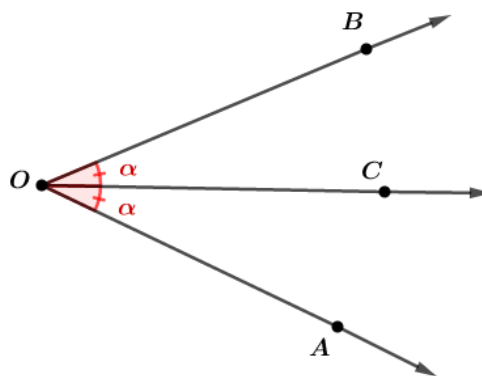
Grau	Grado	Radiano
360°	$400gr$	$2\pi \text{ rad}$
180°	$200gr$	$\pi \text{ rad}$

3.5. BISSETRIZ

3.5.1. DEFINIÇÃO

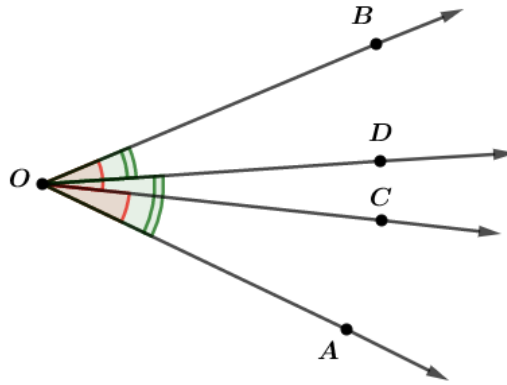
Uma semirreta OC interna ao ângulo $A\hat{O}B$ é bissetriz de $A\hat{O}B$ se, e somente se, $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$. Na prática, a bissetriz é a semirreta localizada internamente na metade do ângulo.

Exemplo:



3.5.2. UNICIDADE DA BISSETRIZ

Vamos demonstrar a unicidade da bissetriz. Suponha que \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} sejam semirretas distintas e bissetrizes do ângulo $A\hat{O}B$. Então, temos pela definição:



$$\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{AOC} + \widehat{COD} = \widehat{BOC} - \widehat{COD}$$

Como $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$, temos:

$$\cancel{\widehat{AOC}} + \widehat{COD} = \cancel{\widehat{BOC}} - \widehat{COD}$$

$$\widehat{COD} = -\widehat{COD}$$

$$\widehat{COD} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

Absurdo! Pois, por hipótese \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} são distintos!

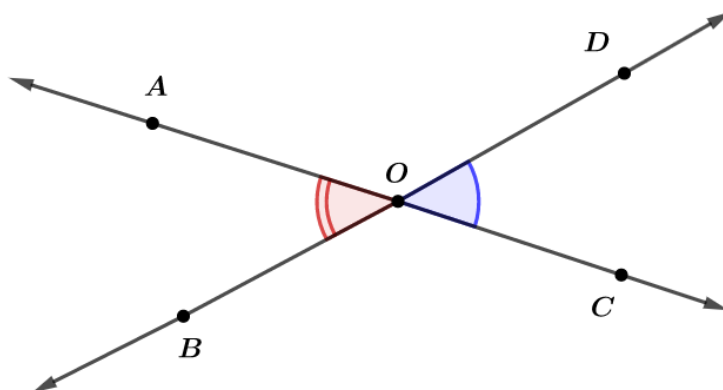
Portanto, a bissetriz é única.



Exercícios de Fixação

9. Demonstre que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Resolução:





$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice

Como \overrightarrow{OD} é o oposto de \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} é o oposto de \overrightarrow{OA} , temos $A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180^\circ$ e $C\hat{O}D + A\hat{O}D = 180^\circ$, logo $A\hat{O}B = C\hat{O}D$.

Gabarito: Demonstração

10. Determine o complemento, suplemento e replemento do ângulo de $37^\circ 32' 15''$.

Resolução:

Esse ângulo está no sistema sexagesimal.

Seja α , β e γ o complemento, suplemento e replemento do ângulo dado, respectivamente.

Dessa forma, temos:

$$\alpha = 90^\circ - 37^\circ 32' 15''$$

Escrevendo 90° no sistema sexagesimal:

$$\alpha = 89^\circ 59' 60'' - 37^\circ 32' 15''$$

$$\alpha = 52^\circ 27' 45''$$

Calculando o suplemento:

$$\beta = 180^\circ - 37^\circ 32' 15''$$

$$\beta = 179^\circ 59' 60'' - 37^\circ 32' 15''$$

$$\beta = 142^\circ 27' 45''$$

Calculando o replemento:

$$\gamma = 360^\circ - 37^\circ 32' 15''$$

$$\gamma = 359^\circ 59' 60'' - 37^\circ 32' 15''$$

$$\gamma = 322^\circ 27' 45''$$

Gabarito: *Complemento = $52^\circ 27' 45''$, suplemento = $142^\circ 27' 45''$ e replemento = $322^\circ 27' 45''$*

11. Determine a medida sexagesimal do suplemento do complemento do ângulo de $28,75\text{ gr}$.

Resolução:

Inicialmente, vamos converter o ângulo de grado para graus:

$$28,75\text{ gr} - x$$

$$200\text{ gr} - 180^\circ$$

$$x = \frac{180}{200} \cdot 28,75^\circ$$

$$x = 25,875^\circ$$

Escrevendo x no sistema sexagesimal:

$$1^\circ - 60'$$



$$0,875^\circ - y$$

$$y = 60 \cdot 0,875' = 52,5'$$

$$1' - 60''$$

$$0,5' - z$$

$$z = 60 \cdot 0,5'' = 30''$$

$$\Rightarrow x = 25^\circ 52' 30''$$

Seja α , o complemento de x , então:

$$\alpha = 90^\circ - 25^\circ 52' 30''$$

$$\alpha = 89^\circ 59' 60'' - 25^\circ 52' 30''$$

$$\alpha = 64^\circ 7' 30''$$

Seja β , o suplemento de α :

$$\beta = 180^\circ - 64^\circ 7' 30''$$

$$\beta = 179^\circ 59' 60'' - 64^\circ 7' 30''$$

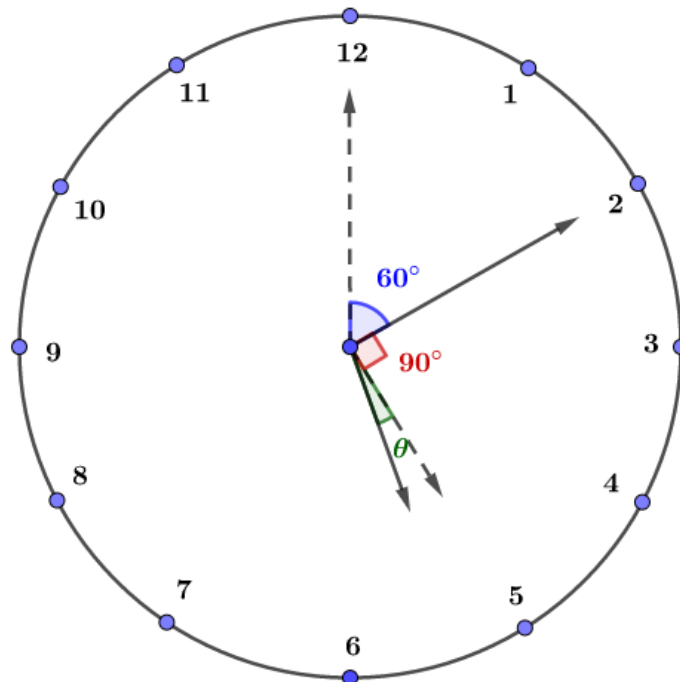
$$\beta = 115^\circ 52' 30''$$

Gabarito: $115^\circ 52' 30''$

12. Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5h 10min.

Resolução:

Temos a seguinte situação:



O ponteiro das horas percorre 30° quando completa 1 hora e o ponteiro dos minutos percorre 360° quando o ponteiro das horas completa 1 hora. Então, quando o ponteiro das horas percorre 1° , o ponteiro dos minutos percorrerá $\left(\frac{360}{30}\right)^\circ = 12^\circ$.



θ é o ângulo que o ponteiro das horas percorre quando o ponteiro dos minutos percorre 60° .

Usando uma regra de três, temos:

horas – minutos

$$1^\circ - 12^\circ$$

$$\theta - 60^\circ$$

$$\theta = \left(\frac{60}{12}\right)^\circ = 5^\circ$$

O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio é dado por:

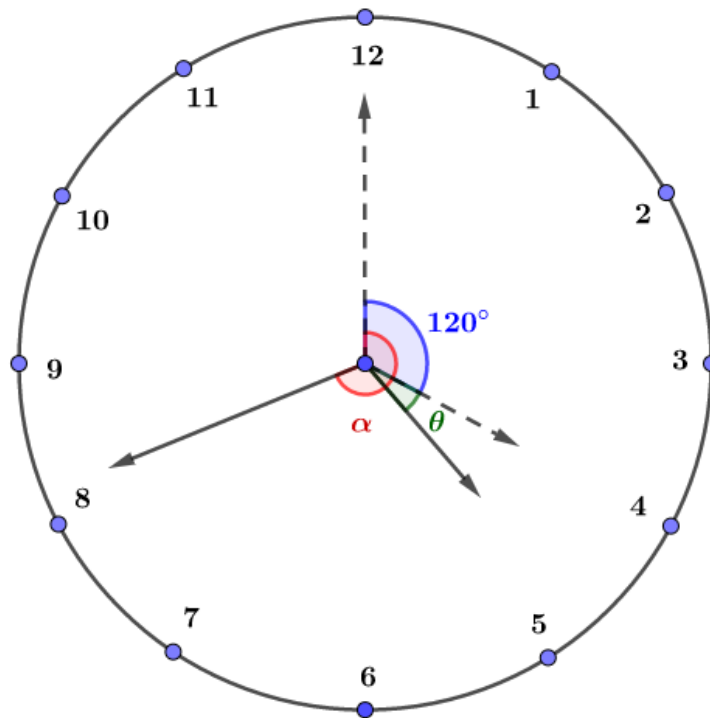
$$\theta + 90^\circ = 95^\circ$$

Gabarito: 95°

13. Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4h 42min.

Resolução:

Temos a seguinte situação:



α é o ângulo do ponteiro dos minutos. Usando a regra de três para calcular α :

minutos – graus

$$60 - 360^\circ$$

$$42 - \alpha$$

$$\alpha = 360 \cdot \frac{42}{60}$$

$$\alpha = 252^\circ$$



Para calcular θ , podemos usar novamente a regra de três:

horas – minutos

$$30^\circ - 360^\circ$$

$$\theta - 252^\circ$$

$$\theta = \frac{30}{360} \cdot 252$$

$$\theta = 21^\circ$$

O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio às $4h42min$ é dado por:

$$\alpha - \theta - 120^\circ = 252^\circ - 21^\circ - 120^\circ = 111^\circ$$

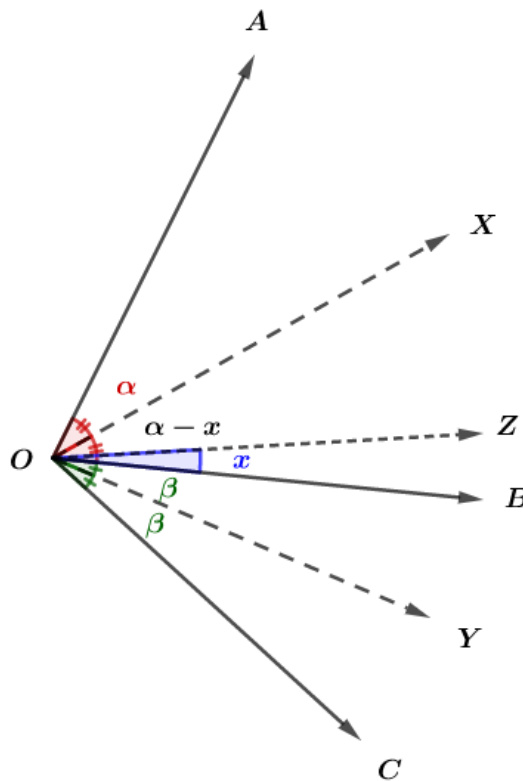
Gabarito: 111°

14. \overrightarrow{OX} e \overrightarrow{OY} são as bissetrizes de dois ângulos adjacentes, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ ambos agudos, e tais que $A\hat{O}B - B\hat{O}C = 36^\circ$. \overrightarrow{OZ} é a bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$, calcular o ângulo $B\hat{O}Z$.

Resolução:

Supondo que \overrightarrow{OX} seja bissetriz de $A\hat{O}B$ e \overrightarrow{OY} , bissetriz de $B\hat{O}C$, temos:

(Poderia ser o contrário, com \overrightarrow{OX} , bissetriz de $B\hat{O}C$ e \overrightarrow{OY} , bissetriz de $A\hat{O}B$. O resultado seria o mesmo.)



Sejam α e β os ângulos de $A\hat{O}X$ e $B\hat{O}Y$, respectivamente. Assim, temos:

$$A\hat{O}X = B\hat{O}X = \alpha$$

$$B\hat{O}Y = C\hat{O}Y = \beta$$



De acordo com o enunciado:

$$A\hat{O}B - B\hat{O}C = 36^\circ \Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 36^\circ \Rightarrow \alpha - \beta = 18^\circ$$

Queremos calcular $B\hat{O}Z$. Como \overrightarrow{OZ} é bissetriz de $X\hat{O}Y$:

$$X\hat{O}Z = \alpha - x \quad (I)$$

$$X\hat{O}Z = Y\hat{O}Z = \beta + x \quad (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$0 = \alpha - x - \beta - x$$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$x = \frac{18^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 9^\circ$$

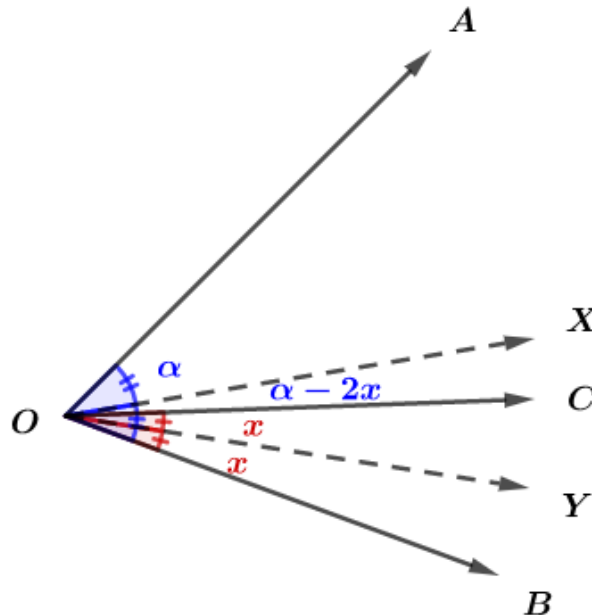
Gabarito: $B\hat{O}Z = 9^\circ$

15. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de 38° . Um dos ângulos mede 41° . Calcular o outro ângulo.

Resolução:

Como são ângulos consecutivos, temos duas possibilidades:

1) Um dos ângulos é interno ao outro:



Nesse caso, temos:

$$X\hat{O}Y = X\hat{O}C + Y\hat{O}C$$

$$38^\circ = \alpha - 2x + x$$

$$\alpha - x = 38^\circ$$



Se $\widehat{A\hat{O}B}$ for o ângulo dado:

$$2\alpha = 41^\circ \Rightarrow \alpha = 20,5^\circ$$

$$\alpha - x = 38^\circ \Rightarrow x = \alpha - 38^\circ \Rightarrow x = -17,5^\circ$$

Como x é negativo, essa situação não é possível.

Se $\widehat{B\hat{O}C}$ for o ângulo dado:

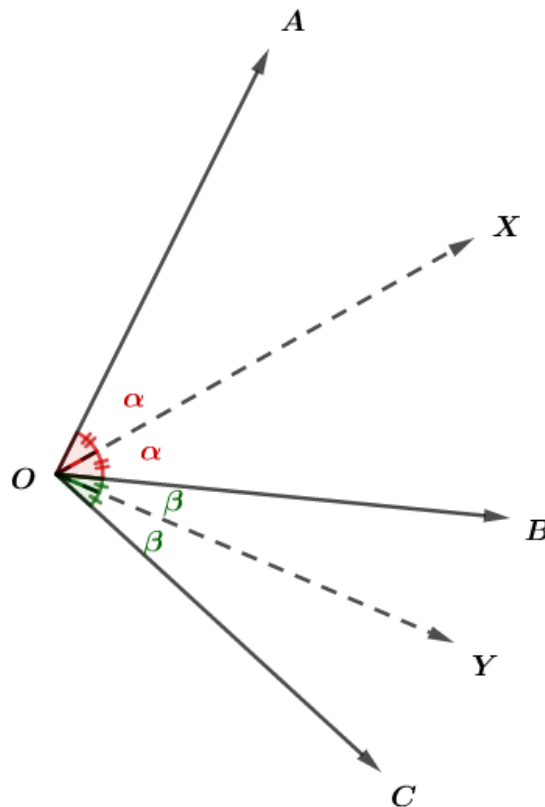
$$2x = 41^\circ \Rightarrow x = 20,5^\circ$$

$$\alpha - x = 38^\circ \Rightarrow \alpha = x + 38^\circ \Rightarrow \alpha = 58,5^\circ$$

Dessa forma, o outro ângulo é dado por:

$$\widehat{A\hat{O}B} = 2\alpha = 117^\circ$$

2) Os ângulos são adjacentes:



Supondo que um dos ângulos seja $\widehat{A\hat{O}B}$, temos:

$$2\alpha = 41^\circ \Rightarrow \alpha = 20,5^\circ$$

$$\alpha + \beta = 38^\circ \Rightarrow \beta = 17,5^\circ$$

Assim, o outro ângulo é dado por:

$$2\beta = 35^\circ$$

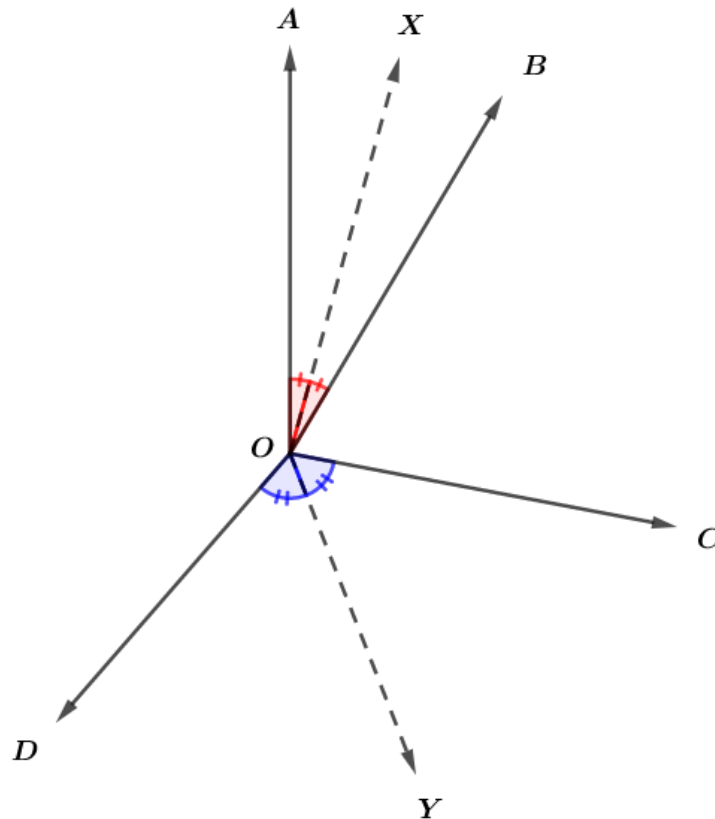
Gabarito: 35° ou 117°

16. Quatro semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} forma os ângulos adjacentes $\widehat{A\hat{O}B}$, $\widehat{B\hat{O}C}$, $\widehat{C\hat{O}D}$ e $\widehat{D\hat{O}A}$, respectivamente proporcionais aos números 1, 2, 4 e 5. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{C\hat{O}D}$.



Resolução:

Temos a seguinte figura:



Queremos calcular o ângulo $X\hat{O}Y$. Definindo $A\hat{O}B = \alpha$, temos:

$$A\hat{O}B = \alpha$$

$$B\hat{O}C = 2\alpha$$

$$C\hat{O}D = 4\alpha$$

$$D\hat{O}A = 5\alpha$$

A soma desses ângulos resulta no ângulo de 360° . Então:

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 5\alpha = 360^\circ$$

$$12\alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$X\hat{O}Y$ é dado por:

$$X\hat{O}Y = X\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}Y$$

$$X\hat{O}Y = \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + \frac{4\alpha}{2}$$

$$X\hat{O}Y = \frac{9\alpha}{2}$$

$$X\hat{O}Y = \frac{9}{2} \cdot 30^\circ = 135^\circ$$

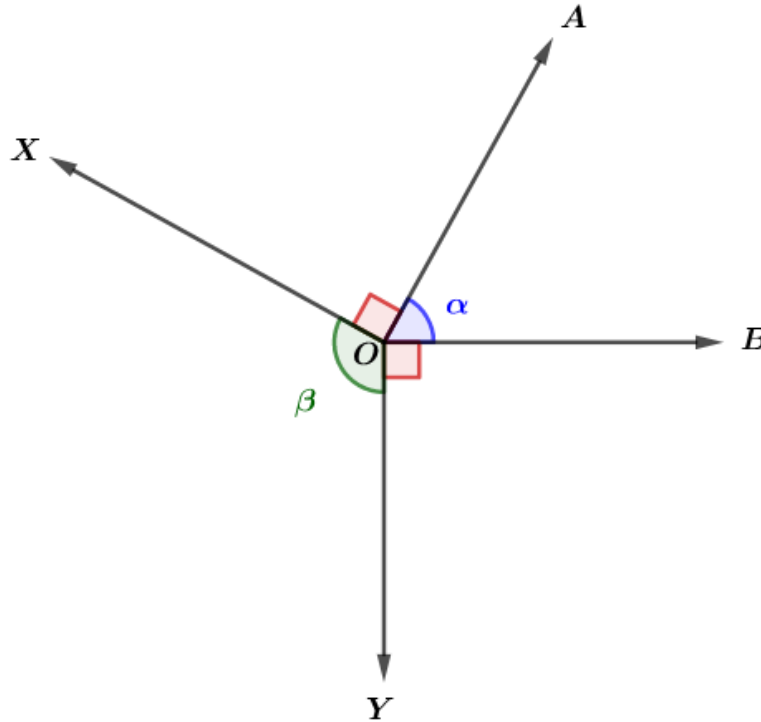


Gabarito: 135°

17. Do vértice de um ângulo traçam-se as semirretas perpendiculares aos seus lados. Demonstrar que o ângulo formado por essas semirretas e o ângulo dado são suplementares.

Resolução:

Supondo genericamente a seguinte situação:



Podemos ver pela figura que:

$$\alpha + \beta + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$\therefore \alpha$ e β são suplementares

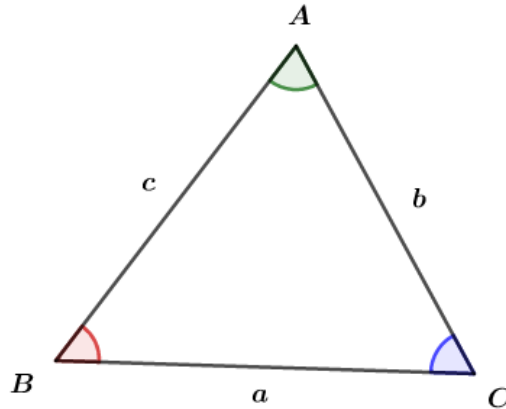
Gabarito: Demonstração

4. TRIÂNGULOS

4.1. DEFINIÇÃO

Dados três pontos A , B e C não colineares, os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} definem o triângulo ABC .

Dizemos que A , B e C são os vértices do triângulo e os segmentos formados por esses pontos são os lados do triângulo.



a, b e c são os lados opostos dos ângulos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} , respectivamente.

4.2. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

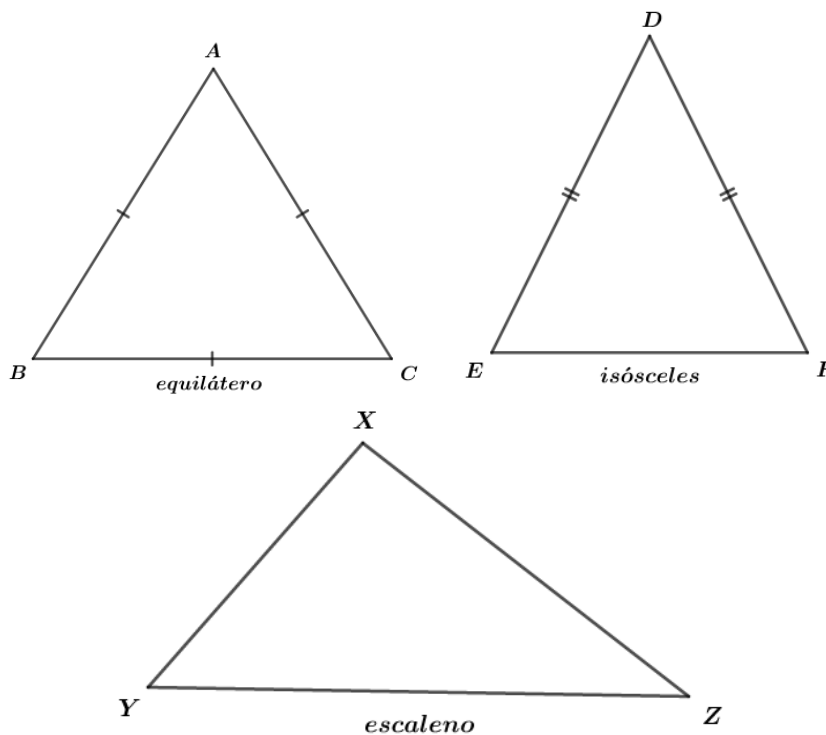
4.2.1. QUANTO AOS LADOS

Um triângulo é classificado em:

Equilátero se, e somente se, todos os seus lados são congruentes.

Isósceles se, e somente se, possui dois lados congruentes.

Escaleno se, e somente se, nenhum lado é congruente.





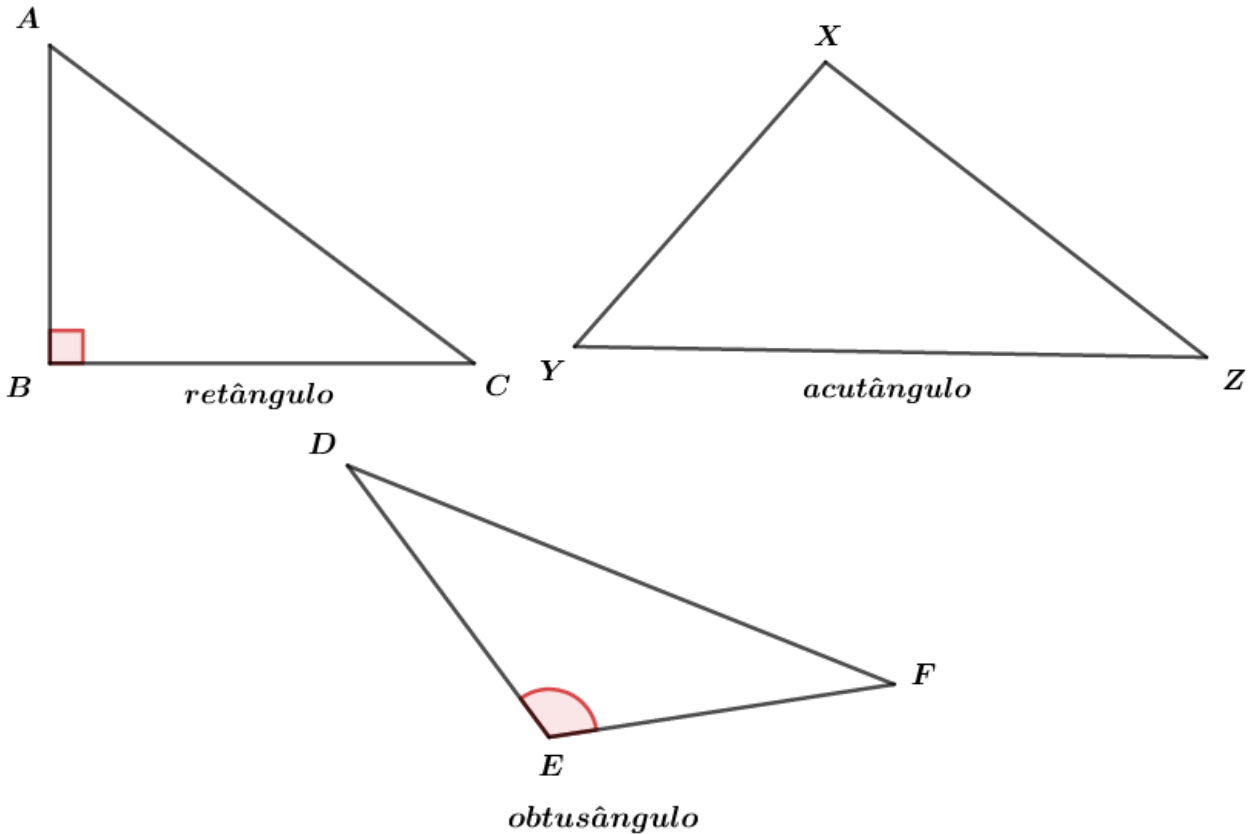
4.2.2. QUANTO AOS ÂNGULOS

Um triângulo é classificado em:

Retângulo se, e somente se, possui um ângulo reto.

Acutângulo se, e somente se, todos os ângulos internos são agudos.

Obtusângulo se, e somente se, possui um ângulo obtuso.



4.2.3. SÍNTESE DE CLAIRAUT

Seja um triângulo qualquer de lados a, b e c , sendo a o maior lado, podemos classificar o triângulo de acordo com as seguintes condições:

Condição	Tipo de triângulo
$a^2 < b^2 + c^2$	Acutângulo
$a^2 = b^2 + c^2$	Retângulo
$a^2 > b^2 + c^2$	Obtusângulo

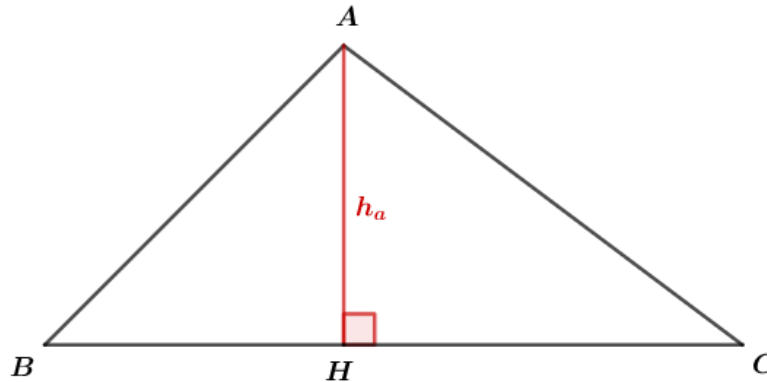


4.3. CEVIANAS NOTÁVEIS

Definimos como ceviana qualquer reta que passa pelo vértice do triângulo. Vamos estudar as principais:

4.3.1. ALTURA

Usualmente, usamos a letra h para denotar a altura de um triângulo. Ela é um segmento que passa pelo vértice do triângulo e forma um ângulo reto com o lado oposto desse vértice.

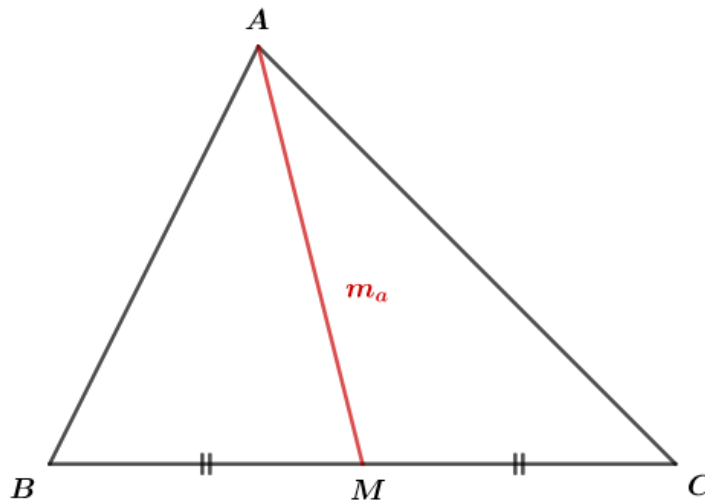


\overline{AH} é a altura do vértice A .

4.3.2. MEDIANA

A mediana de um triângulo é o segmento que passa pelo vértice e pelo ponto médio do lado oposto ao vértice.

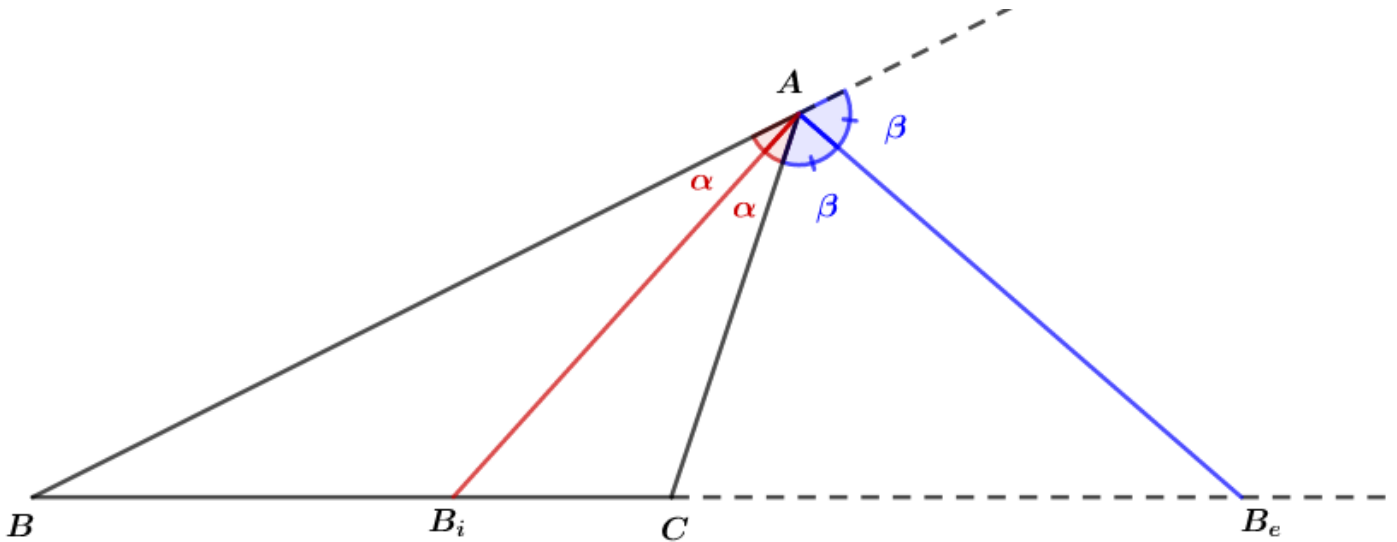
Na figura abaixo, \overline{AM} é a mediana do vértice A .





4.3.3. BISSETRIZES INTERNA E EXTERNA

A bissetriz interna de um triângulo é o segmento que divide o ângulo interno em dois ângulos congruentes. A bissetriz externa é o segmento que divide o ângulo externo em dois ângulos congruentes.



$\overline{AB_i}$ é a bissetriz interna do ΔABC e $\overline{AB_e}$ é sua bissetriz externa.

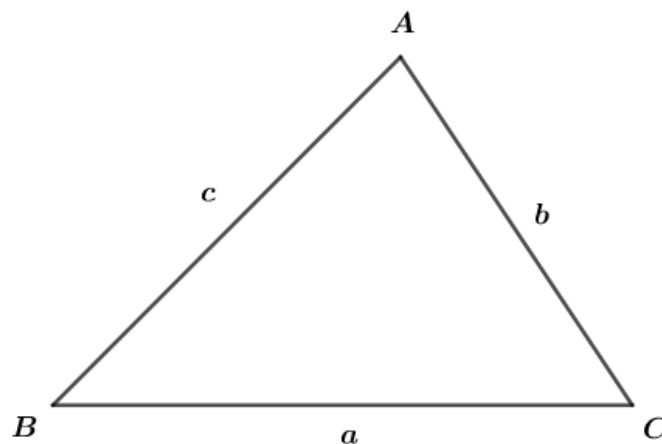
4.4. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO

Na geometria plana, temos o postulado da distância mínima que afirma:

“A menor distância entre dois pontos é uma reta”.

Por esse postulado, podemos estudar a condição de existência do triângulo.

Assim, para um triângulo ABC , temos:



$$a < b + c$$

$$b < a + c \Rightarrow b - c < a$$

$$c < a + b \Rightarrow c - b < a$$



$$|b - c| < a < b + c$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade triangular.

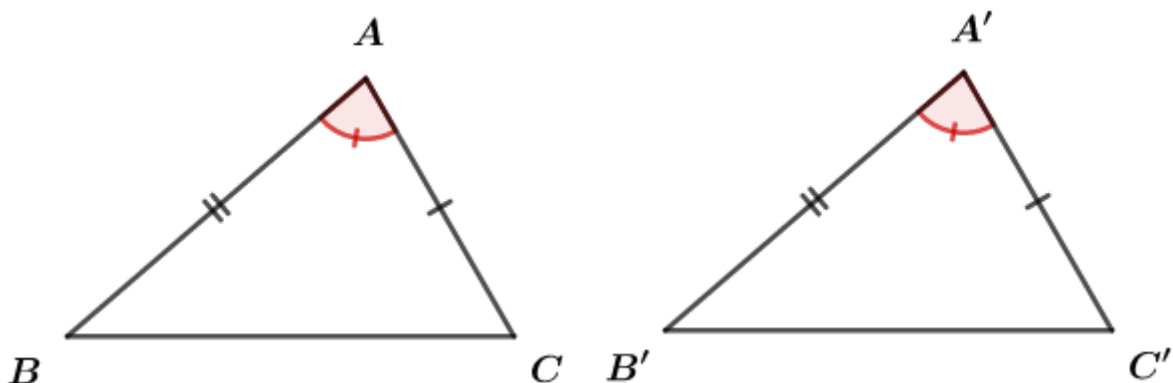
4.5. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Podemos afirmar que dois ou mais triângulos são congruentes se, e somente se, todos os lados e ângulos internos deles forem congruentes na mesma ordem.

Um postulado que consegue garantir a congruência de triângulos é o LAL, esse postulado gera outros teoremas que também provam a congruência de triângulos. Não veremos a demonstração dos teoremas, pois o que nos interessa é saber como aplicá-los.

4.5.1. POSTULADO *LAL* (LADO-ÂNGULO-LADO)

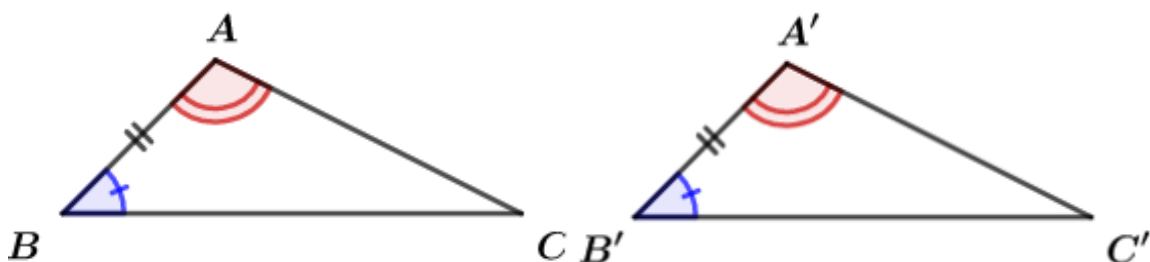
Esse postulado diz que se dois triângulos tiverem dois lados e o ângulo entre esses lados congruentes, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.5.2. TEOREMA *ALA* (ÂNGULO-LADO-ÂNGULO)

Se o lado e os ângulos adjacentes de dois triângulos forem congruentes ordenadamente, podemos afirmar que os triângulos são congruentes.

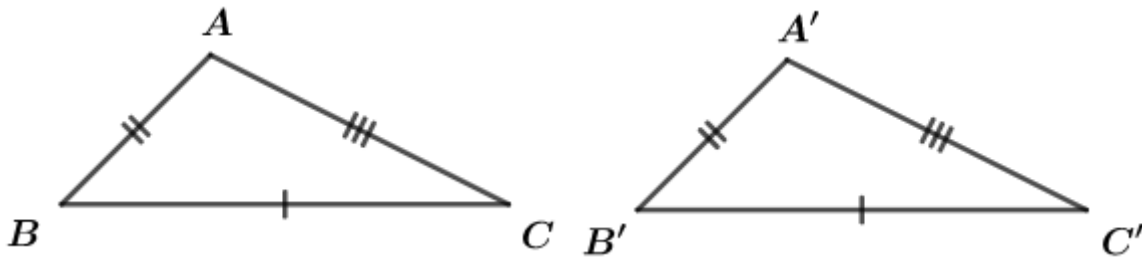




$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.5.3. TEOREMA *LLL* (LADO-LADO-LADO)

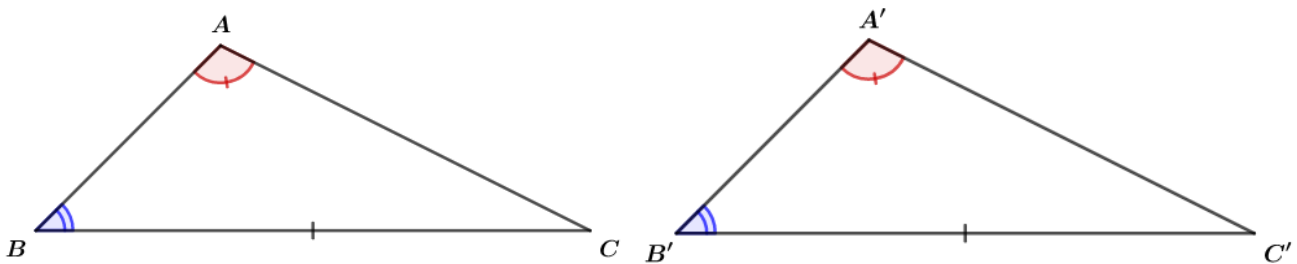
Se os três lados de dois triângulos são ordenadamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.5.4. TEOREMA *LAA₀* (LADO-ÂNGULO ADJACENTE-ÂNGULO OPOSTO)

Se dois triângulos tiverem o lado, ângulo adjacente e ângulo oposto desse lado congruentes, então esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

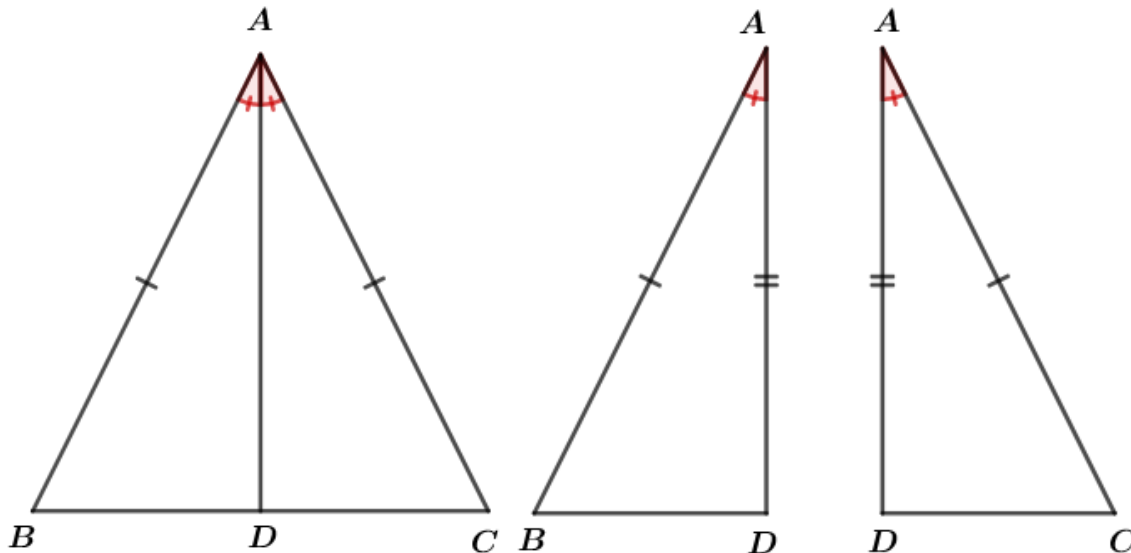


4.6. CONSEQUÊNCIA DO POSTULADO *LAL*

4.6.1. TRIÂNGULO ISÓSCELES

Sabemos que um triângulo ABC é isósceles se, e somente se, possui dois lados iguais.

Seja ΔABC isósceles com $AB = AC$. Traçando-se a bissetriz no vértice A , temos:



Como AD é a bissetriz do vértice A , temos $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.

Usando o postulado *LAL*, sabemos que $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$. Então, os elementos correspondentes são congruentes:

$$\Delta ABD \equiv \Delta ACD$$

$$AB = AC \Rightarrow BD = CD \Rightarrow \overline{AD} \text{ é mediana}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{C}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = \theta \Rightarrow \theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \overline{AD} \text{ é altura}$$

Como \overline{AD} é mediana e altura ao mesmo tempo, temos por definição que \overline{AD} é mediatriz do triângulo ABC . Perceba que todos os pontos da mediatriz do segmento \overline{BC} são equidistantes das extremidades B e C . Então, se não soubéssemos que o triângulo ABC era isósceles, pelo fato do segmento AD ser mediatriz, poderíamos afirmar que ele é isósceles. Isso pode ser provado pelo postulado *LAL*:

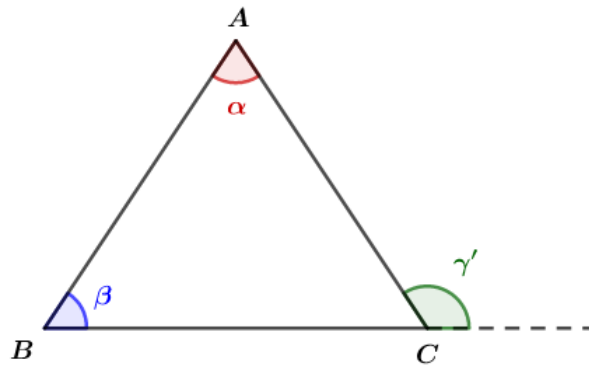
$$\begin{cases} BD \equiv DC \\ \widehat{BDA} \equiv \widehat{CDA} \Rightarrow \Delta BDA \equiv \Delta CDA \Rightarrow AB = AC \\ DA \equiv DA \end{cases}$$

4.6.2. TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

O Teorema do Ângulo Externo diz que:



Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

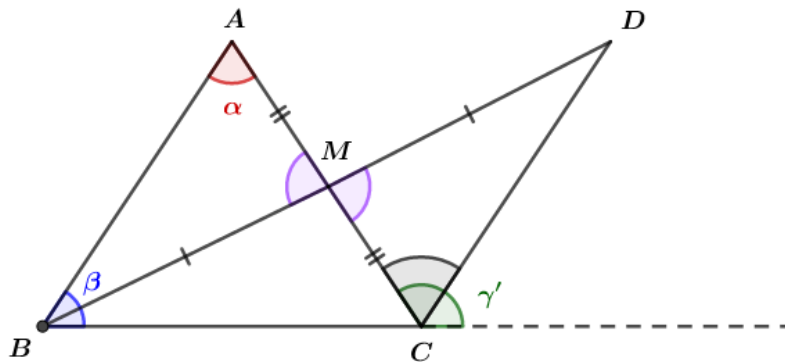


$$\gamma' > \alpha$$

$$\gamma' > \beta$$

Demonstração:

Seja M o ponto médio do lado AC e D o ponto tal que $BM = MD$ e B, M e D são colineares.

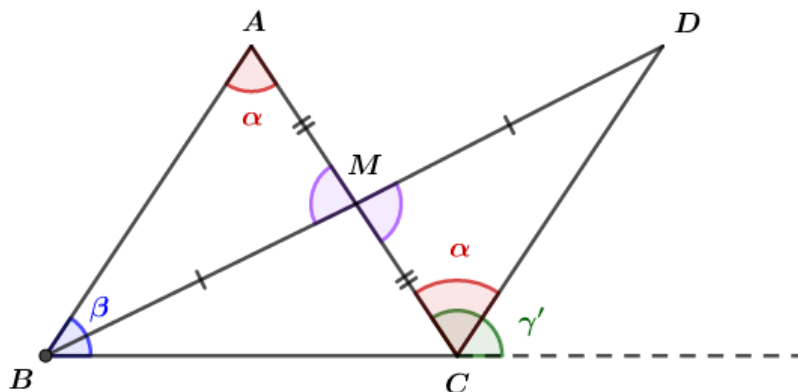


Temos:

$$AM = MC$$

$$BM = MD$$

Como \widehat{AMB} e \widehat{CMD} são ângulos opostos pelo vértice temos que $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$. Então, usando o postulado *LAL*, podemos afirmar que $\triangle BAM \cong \triangle DCM$ e conseqüentemente $\widehat{BAM} = \widehat{CDM}$.



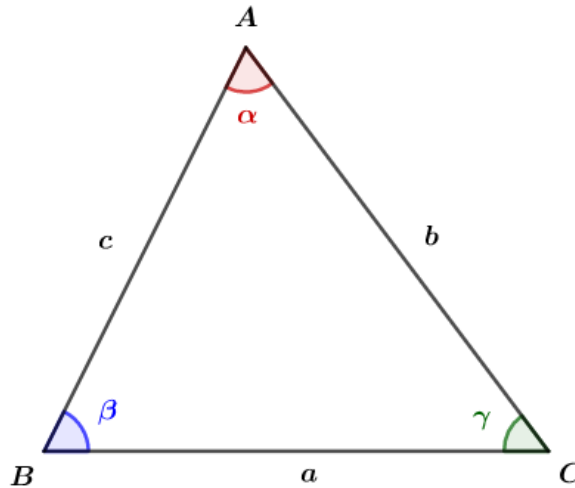


α é ângulo interno a γ' , logo $\gamma' > \alpha$.

Analogamente, tomando-se o ponto médio de BC , podemos provar que $\gamma' > \beta$.

4.6.3. DESIGUALDADES NO TRIÂNGULO

Dado o triângulo ABC abaixo, temos:



$$a > b > c \Leftrightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

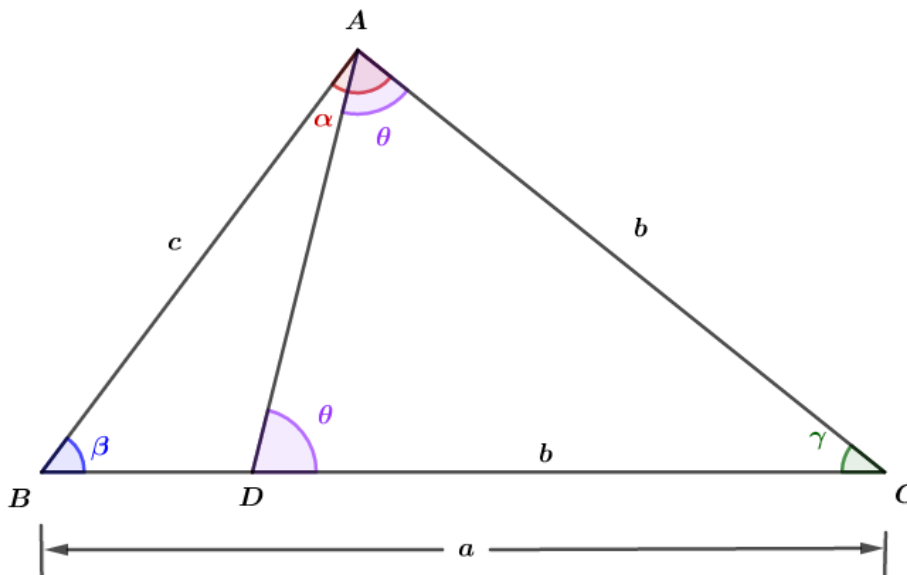
Podemos afirmar que o maior ângulo possui o maior lado oposto.

Demonstração:

Vamos provar a ida:

$$a > b > c \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

Se $a > b > c$, podemos traçar o segmento \overline{AD} tal que $\triangle ADC$ seja isósceles com $AC = DC$:



Como \widehat{DAC} é ângulo interno a \widehat{BAC} , temos $\alpha > \theta$.

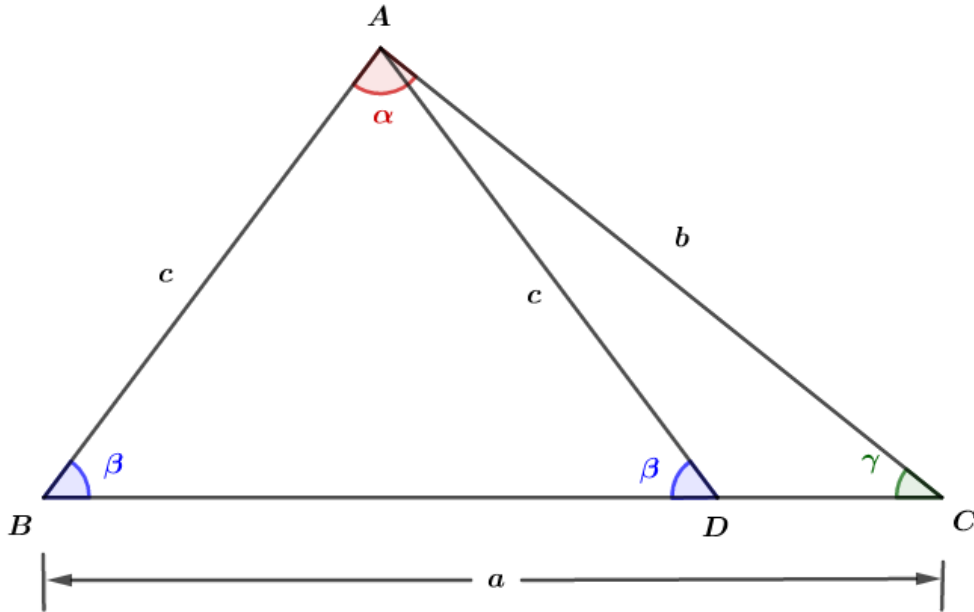


\widehat{ADC} é ângulo externo ao triângulo ABD , então pelo teorema do ângulo externo temos $\theta > \beta$.

Assim, encontramos:

$$\alpha > \theta > \beta \Rightarrow \alpha > \beta$$

Agora, vamos provar que $\beta > \gamma$. Como $b > c$, podemos traçar \overline{AD} tal que $AB = AD = c$:



Como ADB é externo ao ΔADC , temos $\beta > \gamma$.

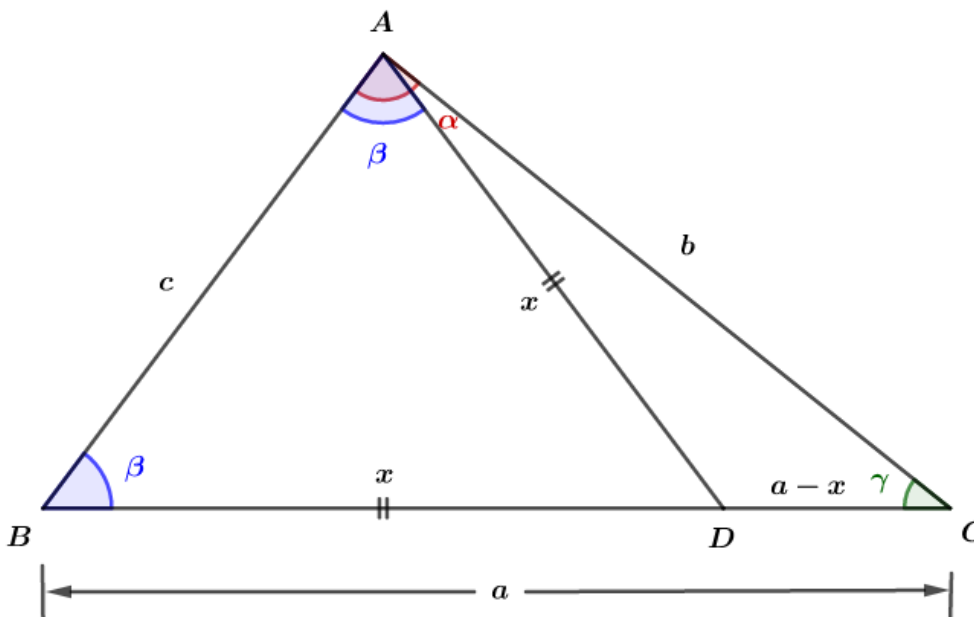
Portanto:

$$a > b > c \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

Para a volta, temos:

$$\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow a > b > c$$

Por hipótese, temos $\alpha > \beta$. Vamos traçar \overline{AD} tal que:

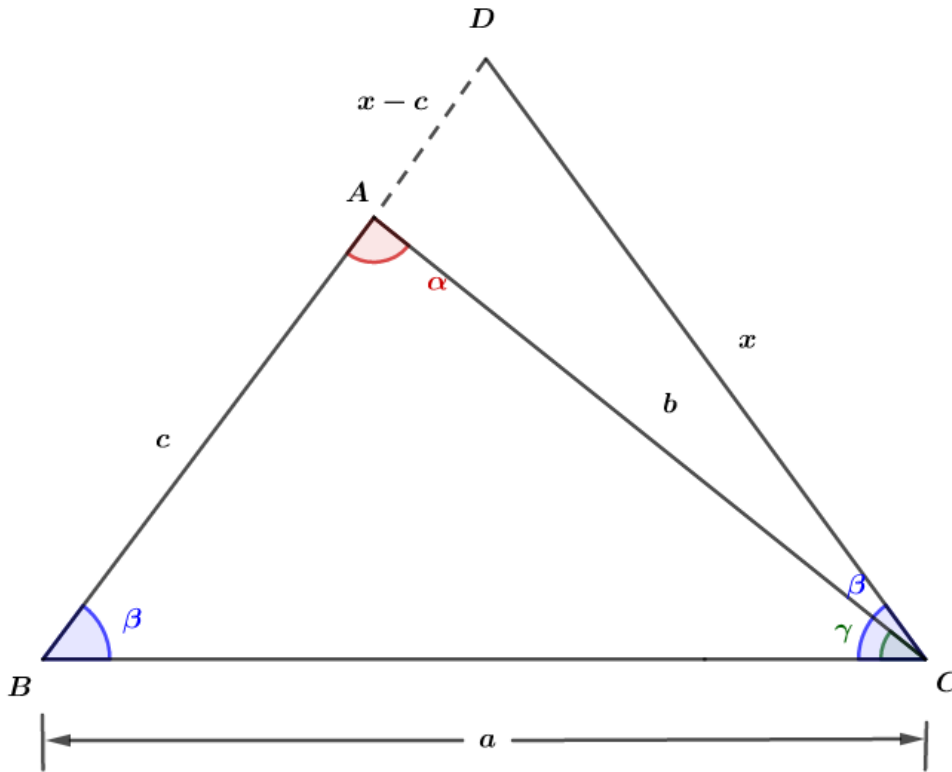




Como $\triangle ABD$ é isósceles, temos $AD = BD = x$. Usando a desigualdade triangular no $\triangle ADC$:

$$b < x + (a - x) \\ \Rightarrow b < a$$

Pela hipótese, também podemos afirmar que $\beta > \gamma$ e traçar \overline{AD} dessa forma:



$$\triangle BDC \text{ é isósceles } \Rightarrow BD = CD = x \Rightarrow AD = x - c$$

Usando a desigualdade triangular no $\triangle ADC$:

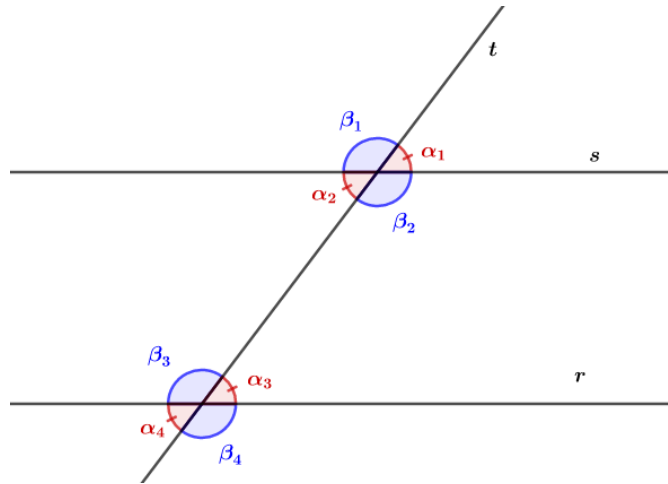
$$|x - c - x| < b \\ \Rightarrow c < b$$

Portanto:

$$\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow a > b > c$$

4.7. ÂNGULOS DE RETAS PARALELAS

Sejam as retas r, s, t dadas tal que $r // s$ e t cruza as outras duas. Os ângulos formados pelo cruzamento de t com r e s possuem uma relação entre eles, veja:



Os ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são congruentes e os ângulos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ são congruentes.

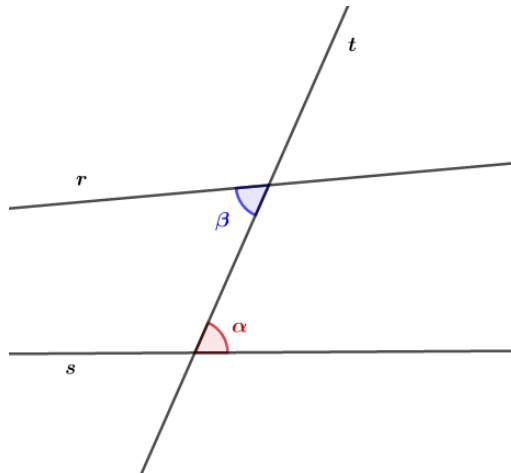
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4$$

$$\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \beta_3 \equiv \beta_4$$

Esses ângulos recebem as seguintes denominações:

Classificações	Par de ângulos
Alternos internos	α_2 e α_3 β_2 e β_3
Alternos externos	α_1 e α_4 β_1 e β_4
Colaterais internos	α_2 e β_3 β_2 e α_3
Colaterais externos	α_1 e β_4 α_4 e β_1

Demonstração:



Queremos provar:

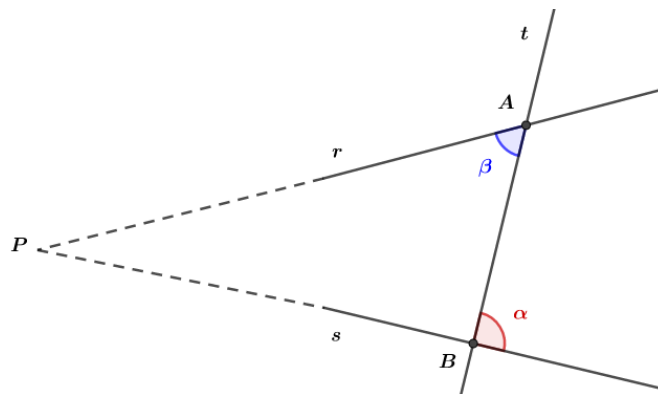
$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow r // s$$

Vamos provar a ida:

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow r // s$$

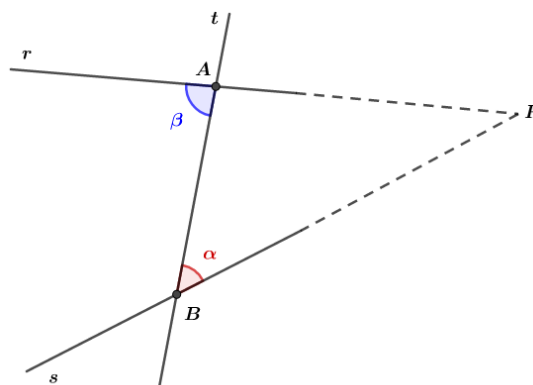
Suponha que r não seja paralela a s , então pelo Postulado V de Euclides temos que r e s se interceptam em um ponto P . Temos dois casos possíveis:

1)



O ângulo α é externo ao triângulo ABP . Pelo teorema do ângulo externo, temos $\alpha > \beta$.

2)



O ângulo β é externo ao triângulo ABP . Pelo teorema do ângulo externo, temos $\beta > \alpha$.

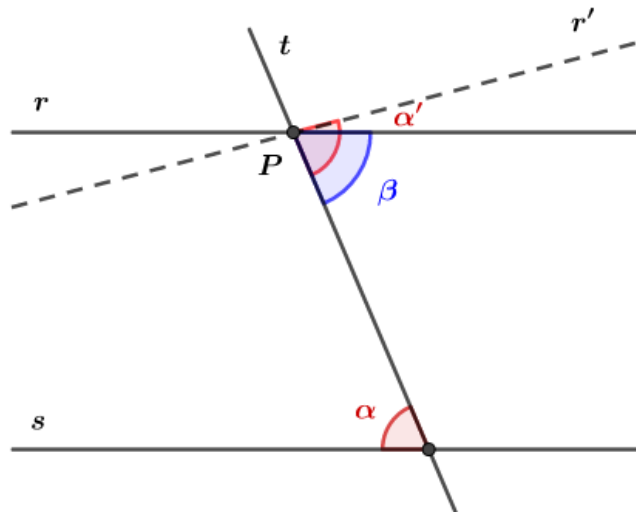
Absurdo! Pois, por hipótese temos $\alpha \equiv \beta$. Logo, $\alpha \equiv \beta \Rightarrow r // s$.



Agora, vamos provar a volta:

$$r // s \Rightarrow \alpha \equiv \beta$$

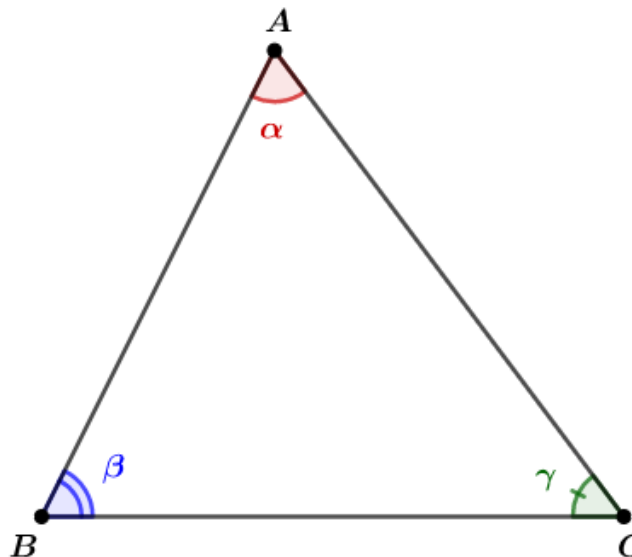
Suponha que exista uma reta r' tal que $\alpha \equiv \alpha'$.



Como $\alpha \equiv \alpha'$, temos $r' // s$. Então, as retas r e r' são paralelas à reta s . Pelo quinto postulado de Euclides, temos $r \equiv r'$, logo $\alpha' \equiv \beta$. Portanto, $\alpha \equiv \beta$.

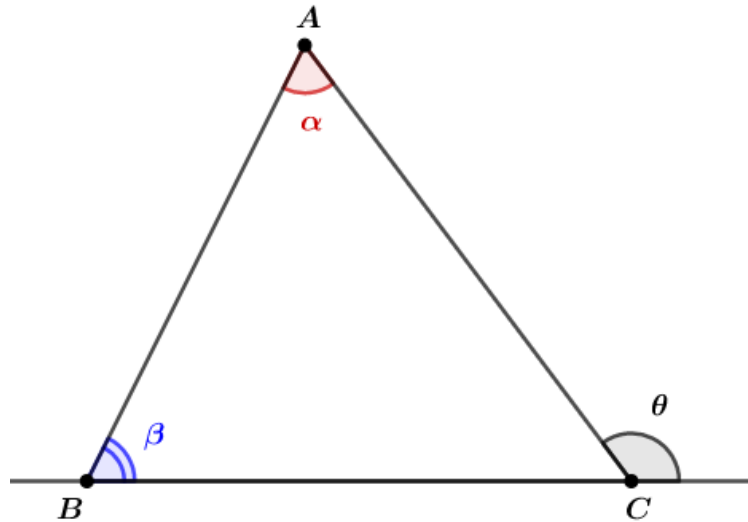
4.8. TEOREMA ANGULAR DE TALES

I) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

II) O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

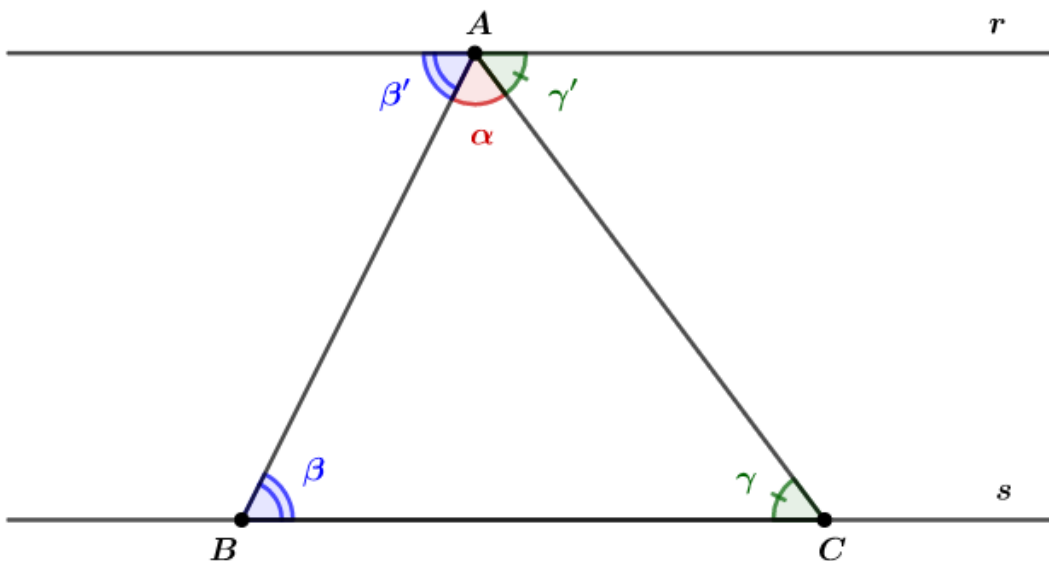


$$\theta = \alpha + \beta$$

Demonstração:

I) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Traçando-se as retas r e s tal que $\overline{BC} \subset s$, $A \in r$ e $r \parallel s$.

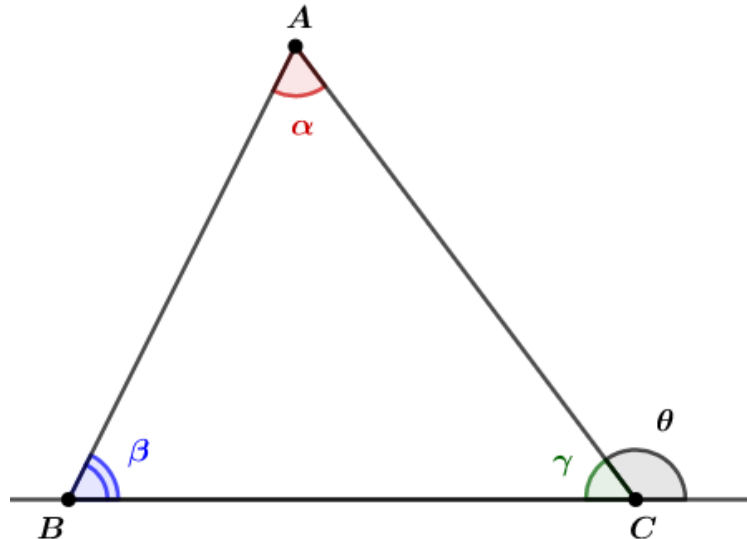


α, β' e γ' são elementos de um ângulo raso, então $\alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ$.

Como $r \parallel s$, temos $\beta \equiv \beta'$ e $\gamma \equiv \gamma'$. Portanto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

II) O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



Podemos ver que $\gamma + \theta = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \theta$.

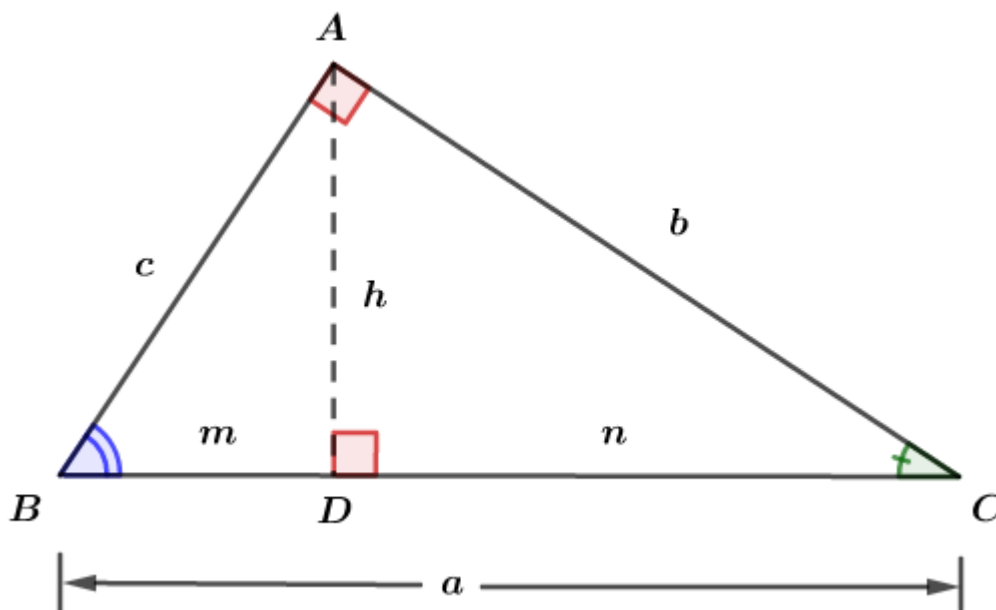
Pelo Teorema I, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Substituindo o valor de γ na equação acima, temos:

$$\alpha + \beta + (180^\circ - \theta) = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = \alpha + \beta$$

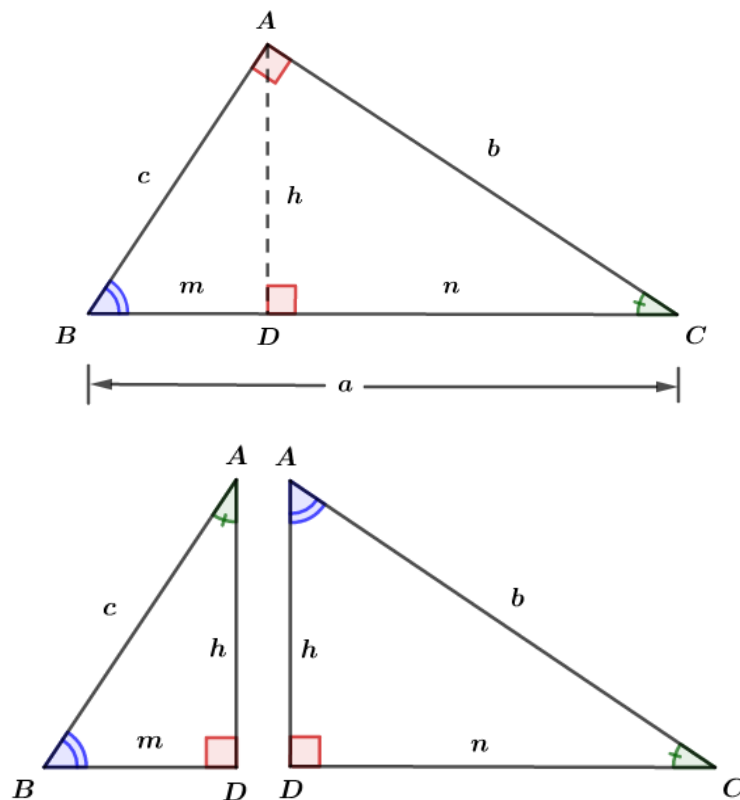
4.9. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO





Relações métricas no triângulo retângulo	
(I)	$b^2 = an$
(II)	$c^2 = am$
(III)	$h^2 = mn$
(IV)	$bc = ah$
(V)	$bh = cn$
(VI)	$ch = bm$
(VII) Pitágoras	$a^2 = b^2 + c^2$
(VIII)	$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Demonstração:



Podemos ver que os triângulos ABC , DBA , DAC são semelhantes. Assim, temos:



$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \\ \frac{b}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow ch = bm \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Rightarrow bh = cn \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{h} = \frac{b}{n} \Rightarrow bh = cn \\ \frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow ch = bm \\ \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = mn \end{cases}$$

*Na próxima aula, veremos com mais detalhes os critérios de semelhança. Saiba que quando os ângulos internos de dois triângulos são congruentes, podemos afirmar que ambos são semelhantes.

Já estudamos o Teorema de Pitágoras, podemos usá-la para provar $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2c^2}$$

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{b^2c^2}$$

Pela relação (IV):

$$\begin{aligned} bc &= ah \\ b^2c^2 &= a^2h^2 \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2h^2}$$

Portanto:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$



Exercícios de Fixação

18. Os lados de um triângulo formam uma PG de razão q . Para que este triângulo exista, determine as condições de q .

Resolução:

Sejam a, aq, aq^2 , os lados de um triângulo. Então, verificando a condição de existência do triângulo pela desigualdade triangular:

$$|aq - aq^2| < a < aq + aq^2$$

Como a é um lado de um triângulo, temos $a > 0$. Dessa forma:

$$|q - q^2| < 1 < q + q^2$$

$$\begin{cases} q^2 + q - 1 > 0 \\ |q - q^2| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 + q - 1 > 0 \text{ (I)} \\ -1 < q - q^2 < 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

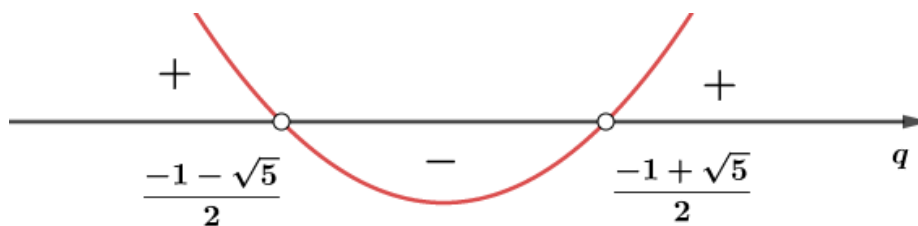
Resolvendo (I):

$$q^2 + q - 1 > 0$$

Encontrando as raízes:

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Estudo do sinal:



$$q < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } q > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Como aq é um lado do triângulo e $a > 0$, temos $q > 0$. Então:

$$q > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Resolvendo (II):

$$-1 < q - q^2 < 1$$

$$\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \text{ (III)} \\ q^2 - q + 1 > 0 \text{ (IV)} \end{cases}$$

Para a inequação (III), temos:

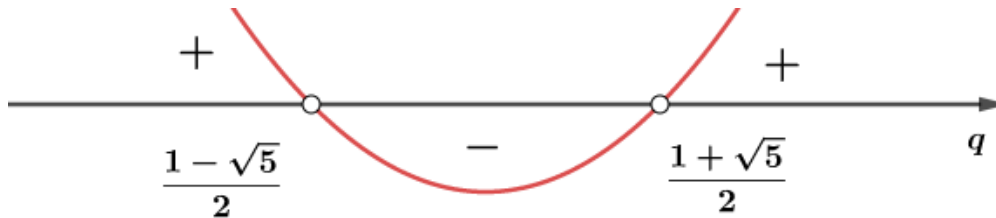


$$q^2 - q - 1 < 0$$

Raízes:

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Estudo do sinal:



$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mas $q > 0$, logo:

$$0 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Para (IV):

$$q^2 - q + 1 > 0$$

Essa inequação não possui raízes reais, pois $\Delta < 0$:

$$\Delta = -3 < 0$$

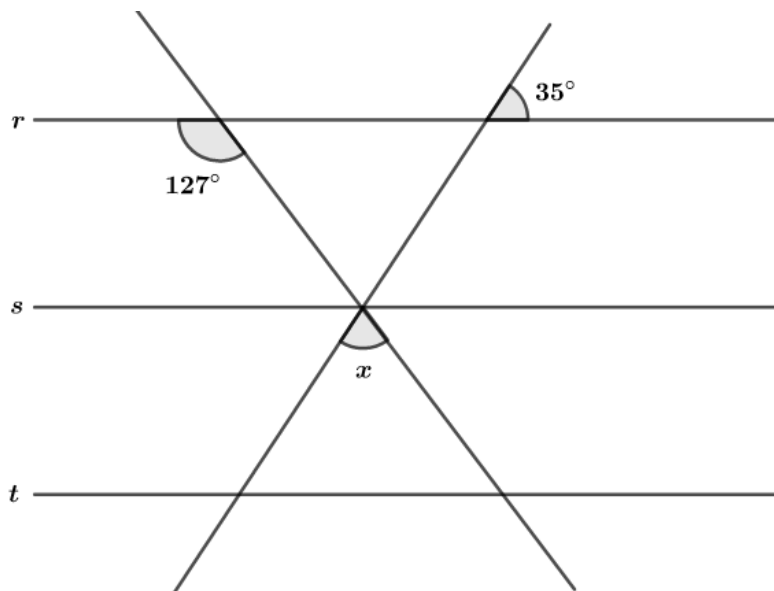
Como essa função possui concavidade para cima, temos que $\forall q \in \mathbb{R} \rightarrow q^2 - q + 1 > 0$.

Então, as condições de q são dadas pela intersecção dos resultados encontrados:

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Gabarito: $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

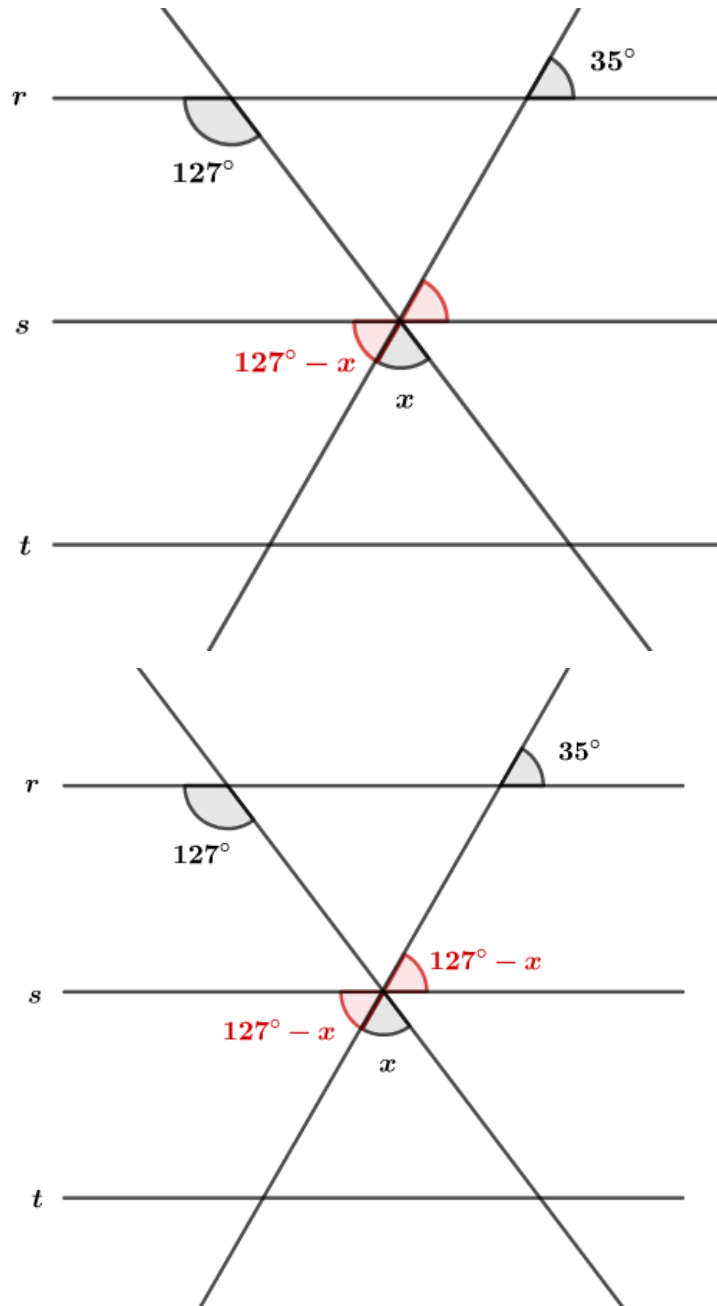
19. Sabendo-se que $r // s // t$, calcule x .





Resolução:

Usando a propriedades dos ângulos de retas paralelas e ângulos opostos pelo vértice, temos:



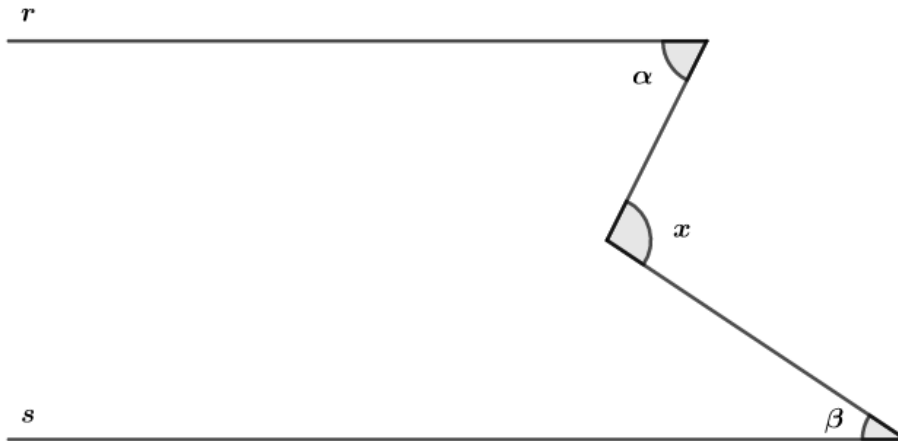
Pela figura, podemos ver que:

$$127^\circ - x = 35^\circ$$

$$x = 92^\circ$$

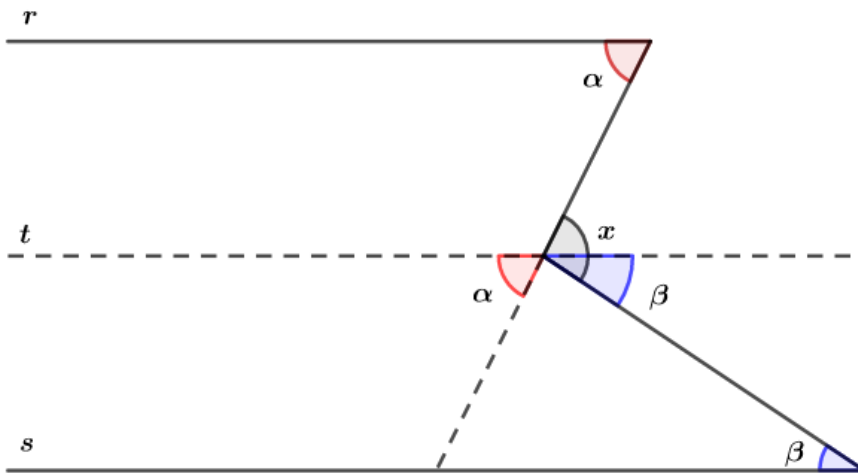
Gabarito: 92°

20. Dada a figura abaixo e sabendo que $r // s$, demonstre que $x = \alpha + \beta$.

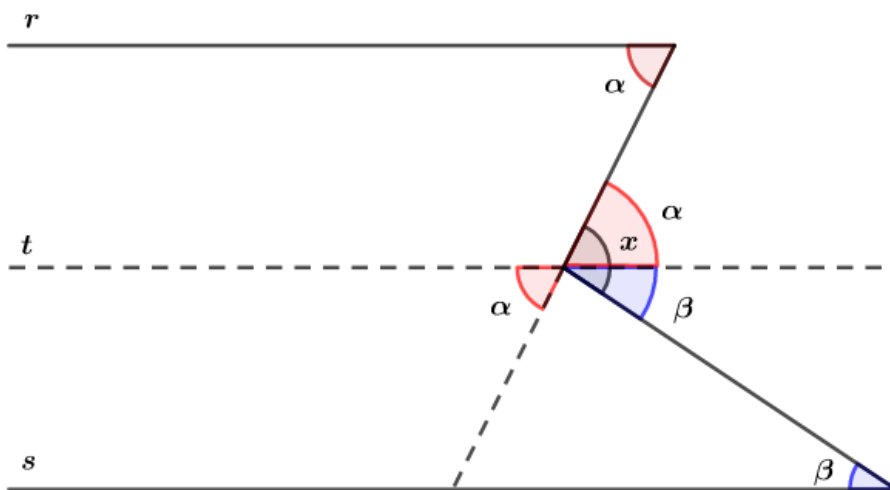


Resolução:

Podemos traçar a reta t tal que $t // s // r$:



Usando a propriedade dos ângulos opostos pelo vértice:



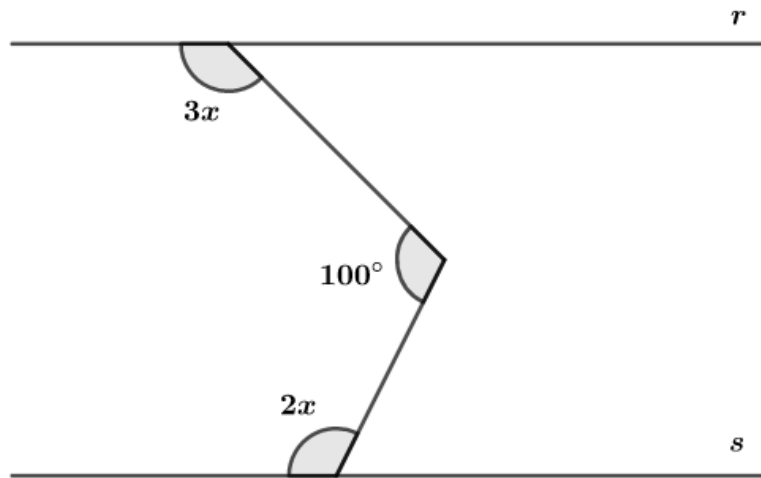
Podemos ver pela figura que:

$$x = \alpha + \beta$$

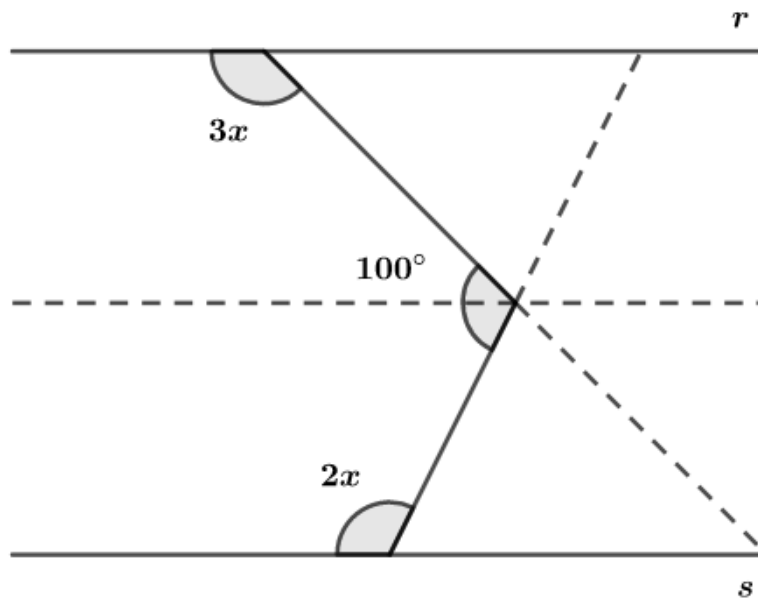


Gabarito: Demonstração

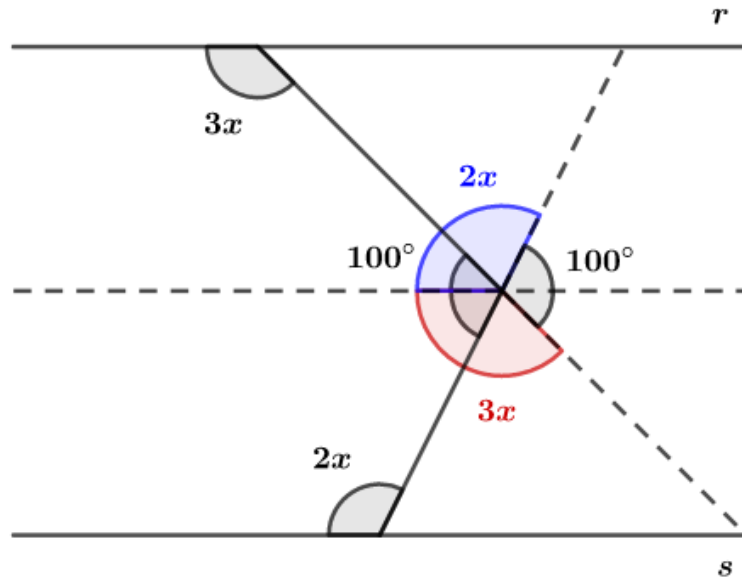
21. Sabendo que $r \parallel s$. Determine o valor de x .



Resolução:



Escrevendo os ângulos correspondentes na figura, temos:



Somando os ângulos, temos:

$$2x + 3x + 100^\circ = 360^\circ$$

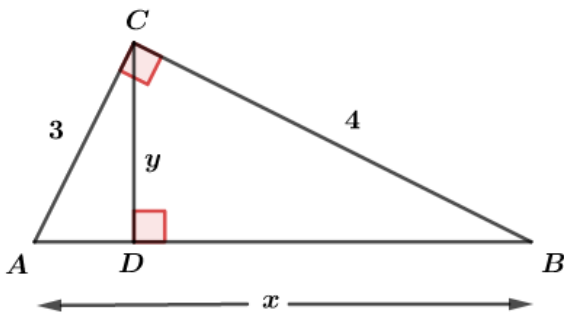
$$5x = 260^\circ$$

$$x = 52^\circ$$

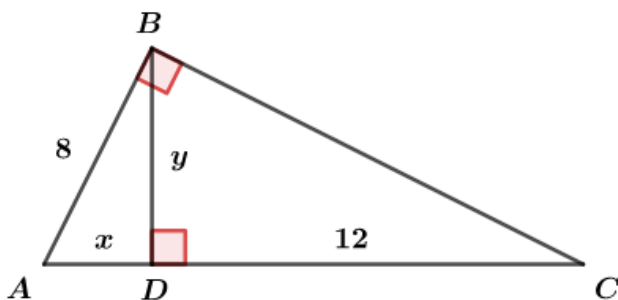
Gabarito: 52°

22. Determine x e y :

a)



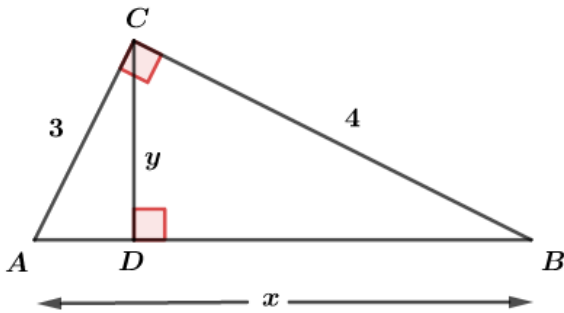
b)





Resolução:

a)



Usando as relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$$xy = 3 \cdot 4$$

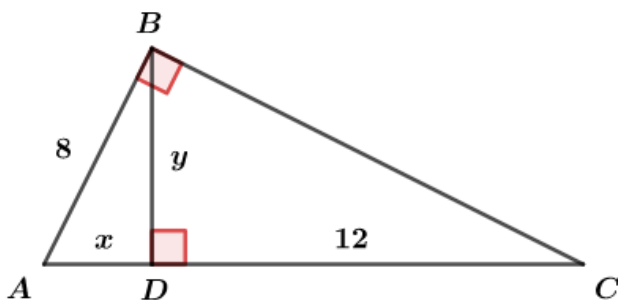
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$$

Substituindo x na equação:

$$5y = 12 \Rightarrow y = 12/5$$

b)



ΔABD é retângulo

Usando o Teorema de Pitágoras no ΔABD :

$$8^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 64 \quad (I)$$

$$\Delta ABD \sim \Delta BDC$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{12} \Rightarrow y^2 = 12x \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$x = (-6 \pm \sqrt{100}) = -16 \text{ ou } 4$$

Como $x > 0$, temos $x = 4$.

Substituindo x em (II):

$$y^2 = 12 \cdot 4$$

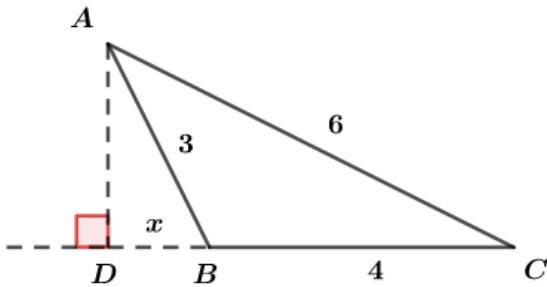
$$y = 4\sqrt{3}$$



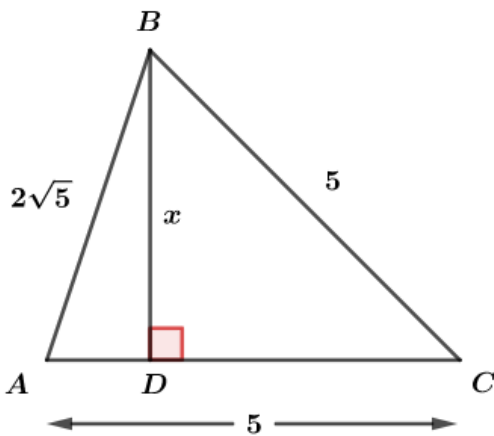
Gabarito: a) $x = 5$ e $y = 12/5$ b) $x = 4$ e $y = 4\sqrt{3}$

23. Determine x :

a)

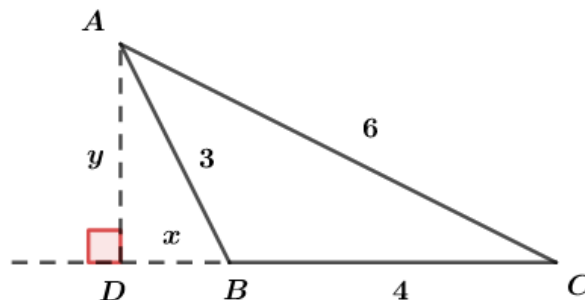


b)



Resolução:

a)



Fazendo $AD = y$ e aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABD e ADC :

$$3^2 = x^2 + y^2 \quad (I)$$

$$6^2 = y^2 + (x + 4)^2 \quad (II)$$

Subtraindo $(II) - (I)$:

$$36 - 9 = (x + 4)^2 - x^2$$

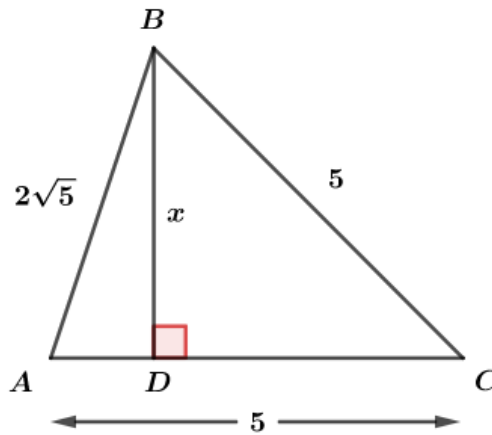
$$27 = (x + 4 - x)(x + 4 + x)$$

$$\frac{27}{4} = 2x + 4$$



$$x = \frac{27}{8} - 2 = \frac{11}{8}$$

b)



Fazendo $AD = y$ e aplicando o teorema de Pitágoras:

$\triangle ABD$:

$$(2\sqrt{5})^2 = x^2 + y^2 \quad (I)$$

$\triangle BDC$:

$$5^2 = x^2 + (5 - y)^2 \quad (II)$$

Subtraindo $(II) - (I)$:

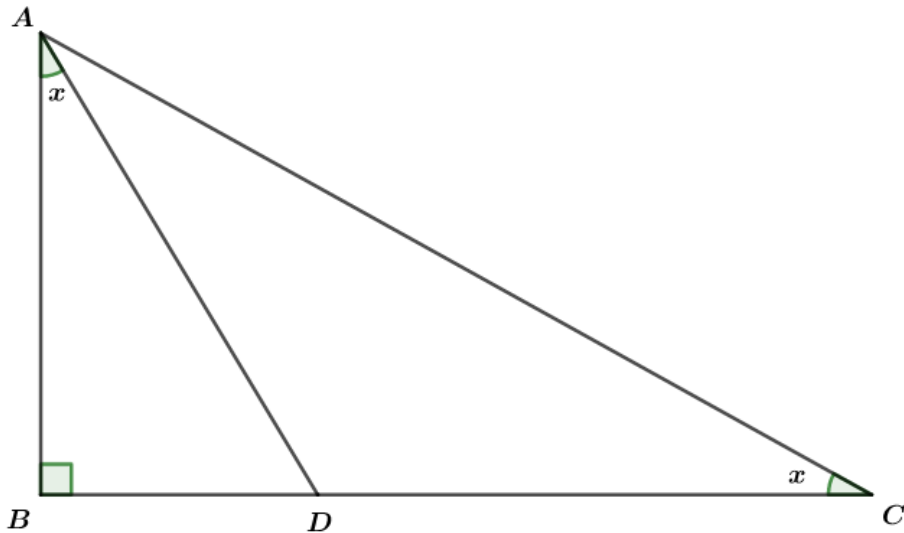
$$\begin{aligned} 25 - 20 &= (5 - y)^2 - y^2 \\ 5 &= (5 - y - y)(5 - y + y) \\ 1 &= 5 - 2y \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Substituindo y em (I) :

$$\begin{aligned} 20 &= x^2 + 2^2 \\ x^2 &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

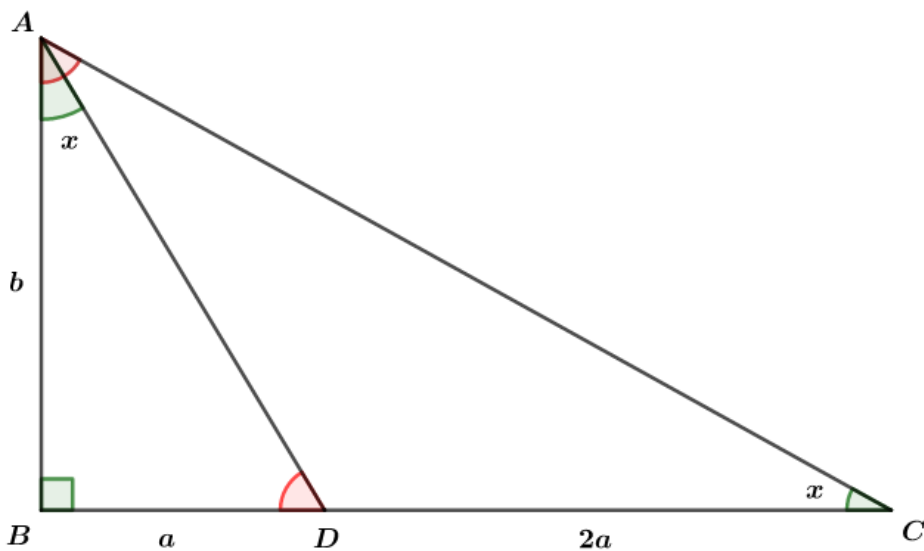
Gabarito: a) $x = 11/8$ b) $x = 4$

24. O $\triangle ABC$ é retângulo em B e $CD = 2 \cdot BD$. Calcule x .



Resolução:

Fazendo $AB = b$ e $BD = a$, temos $CD = 2a$. Perceba que os triângulos ABD e ABC são semelhantes, pois possuem todos os ângulos internos congruentes:



Assim, calculando as razões entre os triângulos:

$$\Delta ABD \sim \Delta CBA$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{3a}$$

$$b^2 = 3a^2$$

$$b = \sqrt{3}a$$

O ângulo x é dado por:

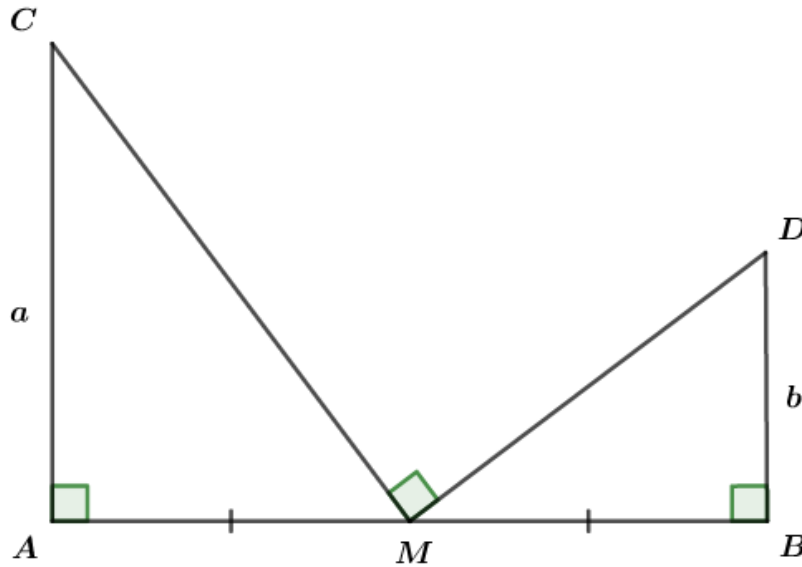
$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 30^\circ$$

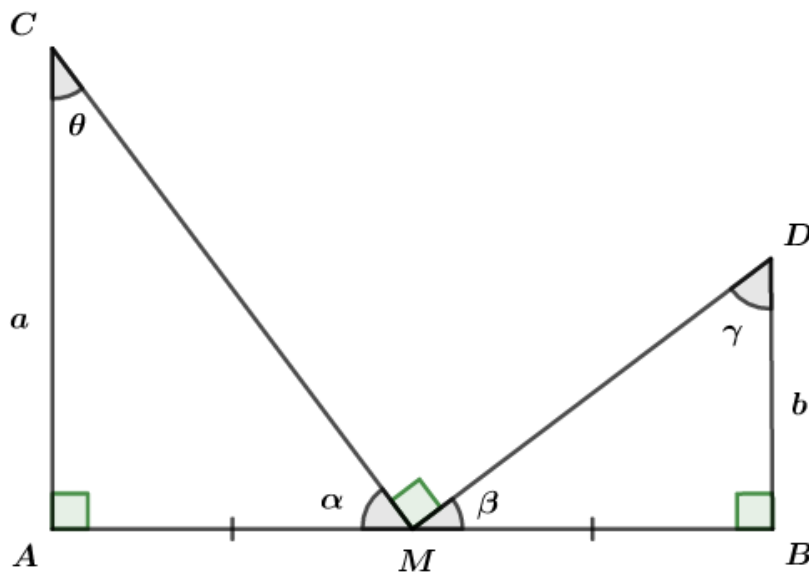


Gabarito: $x = 30^\circ$

25. Na figura a seguir temos $AM = MB$. Calcule a medida de \overline{AB} .



Resolução:



Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos:

$$\theta + \alpha = 90^\circ \text{ (I)}$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ \text{ (II)}$$

Sendo \widehat{M} um ângulo raso:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ (III)}$$

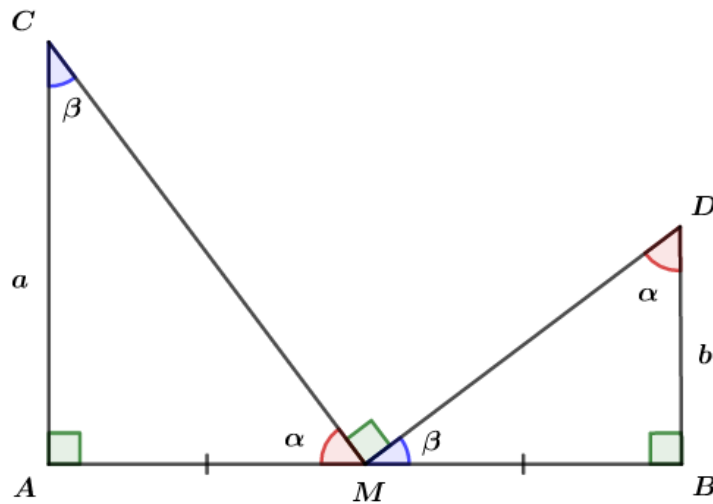
Fazendo (III) – (II):

$$\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma$$

Fazendo (III) – (I):



$$\beta - \theta = 0 \Rightarrow \beta = \theta$$



Os triângulos ACM e BMD são semelhantes, logo:

$$\frac{a}{AM} = \frac{MB}{b}$$

$$ab = MB \cdot AM$$

Como $AM = MB = x$, temos:

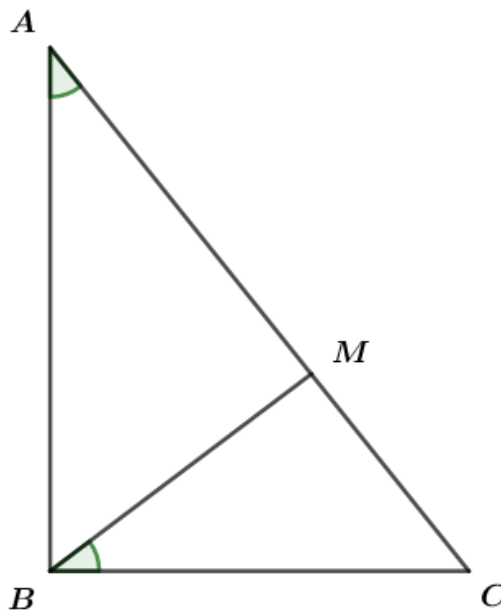
$$x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

Assim, a medida de \overline{AB} é dada por:

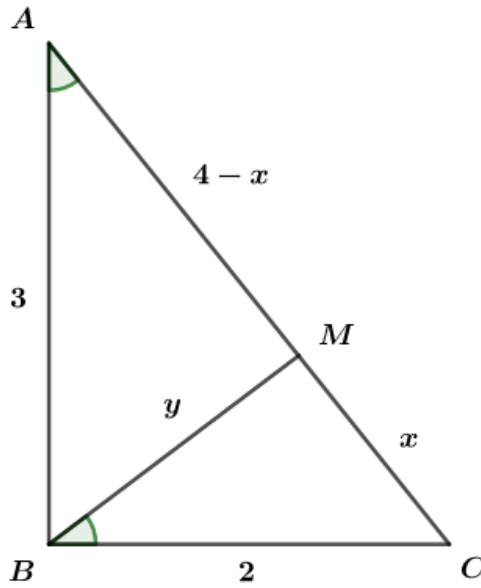
$$AB = 2x = 2\sqrt{ab}$$

Gabarito: $AB = 2\sqrt{ab}$

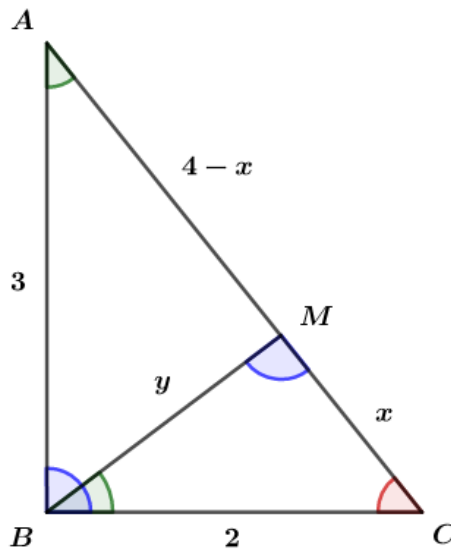
26. Na figura abaixo temos $\widehat{MBC} = \widehat{BAC}$, $AB = 3$, $BC = 2$ e $AC = 4$. Calcule as medidas dos segmentos \overline{MC} e \overline{MB} .



Resolução:



Os triângulos BMC e ABC são semelhantes, pois todos os ângulos internos são congruentes:



Fazendo a semelhança dos triângulos:

$$\Delta ABC \sim \Delta BMC$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{BC}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{y}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{x}$$

$$x = 1$$

Gabarito: $MC = 1$ e $MB = 3/2$



5. QUESTÕES NÍVEL 1

1. (ESA/2015)

Em um triângulo retângulo de lados 9 m , 12 m e 15 m , a altura relativa ao maior lado será:

- a) $7,2\text{ m}$
- b) $7,8\text{ m}$
- c) $8,6\text{ m}$
- d) $9,2\text{ m}$
- e) $9,6\text{ m}$

2. (ESA/2015)

Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$, a hipotenusa mede

- a) $\sqrt{10}$
- b) $\sqrt{11}$
- c) $\sqrt{13}$
- d) $\sqrt{17}$
- e) $\sqrt{19}$

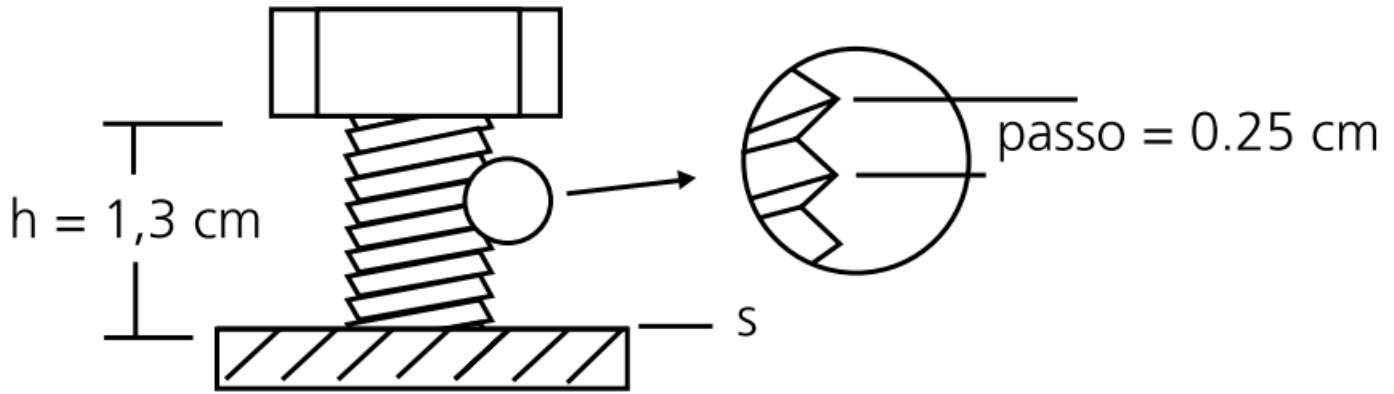
3. (ESA/2006)

O ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio às 14h25min é igual a:

- a) $86^{\circ}30'$
- b) $46^{\circ}30'$
- c) $77^{\circ}30'$
- d) $89^{\circ}60'$
- e) $12^{\circ}30'$

4. (ESA/2005)

Chama-se passo a distância entre dois sulcos consecutivos de um parafuso. Ao dar-se uma volta completa ($\alpha = 360^{\circ}$) em uma chave que o aperta, o parafuso penetra 1 passo no corpo onde está preso. Na situação ao lado, para apertar completamente o parafuso até que sua cabeça encoste na superfície “s” deve-se girar o parafuso, em graus



- a) 468°
- b) 1872°
- c) 1440°
- d) 117°
- e) 1989°

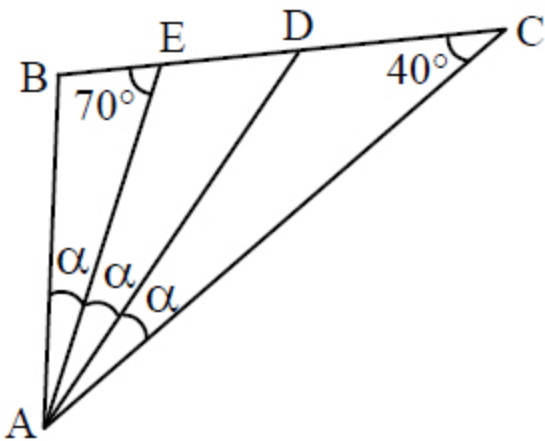
5. (EEAR/2018)

O complemento do suplemento do ângulo de 112° mede

- a) 18°
- b) 28°
- c) 12°
- d) 22°

6. (EEAR/2017)

Se ABC é um triângulo, o valor de α é



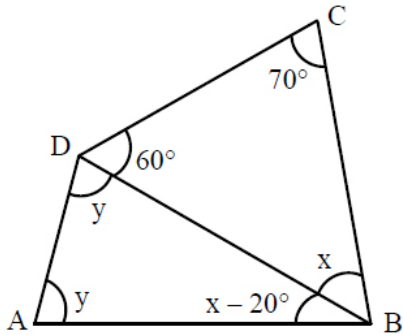
- a) 10°



- b) 15°
- c) 20°
- d) 25°

7. (EEAR/2017)

No quadrilátero $ABCD$, o valor de $y - x$ é igual a



- a) $2x$
- b) $2y$
- c) $\frac{x}{2}$
- d) $\frac{y}{2}$

8. (EEAR/2016)

Os ângulos \widehat{A} e \widehat{B} são congruentes. Sendo $\widehat{A} = 2x + 15^\circ$ e $\widehat{B} = 5x - 9^\circ$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x .

- a) 2°
- b) 8°
- c) 12°
- d) 24°

9. (EEAR/2016)

Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$ cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15 cm. As medidas, em cm, dos catetos são

- a) 6 e 9
- b) 2 e 13



c) 3 e 12

d) 5 e 10

10. (EEAR/2016)

Uma escada é apoiada em uma parede perpendicular ao solo, que por sua vez é plano. A base da escada, ou seja, seu contato com o chão, dista 10m da parede. O apoio dessa escada com a parede está a uma altura de $10\sqrt{3}$ m do solo. Isto posto, o ângulo entre a escada e o solo é de

a) 60° b) 45° c) 30° d) 15° **11. (EEAR/2016)**

Um triângulo ABC de base $BC = (x + 2)$ tem seus lados AB e AC medindo, respectivamente, $(3x - 4)$ e $(x + 8)$. Sendo este triângulo isósceles, a medida da base BC é

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

12. (EEAR/2015)

Em um triângulo ABC, retângulo em C, a razão $\frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{cos } \hat{A}}$ é igual a

a) $\frac{AC}{BC}$ b) $\frac{AB}{AC}$

c) 1

d) 2

13. (EEAR/2015)

Seja ABC um triângulo isósceles de base $BC = (x + 3)$ cm, com $AB = (x + 4)$ cm e $AC = (3x - 10)$ cm. A base de ABC mede cm.

a) 4



- b) 6
- c) 8
- d) 10

14. (EEAR/2013)

Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede

- a) 20°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 60°

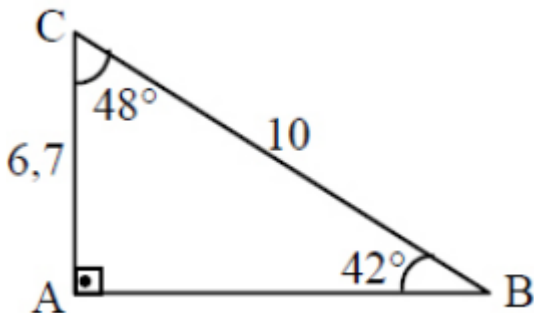
15. (EEAR/2012)

Num triângulo ΔRST a medida do ângulo interno \widehat{R}_i é 68° e do ângulo externo \widehat{S}_e é 105° Então o ângulo interno T mede:

- a) 52°
- b) 45°
- c) 37°
- d) 30°

16. (EEAR/2012)

Considerando as medidas indicadas no triângulo, o valor de $\text{sen}(42^\circ) + \text{sen}(48^\circ)$ é



- a) 1,41
- b) 1,67
- c) 1,74



d) 1,85

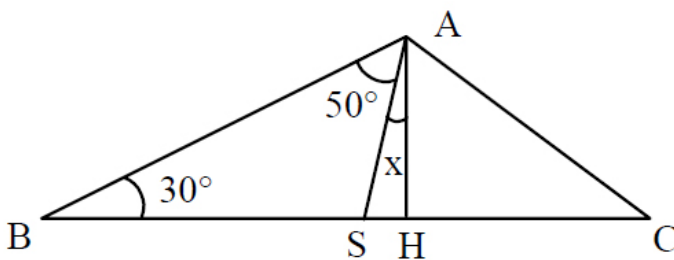
17. (EEAR/2011)

Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 4 cm, e o ângulo que lhe é adjacente mede 60° . A hipotenusa desse triângulo, em cm, mede

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9

18. (EEAR/2010)

Na figura, AH é altura do triângulo ABC.

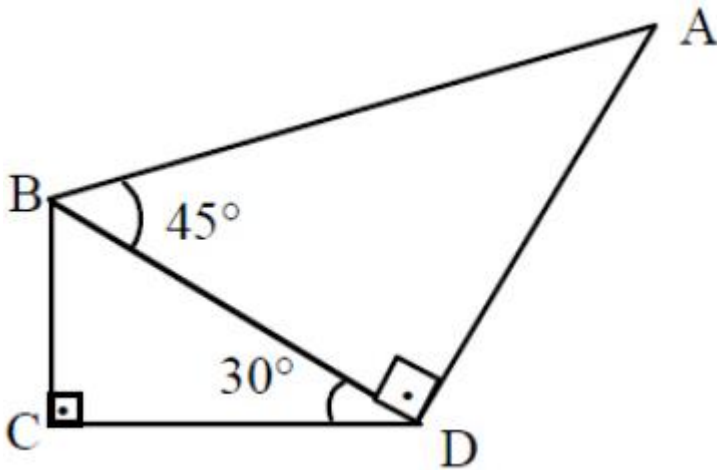


Assim, o valor de x é:

- a) 20°
- b) 15°
- c) 10°
- d) 5°

19. (EEAR/2009)

Na figura, $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$.



Assim, a medida de \overline{AB} , em cm, é

- a) $2\sqrt{3}$
- b) $4\sqrt{2}$
- c) $5\sqrt{2}$
- d) $3\sqrt{3}$

20. (EEAR/2008)

Um triângulo $\triangle ABC$ tem dois lados congruentes que formam entre si um ângulo de 42° . Um dos outros dois ângulos internos desse triângulo medem

- a) 39°
- b) 48°
- c) 58°
- d) 69°

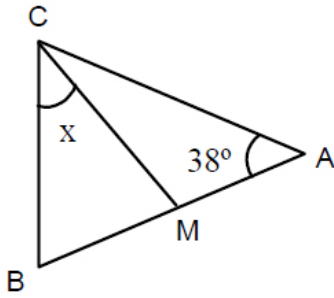
21. (EEAR/2008)

O triângulo cujos lados medem 6cm , 7cm e 10cm é classificado como

- a) equilátero e retângulo.
- b) escaleno e acutângulo.
- c) isósceles e acutângulo.
- d) escaleno e obtusângulo.

22. (EEAR/2008)

Na figura, $AB = AC$ e $BC = CM$. O valor de x é:



- a) 50°
- b) 45°
- c) 42°
- d) 38°

23. (EEAR/2008)

Em um triângulo ABC , retângulo em A , a hipotenusa mede 5 dm e $\text{sen}(\widehat{B}) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\widehat{C})$. Nessas condições, o maior cateto mede, em dm ,

- a) 3
- b) 4
- c) $\sqrt{5}$
- d) $2\sqrt{5}$

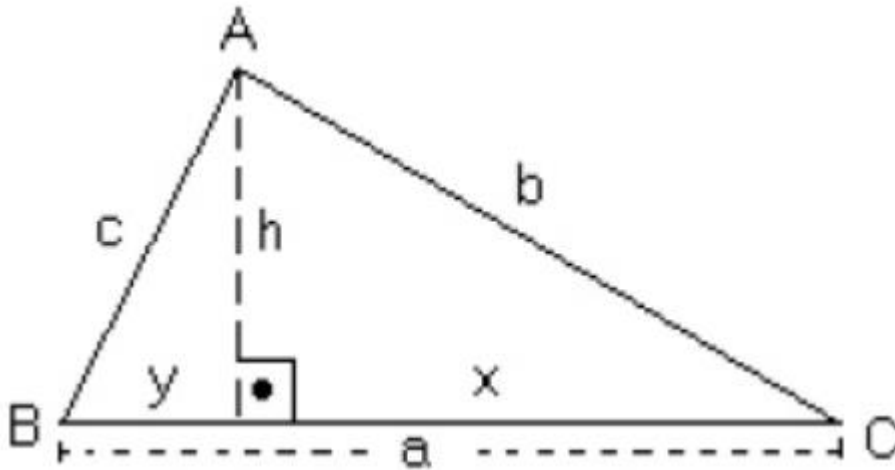
24. (EEAR/2006)

Em um triângulo ABC , o ângulo externo de vértice A mede 116° . Se a diferença entre as medidas dos ângulos internos B e C é 30° , então o maior ângulo interno do triângulo mede:

- a) 75° .
- b) 73° .
- c) 70° .
- d) 68° .

25. (EEAR/2006)

Sejam as relações métricas no triângulo ABC :



I - $b^2 = a \cdot x$

II - $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$

III - $h = x \cdot y$

IV - $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Se o triângulo ABC é retângulo em A, então o número de relações verdadeiras acima é

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

26. (EEAR/2005)

Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual ao dobro do produto das medidas dos catetos. Um dos ângulos agudos desse triângulo mede

- a) 15°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 60°

27. (EEAR/2005)

Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 20m, e um dos catetos, 10m. A medida da projeção deste cateto sobre a hipotenusa, em metros, é igual a

- a) 5
- b) 6

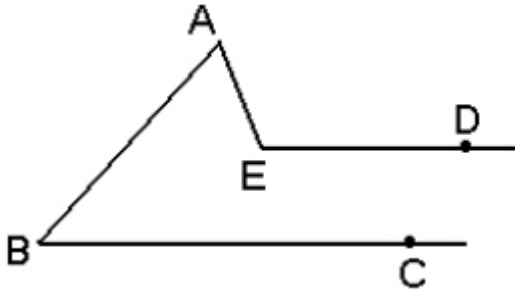


c) 7

d) 8

28. (EEAR/2004)

Na figura, $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, $med(\widehat{EAB}) = 80^\circ$ e $med(\widehat{CBA}) = 35^\circ$. Assim, a medida de \widehat{DEA} é



a) 100° .

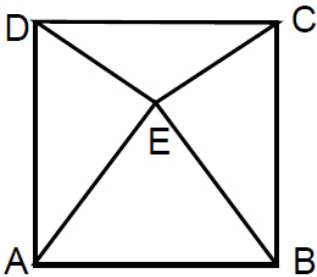
b) 110° .

c) 115° .

d) 120° .

29. (EEAR/2004)

A figura $ABCD$ é um quadrado, e ABE é um triângulo equilátero.



Nessas condições, a medida do ângulo \widehat{EDC} é:

a) 5°

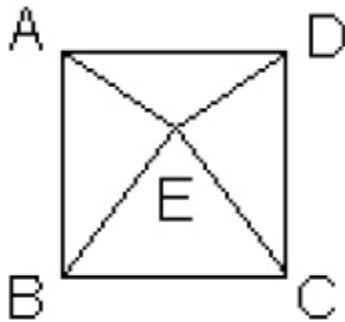
b) 10°

c) 15°

d) 20°

30. (EEAR/2004)

Se $ABCD$ é um quadrado e BEC é um triângulo equilátero, então a medida do ângulo \widehat{EAB} é:



- a) 75°
- b) 60°
- c) 30°
- d) 85°

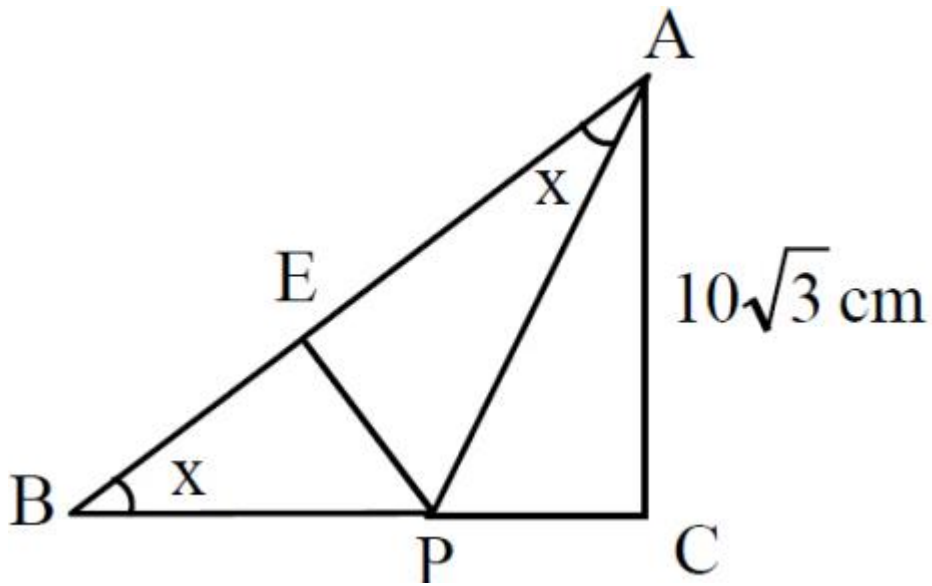
31. (EEAR/2004)

O perímetro de um triângulo retângulo é 30 cm. Se a soma das medidas dos catetos é 17 cm, e a soma das medidas da hipotenusa e do cateto menor é 18 cm, então a medida, em cm, do cateto maior é

- a) 8
- b) 9
- c) 12
- d) 15

32. (EEAR/2004)

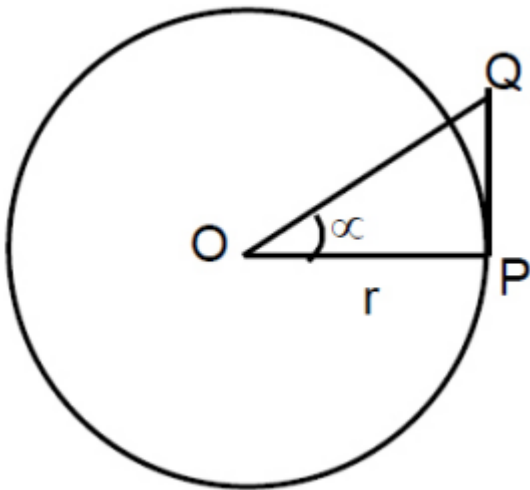
Na figura, são retângulos em E e em C, respectivamente, os triângulos AEP e ACB. Se $x = 30^\circ$, então a medida de \overline{PE} , em cm, é



- a) 10
- b) $5\sqrt{3}$
- c) $10\sqrt{3}$
- d) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

33. (EEAR/2004)

O círculo da figura tem centro O e raio r.



Sabendo-se que \overline{PQ} equivale a $\frac{5r}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P, o valor de $\text{sen } \alpha$ é

- a) $\frac{5}{12}$
- b) $\frac{5}{13}$
- c) $\frac{12}{13}$
- d) 0,48



34. (EEAR/2004)

Num triângulo retângulo, o menor cateto mede 1,5 cm, e a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa é 1,6 cm. O valor da secante do maior ângulo agudo desse triângulo é

- a) $\frac{4}{3}$
- b) $\frac{5}{3}$
- c) $\frac{4}{5}$
- d) $\frac{7}{5}$

35. (EEAR/2003)

Considere:

I. Um triângulo isósceles PRQ , de base PQ e altura RH .

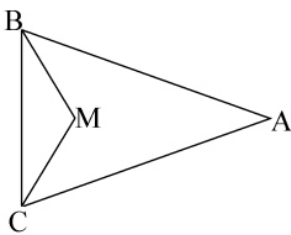
II. Dois pontos T e S sobre RH , de tal modo que o triângulo PTQ seja equilátero e o triângulo PSQ seja retângulo em S .

Considerando somente os ângulos internos dos triângulos, se somarmos as medidas de \widehat{R} e \widehat{S} , obteremos o dobro da medida de \widehat{T} . Sendo assim, a medida do ângulo $T\widehat{P}R$ é:

- a) 5°
- b) 15°
- c) 30°
- d) 45°

36. (EEAR/2003)

Na figura, $AB = AC$, M é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo ABC e o ângulo $B\widehat{M}C$ é o triplo do ângulo \widehat{A} , então a medida de \widehat{A} é:



- a) 15°
- b) 18°
- c) 24°



d) 36°

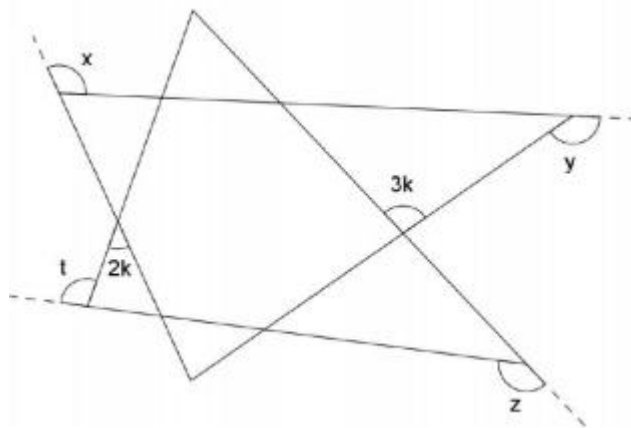
37. (EEAR/2003)

Um triângulo $\triangle DEF$ tem $\widehat{D\hat{E}F} = 38^\circ$ e $\widehat{E\hat{F}D} = 74^\circ$. O ângulo que a bissetriz DG forma com a altura DH mede:

- a) 18°
- b) 20°
- c) $26^\circ 30'$
- d) 34°

38. (CN/2012)

Observe a figura a seguir.



Na figura acima, sabe-se que $k > 36^\circ$. Qual é o menor valor natural da soma $x + y + z + t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

- a) 479°
- b) 539°
- c) 599°
- d) 659°
- e) 719°

39. (CN/2005)

Num triângulo ABC, $AB = AC$, o ponto D interno ao lado AC é determinado de modo que $DC = BC$. Prolonga-se o lado BC (no sentido de B para C) até o ponto E de modo que $CE = BC$. Se o ângulo ABD mede 12° , qual a medida, em graus, do ângulo BAC?



- a) 100
- b) 88
- c) 76
- d) 54
- e) 44

40. (CN/2003)

Num triângulo acutângulo isósceles ABC , o segmento BP , P interno ao segmento AC , forma com o lado BA um ângulo de 15° . Quanto mede o maior ângulo de PBC , sabendo que os triângulos ABP e ABC são semelhantes?

- a) $65,5^\circ$
- b) $82,5^\circ$
- c) $97,5^\circ$
- d) 135°
- e) 150°

41. (CN/1999)

O número de triângulos que podemos construir com lados medindo 5, 8 e x , $x \in \mathbb{N}^*$, de tal forma que seu ortocentro seja interno ao triângulo é:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

42. (CN/1999)

Dados os casos clássicos de congruência de triângulos $A.L.A.$, $L.A.L.$, $L.L.L.$ e $L.A.A_0$, onde L = lado, A = ângulo e A_0 = ângulo oposto ao lado dado, complete corretamente as lacunas das sentenças abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Para se mostrar que a mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos extremos A e B , usa-se o caso ____ de congruência de triângulos.



II. Para se mostrar que a bissetriz de um ângulo $A\hat{E}C$ tem seus pontos equidistantes dos lados BA e BC desse ângulo, sem usar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, usa-se o caso ____ de congruência de triângulos.

- a) L.A.L. / A.L.A.
- b) L.A.L. / L.A.A_o.
- c) L.L.L. / L.A.A_o.
- d) L.A.A_o. / L.A.L.
- e) A.L.A. / L.L.L.

43. (CN/1998)

Uma cidade B encontra-se 600 km a leste de uma cidade A ; e uma cidade C encontra-se 500km ao norte da mesma cidade A . Um ônibus parte de B , com velocidade constante em linha reta e na direção da cidade A . No mesmo instante e com velocidade constante igual à do ônibus, um carro, também em linha reta, parte de C para interceptá-lo. Aproximadamente a quantos quilômetros de A , o carro alcançará o ônibus?

- a) 92
- b) 94
- c) 96
- d) 98
- e) 100

GABARITO

- 1. a
- 2. d
- 3. c
- 4. b
- 5. d
- 6. b
- 7. c
- 8. b
- 9. d
- 10. a
- 11. c
- 12. c
- 13. d
- 14. b



- 15. c
- 16. a
- 17. c
- 18. c
- 19. b
- 20. d
- 21. d
- 22. d
- 23. d
- 24. b
- 25. c
- 26. c
- 27. a
- 28. c
- 29. c
- 30. a
- 31. c
- 32. a
- 33. b
- 34. b
- 35. b
- 36. d
- 37. a
- 38. c
- 39. e
- 40. c
- 41. a
- 42. b
- 43. a

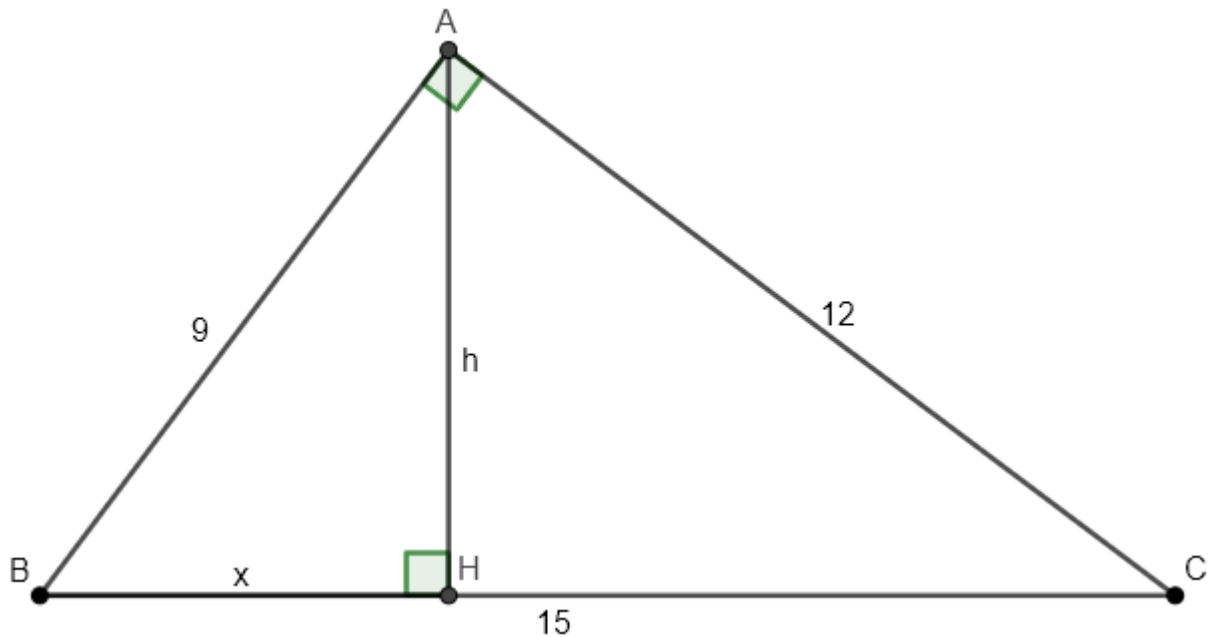
RESOLUÇÃO

1. (ESA/2015)

Em um triângulo retângulo de lados 9 m , 12 m e 15 m , a altura relativa ao maior lado será:

- a) $7,2\text{ m}$
- b) $7,8\text{ m}$
- c) $8,6\text{ m}$
- d) $9,2\text{ m}$
- e) $9,6\text{ m}$

Comentários



Observe que ΔHBA e ΔABC são triângulos retângulos e que, além disso, $H\hat{B}A = A\hat{B}C$. Portanto, temos que $\Delta HBA \sim \Delta ABC$. Logo, valem as relações:

$$\frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{9}{15} \therefore x = \frac{27}{5}$$

Usando o teorema de Pitágoras no ΔHBA , temos:

$$h^2 = 9^2 - x^2 = 9^2 - \left(\frac{27}{5}\right)^2 = 9^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = 9^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow h = 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{5} \therefore h = 7,2 \text{ m.}$$

Gabarito: “a”.

2. (ESA/2015)

Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$, a hipotenusa mede

- a) $\sqrt{10}$
- b) $\sqrt{11}$
- c) $\sqrt{13}$
- d) $\sqrt{17}$
- e) $\sqrt{19}$

Comentários

Teorema de Pitágoras. $a^2 = b^2 + c^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{9}^2 = 8 + 9 = 17 \therefore a = \sqrt{17}$.

Gabarito: “d”.

3. (ESA/2006)

O ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio às 14h25min é igual a:

- a) $86^\circ 30'$



b) $46^{\circ}30'$

c) $77^{\circ}30'$

d) $89^{\circ}60'$

e) $12^{\circ}30'$

Comentários

Vamos definir o 0° na posição 12 do relógio. Se pensarmos, às 14h o ponteiro das horas estará na posição 60° e o ponteiro dos minutos estará na posição 0° . Entretanto, às 14h25, terá se passado $25/60 = 5/12$ de uma hora. Assim, como em uma hora o ponteiro das horas gira:

$$\frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}$$

Então, passados $5/12$ de uma hora, o ponteiro das horas terá girado de:

$$\frac{5}{12} \cdot 30^{\circ} = \frac{25^{\circ}}{2}$$

Então sua nova posição será $60^{\circ} + 25^{\circ}/2 = 72,5^{\circ}$.

Agora, pensando no ponteiro dos minutos, sabemos que em uma hora ele gira 360° . Portanto, em $5/12$ de uma hora, ele terá girado:

$$\frac{5}{12} \cdot 360^{\circ} = 150^{\circ}$$

E essa é sua posição final (14h25).

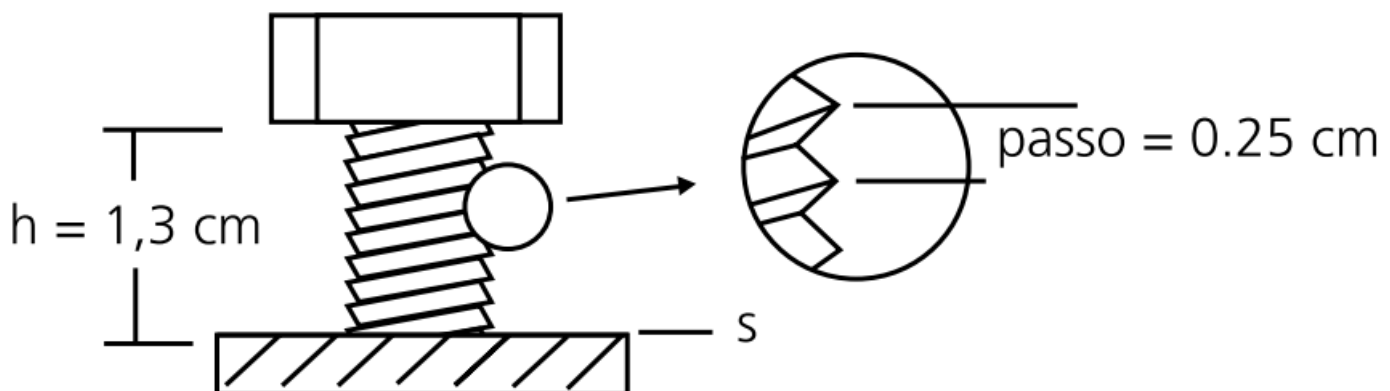
Portanto, o ângulo convexo entre estes (menor que 180°) é:

$$150^{\circ} - 72,5^{\circ} = 77,5^{\circ} = 77^{\circ}30'$$

Gabarito: "c".

4. (ESA/2005)

Chama-se **passo** a distância entre dois sulcos consecutivos de um parafuso. Ao dar-se uma volta completa ($\alpha = 360^{\circ}$) em uma chave que o aperta, o parafuso penetra 1 passo no corpo onde está preso. Na situação ao lado, para apertar completamente o parafuso até que sua cabeça encoste na superfície "s" deve-se girar o parafuso, em graus



a) 468°



- b) 1872°
- c) 1440°
- d) 117°
- e) 1989°

Comentários

Se precisamos que o parafuso entre $h = 1,3 \text{ cm}$ então precisamos fazer a regra de 3, pois sabemos que 360° faz com que o parafuso entre $0,25 \text{ cm}$.

$$\frac{360^\circ}{0,25} = \frac{\alpha}{1,3} \Rightarrow \alpha = \frac{130}{25} \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 1872^\circ$$

Gabarito: "b".

5. (EEAR/2018)

O complemento do suplemento do ângulo de 112° mede

- a) 18°
- b) 28°
- c) 12°
- d) 22°

Comentários

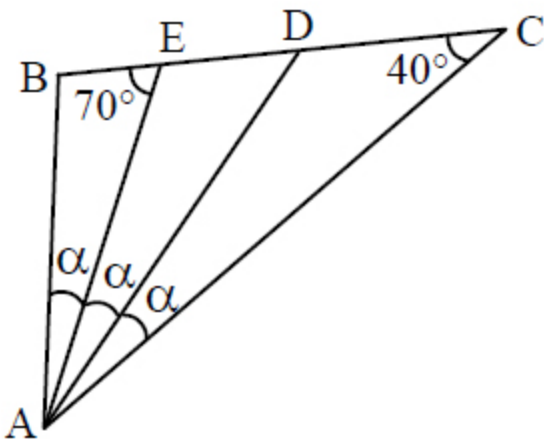
suplemento de $112^\circ = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.

complemento de $68^\circ = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$.

Gabarito: "d".

6. (EEAR/2017)

Se ABC é um triângulo, o valor de α é



- a) 10°
- b) 15°

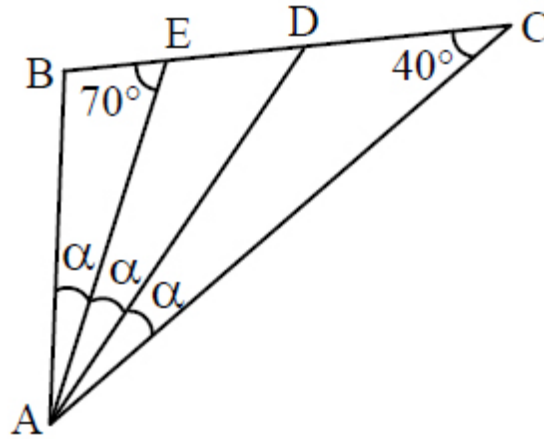


c) 20°

d) 25°

Comentários

Com base na seguinte figura presente no enunciado, temos



Perceba no triângulo ΔABC e a primeira relação:

$$3\alpha + \hat{B} + 40^\circ = 180^\circ$$

$$3\alpha + \hat{B} = 140^\circ$$

No triângulo ΔABE obtemos a segunda relação:

$$\alpha + \hat{B} + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \hat{B} = 110^\circ$$

Subtraindo a segunda relação da primeira temos:

$$3\alpha + \hat{B} - (\alpha + \hat{B}) = 140^\circ - 110^\circ$$

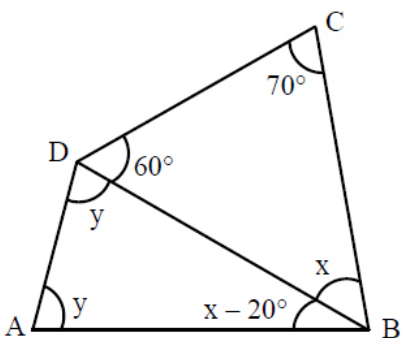
$$2\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

Gabarito: "b".

7. (EEAR/2017)

No quadrilátero $ABCD$, o valor de $y - x$ é igual a



a) $2x$



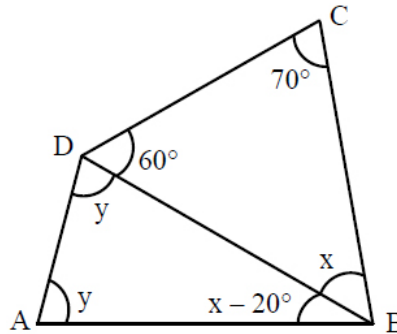
b) $2y$

c) $\frac{x}{2}$

d) $\frac{y}{2}$

Comentários

Com base na seguinte figura presente no enunciado, temos



No triângulo ΔBDC :

$$60^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 50^\circ$$

No triângulo ΔABD temos:

$$y + y + x - 20^\circ = 180^\circ$$

$$2y + 50^\circ - 20^\circ = 180^\circ$$

$$2y = 150^\circ$$

$$y = 75^\circ$$

Temos, portanto, que $y - x = 75^\circ - 50^\circ = 25^\circ$

$$y - x = 25^\circ = \frac{50^\circ}{2} = \frac{x}{2}$$

Gabarito: "c".

8. (EEAR/2016)

Os ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes. Sendo $\hat{A} = 2x + 15^\circ$ e $\hat{B} = 5x - 9^\circ$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x .

a) 2°

b) 8°

c) 12°

d) 24°

Comentários

$$\hat{A} \text{ e } \hat{B} \text{ congruentes} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow 2x + 15^\circ = 5x - 9^\circ \Rightarrow 3x = 24^\circ \therefore x = 8^\circ$$

Gabarito: "b".



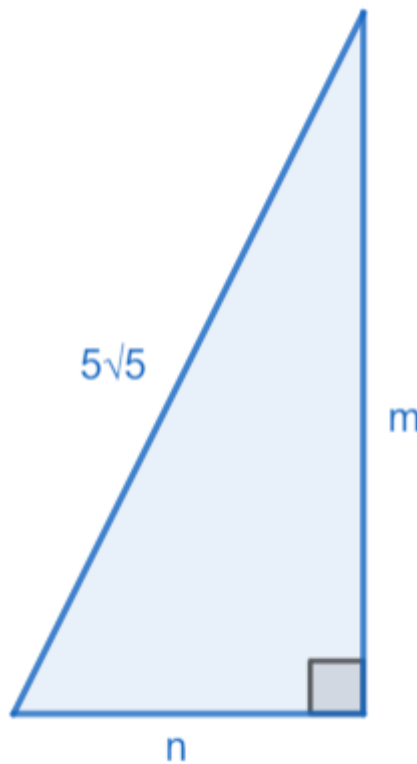
9. (EEAR/2016)

Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$ cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15 cm. As medidas, em cm, dos catetos são

- a) 6 e 9
- b) 2 e 13
- c) 3 e 12
- d) 5 e 10

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Pelo enunciado temos:

$$m + n = 15$$

$$m = 15 - n$$

eq. 1

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$m^2 + n^2 = (5\sqrt{5})^2 = 125$$

eq. 2

Substituindo a eq. 1 em eq. 2, obtemos:

$$(15 - n)^2 + n^2 = 125$$

$$(225 - 30n + n^2) + n^2 = 125$$

$$2 \cdot n^2 - 30 \cdot n + 100 = 0$$

Simplificando:



$$n^2 - 15n + 50 = 0$$

Aplicando o método de Bhaskara para resolver a equação de segundo grau em função de n :

$$n = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (50)}}{2 \cdot (1)}$$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ ou } n = 5$$

Substituindo os valores de n em eq. 1, obtemos:

Se $n = 10$:

$$m = 15 - (10) = 5$$

$$m = 5$$

Se $n = 5$:

$$m = 15 - (5) = 10$$

$$m = 10$$

Conclusão, os valores dos catetos são 5 e 10

Gabarito: "d".

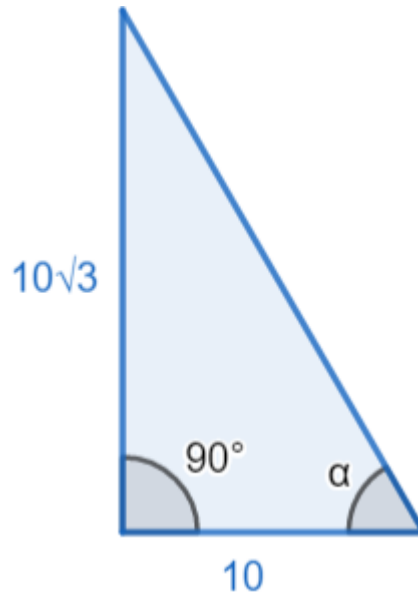
10. (EEAR/2016)

Uma escada é apoiada em uma parede perpendicular ao solo, que por sua vez é plano. A base da escada, ou seja, seu contato com o chão, dista 10m da parede. O apoio dessa escada com a parede está a uma altura de $10\sqrt{3}$ m do solo. Isto posto, o ângulo entre a escada e o solo é de

- a) 60°
- b) 45°
- c) 30°
- d) 15°

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Observemos o valor de $tg(\alpha)$

$$tg(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha) = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

Temos que $tg(\alpha) = \sqrt{3}$ e, segundo a tabela de ângulos, o ângulo cuja tangente vale $\sqrt{3}$ vale 60°

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Gabarito: "a".

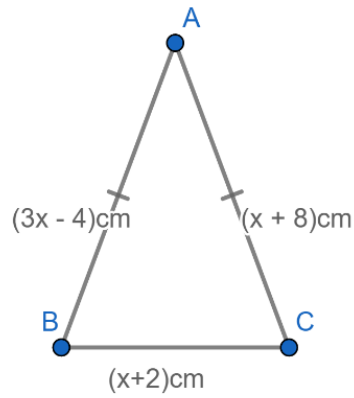
11. (EEAR/2016)

Um triângulo ABC de base $BC = (x + 2)$ tem seus lados AB e AC medindo, respectivamente, $(3x - 4)$ e $(x + 8)$. Sendo este triângulo isósceles, a medida da base BC é

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10

Comentários

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:



Sabemos que $AB = AC$, logo:

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ 3x - 4 &= x + 8 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$BC = 2 + 6 = 8$$

Gabarito: "c".

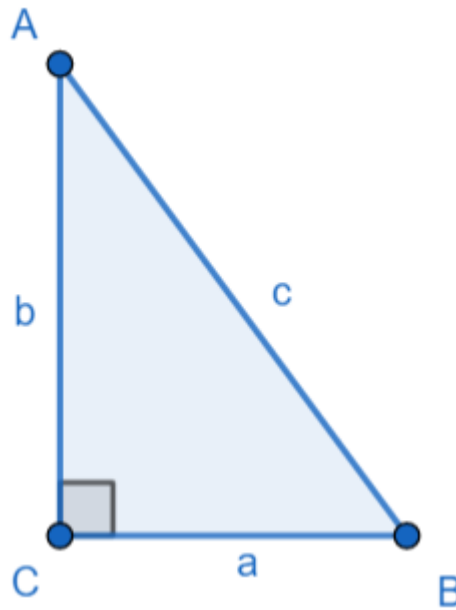
12. (EEAR/2015)

Em um triângulo ABC, retângulo em C, a razão $\frac{\widehat{\text{sen B}}}{\widehat{\text{cos A}}}$ é igual a

- a) $\frac{AC}{BC}$
- b) $\frac{AB}{AC}$
- c) 1
- d) 2

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando diretamente a definição de seno e cosseno em um triângulo retângulo, obtemos:

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{cos } \hat{A}} = \frac{b/c}{b/c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$$

Gabarito: “c”.

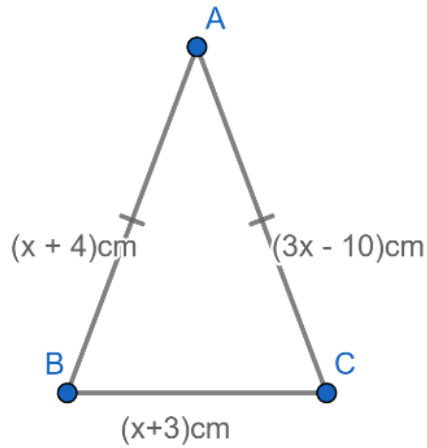
13. (EEAR/2015)

Seja ABC um triângulo isósceles de base $BC = (x + 3)cm$, com $AB = (x + 4)cm$ e $AC = (3x - 10)cm$. A base de ABC mede cm .

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10

Comentários

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:



Sabemos que $AB = AC$, logo:

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ x + 4 &= 3x - 10 \\ 14 &= 2x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$BC = 3 + 7 = 10$$

Gabarito: "d".

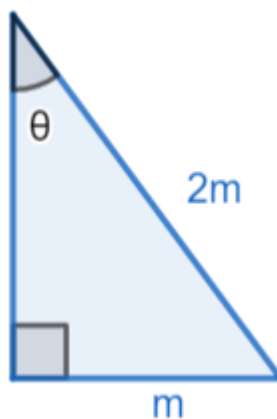
14. (EEAR/2013)

Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede

- a) 20°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 60°

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:





Calculemos o $\text{sen}(\theta)$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$, sabemos que o ângulo cujo seno vale $\frac{1}{2}$ é o ângulo de 30°

Gabarito: "b".

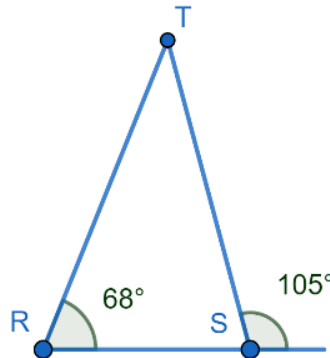
15. (EEAR/2012)

Num triângulo ΔRST a medida do ângulo interno \widehat{R}_i é 68° e do ângulo externo \widehat{S}_e é 105° Então o ângulo interno T mede:

- a) 52°
- b) 45°
- c) 37°
- d) 30°

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Sabemos que o ângulo externo \widehat{S}_e é suplementar ao ângulo interno \widehat{S}_i , logo:

$$\widehat{S}_e + \widehat{S}_i = 180^\circ$$

$$105^\circ + \widehat{S}_i = 180^\circ$$

$$\widehat{S}_i = 75^\circ$$

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° , portanto:

$$\widehat{R}_i + \widehat{S}_i + \widehat{T}_i = 180^\circ$$

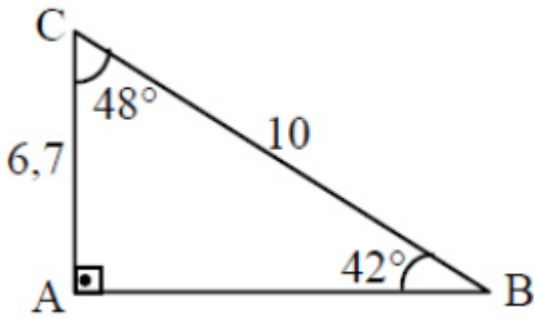
$$68^\circ + 75^\circ + \widehat{T}_i = 180^\circ$$

$$\widehat{T}_i = 37^\circ$$

Gabarito: "c".

16. (EEAR/2012)

Considerando as medidas indicadas no triângulo, o valor de $\text{sen}(42^\circ) + \text{sen}(48^\circ)$ é



- a) 1,41
- b) 1,67
- c) 1,74
- d) 1,85

Comentários

Utilizando o Teorema De Pitágoras, obtemos:

$$(10)^2 = (6,7)^2 + (\overline{AB})^2$$

$$\Rightarrow (\overline{AB})^2 = (10)^2 - (6,7)^2 = 55,11$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{55,11} \approx 7,4$$

Agora, calculando o valor dos senos a partir da definição, obtemos:

$$\text{sen}(42^\circ) + \text{sen}(48^\circ) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{6,7}{10} + \frac{7,4}{10} = 0,67 + 0,74 = 1,41$$

$$\text{sen}(42^\circ) + \text{sen}(48^\circ) = 1,41$$

Gabarito: "a".

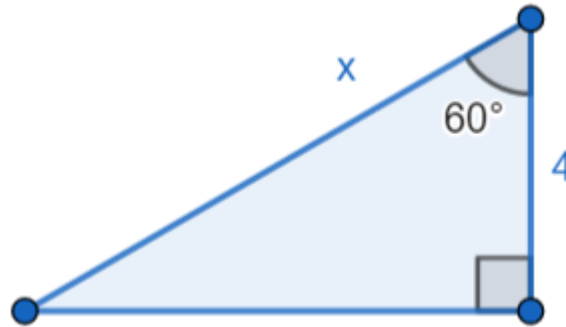
17. (EEAR/2011)

Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 4 cm, e o ângulo que lhe é adjacente mede 60°. A hipotenusa desse triângulo, em cm, mede

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Utilizando a definição de cosseno:

$$\cos(60^\circ) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$$

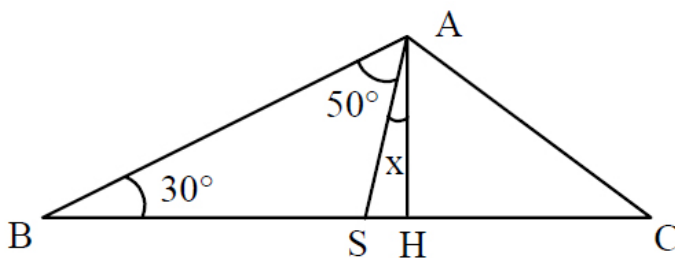
$$\Rightarrow x = 4 \cdot 2 = 8$$

$$x = 8 \text{ cm}$$

Gabarito: "c".

18. (EEAR/2010)

Na figura, AH é altura do triângulo ABC.

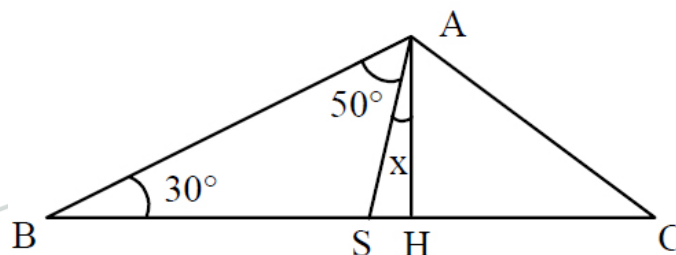


Assim, o valor de x é:

- a) 20°
- b) 15°
- c) 10°
- d) 5°

Comentários

De acordo com figura do enunciado a seguir:





Sabemos que o ângulo interno $\widehat{B\hat{S}A}$ é suplementar a soma dos ângulos do ΔBSA :

$$\widehat{B\hat{S}A} + 30^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{B\hat{S}A} = 100^\circ$$

Sabemos que o ângulo interno $\widehat{A\hat{S}H}$ é suplementar ao ângulo $\widehat{B\hat{S}A}$:

$$\widehat{B\hat{S}A} + \widehat{A\hat{S}H} = 180^\circ$$

$$100^\circ + \widehat{A\hat{S}H} = 180^\circ$$

$$\widehat{A\hat{S}H} = 80^\circ$$

O triângulo ΔASH é retângulo, portanto, pela soma dos ângulos internos, temos:

$$x + \widehat{A\hat{S}H} + 90^\circ = 180^\circ$$

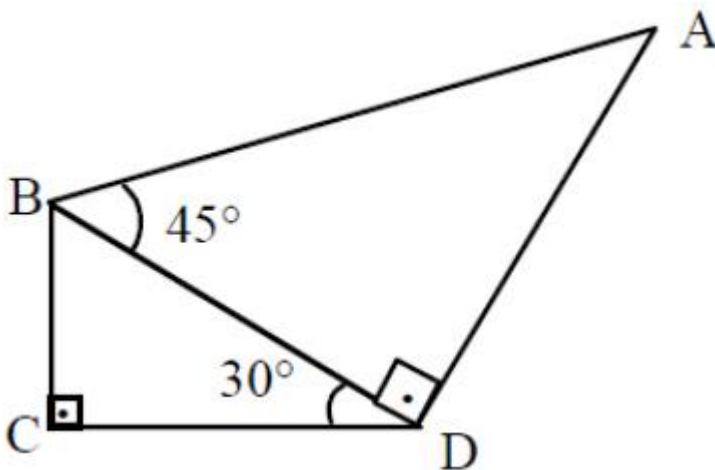
$$x + 80^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

Gabarito: "c".

19. (EEAR/2009)

Na figura, $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$.



Assim, a medida de \overline{AB} , em cm, é

a) $2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2}$

c) $5\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{3}$

Comentários

Considere o triângulo BCD isoladamente. Aplicando a definição de seno no triângulo retângulo relativo ao ângulo $\widehat{B\hat{D}C}$, obtemos:

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{2}{\overline{BD}}$$



$$\Rightarrow \overline{BD} = 4 \text{ cm}$$

Agora considere o triângulo ABD isoladamente. Aplicando a definição de cosseno no triângulo retângulo relativo ao ângulo $\hat{A}BD$, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(45^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{4}{\overline{AB}} \\ \Rightarrow \overline{AB} &= \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Gabarito: “b”

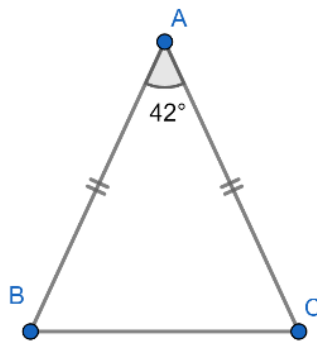
20. (EEAR/2008)

Um triângulo ΔABC tem dois lados congruentes que formam entre si um ângulo de 42° . Um dos outros dois ângulos internos desse triângulo medem

- a) 39°
- b) 48°
- c) 58°
- d) 69°

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como \overline{AB} e \overline{AC} são congruentes e se trata de um triângulo, então caracteriza-se um triângulo isósceles, logo os ângulos \hat{B} e \hat{C} são congruentes.

Sendo \hat{B} e \hat{C} congruentes, temos:

$$\begin{aligned} \hat{B} = \hat{C} &\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} + 42^\circ = 180^\circ \\ 2\hat{B} &= 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ \\ \hat{B} = \hat{C} &= 69^\circ \end{aligned}$$

Gabarito: “d”.

21. (EEAR/2008)

O triângulo cujos lados medem 6cm , 7cm e 10cm é classificado como



- a) equilátero e retângulo.
- b) escaleno e acutângulo.
- c) isósceles e acutângulo.
- d) escaleno e obtusângulo.

Comentários

Do enunciado temos a informação da medida dos lados do triângulo.

Perceba que todos os lados têm valores diferentes entre si, logo é um triângulo escaleno.

⇒ Todos os lados diferentes = Triângulo escaleno

Analisando a situação dos ângulos, sendo a e b os dois menores lados e c o maior lado, temos da Síntese de Clairaut:

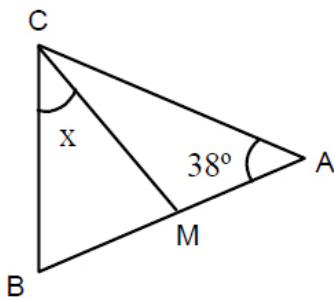
$$\begin{cases} \text{Se } a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow \text{obtusângulo} \\ \text{Se } a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow \text{acutângulo} \end{cases}$$

Portanto, sabendo que $6^2 + 7^2 = 85 < 10^2$, temos que o triângulo é um obtusângulo.

Gabarito: “d”.

22. (EEAR/2008)

Na figura, $AB = AC$ e $BC = CM$. O valor de x é:



- a) 50°
- b) 45°
- c) 42°
- d) 38°

Comentários

Do enunciado tem-se que $AB = AC$ indica que o triângulo ΔABC é isósceles de base BC, logo, os ângulos \hat{B} e \hat{C} são iguais.

$$\hat{B} = \hat{C}$$

Do triângulo ΔABC temos a seguinte relação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$38^\circ + \hat{C} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$2\hat{C} = 142^\circ$$



$$\hat{C} = \hat{B} = 71^\circ$$

Ainda, do enunciado, tem-se que $BC = CM$ indica que o triângulo ΔBMC também é isósceles de base BM, logo:

$$\hat{B} = \widehat{BMC} = 71^\circ$$

Do triângulo ΔBMC :

$$\widehat{BMC} + \hat{B} + x = 180^\circ$$

$$71^\circ + 71^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 38^\circ$$

Gabarito: "d".

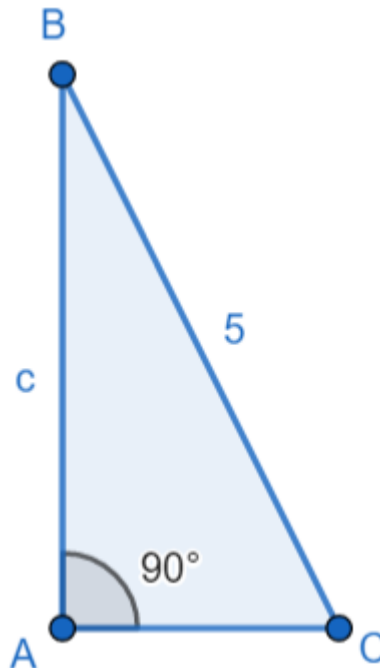
23. (EEAR/2008)

Em um triângulo ABC, retângulo em A, a hipotenusa mede 5 dm e $\text{sen}(\hat{B}) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\hat{C})$. Nessas condições, o maior cateto mede, em dm,

- a) 3
- b) 4
- c) $\sqrt{5}$
- d) $2\sqrt{5}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Obs: O maior cateto é oposto ao maior ângulo e como já existe um ângulo reto, podemos concluir que o maior ângulo entre \hat{B} e \hat{C} é o ângulo com o maior valor de seno. E dada a igualdade



fornecida no enunciado, o maior seno é o seno de \hat{C} . Portanto o maior cateto é o cateto \overline{AB} . Também sabemos que, devido ao triângulo ser retângulo:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \cos(\hat{C})$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\begin{aligned} \cos^2 \hat{C} + \text{sen}^2 \hat{C} &= 1 \\ \Rightarrow \text{sen}^2 \hat{B} + \text{sen}^2 \hat{C} &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\hat{C})\right)^2 + \text{sen}^2 \hat{C} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \text{sen}^2 \hat{C} + \text{sen}^2 \hat{C} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot \text{sen}^2 \hat{C} &= 1 \\ \Rightarrow \text{sen}^2 \hat{C} &= \frac{4}{5} \\ \text{sen} \hat{C} &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Aplicando agora a definição de seno para descobrir a medida de \overline{AB}

$$\begin{aligned} \text{sen} \hat{C} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \\ \text{sen} \hat{C} &= \frac{\overline{AB}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \Rightarrow \overline{AB} &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Gabarito: “d”

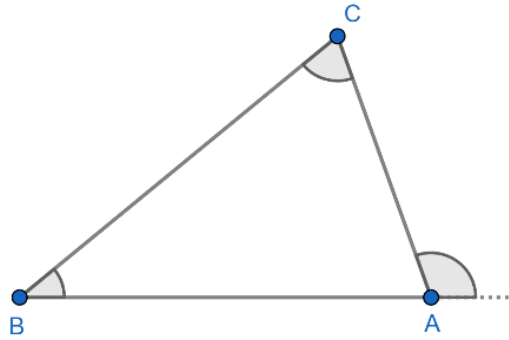
24. (EEAR/2006)

Em um triângulo ABC , o ângulo externo de vértice A mede 116° . Se a diferença entre as medidas dos ângulos internos B e C é 30° , então o maior ângulo interno do triângulo mede:

- a) 75° .
- b) 73° .
- c) 70° .
- d) 68° .

Comentários

De acordo com o enunciado tem-se a seguinte figura:



No triângulo ΔABC temos a seguinte relação dos ângulos internos:

$$A_i + B_i + C_i = 180^\circ \quad \text{Eq. 1}$$

No vértice A temos:

$$A_i + A_e = 180^\circ \quad \text{Eq. 2}$$

Subtraindo Eq. 1 da Eq. 2, temos:

$$B_i + C_i - A_e = 0^\circ$$

$$B_i + C_i = A_e$$

$$B_i + C_i = 116^\circ$$

Logo temos do enunciado que:

$$B_i - C_i = 30^\circ$$

Portanto do sistema a seguir:

$$\begin{cases} B_i + C_i = 116^\circ \\ B_i - C_i = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_i = 73^\circ \\ C_i = 43^\circ \end{cases}$$

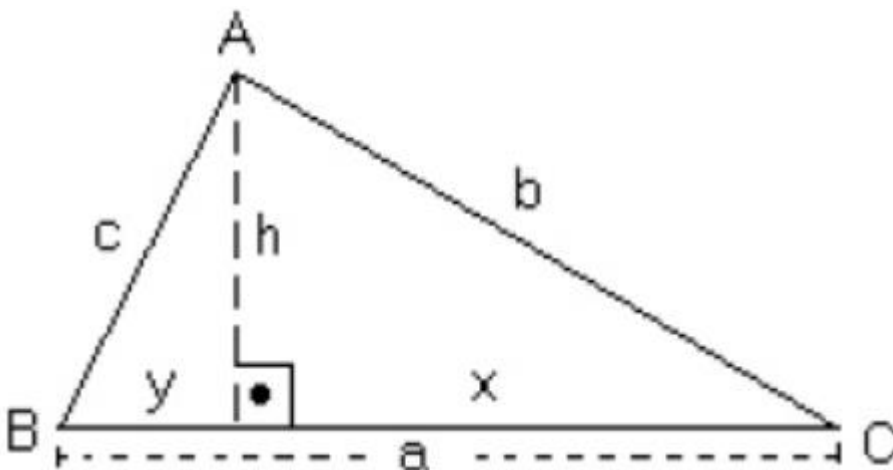
Da Eq. 2 temos que $A_i = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

Assim o maior ângulo é o $B_i = 73^\circ$

Gabarito: "b".

25. (EEAR/2006)

Sejam as relações métricas no triângulo ABC :





$$I - b^2 = a \cdot x$$

$$II - a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$III - h = x \cdot y$$

$$IV - \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Se o triângulo ABC é retângulo em A, então o número de relações verdadeiras acima é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

I – VERDADEIRA

Por Pitágoras: $b^2 = a^2 - c^2$ e $c^2 = h^2 + y^2$

Então, $b^2 = a^2 - h^2 - y^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - h^2 - (a - x)^2$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - h^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot x - x^2$$

$$b^2 = 2 \cdot a \cdot x - (x^2 + h^2)$$

$$b^2 = 2 \cdot a \cdot x - b^2$$

$$2b^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

$$b^2 = a \cdot x$$

Analogamente, $c^2 = a \cdot y$

II – VERDADEIRA. Aplicação direta da Lei dos Cossenos

III – FALSO

De Pitágoras, obtemos:

$$\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = c^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot h^2 = b^2 + c^2 - x^2 - y^2$$

$$2 \cdot h^2 = a^2 - x^2 - y^2 = (x + y)^2 - x^2 - y^2$$

$$2 \cdot h^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 - x^2 - y^2 = 2 \cdot x \cdot y$$

$$h^2 = x \cdot y$$

IV – VERDADEIRO

Utilizando as relações anteriores, $b^2 = a \cdot x$, $c^2 = a \cdot y$ e $h^2 = x \cdot y$, obtemos:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x \cdot y} = \frac{a^2}{a^2 \cdot x \cdot y} = \frac{a^2}{(a \cdot x) \cdot (a \cdot y)} = \frac{a^2}{(b^2) \cdot (c^2)} = \frac{b^2 + c^2}{(b^2) \cdot (c^2)} =$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2}{(b^2) \cdot (c^2)} + \frac{c^2}{(b^2) \cdot (c^2)} = \frac{1}{(c^2)} + \frac{1}{(b^2)}$$



$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Gabarito: "c"

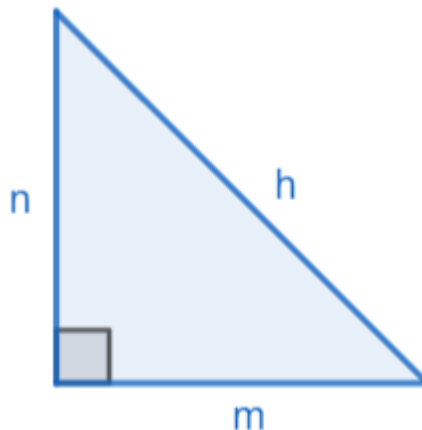
26. (EEAR/2005)

Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual ao dobro do produto das medidas dos catetos. Um dos ângulos agudos desse triângulo mede

- a) 15°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 60°

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



$$h^2 = 2 \cdot m \cdot n$$

De Pitágoras $h^2 = m^2 + n^2 = 2 \cdot m \cdot n$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n = 0$$

$$m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n = (m - n)^2 = 0 \Rightarrow m = n$$

Logo, trata-se de um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos são iguais. Portanto, temos um triângulo isósceles. Logo, o menor ângulo vale 45°.

Gabarito: "c"

27. (EEAR/2005)

Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 20m, e um dos catetos, 10m. A medida da projeção deste cateto sobre a hipotenusa, em metros, é igual a

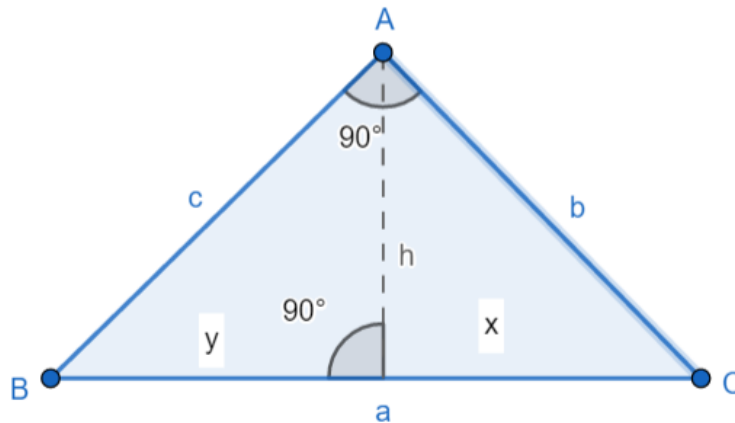
- a) 5
- b) 6



c) 7

d) 8

Comentários



Podemos usar a seguinte relação,

$$b^2 = a \cdot x \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot y$$

Tendo isso em vista:

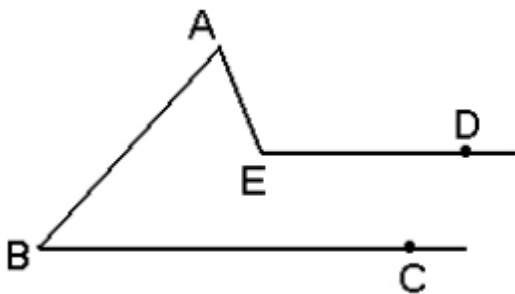
$$10^2 = 20 \cdot m = 100$$

$$\Rightarrow m = 5$$

Gabarito: “a”

28. (EEAR/2004)

Na figura, $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, $med(\widehat{EAB}) = 80^\circ$ e $med(\widehat{CBA}) = 35^\circ$. Assim, a medida de \widehat{DEA} é



- a) 100° .
- b) 110° .
- c) 115° .
- d) 120° .

Comentários

Prolonga-se o segmento AE até o ponto F sobre o segmento BC . Pelo teorema do ângulo externo no ΔABF , $med(\widehat{AFC}) = med(\widehat{FBA}) + med(\widehat{FAB}) = med(\widehat{CBA}) + med(\widehat{EAB}) = 35^\circ + 80^\circ \Rightarrow$

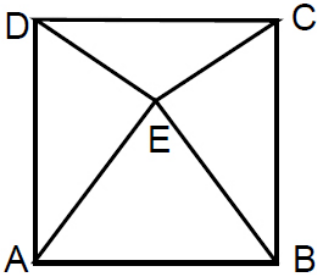


$\Rightarrow med(\widehat{AFC}) = 115^\circ$. Perceba que, como $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ e \overline{AF} é uma transversal, temos que os ângulos \widehat{DEA} e \widehat{AFC} são correspondentes. Logo, $med(\widehat{DEA}) = med(\widehat{AFC}) = 115^\circ$

Gabarito: "c".

29. (EEAR/2004)

A figura $ABCD$ é um quadrado, e ABE é um triângulo equilátero.



Nessas condições, a medida do ângulo \widehat{EDC} é:

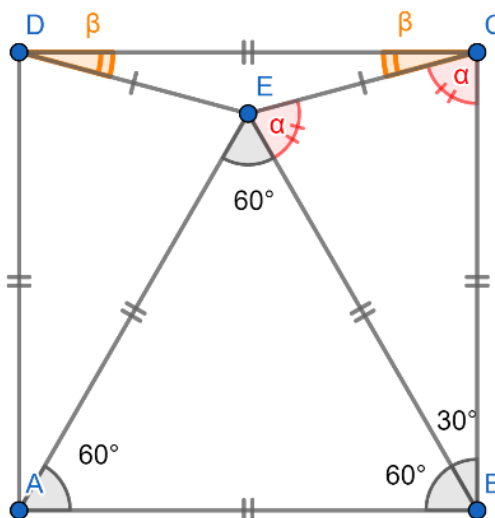
- a) 5°
- b) 10°
- c) 15°
- d) 20°

Comentários

Usaremos do fato de que todos os lados do triângulo e do quadrado são iguais, logo, temos as relações:

- $\gg EB = BC \Rightarrow \Delta EBC$ é isósceles
- $\gg AE = AD \Rightarrow \Delta EAD$ é isósceles
- $\gg \Delta EBC \sim \Delta EAD \Rightarrow ED = EC \Rightarrow \Delta EDC$ é isósceles

Assim, temos a seguinte figura:



Perceba pelo triângulo ΔBEC :



$$\begin{aligned} 30^\circ + \alpha + \alpha &= 180^\circ \\ 2\alpha &= 150^\circ \\ \alpha &= 75^\circ \end{aligned}$$

Sabendo que o ângulo $B\hat{C}D = 90^\circ$, temos:

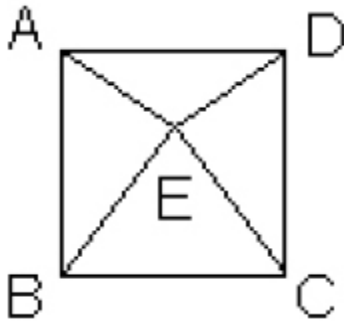
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ \\ \beta + 75^\circ &= 90^\circ \\ \beta &= 15^\circ \end{aligned}$$

Como $\beta = E\hat{D}C = 15^\circ$

Gabarito: "c".

30. (EEAR/2004)

Se $ABCD$ é um quadrado e BEC é um triângulo equilátero, então a medida do ângulo $E\hat{A}B$ é:



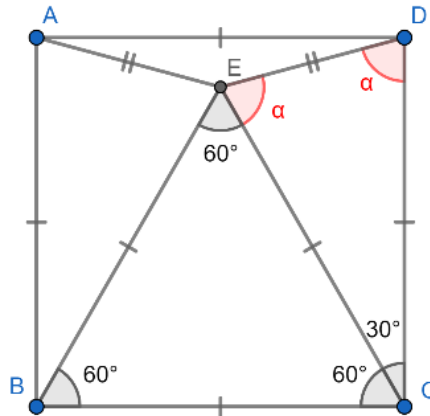
- a) 75°
- b) 60°
- c) 30°
- d) 85°

Comentários

Usaremos do fato de que todos os lados do triângulo e do quadrado são iguais, logo, temos as relações:

$$\gg EC = DC \Rightarrow \Delta EDC \text{ é isósceles}$$

Assim, temos a seguinte figura:



Perceba pelo triângulo $\triangle DEC$:

$$30^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha = 150^\circ$$

$$\alpha = 75^\circ$$

Logo, $\alpha = \widehat{CDE} = \widehat{EAB} = 75^\circ$.

Gabarito: "a".

31. (EEAR/2004)

O perímetro de um triângulo retângulo é 30 cm. Se a soma das medidas dos catetos é 17 cm, e a soma das medidas da hipotenusa e do cateto menor é 18 cm, então a medida, em cm, do cateto maior é

- a) 8
- b) 9
- c) 12
- d) 15

Comentários

Seja m o cateto maior, n o cateto menor e h a hipotenusa.

Vamos representar as equações dadas no enunciado.

$$\begin{cases} m + n + h = 30 & \text{eq. 1} \\ m + n = 17 & \text{eq. 2} \\ h + n = 18 & \text{eq. 3} \end{cases}$$

Substituindo a equação eq.2 em eq.1, obtemos:

$$17 + h = 30$$

$$\Rightarrow h = 13 \text{ cm} \quad \text{eq.4}$$

Substituindo a equação eq.4 em eq.3, obtemos:

$$13 + n = 18$$



$$\Rightarrow n = 5 \text{ cm} \quad \text{eq.5}$$

Substituindo a equação eq.4 e eq.5 em eq.1, obtemos:

$$m + 5 + 13 = 30$$

$$\Rightarrow m = 12 \text{ cm}$$

Obs: fizemos um método para descobrir todas as medidas, entretanto, poderíamos ter apenas substituído a eq.3 em eq.1 e obtido o valor do maior cateto diretamente.

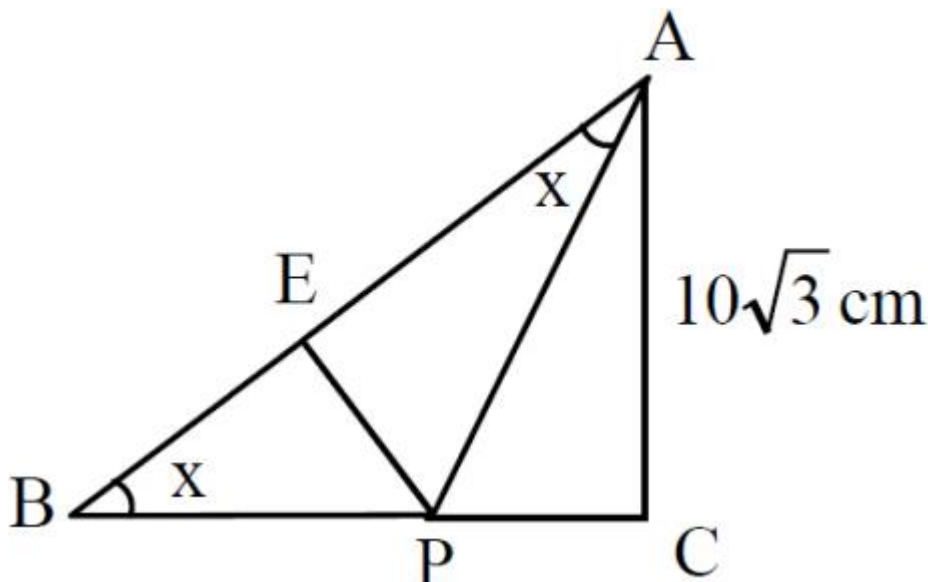
$$m + 18 = 30$$

$$\Rightarrow m = 12 \text{ cm}$$

Gabarito: "c"

32. (EEAR/2004)

Na figura, são retângulos em E e em C, respectivamente, os triângulos AEP e ACB. Se $x = 30^\circ$, então a medida de \overline{PE} , em cm, é



a) 10

b) $5\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{3}$

d) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Se $\widehat{ABC} = x = 30^\circ$, então $\widehat{BAC} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Mas $\widehat{BAC} = \widehat{EAP} + \widehat{PAC}$, logo, $\widehat{PAC} = \widehat{BAC} - \widehat{EAP} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

$$\cos(\widehat{PAC}) = \cos(30^\circ) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{10\sqrt{3}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = 20 \text{ cm}$$

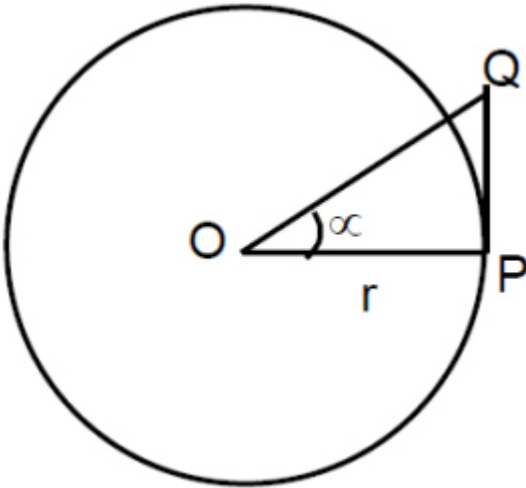


$$\begin{aligned} \text{sen}(\widehat{EAP}) &= \text{sen}(30^\circ) = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{EP}}{20} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \overline{EP} &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Gabarito: “a”

33. (EEAR/2004)

O círculo da figura tem centro O e raio r .



Sabendo-se que \overline{PQ} equivale a $\frac{5r}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P , o valor de $\text{sen } \alpha$ é

- a) $\frac{5}{12}$
- b) $\frac{5}{13}$
- c) $\frac{12}{13}$
- d) 0,48

Comentários

Sabemos que como \overline{PQ} é tangente à circunferência em P , então o seguimento \overline{PQ} é perpendicular ao seguimento \overline{OP} , sendo O o centro da circunferência. Então, o triângulo OPQ constitui um triângulo retângulo em P .

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que $\overline{OQ} = \frac{13r}{12}$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\frac{5r}{12}}{\frac{13r}{12}} = \frac{5}{13}$$

Gabarito: “b”

34. (EEAR/2004)

Num triângulo retângulo, o menor cateto mede 1,5 cm, e a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa é 1,6 cm. O valor da secante do maior ângulo agudo desse triângulo é

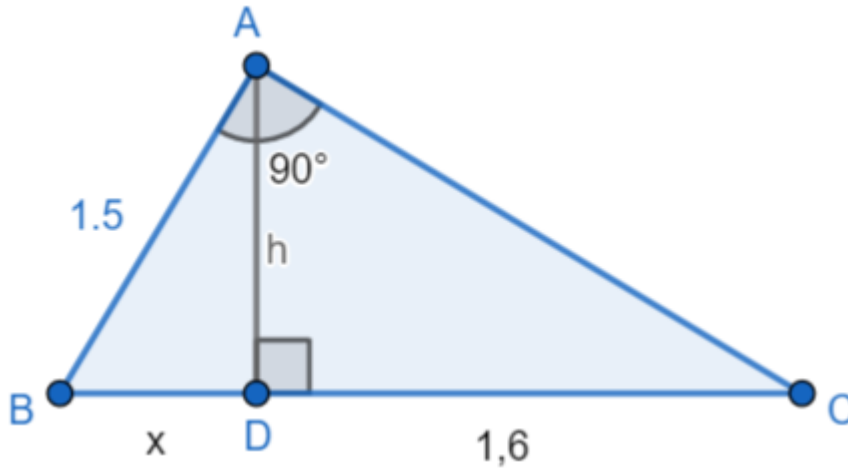
- a) $\frac{4}{3}$



- b) $\frac{5}{3}$
- c) $\frac{4}{5}$
- d) $\frac{7}{5}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$$

$$1,5^2 = x \cdot (1,6 + x)$$

$$2,25 = 1,6x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1,6x - 2,25 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau pelo método de Bhaskara:

$$x = -2,5 \text{ (não convém)} \text{ ou } x = 0,9$$

O maior ângulo, é oposto ao maior lado, pode-se ver isso pela Lei Dos Senos.

Calculando a secante:

$$\sec(\widehat{ABC}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\sec(\widehat{ABC}) = \frac{(1,6 + 0,9)}{1,5}$$

$$\sec(\widehat{ABC}) = \frac{5}{3}$$

Gabarito: “b”

35. (EEAR/2003)

Considere:

I. Um triângulo isósceles PRQ , de base PQ e altura RH .



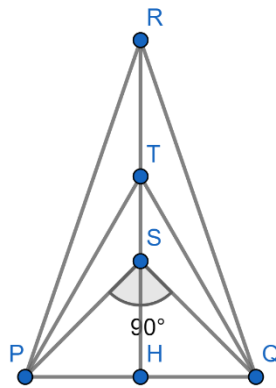
II. Dois pontos T e S sobre RH , de tal modo que o triângulo PTQ seja equilátero e o triângulo PSQ seja retângulo em S .

Considerando somente os ângulos internos dos triângulos, se somarmos as medidas de \hat{R} e \hat{S} , obteremos o dobro da medida de \hat{T} . Sendo assim, a medida do ângulo $T\hat{P}R$ é:

- a) 5°
- b) 15°
- c) 30°
- d) 45°

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



De acordo com o enunciado, temos a relação:

$$\frac{\hat{R} + \hat{S}}{2} = \hat{T}$$

Sabemos que o triângulo ΔPTQ é equilátero, logo $\hat{T} = 60^\circ$ e também que o triângulo ΔPSQ é isósceles com o ângulo $\hat{S} = 90^\circ$.

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} 60^\circ &= \frac{90^\circ + \hat{R}}{2} \\ 120^\circ &= 90^\circ + \hat{R} \\ 30^\circ &= \hat{R} \end{aligned}$$

Como o ângulo $R = 30^\circ$, temos que no triângulo isósceles ΔPQR os ângulos:

$$\hat{P} = \hat{Q} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

Para o ângulo $R\hat{P}T$, temos:

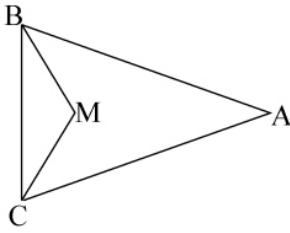
$$\begin{aligned} R\hat{P}T + T\hat{P}Q &= \hat{P} \\ R\hat{P}T + 60^\circ &= 75^\circ \\ R\hat{P}T &= 15^\circ \end{aligned}$$

Gabarito: "b".



36. (EEAR/2003)

Na figura, $AB = AC$, M é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo ABC e o ângulo \widehat{BMC} é o triplo do ângulo \widehat{A} , então a medida de \widehat{A} é:



- a) 15°
- b) 18°
- c) 24°
- d) 36°

Comentários

De acordo com o enunciado temos que:

$$\widehat{BMC} = 3\widehat{A}$$

Temos, respectivamente, pelos triângulos ΔABC e ΔBMC que:

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \widehat{BMC} &= 180^\circ \end{aligned}$$

Com essas relações, subtraindo a metade da segunda pela primeira, chegamos em:

$$\begin{aligned} \widehat{BMC} - \frac{\widehat{A}}{2} &= 90^\circ \\ 3\widehat{A} - \frac{\widehat{A}}{2} &= \frac{5}{2}\widehat{A} = 90^\circ \\ \widehat{A} &= 36^\circ \end{aligned}$$

Gabarito: “d”.

37. (EEAR/2003)

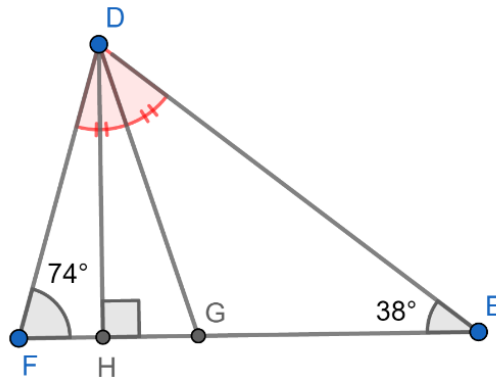
Um triângulo ΔDEF tem $\widehat{DEF} = 38^\circ$ e $\widehat{EFD} = 74^\circ$. O ângulo que a bissetriz DG forma com a altura DH mede:

- a) 18°
- b) 20°
- c) $26^\circ 30'$
- d) 34°

Comentários



De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



No triângulo $\triangle FDH$:

$$\begin{aligned} \widehat{FDH} &= 90^\circ - 74^\circ \\ \widehat{FDH} &= 16^\circ \end{aligned}$$

No triângulo $\triangle FDE$:

$$\begin{aligned} D &= 180^\circ - 74^\circ - 38^\circ \\ D &= 68^\circ \end{aligned}$$

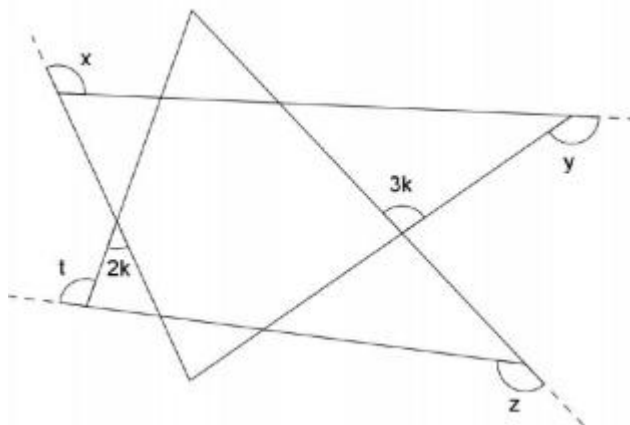
Portanto, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \widehat{HDG} &= \widehat{FDG} - \widehat{FDH} \\ \widehat{HDG} &= 34^\circ - 16^\circ \\ \widehat{HDG} &= 18^\circ \end{aligned}$$

Gabarito: "a".

38. (CN/2012)

Observe a figura a seguir.



Na figura acima, sabe-se que $k > 36^\circ$. Qual é o menor valor natural da soma $x + y + z + t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

- a) 479°
- b) 539°
- c) 599°

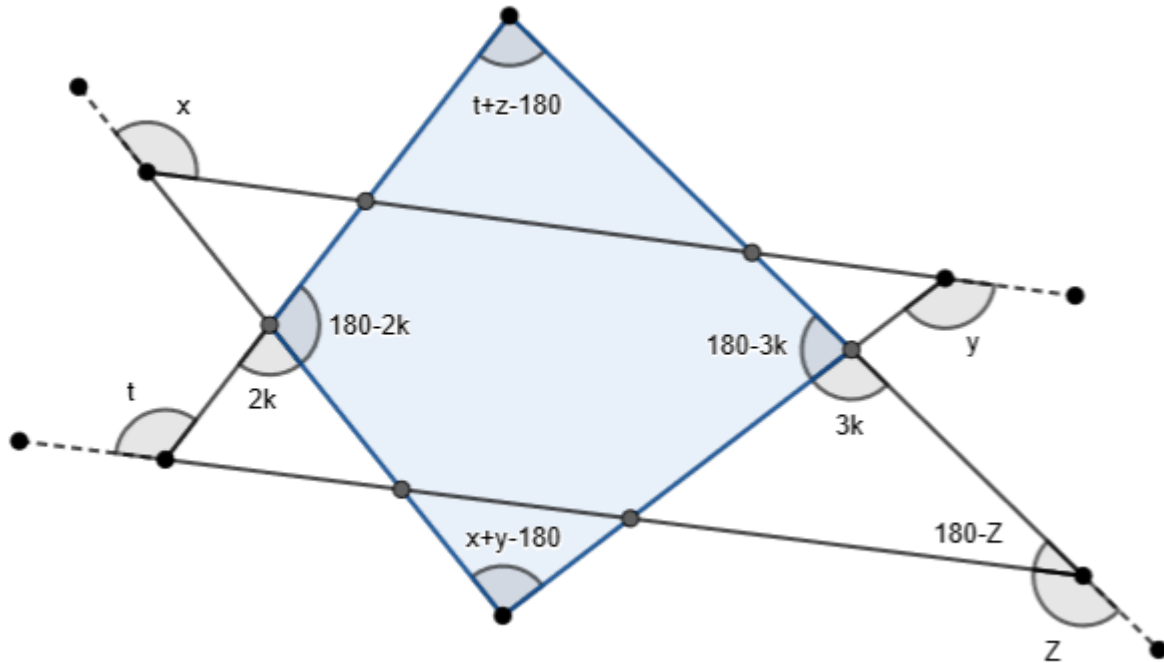


d) 659°

e) 719°

Comentários

Observe a figura abaixo:



Do quadrilátero destacado, temos a seguinte relação:

$$180 - 3k + 180 - 2k + x + y - 180 + t + z - 180 = 360^\circ$$

Ou seja:

$$x + y + z + t = 360 + 5k$$

Do enunciado, temos que $k > 36^\circ$, logo:

$$x + y + z + t > 360 + 5 \cdot 36 = 540$$

Essa soma deve deixar resto 4 na divisão por 5 e resto 11 na divisão por 12. Ou seja, deve ser do tipo:

$$5n - 1 \text{ e } 12m - 1$$

Ao mesmo tempo. Disso, segue:

$$5n - 1 = 12m - 1 \Rightarrow 5n = 12m$$

Isto é, n é múltiplo de 12 e m é múltiplo de 5. Uma forma de atender às duas condições ao mesmo tempo é, portanto:

$$x + y + z + t = 60p - 1 > 540 \Rightarrow p > \frac{541}{60} \approx 9,016$$



Como p é natural, segue que p é no mínimo 10, do que segue a soma mínima:

$$x + y + z + t = 60 \cdot 10 - 1 = 599^\circ$$

Gabarito: "c".

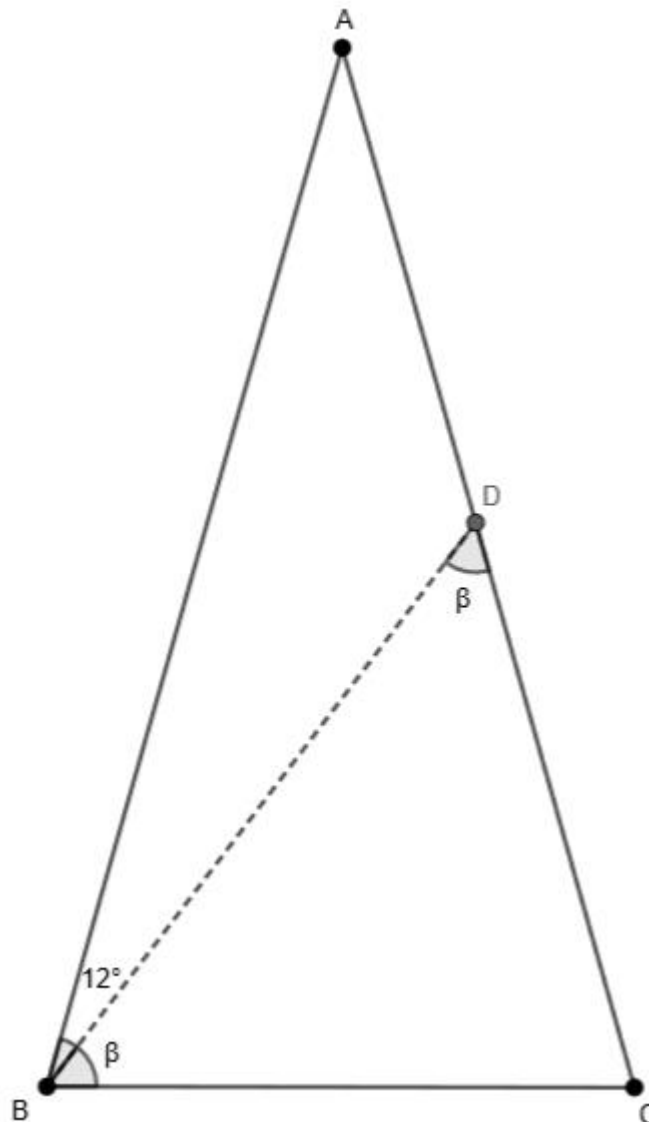
39. (CN/2005)

Num triângulo ABC , $AB = AC$, o ponto D interno ao lado AC é determinado de modo que $DC = BC$. Prolonga-se o lado BC (no sentido de B para C) até o ponto E de modo que $CE = BC$. Se o ângulo ABD mede 12° , qual a medida, em graus, do ângulo BAC ?

- a) 100
- b) 88
- c) 76
- d) 54
- e) 44

Comentários

O ponto E não será utilizado, de modo que o esboço da situação é o que segue:



Como o $\triangle ABC$ é isósceles, temos que $\widehat{BCA} = 12^\circ + \beta$.

Como o $\triangle BCD$ é isósceles, temos:

$$\widehat{DBC} = \widehat{BCD}$$

Daí, olhando para o $\triangle BCD$:

$$\beta + 12^\circ + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \frac{168^\circ}{3} = 56^\circ$$

Por fim, temos que:

$$\widehat{BDC} = 12^\circ + \widehat{BCA} \Rightarrow 56^\circ = 12^\circ + \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{BCA} = 44^\circ$$

Gabarito: “e”.

40. (CN/2003)

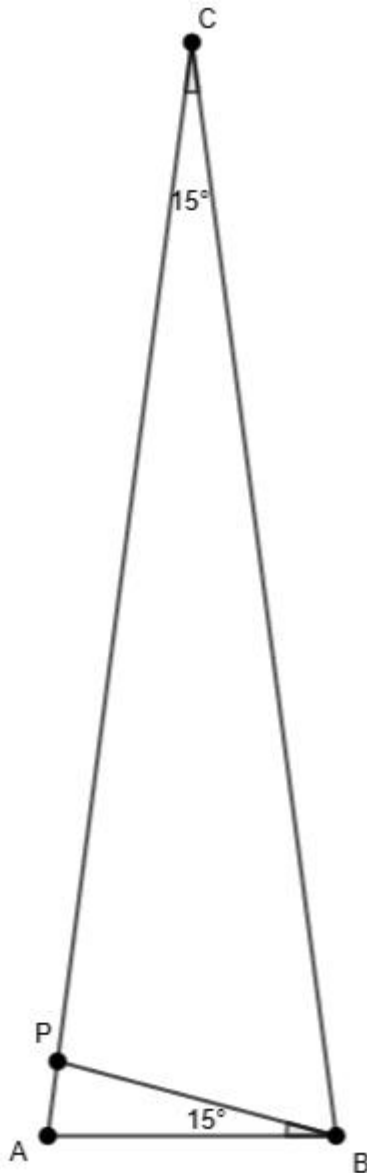
Num triângulo acutângulo isósceles ABC , o segmento BP , P interno ao segmento AC , forma com o lado BA um ângulo de 15° . Quanto mede o maior ângulo de PBC , sabendo que os triângulos ABP e ABC são semelhantes?



- a) $65,5^\circ$
- b) $82,5^\circ$
- c) $97,5^\circ$
- d) 135°
- e) 150°

Comentários

Como o triângulo ABC é isósceles e acutângulo e o triângulo ABP é semelhante ao ABC , temos que a disposição dos vértices deve ser a seguir:



Com $CA = CB$.

Veja que, com isso, $CAB = \frac{165^\circ}{2}$. O maior ângulo do triângulo PCB é, portanto, o ângulo

$$A\hat{P}B = \frac{165^\circ}{2} + 15^\circ = \frac{195^\circ}{2} = 97,5^\circ$$



Já que $A\hat{P}B$ é externo ao ΔPBA .

Qualquer outra disposição dos vértices implicaria em um triângulo ABC não acutângulo.

Gabarito: "c".

41. (CN/1999)

O número de triângulos que podemos construir com lados medindo 5, 8 e x , $x \in \mathbb{N}^*$, de tal forma que seu ortocentro seja interno ao triângulo é:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

Comentários

O primeiro passo é usar a desigualdade triangular:

$$8 < x + 5 \Rightarrow 3 < x$$

$$x < 8 + 5 \Rightarrow x < 13$$

Ou seja:

$$3 < x < 13$$

Para que o ortocentro seja interno ao triângulo ele deve ser acutângulo.

Disso, temos que considerar duas possibilidades, pois para aplicar a síntese de Clairaut devemos saber qual é o maior lado:

$$1^{\text{a}}: x \geq 8$$

Da síntese de Clairaut podemos afirmar:

$$x^2 < 8^2 + 5^2 = 89 \Rightarrow x < \sqrt{89}$$

Ou seja, $8 \leq x \leq 9$. Disso, temos duas possibilidades: $x = 8$ ou $x = 9$.

$$2^{\text{a}}: x < 8$$

O maior lado é 8, usando a síntese de Clairaut:

$$8^2 < x^2 + 5^2 \Rightarrow 39 < x^2 \Rightarrow x > \sqrt{39}$$

Ou seja, $\sqrt{39} < x < 8$. Disso, temos $x = 7$.

Assim, temos 3 triângulos possíveis.

Gabarito: "a".

42. (CN/1999)



Dados os casos clássicos de congruência de triângulos A.L.A., L.A.L., L.L.L. e L.A.A_o, onde L = lado, A = ângulo e A_o = ângulo oposto ao lado dado, complete corretamente as lacunas das sentenças abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Para se mostrar que a mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos extremos A e B, usa-se o caso ____ de congruência de triângulos.

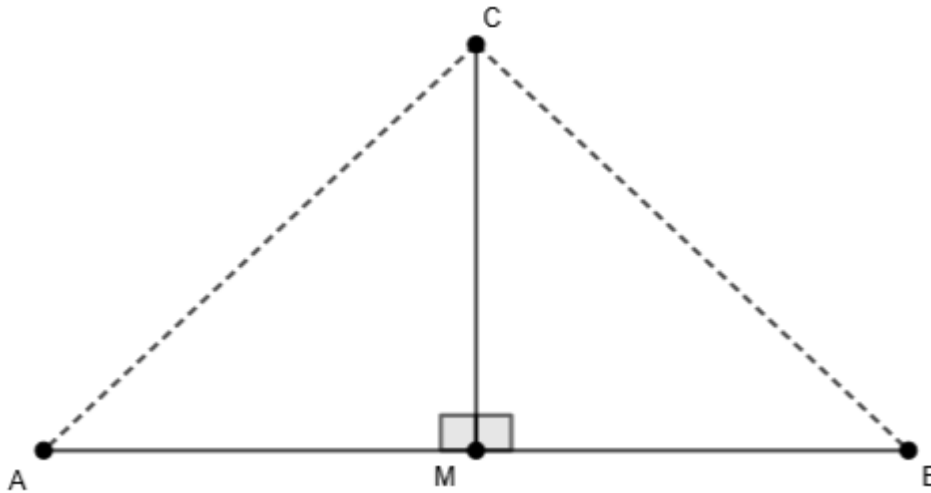
II. Para se mostrar que a bissetriz de um ângulo AÊC tem seus pontos equidistantes dos lados BA e BC desse ângulo, sem usar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, usa-se o caso ____ de congruência de triângulos.

- a) L.A.L. / A.L.A.
- b) L.A.L. / L.A.A_o.
- c) L.L.L. / L.A.A_o.
- d) L.A.A_o. / L.A.L.
- e) A.L.A. / L.L.L.

Comentários

Vamos analisar cada situação separadamente:

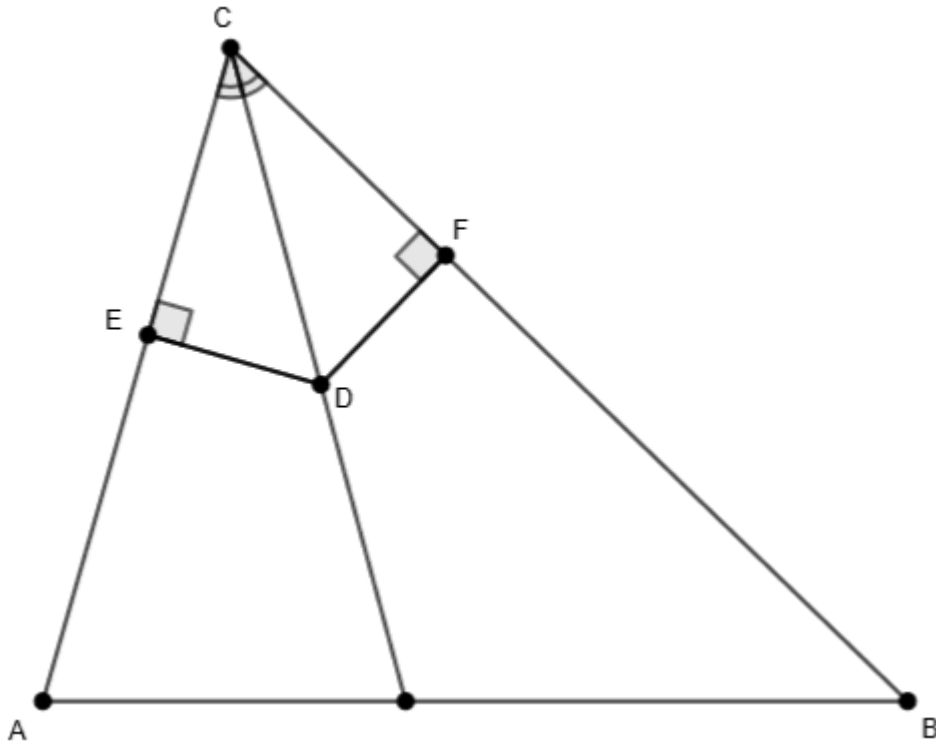
Situação I:



Como CM é mediatriz, temos que $AM = MB$. Assim os triângulos AMC e CMB são congruentes pelo caso LAL , já que $\widehat{AMC} = \widehat{CMB}$.

Situação II:

Observe a figura abaixo:



Observe que os ângulos $C\hat{F}D$ e $C\hat{E}D$, opostos ao lado CD , são iguais. Disso, temos que o caso de congruência entre ΔCED e ΔCDF é o LAA_o .

Gabarito: "b".

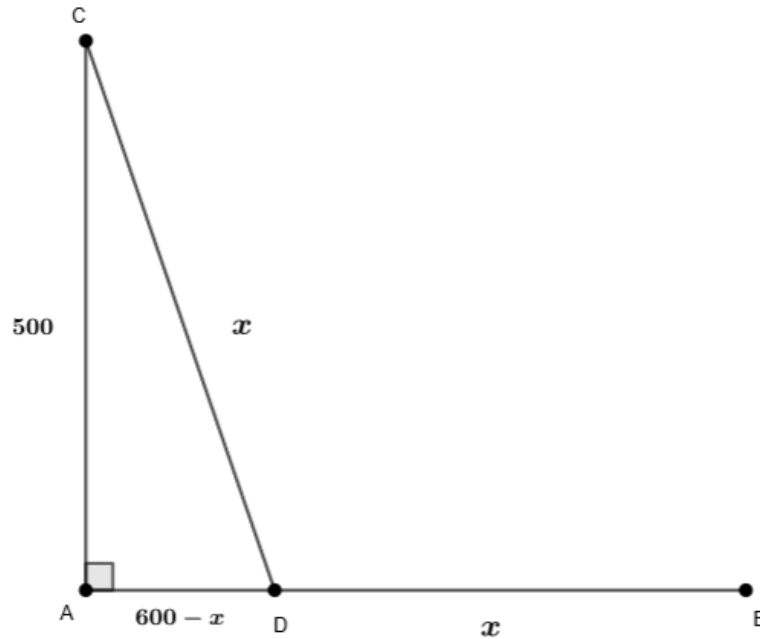
43. (CN/1998)

Uma cidade B encontra-se 600 km a leste de uma cidade A; e uma cidade C encontra-se 500km ao norte da mesma cidade A. Um ônibus parte de B, com velocidade constante em linha reta e na direção da cidade A. No mesmo instante e com velocidade constante igual à do ônibus, um carro, também em linha reta, parte de C para interceptá-lo. Aproximadamente a quantos quilômetros de A, o carro alcançará o ônibus?

- a) 92
- b) 94
- c) 96
- d) 98
- e) 100

Comentários

As trajetórias podem ser representadas como na figura abaixo:



As distâncias percorridas até o encontro são iguais, já que possuem a mesma velocidade.
Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\triangle ADC$:

$$500^2 + (600 - x)^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{1525}{3}$$

Queremos $AD = 600 - x = 600 - \frac{1525}{3} = \frac{275}{3} \approx 91,66 \text{ km}$.

Gabarito: "a".

6. QUESTÕES NÍVEL 2

44. (AFA/2013)

Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.

Dessa maneira, esse triângulo NÃO é

- a) acutângulo.
- b) equilátero.
- c) obtusângulo.
- d) isósceles.

45. (Escola Naval/2014)



Um observador, de altura desprezível, situado a 25 m de um prédio, observa-o sob um certo ângulo de elevação. Afastando-se mais 50 m em linha reta, nota que o ângulo de visualização passa a ser a metade do anterior. Podemos afirmar que a altura, em metros, do prédio é

- a) $15\sqrt{2}$
- b) $15\sqrt{3}$
- c) $15\sqrt{5}$
- d) $25\sqrt{3}$
- e) $25\sqrt{5}$

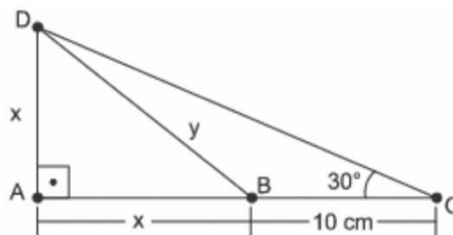
46. (EFOMM/2018)

Num triângulo ABC , as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida 50° . Calcule o ângulo interno do vértice A .

- a) 110°
- b) 90°
- c) 80°
- d) 50°
- e) 20°

47. (EFOMM/2016)

Determine o perímetro do triângulo ABD , em cm, representado na figura abaixo:



- a) $5\sqrt{3} + 5$
- b) $5(2 + \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$
- c) $20 + 4\sqrt{5}$
- d) 45
- e) 50

48. (EFOMM/2015)



O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q , com primeiro termo 2 e representam as medidas dos lados de um triângulo, é

a) $] - 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} [$.

b) $] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} [$.

c) $] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} [$.

d) $] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{4} [$.

e) $] 1, 1 + \sqrt{5} [$.

49. (EFOMM/2013)

Dois observadores que estão em posições coincidentes como os pontos A e B , afastados 3 km entre si, medem simultaneamente o ângulo de elevação de um balão, a partir do chão, como sendo 30° e 75° , respectivamente. Se o balão está diretamente acima de um ponto no segmento de reta entre A e B , então a altura do balão, a partir do chão, em km , é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{2}$

50. (EFOMM/2010)

Um triângulo isósceles ABC , com lados $AB = AC$ e base BC , possui a medida da altura relativa à base igual a medida da base acrescida de dois metros. Sabendo que o perímetro do triângulo é igual a 36 metros, pode-se afirmar que sua base mede

a) 8 metros.

b) 9 metros.

c) 10 metros.

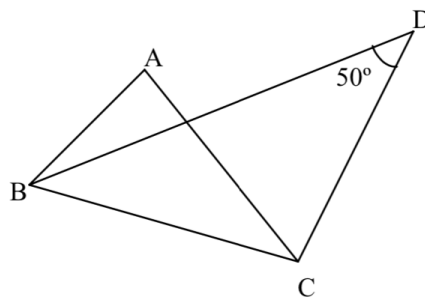
d) 11 metros.

e) 12 metros.

51. (EFOMM/2005)



Determine a medida do ângulo interno A no triângulo ABC da figura abaixo, sabendo-se que, \overline{BD} é a bissetriz do ângulo interno B , e \overline{CD} a bissetriz do ângulo externo C .



- a) 60°
- b) 80°
- c) 100°
- d) 110°
- e) 120°

GABARITO

- 44. c
- 45. d
- 46. c
- 47. b
- 48. b
- 49. e
- 50. c
- 51. c

RESOLUÇÃO

44. (AFA/2013)

Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.

Dessa maneira, esse triângulo NÃO é

- a) acutângulo.
- b) equilátero.
- c) obtusângulo.
- d) isósceles.



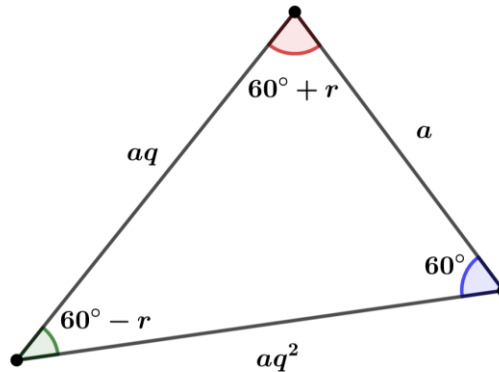
Comentários

Primeiramente, usaremos a concepção de que o maior lado está oposto ao maior ângulo e o menor lado oposto ao menor ângulo em um triângulo qualquer.

Como os ângulos estão em PA: $(x - r, x, x + r)$

$$180^\circ = x - r + x + x + r \rightarrow x = 60^\circ$$

Lados em PG: (a, aq, aq^2)



Para finalizar, lei dos cossenos para o triângulo:

$$(aq)^2 = a^2 + (aq^2)^2 - 2a(aq^2) \cos 60^\circ \rightarrow q^2 = 1 + q^4 - q^2$$

$$\Rightarrow q^4 - 2q^2 + 1 = 0$$

Assim, $(q^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow q = \pm 1$.

Como os lados são comprimentos positivos, $q = 1$. Trata-se de um triângulo equilátero e, portanto, ele não pode ser obtusângulo.

Gabarito: "c".

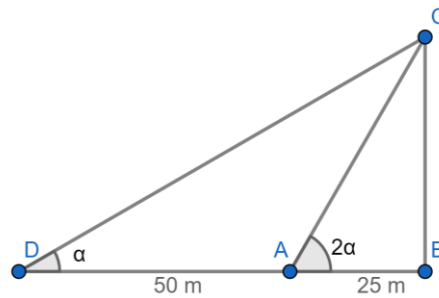
45. (Escola Naval/2014)

Um observador, de altura desprezível, situado a 25 m de um prédio, observa-o sob um certo ângulo de elevação. Afastando-se mais 50 m em linha reta, nota que o ângulo de visualização passa a ser a metade do anterior. Podemos afirmar que a altura, em metros, do prédio é

- a) $15\sqrt{2}$
- b) $15\sqrt{3}$
- c) $15\sqrt{5}$
- d) $25\sqrt{3}$
- e) $25\sqrt{5}$

Comentários

Interpretando o enunciado, temos a seguinte figura:



No triângulo ΔABC , temos a seguinte relação trigonométrica:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h}{25}$$

Em que $h = \overline{BC}$.

No triângulo ΔDBC , temos a seguinte relação trigonométrica:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{75}$$

Pela identidade trigonométrica $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{h}{25} &= \frac{2 \left(\frac{h}{75} \right)}{1 - \left(\frac{h}{75} \right)^2} \\ \Rightarrow 1 - \left(\frac{h}{75} \right)^2 &= \frac{2 \left(\frac{h}{75} \right)}{\frac{h}{25}} \\ \Rightarrow 1 - \left(\frac{h}{75} \right)^2 &= \frac{2}{3} \\ h &= 25\sqrt{3}m \end{aligned}$$

Gabarito: "d".

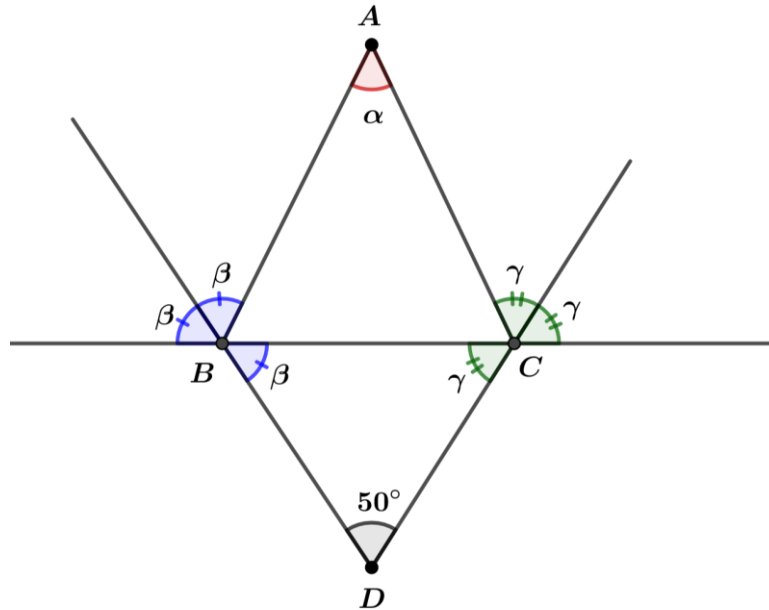
46. (EFOMM/2018)

Num triângulo ABC , as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida 50° . Calcule o ângulo interno do vértice A .

- a) 110°
- b) 90°
- c) 80°
- d) 50°
- e) 20°

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Do triângulo BCD:

$$\beta + \gamma = 130^\circ \quad (I)$$

Além disso, no triângulo ABC, temos:

$$\alpha + (180^\circ - 2\gamma) + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ$$

$$\alpha + 180^\circ - 2(\beta + \gamma) = 0$$

Substituindo a relação (I) na equação acima:

$$\alpha + 180^\circ - 2 \cdot (130^\circ) = 0$$

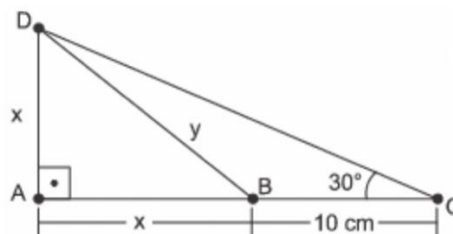
$$\alpha - 80^\circ = 0$$

$$\therefore \alpha = 80^\circ$$

Gabarito: "c".

47. (EFOMM/2016)

Determine o perímetro do triângulo ABD , em cm, representado na figura abaixo:



- a) $5\sqrt{3} + 5$
- b) $5(2 + \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$
- c) $20 + 4\sqrt{5}$
- d) 45



e) 50

Comentários

No triângulo retângulo ABD, temos:

$$y^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2}$$

Além disso, no triângulo retângulo ACD temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{x+10} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x+10} \Rightarrow x+10 = x\sqrt{3} \Rightarrow x(\sqrt{3}-1) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}-1} \\ \Rightarrow x = 5(\sqrt{3}+1) \text{ cm} \end{aligned}$$

Logo, o perímetro do ΔABD é:

$$2p_{ABD} = 2x + y = 2x + x\sqrt{2} = x(2 + \sqrt{2}) = 5(\sqrt{3} + 1)(2 + \sqrt{2})$$

Gabarito: “b”.

48. (EFOMM/2015)

O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q , com primeiro termo 2 e representam as medidas dos lados de um triângulo, é

a) $] -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} [$.

b) $] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} [$.

c) $] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} [$.

d) $] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{4} [$.

e) $] 1, 1 + \sqrt{5} [$.

Comentários

Da PG de razão $q > 1$, temos: $(a_1, a_2, a_3) = (2, 2q, 2q^2)$.

Da desigualdade triangular:

$$2q^2 < 2q + 2 \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0$$

Encontrando as raízes:

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Assim, a solução da inequação é:

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mas, $q > 1$, logo:



$$1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

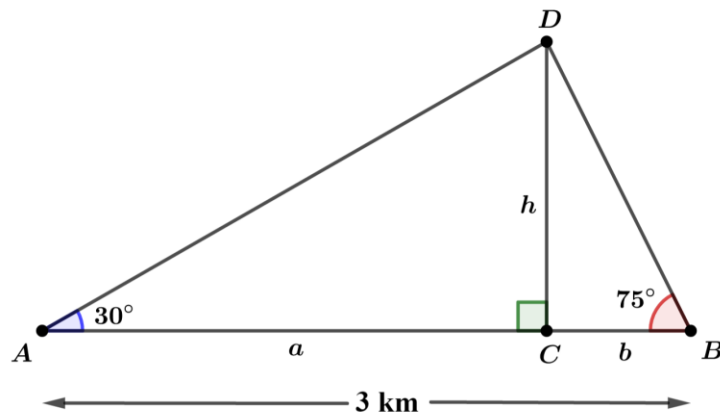
Gabarito: “b”.

49. (EFOMM/2013)

Dois observadores que estão em posições coincidentes como os pontos A e B , afastados 3 km entre si, medem simultaneamente o ângulo de elevação de um balão, a partir do chão, como sendo 30° e 75° , respectivamente. Se o balão está diretamente acima de um ponto no segmento de reta entre A e B , então a altura do balão, a partir do chão, em km , é:

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{5}{2}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{2}{3}$
- e) $\frac{3}{2}$

Comentários



Da figura, temos:

$$\Delta ACD \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = h\sqrt{3}$$

$$\Delta BCD \Rightarrow \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{(\sqrt{3} + 3)}{3 - \sqrt{3}} = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} + 3)}{(\sqrt{3} + 3)(3 - \sqrt{3})} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{3 + 6\sqrt{3} + 9}{6} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{b} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{h}{2 + \sqrt{3}} = h(2 - \sqrt{3})$$

Sabemos que $a + b = 3 \text{ km}$, logo:



$$h\sqrt{3} + h(2 - \sqrt{3}) = 3$$

$$2h = 3$$

$$\therefore h = 1,5\text{km}$$

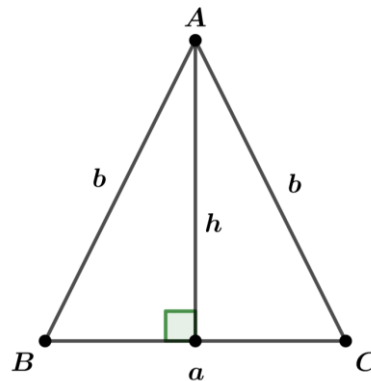
Gabarito: "e".

50. (EFOMM/2010)

Um triângulo isósceles ABC , com lados $AB = AC$ e base BC , possui a medida da altura relativa à base igual a medida da base acrescida de dois metros. Sabendo que o perímetro do triângulo é igual a 36 metros, pode-se afirmar que sua base mede

- a) 8 metros.
- b) 9 metros.
- c) 10 metros.
- d) 11 metros.
- e) 12 metros.

Comentários



Do perímetro, temos:

$$2b + a = 36$$

Da relação de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$$

Além disso, com base no enunciado, temos:

$$h = a + 2$$

Assim,

$$(a + 2)^2 + \frac{a^2}{4} = \left(18 - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$4(a^2 + 4a + 4) + a^2 = 4\left(324 - 18a + \frac{a^2}{4}\right)$$



$$4a^2 + 16a + 4 \cdot 4 + a^2 = 4 \cdot 324 - 72a + a^2$$

$$4a^2 + 88a - 4 \cdot 320 = 0$$

$$a^2 + 22a - 320 = 0$$

Resolvendo:

$$a = -11 \pm \sqrt{441} = -11 \pm 21$$

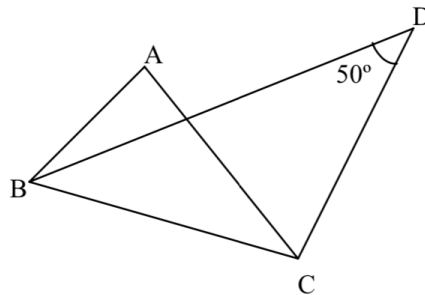
$$a = 10 \text{ ou } a = -32$$

Como $a > 0$, devemos ter $a = 10m$.

Gabarito: "c".

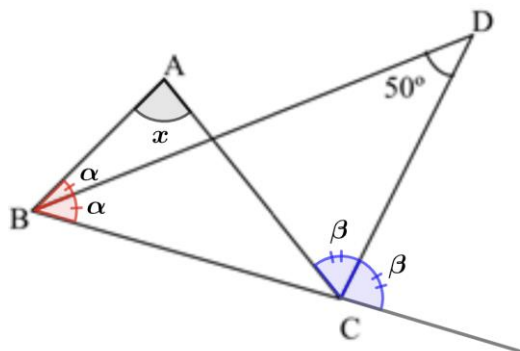
51. (EFOMM/2005)

Determine a medida do ângulo interno A no triângulo ABC da figura abaixo, sabendo-se que, \overline{BD} é a bissetriz do ângulo interno B , e \overline{CD} a bissetriz do ângulo externo C .



- a) 60°
- b) 80°
- c) 100°
- d) 110°
- e) 120°

Comentários



Da figura, temos:



$$\Delta BDC: (180^\circ - \beta) + 50^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \beta - \alpha = 50^\circ$$

$$\Delta ABC: x + 2\alpha + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ \Rightarrow x = 2(\beta - \alpha) \Rightarrow \beta - \alpha = \frac{x}{2}$$

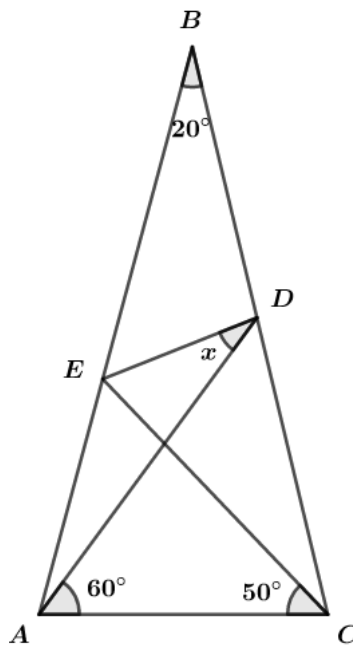
$$\frac{x}{2} = 50^\circ \therefore x = 100^\circ$$

Gabarito: "c".

7. QUESTÕES NÍVEL 3

52. (Desafio - Triângulo Russo)

Sabendo que o triângulo ABC é isósceles com $AB = BC$. Se $\widehat{B} = 20^\circ$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$ e $\widehat{ACE} = 50^\circ$, calcule x .

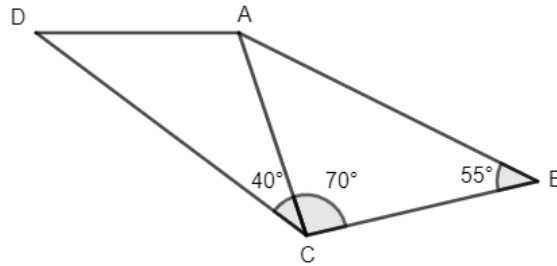


53. (Elementos da Matemática Volume 2)

ABC é um triângulo no qual $\widehat{A} = 120^\circ$; M e N são pontos do lado BC tais que $MB = AB$ e $NC = AC$. Calcular o ângulo \widehat{MAN} .

54. (Portugal – 98)

Na figura seguinte, $\overline{AD} = \overline{BC}$.



Quanto mede o ângulo \widehat{DAC} ?

55. (ITA/2011)

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos \overline{AB} e \overline{BC} medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre \overline{AB} e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento \overline{AD} , em cm, é igual a

- a) $3/4$
- b) $15/6$
- c) $15/4$
- d) $25/4$
- e) $25/2$

56. (ITA/2008)

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, \widehat{BAC} , mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $\widehat{ACE} = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} , tome o ponto D tal que $\widehat{DBC} = 35^\circ$. Então, o ângulo \widehat{EDB} vale

- a) 35°
- b) 45°
- c) 55°
- d) 75°
- e) 85°

57. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a:

- a) $\frac{23\pi}{11}$
- b) $\frac{13\pi}{6}$
- c) $\frac{24\pi}{11}$



- d) $\frac{25\pi}{11}$
e) $\frac{7\pi}{3}$

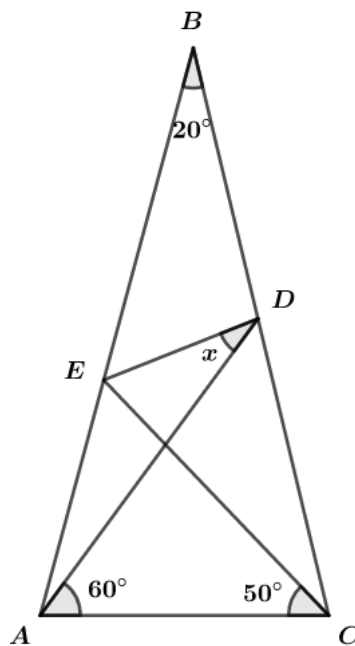
GABARITO

52. $x = 30^\circ$
53. 30°
54. 100°
55. d
56. d
57. c

RESOLUÇÃO

52. (Desafio - Triângulo Russo)

Sabendo que o triângulo ABC é isósceles com $AB = BC$. Se $\hat{B} = 20^\circ$, $\hat{DAC} = 60^\circ$ e $\hat{ACE} = 50^\circ$, calcule x .



Comentários

Essa é uma questão clássica de geometria conhecida como triângulo russo. O segredo nessa questão é traçar um segmento de tal forma que gere triângulos isósceles. Como ABC é isósceles, temos:

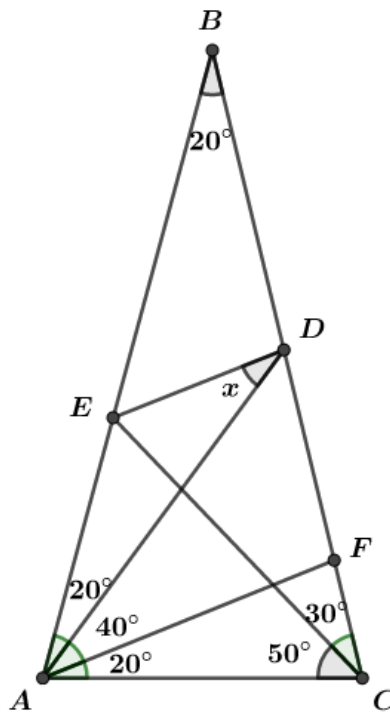
$$\hat{BAC} = \hat{BCA} = \alpha$$

$$2\alpha + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 80^\circ$$



Vamos construir o segmento \overline{AF} tal que $F\hat{A}C = 20^\circ$:

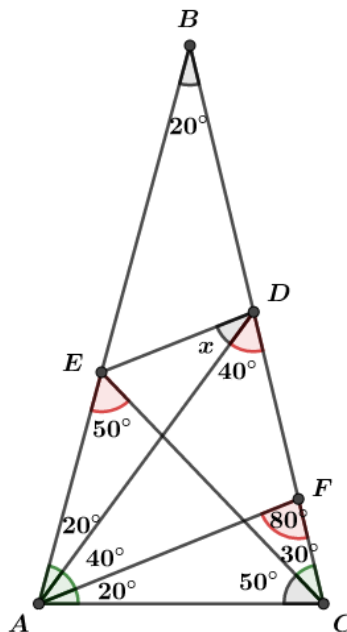


Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então para os triângulos AEC , ADC e AFC , temos:

$$\Delta AEC \Rightarrow A\hat{E}C + 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{E}C = 50^\circ$$

$$\Delta ADC \Rightarrow A\hat{D}C + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{D}C = 40^\circ$$

$$\Delta AFC \Rightarrow A\hat{F}C + 80^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{F}C = 80^\circ$$



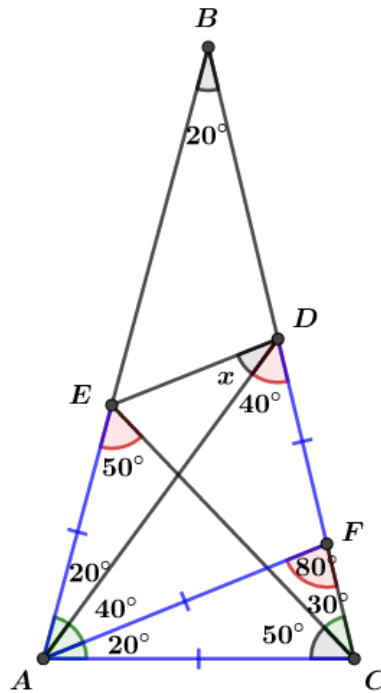
Perceba que:

ΔAFC é isósceles, então $AF = AC$

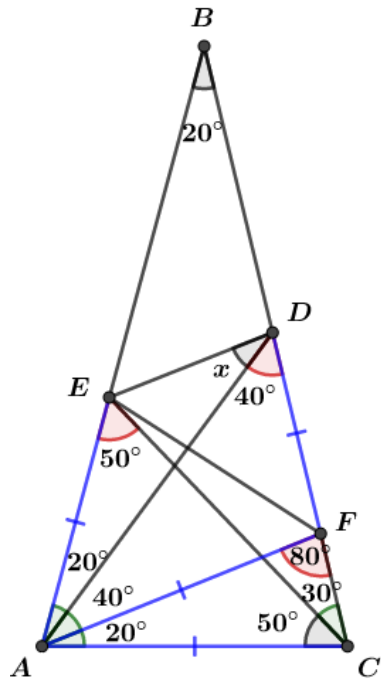
ΔAEC é isósceles, então $AE = AC$



$\triangle AFD$ é isósceles, então $AF = FD$

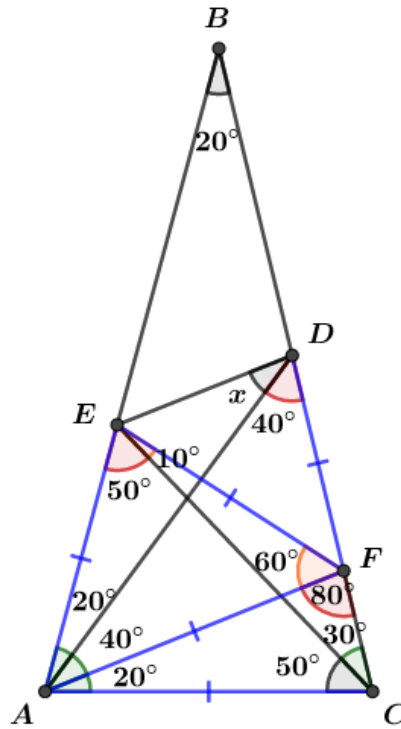


Note o ângulo $\widehat{EAF} = 60^\circ$, vamos construir o triângulo AFE :



$\triangle AFE$ é isósceles, então $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$

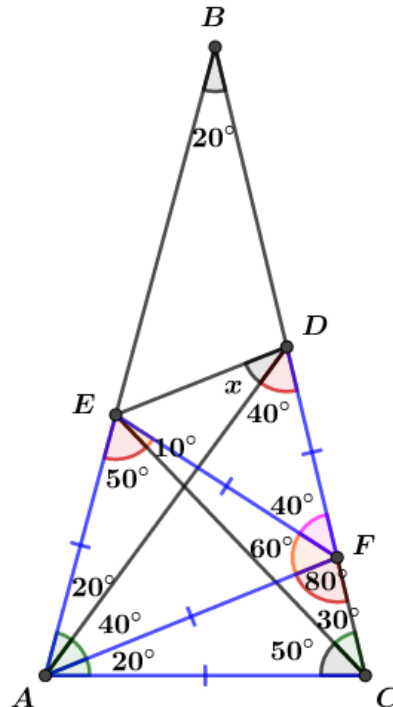
Como $\widehat{EAF} = 60^\circ$ é o vértice do triângulo, temos que $\triangle AFE$ é equilátero com $\widehat{AEF} = \widehat{AFE} = 60^\circ$. Então, $AE = AF = EF$.



$\triangle EFD$ é isósceles, então $\widehat{FED} = \widehat{FDE}$

Calculando \widehat{EFD} :

$$\widehat{EFD} + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EFD} = 40^\circ$$



Calculando os ângulos da base do $\triangle EFD$:

$$\widehat{FED} = \widehat{FDE} = x + 40^\circ$$

$$x + 40^\circ + x + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$2x = 60^\circ$$



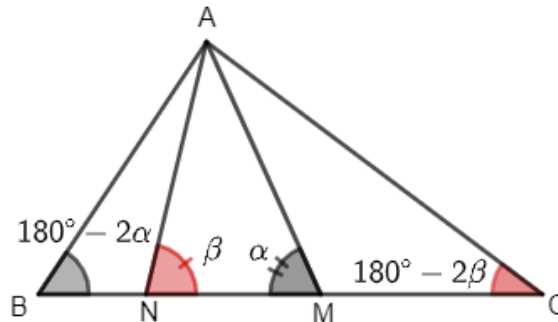
$$\therefore x = 30^\circ$$

Gabarito: $x = 30^\circ$

53. (Elementos da Matemática Volume 2)

ABC é um triângulo no qual $\widehat{A} = 120^\circ$; M e N são pontos do lado BC tais que $MB = AB$ e $NC = AC$. Calcular o ângulo \widehat{MAN} .

Comentários



Seja α e β os ângulos da base MN do triângulo AMN .

Como $MB = AB$, o ΔABM é isósceles de base AM , logo $\widehat{BAM} = \widehat{AMB} = \alpha$. Assim, temos que $\widehat{ABN} = 180 - 2\alpha$. Analogamente, ΔACN é isósceles de base AN (pois $NC = AC$). Desse modo, $\widehat{CNA} = \widehat{CAN} = \beta \Rightarrow \widehat{ACN} = 180^\circ - 2\beta$.

Do enunciado, temos que $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Logo, podemos escrever que:

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 150^\circ$$

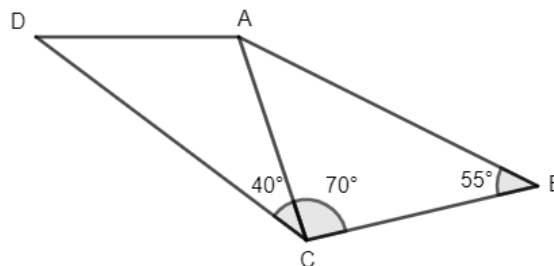
$$\widehat{MAN} = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\widehat{MAN} = 30^\circ$$

Gabarito: 30°

54. (Portugal – 98)

Na figura seguinte, $\overline{AD} = \overline{BC}$.



Quanto mede o ângulo \widehat{DAC} ?

Comentários

Da questão, podemos perceber que $\widehat{CAB} = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ = 55^\circ$.



Logo, o triângulo ΔABC é isósceles com $AC = CB$. Porém pelo enunciado temos $AD = BC$ o que implica que $AD = AC$. Assim, ΔADC é isósceles com $\widehat{ADC} = 40^\circ$. Portanto:

$$D\widehat{AC} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$$

Gabarito: 100°

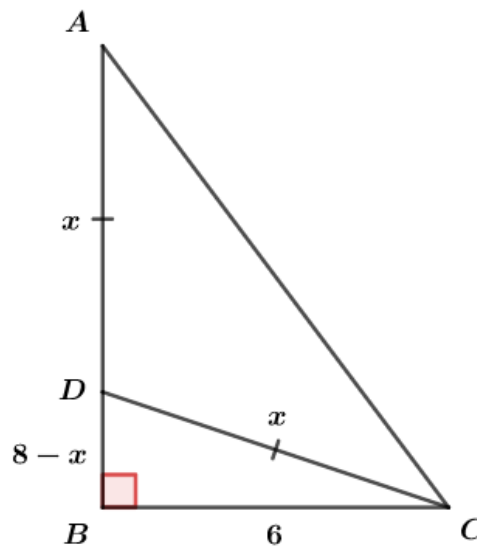
55. (ITA/2011)

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos \overline{AB} e \overline{BC} medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre \overline{AB} e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento \overline{AD} , em cm, é igual a

- a) $3/4$
- b) $15/6$
- c) $15/4$
- d) $25/4$
- e) $25/2$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como o ΔBDC é retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 &= (8 - x)^2 + 6^2 \\ x^2 &= x^2 - 16x + 64 + 36 \\ 16x &= 100 \\ x &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Gabarito: “d”.

56. (ITA/2008)

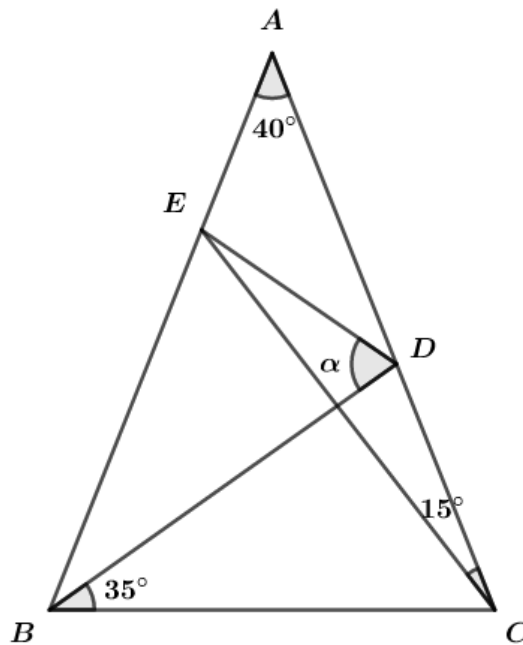


Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} , tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35^\circ$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

- a) 35°
- b) 45°
- c) 55°
- d) 75°
- e) 85°

Comentários

De acordo com o enunciado do problema, temos:



Como ΔABC é isósceles, temos $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \beta$. Desse modo:

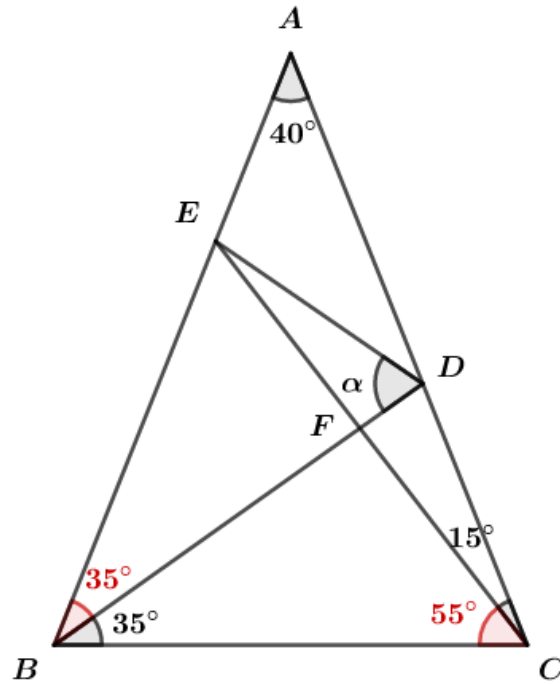
$$40^\circ + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$2\beta = 140^\circ$$

$$\beta = 70^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{C}E = 55^\circ$$

$$\Rightarrow E\hat{B}D = 35^\circ$$



Pelo ΔBFC :

$$35^\circ + 55^\circ + \widehat{BFC} = 180^\circ$$

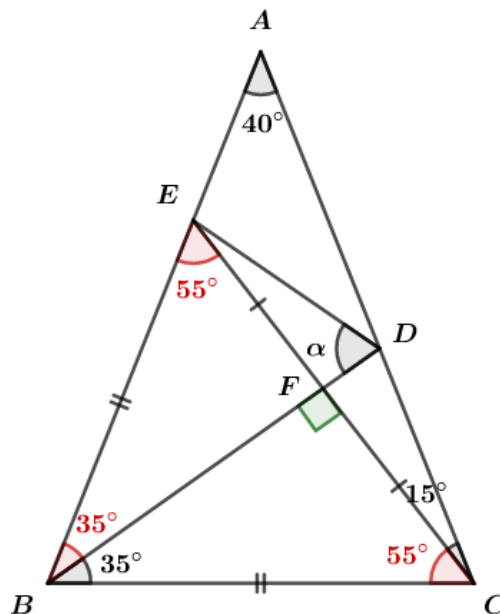
$$\widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta BFC \text{ é retângulo}$$

$$\widehat{BFE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEF} = 55^\circ$$

Então, BEC é isósceles.

$$\Delta BFE \sim \Delta BFC \Rightarrow CF = FE$$

Como \widehat{EFD} e \widehat{BFC} são opostos pelo vértice, temos que $\widehat{EFD} = 90^\circ$.



DF é altura e mediana do triângulo DEC , logo DF é mediatriz e ΔDEC é isósceles. Então, $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = 15^\circ$.

Portanto, pelo ΔDFE :



$$15^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 75^\circ$$

Gabarito: "d".

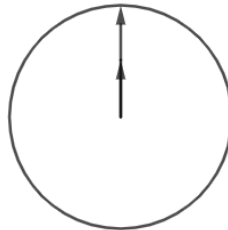
57. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a:

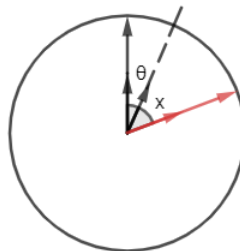
- a) $\frac{23\pi}{11}$
- b) $\frac{13\pi}{6}$
- c) $\frac{24\pi}{11}$
- d) $\frac{25\pi}{11}$
- e) $\frac{7\pi}{3}$

Comentários

Para resolver esse problema, vamos supor que a posição do primeiro encontro do ponteiro das horas com o ponteiro dos minutos ocorre em 12 horas.



Agora, devemos achar o ângulo que o ponteiro dos minutos percorre até encontrar o ponteiro das horas no segundo encontro.



Primeiro, o ponteiro dos minutos percorre $2\pi \text{ rad}$ até voltar à posição inicial. Nesse período, o ponteiro das horas percorre θ . A partir daí, até o encontro, o ponteiro dos minutos percorrerá $\theta + x$ e o das horas, x . Dessa forma, podemos montar uma regra de três.

$$\begin{aligned} 2\pi & - \frac{\pi}{6} \\ \theta + x & - x \\ 2\pi x & = (\theta + x) \cdot \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$



Mas quando o ponteiro dos minutos percorre $2\pi \text{ rad}$, o ponteiro das horas percorrerá $\pi/6 \text{ rad}$, logo $\theta = \pi/6$ e, portanto,

$$2\pi x = (\theta + x) \cdot \frac{\pi}{6} \Rightarrow 12\pi x = \left(\frac{\pi}{6} + x\right) \pi \Rightarrow 12x \cdot 6 = \pi + 6x \Rightarrow 66x = \pi$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{66}}$$

Então, o ângulo varrido pelo ponteiro dos minutos é:

$$S = 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{66} = \frac{24\pi}{11}$$

Gabarito: "c".

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula inicial de Geometria Plana. O importante nessa aula é aprender bem os capítulos de ângulos e triângulos. Pois, o conteúdo desses capítulos pode potencialmente cair na sua prova.

Não é necessário decorar as relações métricas no triângulo retângulo, mas você deve saber deduzir aquelas fórmulas.

Na próxima aula, continuaremos o assunto de Geometria Plana e veremos tópicos mais avançados e que podem nos ajudar a resolver as questões dos concursos.

Quaisquer dúvidas, críticas e sugestões entre em contato! Será um prazer atendê-lo!

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.
- [2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.
- [3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.