1. Função do 1º Grau (Função afim)

1.1 Definição

É uma função da forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O real a é chamado de coeficiente angular de f, enquanto b é o coeficiente linear.

Ex.: $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = -\pi^2 x + \sqrt{3}$

Obs. 1: As raízes (ou zeros) de uma função f real são os valores que anulam tal função. Por exemplo, a raiz de $2x + 1$ é $x = -\frac{1}{2}$. Mais geralmente, a raiz de $f(x) = ax + b$ é $x = -\frac{b}{a}$.

Obs. 2: Uma função do 1º grau é dita **linear** se $b = 0$, ou seja, uma função é linear se é da forma $f(x) = ax$, $a \neq 0$.

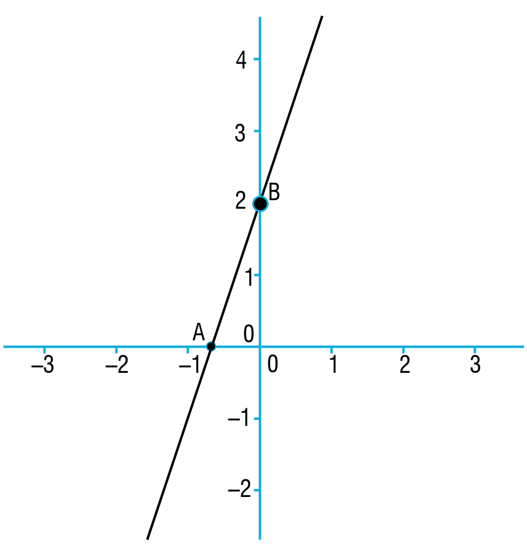
1.2 Gráfico

O gráfico de uma função afim é uma reta. Desta forma, para efetuar a construção de tal gráfico, basta que conheçamos dois de seus pontos.

Obs.: Graficamente, o coeficiente angular é dado pela tangente do ângulo de inclinação da reta, e o coeficiente linear é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y.

Ex.: Construa o gráfico de $y = 3x + 2$.

Para fazer a construção, basta conhecermos dois pontos. Neste caso, escolhemos as interseções da reta com os eixos coordenados: $A = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ e $B = (0,2)$.



1.3 Crescimento e decrescimento

Teorema 1 (monotonismo em função do sinal do coeficiente angular):

Dada uma função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, temos:

I. f é estritamente crescente se $a > 0$;
II. f é estritamente decrescente se $a < 0$.

Demonstração: Faremos o caso I e deixaremos II como exercício.

I. Devemos provar que se $x > y$, então $f(x) > f(y)$. Temos que $f(x) - f(y) = ax + b - ay - b = a(x - y)$. Como $a > 0$ e $x > y$, segue que $f(x) - f(y) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(y)$.

1.4 Sinal do binômio

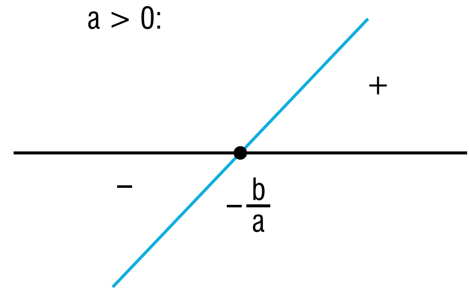
Usando o teorema 1 e considerando que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, concluímos que:

I. Se $a > 0$, então: $\begin{cases} x > -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x < -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$

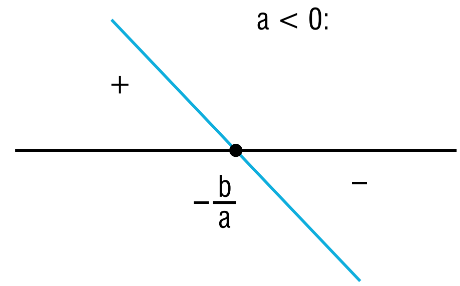
II. Se $a < 0$, então: $\begin{cases} x > -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) < 0 \\ x < -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$

Podemos montar o seguinte esquema:

$a > 0$:



$a < 0$:



2. Função do 2º grau (função quadrática)

2.1 Definição

É uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Obs.: a é dito coeficiente líder da função quadrática.

Ex.: $f_3(x) = 3x^2 - 5x + 10$

2.2 Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Isso será demonstrado na apostila de Matemática IV, na parte de cônicas.

Obs.: Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para CIMA e quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para BAIXO.

2.3 Raízes

Como encontrar os valores de x tais que $ax^2 + bx + c = 0$? Para determinados valores de a, b, c, essa tarefa é relativamente simples. Por exemplo, $x^2 - 5x + 6 = 0$ é fácil de ser resolvido, pois podemos usar o Produto de Stevin e chegar a $(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$. Entretanto, o caso geral é um pouco mais sofisticado e então recordaremos aqui a demonstração vista na apostila 1 de Matemática II. Usaremos a técnica de completar quadrados: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Agora, temos que $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante), chegamos a:

Teorema 2 (Fórmula de Bhaskara)

As raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, são dadas por $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Obs.: A fórmula de Bhaskara também é verdadeira quando os coeficientes da equação são complexos!

Teorema 3 (Número de raízes reais em função do discriminante)

Dada uma equação do 2º grau com coeficientes reais, temos:

I. $\Delta > 0$: a equação possui duas raízes reais distintas.
II. $\Delta = 0$: a equação possui duas raízes reais iguais (raiz dupla).
III. $\Delta < 0$: a equação não possui raízes reais.

2.3 Soma, produto e diferença entre raízes

Teorema 4 (Relações entre coeficientes e raízes)

Dada uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ de raízes x_1 e x_2, temos que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$ e $D = |x_1 - x_2| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$.

Demonstração: Basta usar a fórmula de Bhaskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Logo, $S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} + -b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

Também temos que

$$P = x_1x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Finalmente, segue que $D = |x_1 - x_2| = \left|\frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$

Obs.: As seguintes identidades podem ser úteis:
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$ e $x_1^3 + x_2^3 =$
$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$.

2.4 Forma canônica

Em Matemática, é comum transformar o formato de determinados objetos para que seja mais conveniente de se trabalhar e de onde possam ser extraídas informações relevantes. Por exemplo, escrevemos um número inteiro positivo como produto de primos, escrevemos a equação de um círculo na forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Essas são chamadas formas canônicas. Para uma função quadrática, podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] =$$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, sua forma canônica. Nos tópicos seguintes, veremos como extrair informações relevantes da forma canônica.

2.5 Máximos e mínimos

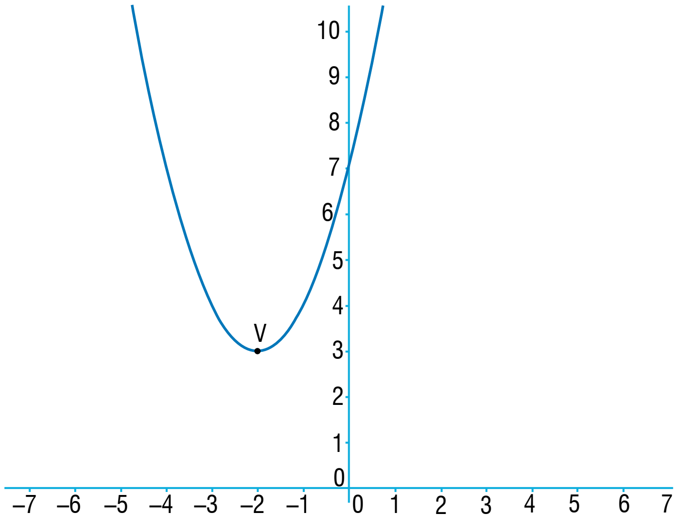
Veja que $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Logo, se $a > 0$, temos que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e, portanto, $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, com igualdade se e somente se $x = -\frac{b}{2a}$. Da mesma forma, se $a < 0$, segue que $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$ com igualdade se e somente se $x = -\frac{b}{2a}$. Temos então:

Teorema 5 (Máximos e Mínimos)

I. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite valor mínimo $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ ("y do vértice") e tal valor mínimo ocorre para $x = x_V = -\frac{b}{2a}$ ("x do vértice").
II. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite valor máximo $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ ("y do vértice") e tal valor máximo ocorre para $x = x_V = -\frac{b}{2a}$ ("x do vértice").

Obs.: O ponto $(x_V, y_V) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado de **vértice** da parábola.

Ex.: A função quadrática $y = x^2 + 4x + 7$ possui vértice no ponto $\left(\frac{-4}{2}, -\frac{-12}{4}\right) = (-2, 3)$, como mostrado na figura.

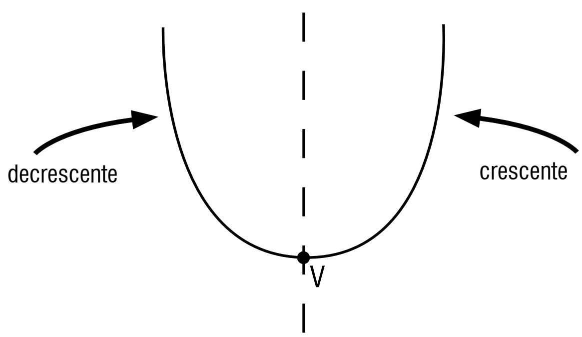


2.6 Crescimento e decrescimento

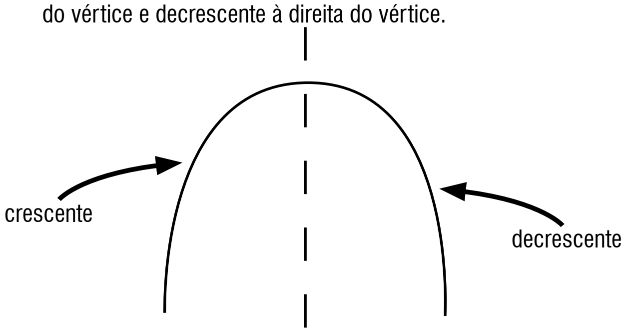
A partir da forma canônica (ou analisando o gráfico da função quadrática), segue:

Teorema 6 (Crescimento e decrescimento)

I. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é crescente à direita do vértice e decrescente à esquerda do vértice.



II. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é crescente à esquerda do vértice e decrescente à direita do vértice.

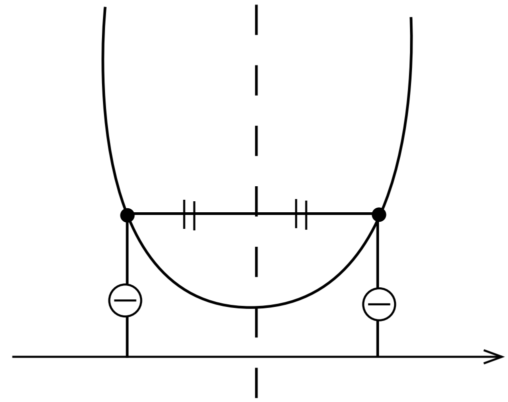


Obs.: Dessa forma, se $a > 0$, a imagem da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ e se $a < 0$, a imagem é $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

2.7 Eixo de simetria

Teorema 7 (Eixo de Simetria)

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática com vértice no ponto $V = (x_V, y_V)$, vale que $f(x_V - k) = f(x_V + k)$ para todo k real. Visualmente, pontos do gráfico cujas abscissas equidistam de x_v estão à mesma altura, ou ainda a reta $x = x_v$ é um eixo de simetria da parábola.



Demonstração: Na forma canônica, temos que $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$. Logo, $f(x_v + k) = ak^2 + y_V$ e $f(x_V - k) = a(-k)^2 + y_V = ak^2 + y_V$, o que conclui a prova.

2.8 Forma fatorada

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ de raízes x_1 e x_2, temos que $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Usando o teorema 4, segue que $f(x) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Temos então:

Teorema 8 (Forma fatorada)

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ de raízes x_1 e x_2, podemos fatorar $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Obs.: Para polinômios de graus maiores, há uma forma fatorada análoga, conforme será visto na apostila 3 de Matemática II.

2.9 Sinal do trinômio

Estamos interessados em saber quando $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$. Para isso, dividiremos a nossa análise em três casos: I. $\Delta < 0$, II. $\Delta = 0$ e III. $\Delta > 0$.

I. $\Delta < 0$:
Nesse caso, escrevendo o trinômio na forma canônica: $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. O termo dentro dos colchetes é sempre positivo, pois é soma de um quadrado com um termo positivo. Dessa forma, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a.

II. $\Delta = 0$:
Mais uma vez, escrevendo na forma canônica, temos: $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Nesse caso, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a, exceto quando $x = -\frac{b}{2a}$, quando $f(x)$ se anula.
Nesse caso, o gráfico da parábola é tangente ao eixo das abscissas.

III. $\Delta > 0$
Aqui, o trinômio possui duas raízes reais distintas $x_1 < x_2$. Usaremos então a forma fatorada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Assim, temos que $f(x)$ tem o mesmo sinal de a quando $x < x_1$ ou $x > x_2$ e $f(x)$ tem sinal contrário ao de a quando $x_1 < x < x_2$.

Temos então:

Teorema 9 (Sinal do trinômio)

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática.

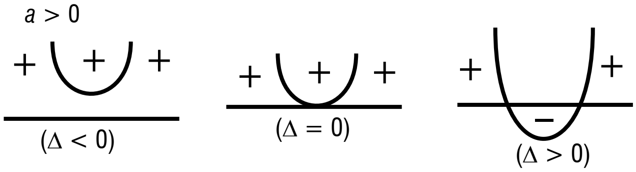
I. $a > 0$:
– $\Delta < 0$:
$f(x) > 0$ para todo x real
– $\Delta = 0$
$f(x) \geq 0$ para todo x real e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

– $\Delta > 0$ (digamos que as raízes reais são $x_1 < x_2$):

$f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$

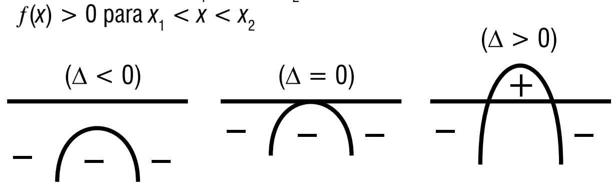
$f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$

$a > 0$



II. $a < 0$:
– $\Delta < 0$:
$f(x) < 0$ para todo x real
– $\Delta = 0$:
$f(x) \leq 0$ para todo x real e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

– $\Delta > 0$ (digamos que as raízes reais são $x_1 < x_2$):
$f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$
$f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$



2.10 Inequações

Estaremos interessados em estudar o sinal de funções que são produtos e quocientes de funções do 1º grau, ou seja, estamos interessados em estudar o sinal de funções da forma

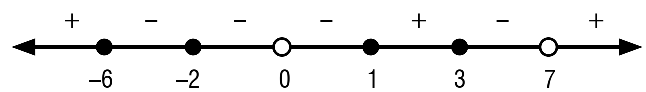
$$f(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\ldots(x-b_p)^{m_p}},$$ em que $n_1,\ldots, n_k, m_1, \ldots, m_p$

são inteiros positivos. Nos pontos $x = a_1,\ldots, a_k$, a função se anula (zeros) e os pontos $x = b_1,\ldots,b_p$ são chamados pontos de descontinuidade. Para estudarmos o sinal de $f(x)$, marcamos na reta real todos os zeros e os pontos de descontinuidade. Esses pontos dividem a reta em $k + p + 1$ intervalos e é possível provar que, em cada um desses intervalos, o sinal da função é constante. Para determinar qual é o sinal em cada um desses intervalos, há um método simples (MÉTODO DA RETA REAL):

I. Colocar todos os pontos na reta retal em ordem crescente e sublinhar aqueles associados a expoentes pares. Além disso, os pontos de descontinuidade devem ser sempre abertos (indicando que eles não pertencem ao conjunto-solução). Os zeros devem ser fechados quando o sinal da inequação for $\leq$ ou $\geq$.
II. Verificar o sinal da função quando $x \to +\infty$ (essa análise é bastante simples como veremos nos exemplos).
III. Da direita para a esquerda, trocar o sinal sempre que se passa por um ponto não sublinhado e manter o sinal quando se passa por um ponto sublinhado.

Ex.: Resolver a inequação $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3} \leq 0.$

Solução: Marcamos na reta real os pontos de descontinuidade e os zeros: $-6 < -2 < 0 < 1 < 3 < 7$. Os pontos $-6, -2, 1, 3$ são fechados e os pontos 0 e 7 são abertos. Além disso, devemos sublinhar -2 e 0. Quando $x \to +\infty$, todas as parcelas são positivas e, portanto, a função é positiva. Executando o passo 3, temos:



Assim, o conjunto-solução é $S = [-6, 0) \cup (0, 1] \cup [3, 7)$.

2.11 Posição de um número com relação às raízes

O objetivo aqui é saber se um real t está à esquerda das raízes, entre as raízes, à direita das raízes ou se é uma raiz de uma função quadrática de forma simples (sem necessidade de calcular as raízes da função efetivamente).

Teorema 10

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática com $\Delta > 0$, raízes reais $x_1 < x_2$ e seja t um real qualquer.

I. $a \cdot f(t) < 0 \Leftrightarrow x_1 < t < x_2$

II. $\left(a \cdot f(t) > 0 \wedge t > -\dfrac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow t > x_2$

III. $\left(a \cdot f(t) > 0 \wedge t < -\dfrac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow t < x_1$

IV. $a \cdot f(t) = 0 \Leftrightarrow (t = x_1 \vee t = x_2)$

2.12 Fórmula de Newton

Você já se perguntou como calcular de maneira rápida $(2+\sqrt{2})^{10} + (2-\sqrt{2})^{10}$? Uma maneira de se fazer isso é usando a fórmula de Newton, que serve para calcular a soma de potências de um mesmo expoente de raízes de uma equação do 2º grau.

Teorema 11 (Fórmula de Newton)

Sejam x_1 e x_2 as raízes (não necessariamente reais) de uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c$. Defina a sequência $S_0 = 2$ e $S_n = x_1^n + x_2^n$ para n inteiro positivo (podemos definir a sequência para n inteiro negativo, se as raízes são não nulas). Então, vale que $\boldsymbol{aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0}$ para todo n inteiro não negativo (mais uma vez, a relação é válida para n inteiro negativo, se as raízes são não nulas).

Demonstração: Como x_1 é raiz de $ax^2 + bx + c$, segue que $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$.

Multiplicando ambos os lados por x_1^n, segue que $ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0$ (*). Analogamente, segue que $ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0$ (**). Somando (*) e (**), temos que

$a\left(x_1^{n+2}+x_2^{n+2}\right)+b\left(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}\right)+c\left(x_1^{n}+x_2^{n}\right)=0$, o que nos dá finalmente $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$, como desejado.

3. Função modular

3.1 Definição

A função modular (também conhecida como função valor absoluto) é tal que $f(x)=\begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$. Representamos $f(x) = |x|$.

Obs.: Veja que $f(x) \geq 0$ para todo x real.

3.2 Efeitos do módulo nos gráficos de uma função

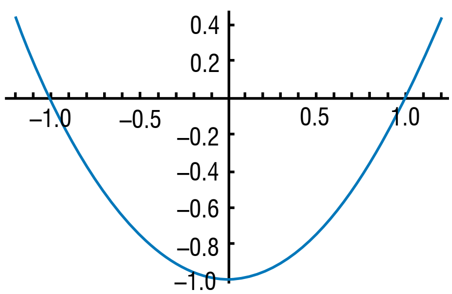
Dada uma função $f(x)$, há duas outras funções interessantes a serem consideradas: $|f(x)|$ e $f(|x|)$. Entenderemos como fazer o gráfico dessas funções a partir do gráfico de $f(x)$.

I. $|f(x)|$:

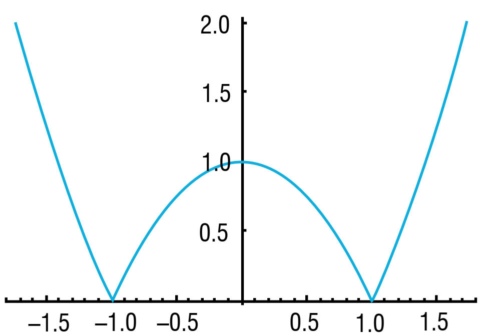
Nesse caso, toda a parte do gráfico que está abaixo do eixo x deve ser refletida com relação a tal eixo.

Ex.: Determine o gráfico da função $y = |x^2 - 1|$.

1º Passo: Desenhamos o gráfico da função $y = x^2 - 1$.



2º Passo: Refletimos a parte do gráfico que está abaixo do eixo x

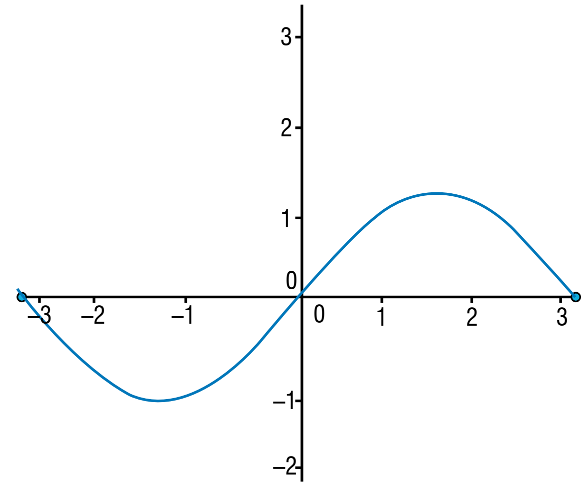


II. $f(|x|)$

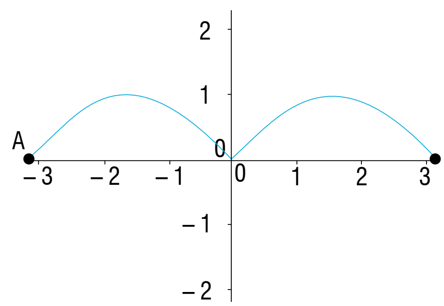
Devemos ignorar a parte do gráfico de $f(x)$ que está à esquerda do eixo y e refletir a parte que está à direita com relação a tal eixo.

Ex.: Determine o gráfico de sen $(|x|)$ para $-\pi \leq x \leq \pi$.

1º Passo: Desenhamos o gráfico de sen x para $-\pi \leq x \leq \pi$.



2º Passo: Ignoramos a parte à esquerda do eixo y e refletimos com relação a tal eixo a parte que está à direita



3.3 Propriedades do módulo

I. $\sqrt{x^2} = |x|$
II. $|xy| = |x|\,|y|$
III. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
IV. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, se $y \neq 0$
V. $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$
VI. (Desigualdade Triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$, com igualdade se, e somente se, x e y têm o mesmo sinal.

Demonstração: Como os dois lados são positivos,
$|x+y| \leq |x|+|y| \Leftrightarrow \left(|x+y|\right)^2 \leq \left(|x|+|y|\right)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$. Esta última é equivalente a $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\,|xy| + y^2 \Leftrightarrow xy \leq |xy|$, o que é verdade pela propriedade v. Ademais, a igualdade ocorre quando $xy = |xy|$, ou seja, quando xy é positivo, ou ainda quando x e y têm o mesmo sinal.

3.4 Equações e inequações modulares

Há três propriedades úteis a serem usadas:

I. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$
II. $|x| > k \Leftrightarrow x > k \vee x < -k$ $(k > 0)$
III. $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ $(k > 0)$

Quando não for possível usar uma das três propriedades anteriores diretamente, podemos usar a força bruta e dividir o problema em vários casos.

Ex.:

I. Resolva a equação $|3x - 1| = |2x + 3|$
Nesse caso, basta termos $3x - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = 4$ ou $3x - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$. Logo, o conjunto-solução é $S = \left\{4, -\frac{2}{5}\right\}$.

II. Resolva a equação $|x - 2| = 3 - 2x$.

1ª solução: Usaremos $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{se } x \geq 2 \\ 2-x, \text{se } x < 2 \end{cases}$.

1º caso ($x \geq 2$): $x - 2 = 3 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$. Veja que esse número não satisfaz $x \geq 2$, por isso não é solução!

2º caso ($x < 2$): $2 - x = 3 - 2x \Leftrightarrow x = 1$. Veja que esse número satisfaz $x < 2$, portanto é solução!

Então, $S = \{1\}$.

2ª solução: Outra forma de eliminar o módulo é elevando ao quadrado. Mas, antes disso, precisamos obrigar os dois lados a terem o mesmo sinal: $3 - 2x \geq 0$, que dá $x \leq \frac{3}{2}$ (*). Então, elevando ao quadrado, temos $|x - 2|^2 = (3 - 2x)^2$. Daí segue que:

$(x - 2)^2 = (3 - 2x)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 - 12x + 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0$.

Resolvendo a equação do 2º grau, temos $x = 1$ ou $x = \frac{5}{3}$. Mas $\frac{5}{3}$ não satisfaz a restrição (*), por isso, $S = \{1\}$.

III. Resolva a inequação $|2x + 1| < 3$.

Basta que $-3 < 2x + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.
Logo, $S = (-2, 1)$.

IV. Resolva a inequação $2x - 7 + |x + 1| \geq 0$.

Devemos dividir o problema em 2 casos:

1º caso: $x \geq -1$
Aqui, a inequação se reduz a $2x - 7 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.
Fazendo a interseção com a restrição, temos $x \geq 2$.

2º caso: $x < -1$
Aqui, a inequação se reduz a $2x - 7 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$.
Fazendo a interseção com a restrição, não encontramos soluções.
Juntando os dois casos, temos que $S = [2, +\infty)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Determine a sabendo que a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + 3x + a = 0$ é igual a 4.

Solução: Sendo x_1, x_2 as raízes, devemos ter $x_1^2 + x_2^2 = 4$. Esta relação pode ser escrita como $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4$ (*). As relações de soma e produto nos dão que $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1x_2 = a \end{cases}$. Em (*), temos que $(-3)^2 - 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$.

02 Determine a imagem da função real $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Solução: Para determinar a imagem, precisamos explicitar todos os valores possíveis para y. A igualdade é equivalente a $yx^2 - x + y = 0$ (*). Veja que $y = 0$ é possível, basta tomar $x = 0$. Caso $y \neq 0$, (*) é uma equação do 2º grau e, para possuir soluções reais, precisa possuir discriminante não negativo: $\Delta = 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$.

Juntando isso com o $y = 0$ que já tinha sido encontrado, temos que a imagem é o intervalo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Obs.: Também é possível resolver fazendo uma substituição trigonométrica $x = \tan\theta$. De fato, como a função tangente pode assumir qualquer valor real, podemos fazer tal substituição. Assim, ficamos com $y = \frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}$. Como a imagem de sen 2θ é $[-1, 1]$, segue que a imagem pedida é $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

03 Determine todos os valores de m para os quais $x^2 + mx + 3m > 0$ para todo x real.

Solução: Como o coeficiente líder da expressão quadrática é positivo ($a > 0$), para que o trinômio seja sempre positivo, seu discriminante deve ser negativo (faça o gráfico!): $\Delta = m^2 - 12m < 0$. Agora temos outro problema. Precisamos determinar os valores de m que tornam $(m - 12)m < 0$ verdadeira. Como as raízes de $(m - 12)m$ são $m = 12$, $m = 0$ e a concavidade é positiva, devemos ter $0 < m < 12$ (faça o desenho!).

04 Considere as equações $ax^2 + bx + c = 0$ (i) e $x^2 + bx + ac = 0$ (ii). Exiba a relação existente entre as raízes de (i) e (ii).

Solução: Veja que as duas equações têm o mesmo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Por isso, as equações de (i) são $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e as raízes de (II) são $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Então, podemos dizer que as raízes de (I) são iguais às raízes de (II) divididas por a.

Comentário: Este problema dá uma maneira de reduzir equações gerais do 2º grau a equações com coeficiente líder igual a 1.

05 Calcule a para que as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + ax + 1 = 0$ possuam pelo menos uma raiz real comum.

Solução: Neste tipo de problema, uma boa ideia é considerar uma raiz comum às duas equações, ou seja t. Daí, temos que $t^2 + t + a = 0$ e $t^2 + at + 1 = 0$. Agora, para diminuir o grau, devemos subtrair as igualdades, obtendo $at + 1 - t - a = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(t - 1) = 0$. Agora, há dois casos:

1º caso: $a = 1$
Aqui, as duas equações são $x^2 + x + 1 = 0$, que não possui raiz real. Assim, este caso não fornece solução.
2º caso: $t = 1$
Daqui, obtemos que $a = -2$ e 1 é uma raiz comum às duas equações. Logo, $a = -2$.

06 Resolva a inequação $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$.

Solução: Um ERRO muito comum que muitos cometem é pensar que, em problemas como esse, basta passar o $x^2 - 1$ multiplicando para o outro lado! Não podemos fazer isso porque $x^2 - 1$ poderia ser negativo e, quando multiplicamos uma inequação por um negativo, o sinal se inverte!! Assim, devemos proceder como a seguir:

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6-x^2+1}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x-5}{x^2-1} < 0.$$ Esta última é equivalente a $-\frac{(x+5)}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} > 0$. Usando o método da reta real visto em 2.10, segue que o conjunto-solução é $S = (-5, -1) \cup (1, +\infty)$.

07 Determine k para que as raízes de $kx^2 - 2(k + 1)x + (k + 2) = 0$ sejam positivas.
Veja que se $k = 0$, a única raiz da equação é $x = 1$, que é positiva. Podemos considerar $k = 0$ como solução (alguns preferem não considerar, pois o enunciado fala de raízes no plural). Suporemos então $k \neq 0$.

Solução: Uma maneira de se abordar este problema é usando a teoria de posição de um número com relação às raízes. Primeiramente, devemos garantir a existência de raízes reais e, portanto, o discriminante deve ser positivo. Logo, $4(k + 1)^2 - 4k(k + 2) > 0 \Leftrightarrow 4 > 0$, o que é sempre verdade. Agora, para garantir que as raízes são positivas, devemos garantir que 0 está à esquerda das raízes. Pelo teorema 10, devemos ter $k \cdot f(0) > 0$ e $0 < \frac{2(k+1)}{2k}$. Logo, devemos ter $k(k + 2) > 0$ e $\frac{(k+1)}{k} > 0$. Logo, temos que $k < -2$ ou $k > 0$.
Assim, o conjunto-solução é $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

Comentário: Poderíamos ter resolvido o problema de outra maneira: atentando para o fato de que as raízes são positivas se, e somente se, o discriminante é positivo, a soma das raízes é positiva e o produto das raízes é positivo. Além disso, neste problema especificamente, é fácil ver que 1 é raiz da equação e, portanto, a outra raiz é $\frac{k+2}{k}$. Como 1 é positivo, basta forçarmos que $\frac{k+2}{k}$ seja positivo.

08 Determine os valores de m para os quais 1 é exterior ao intervalo das raízes da equação $(m + 3)x^2 - x + 2 = 0$.

Solução: Nesse tipo de problema que cita o "intervalo das raízes", inicialmente, é necessário forçarmos a existência de duas raízes reais distintas (para haver o intervalo). Isso nos dá a primeira restrição:
$\Delta = -8m - 23 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{23}{8}$ (i).
Agora, definindo $f(x) = (m + 3)x^2 - x + 1$, para 1 ser exterior ao intervalo das raízes, precisamos ter $a \cdot f(1) > 0$, o que nos dá $(m + 3) \cdot (m + 4) > 0$. Essa é uma inequação do 2º grau de concavidade positiva e raízes -3 e -4; então, a 2ª restrição é $m < -4$ ou $m > -3$ (ii). Fazendo a interseção de (i) e (ii), ficamos com $m < -4$.

09 Resolva a equação $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} - \sqrt{13-x} = 0$.

Solução: Esta é uma equação irracional. Uma técnica simples e útil para resolver tal equação é elevá-la ao quadrado de maneira conveniente de modo que os radicais desapareçam. Devemos tomar bastante cuidado com isso, pois, ao elevar ao quadrado, podemos introduzir raízes estranhas (por exemplo, na equação $x = 3$, ao elevarmos ao quadrado, obtemos $x = 3$ ou $x = -3$ e essa última é uma raiz estranha!). Assim, ao fim de todo o processo, devemos testar as soluções para verificar se elas são de fato soluções.
Aqui, podemos reescrever a equação como $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$. Elevando ao quadrado, segue que $2+\sqrt{x-5} = 13-x \Rightarrow 11-x = \sqrt{x-5}$. Elevando ao quadrado mais uma vez, temos que $x^2 - 22x + 121 = x - 5$ $\Rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0$ e então $x = 9$ ou $x = 14$. Voltando à equação original, vemos que 9 é solução, enquanto 14 não (veja a importância da verificação!).
Logo, $S = \{9\}$.

10 Resolva a inequação $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.

Solução: Está é uma inequação irracional. A heurística para a solução é basicamente a mesma das equações irracionais (elevar ao quadrado para eliminar radicais!). Entretanto, aqui devemos ser ainda mais cautelosos, porque, como vimos na apostila 1 de Matemática II, só podemos elevar ao quadrado $a > b$ se ambos os lados da inequação são não negativos.

Primeiramente, em qualquer inequação irracional, devemos fazer as restrições. Aqui, há apenas uma restrição: $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 4$.

Agora, temos dois casos:
1º caso: $x - 3 < 0$
Como $\sqrt{x^2-4x} \geq 0$, nesse caso, a inequação é verdadeira.
Fazendo a interseção com a restrição, temos $x \leq 0$.

2º caso: $x - 3 \geq 0$
Agora, ambos os lados da inequação são não negativos e então podemos elevá-los ao quadrado:
$x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 2x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}$.
Fazendo a interseção com a restrição, temos $x > \frac{9}{2}$.

Assim, o conjunto-solução é $S = (-\infty, 0] \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

11 Determine a soma das quintas potências das raízes da equação $x^2 + 3x - 1 = 0$.

Solução: É possível obter uma solução na força bruta calculando as raízes. No entanto, utilizaremos a fórmula de Newton, que possibilitará uma abordagem mais elegante. Sendo x_1, x_2 as raízes e definindo $S_n = x_1^n + x_2^n$, temos que $S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$ (fórmula de Newton). Escrevendo $S_{n+2} = S_n - 3S_{n+1}$ e percebendo que $S_0 = 2$ e $S_1 = -3$, podemos calcular os termos seguintes:
$S_2 = S_0 - 3S_1 = 2 - 3(-3) = 11$, $S_3 = S_1 - 3S_2 = -3 - 3 \cdot 11 = -36$
$S_4 = S_2 - 3S_3 = 11 - 3(-36) = 119$, $S_5 = S_3 - 3S_4 = -36 - 3 \cdot 119 = -393$

Então, a soma das quintas potências das raízes é -393.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 **(ITA 77)** Supondo $a < b$, onde a e b são constantes reais, considere a função $g(x) = a + (b-a)x$ definida no intervalo (0,1). Podemos assegurar que:

(A) g não é uma função injetora.
(B) dado qualquer $y_0 < b$, sempre existe um $x_0 \in (0,1)$ tal que $g(x_0) = y_0$.
(C) para cada $a < y_0 < b$, corresponde um único real $x_0 \in (0,1)$ tal que $g(x_0) = y_0$.
(D) não existe uma função real h, definida no intervalo (a, b), satisfazendo a relação $h(g(x)) = x$ para cada $x \in (0,1)$.
(E) n.d.a.

02 **(ITA 94)** Dadas as funções reais de variável real $f(x) = mx + 1$ e $g(x) = x + m$, onde m é uma constante real com $0 < m < 1$, considere as afirmações:

I. $f \circ g(x) = g \circ f(x)$, para algum x real.
II. $f(m) = g(m)$
III. Existe a real tal que $f \circ g(a) = f(a)$
IV. Existe b real tal que $f \circ g(b) = mb$
V. $0 < g \circ g(m) < 3$

Podemos concluir que:

(A) todas são verdadeiras.
(B) apenas quatro são verdadeiras.
(C) apenas três são verdadeiras.
(D) apenas duas são verdadeiras.
(E) apenas uma é verdadeira.

03 **(ITA 84)** Os coeficientes do trinômio $x^2 + bx + c$ constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão não nula $r = \frac{q}{2}$, onde q é a razão da progressão aritmética $b^2 - 1$, $c^2 - b^2$. Nestas condições podemos afirmar que o trinômio apresenta:

(A) uma raiz nula.
(B) duas raízes reais distintas.
(C) duas raízes iguais.
(D) duas raízes complexas não reais.
(E) uma raiz irracional.

04 **(ITA 2009)** Sejam a, b, c constantes reais com $a \neq b$ formando, nesta ordem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Então, uma relação válida entre b e c é:

(A) $c = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)$.
(B) $c = b\left(2-\sqrt{2}\right)$.
(C) $c = b\left(\sqrt{2}-1\right)$.
(D) $c = b\sqrt{2}$.
(E) $c = \frac{b}{2}\left(4-\sqrt{2}\right)$.

05 **(CN 2007)** A menor raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre m e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre n e a menor raiz. Pode-se afirmar que $m + n$ é expresso por:

(A) $\frac{3abc-b^3}{a^2c}$.
(B) $\frac{3abc+b^3}{a^2c}$.
(C) $\frac{3abc-b^3}{c^2a}$.
(D) $\frac{abc+b^3}{c^2a}$.
(E) $\frac{abc-b^3}{a^2c}$.

06 Qual é a soma das raízes quadradas das raízes da equação do 2º grau $x^2 - 6x + 2 = 0$?

(A) $\sqrt{6+2\sqrt{2}}$.
(B) $\sqrt{6+2\sqrt{3}}$.
(C) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.
(D) $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$.
(E) $\sqrt{3+3\sqrt{2}}$.

07 Determine uma equação de segundo grau de coeficientes racionais em que uma das raízes é $3 + \sqrt{5}$.

08 Determine m e n para que as equações $(2n + m)x^2 - 4mx - 3 = 0$ e $(6n + 3m)x^2 - 3(n-1)x - 9 = 0$ tenham as mesmas raízes.

09 Determine p e q na equação $x^2 + px + q = 0$, sabendo que suas raízes aumentadas de uma unidade são as raízes de $x^2 - px + pq = 0$.

10 Para $m \neq 1$, mostre que existe uma relação independente de m entre a soma e o produto das raízes da equação $(1 + m)x^2 - (1 + m^2)x + m(1-m) = 0$.

11 Calcule m e n para que as raízes da equação $(n + m)x^2 - 4mx - 3 = 0$ sejam os inversos das raízes da equação $9y^2 + 3(n-1)y - (6n + m) = 0$.

12 As raízes de $x^2 + ax + b = 0$ são a e b. Sabendo que b é não-nulo, então $a - b$ é igual a:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

13 **(ITA 96)** Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x+3, x \le 0 \\ x^2+4x+3, x > 0 \end{cases}$. Podemos afirmar que:

(A) f é bijetora e $f \circ f\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.
(B) f é bijetora e $f \circ f\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.
(C) f é sobrejetora, mas não é injetora.
(D) f é injetora, mas não é sobrejetora.
(E) f é bijetora e $f \circ f\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(3)$.

14 O conjunto dos valores inteiros e positivos de m para os quais a equação $x^2 - 5mx + 2m = 0$ tem ambas as raízes reais e distintas é:

(A) {0, 1, 2, ... }
(B) {4, 5, 6, ... }
(C) {1, 2, 3}
(D) {1, 2, 3, ... }
(E) n.r.a.

15 Três máquinas P, Q e R, trabalhando juntas, fazem um trabalho em x horas. Trabalhando sozinha, P necessita de 6 horas adicionais para fazer o trabalho; Q, uma hora adicional e R, x horas adicionais. O valor de x é:

(A) 2/3.
(B) 11/12.
(C) 3/2.
(D) 2.
(E) 3.

16 Se $\frac{x}{y} = x - y$, onde x e y são reais, $y \neq 0$, então:

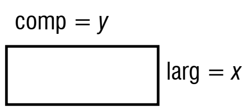
(A) $x \geq 4$ ou $x \leq 0$.
(B) y pode ser igual a 1.
(C) x e y devem ser irracionais.
(D) x e y não podem ser inteiros.
(E) x e y são necessariamente racionais.

17 **(ITA 95)** Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é:

Tempo(s)	Concentração(moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

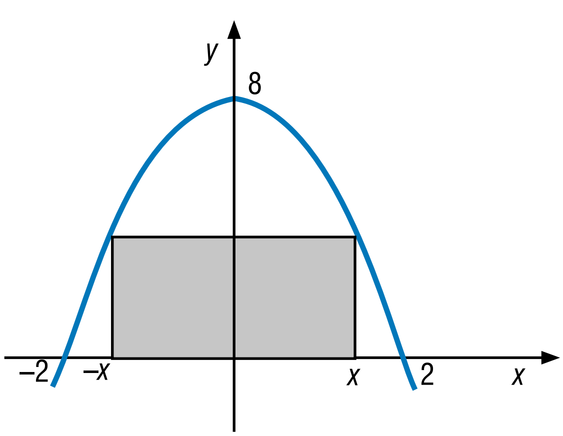
(A) 3,60.
(B) 3,65.
(C) 3,70.
(D) 3,75.
(E) 3,80.

18 **(AFA 1986)** "Um terreno retangular de área 875 m^2 tem o comprimento excedendo em 10 metros a largura". Assinale a equação que representa o problema acima:



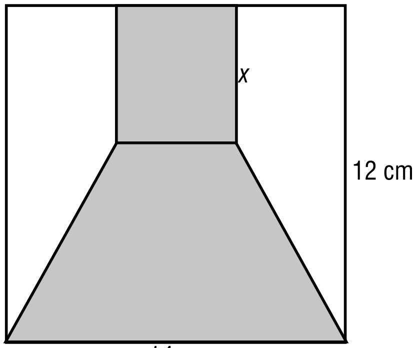
(A) $x^2 + 10x + 875 = 0$.
(B) $x^2 + 875x - 10 = 0$.
(C) $x^2 + 10x - 875 = 0$.
(D) $x^2 - 875x + 10 = 0$.

19 **(AFA 2001)** O retângulo, com base no eixo das abscissas, está inscrito numa parábola, conforme figura abaixo. O valor de x que faz esse retângulo ter perímetro máximo é:



(A) 1.
(B) 0,5.
(C) 0,25.
(D) 0,125.

20 **(UNIFESP)** De um cartão retangular de base 14 cm e altura 12 cm, deseja-se recortar um quadrado de lado x e um trapézio isósceles, conforme a figura, onde a parte hachurada será retirada.



O valor de x em centímetros, para que a área total removida seja mínima, é

(A) 3.
(B) 2.
(C) 1,5.
(D) 1.
(E) 0,5.

21 **(ESPCEX)** Um curral retangular será construído aproveitando-se um muro prexistente no terreno, por medida de economia. Para cercar os outros três lados, serão utilizados 600 metros de tela de arame. Para que a área do curral seja a maior possível, a razão entre as suas menor e maior dimensões será:

(A) 0,25.
(B) 0,50.
(C) 0,75.
(D) 1,00.
(E) 1,25.

22 Dada a função real f definida por $f(x) = x^2$, considere a função real g definida por $g(x) = f(x + m) + k$, sendo m e k reais. É **incorreto** afirmar que:

(A) o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f é deslocado k unidades para cima, se $k > 0$, e m unidades para a direita, se $m < 0$
(B) se $m = 0$ e $k = 1$, então o conjunto imagem de g é dado por $Im = \{y \text{ real} / y \geq 1\}$
(C) a equação do eixo de simetria da parábola que representa g é dada por $x = m$
(D) se $m = -2$ e $k = -3$, então as coordenadas do vértice da parábola que representa g são $(-m, k)$

23 **(CN 2008)** O gráfico de um trinômio do 2º grau y tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem. O trinômio $-y$ tem um valor:

(A) mínimo e raízes positivas.
(B) mínimo e raízes negativas.
(C) máximo e raízes positivas.
(D) máximo e raízes negativas.
(E) máximo e raízes de sinais opostos.

24 O conjunto dos valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x real é dado por:

(A) $p > -9$.
(B) $p < 11$.
(C) $p > 11$.
(D) $p < -9$.
(E) n.r.a.

25 Resolva a inequação $x^4 + x^2 - 20 > 0$.

26 Dado o trinômio do segundo grau $y = kx^2 + (k-1)x + (k-1)$:

(A) Não há nenhum valor de k que torne o trinômio negativo para qualquer valor de x.
(B) O trinômio é negativo para qualquer valor de x se $-1/3 < k < 1$.
(C) $k > 3$ torna sempre nulo o trinômio.
(D) Para que o trinômio seja sempre negativo, só convirão os valores de $k < -1/3$
(E) n.r.a.

27 Calcule m para que a inequação $(m-3)x^2 + 4x + m < 0$ seja válida para todos os valores de x, com exceção de um só.

28 Determine m para que se tenha $\dfrac{(m+3)\,x^2+(m+3)\,x+19}{x^2+x+6} > 0$, para todo x real.

29 Determine m de modo que a desigualdade $x^2 - (8m-2)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$ seja satisfeita para qualquer valor de x.

30 Considere o trinômio $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$. Assinale dentre as condições abaixo a que torna o trinômio sempre positivo:

(A) a > b.
(B) a < 1/2.
(C) a < – 1/4.
(D) a > – 1/2.
(E) a > 1/4.

31 A inequação $x^2 + (m-2)x + (m^2 - m + 4) > 0$ é satisfeita qualquer que seja x:

(A) Só para $m > 2$ e $m < -2$.
(B) Só para $-2 < m < 2$.
(C) Só para $m = 2$.
(D) Para todo m.
(E) Não existe m tal que a inequação seja satisfeita qualquer que seja x.

32 **(ITA 87)** Considere a função $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada x real. Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) $y = f(x)$ é uma função par.
(B) $y = f(x)$ é uma função ímpar.
(C) $f(x) \geq 0$ para todo real x.
(D) $f(x) \leq 0$ para todo real x.
(E) $f(x)$ tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$.

33 **(ITA 96)** Considere as funções reais f, g definidas por: $f(x)=\dfrac{1+2x}{1-x^2}, x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, e $g(x)=\dfrac{x}{1+2x}, x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
O maior subconjunto de $\mathbb{R}$, onde pode ser definida a composta $f \circ g$, tal que $f \circ g(x) > 0$ é:

(A) $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}\right[$
(B) $\left]-\infty,-1\right[\cup \left]-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}\right[$
(C) $\left]-\infty,-1\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2},1\right[$
(D) $]1, +\infty[$
(E) $\left]-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right[$

34 **(ITA 99)** Considere as funções f, g definidas por $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$ para $x \neq 0$ e $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ para $x \neq 1$. O conjunto de todas as soluções da inequação $g \circ f(x) < g(x)$ é:

(A) $[1, +\infty[$.
(B) $]-\infty, -2[$.
(C) $[-2, -1[$.
(D) $]-1,1[$.
(E) $]-2,-1[\cup]1, +\infty[$.

35 **(ITA 2001)** O conjunto de todos os valores de m para os quais a função $f(x)=\dfrac{x^2+(2m+3)x+(m^2+3)}{\sqrt{x^2+(2m+1)x+m^2+2}}$ está definida e é não negativa para todo x real é:

(A) $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{7}{4}\right[$.
(B) $\left]\dfrac{1}{4},+\infty\right[$.
(C) $\left]0,\dfrac{7}{4}\right[$.
(D) $\left]-\infty,\dfrac{7}{4}\right]$.
(E) $\left]\dfrac{1}{4},\dfrac{7}{4}\right[$.

36 **(AFA 1989)** A solução da inequação $\dfrac{x^2+x+3}{x+1} \leq 3$ é dada pelo conjunto:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \in x \leq 2\}$
(B) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq 2\}$
(C) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -1 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2\}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -1 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2\}$

37 **(AFA 1988)** Considere o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, satisfazendo as condições $a < 0$, $c < 0$ e $p(1) > 0$. Se as suas raízes forem reais, então elas serão:

(A) nulas.
(B) negativas.
(C) positivas.
(D) de sinais contrários.

38 **(EN 1988)** Para todo x real, $-3 < \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$ se e só se:

(A) $-3 < a < 2$.
(B) $-1 < a < 2$.
(C) $-6 < a < 7$.
(D) $-1 < a < 7$.
(E) $-6 < a < 2$.

39 **(CN 2009)** O conjunto-solução de números reais tal que $\dfrac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^8} \geq 0$ é:

(A) $\left[5,+\infty\right[\cup \left\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right\}$
(B) $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[5,+\infty\right[$
(C) $\mathbb{R}$
(D) $\left]-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[5,+\infty\right[$
(E) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup \left[5,+\infty\right[$

40 **(CN 2009)** Quantos são os números inteiros com os quais é possível, no conjunto dos números reais, calcular o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{103x - x^2 - 300}$?

(A) 100.
(B) 99.
(C) 98.
(D) 97.
(E) 96.

41 Determine os valores possíveis da razão $\frac{p}{h}$, onde p e h são positivos, de modo que $\sqrt{p^2 - 2ph - h^2}$ seja real.

42 As raízes de $x^2 + bx + c = 0$ são reais e maiores que 1. Então, $b + c + 1$:

(A) pode ser negativo.
(B) pode ser nulo.
(C) é positivo.
(D) é negativo.
(E) está compreendido entre –1 e 1.

43 Resolva a equação $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30$.

44 Resolva a inequação $x - 5 < \sqrt{x^2 + 25}$.

45 Resolva a inequação $x - 2 < \sqrt{x} - 2$.

46 Resolva a inequação $\sqrt{x - 1} < \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

47 A solução de $\sqrt{x^2 - 6x + 8} < 8 - 3x$ é:

(A) $x \le 2$
(B) $x < 4$
(C) $x < 8/3$
(D) $2 < x < 8/3$
(E) n.r.a.

48 Resolva a inequação $\sqrt{2(x - 1)} < x$.

49 Todas as raízes reais da equação $\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} = \frac{3}{2}$ são

(A) $x_1 = 3, x_2 = -3$.
(B) $x_1 = 3, x_2 = 3$.
(C) $x_1 = 3, x_2 = \sqrt{3}$.
(D) A equação não tem raízes reais.
(E) n.r.a.

50 **(ITA 80)** Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real desta equação, podemos afirmar que:

(A) a solução pertence ao intervalo [1,2].
(B) a solução pertence ao intervalo [–2, –1].
(C) a solução pertence ao intervalo (–1, –1).
(D) a solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.
(E) a equação não tem solução.

51 **(ITA 88)** Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| = 6$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:

(A) $a = 1$ e $b = 6$.
(B) $a = 0$ e $b = -6$.
(C) $a = 1$ e $b = -6$.
(D) $a = 0$ e $b = -9$.
(E) não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

52 **(ITA 2002)** Os valores de x reais para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - ||2x - 1| - 6|}$ esta definida formam o conjunto:

(A) [0,1].
(B) [–5,6].
(C) $[-5,0] \cup [1,+\infty]$.
(D) $]-\infty,0] \cup [1,6]$.
(E) $[-5,0] \cup [1,6]$.

53 **(EN 1990)** A equação $|2x + 3| = ax + 1$:

(A) não possui solução para $a < -2$.
(B) possui duas soluções para $a > 2$.
(C) possui solução única para $a < \frac{2}{3}$.
(D) possui solução única para $-2 < a < \frac{2}{3}$.
(E) possui duas soluções para $-2 < a < \frac{2}{3}$.

54 **(UFPE)** Considere a função $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$, definida para x real. Analise as seguintes afirmações sobre f:

( ) f é par.
( ) f é positiva.
( ) f é injetora.
( ) A imagem de f é o intervalo [–2, 2].

55 **(FUVEST)** Seja $f(x) = |x| - 1$. Determine os valores de x para os quais $f(f(x)) = 5$.

56 **(UFRJ)** Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(2x) = |1 - x^2|$. Determine os valores de x para os quais $f(x) = 2$.

57 **(UFC)** Dadas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$, o número de pontos na interseção do gráfico de f com o gráfico de g é igual a:

(A) 5.
(B) 4.
(C) 3.
(D) 2.
(E) 1.

58 **(UFRGS)** A interseção dos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = 1 - |x|$ os quais são desenhados no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, determina um polígono. A área desse polígono é:

(A) 0,125.
(B) 0,25.
(C) 0,5.
(D) 1.
(E) 2.

59 Se $|x| + x + y = 10$ e $x + |y| - y = 12$, determine $x + y$.

60 Uma certa função de x é igual a x^2 para $x \ge 0$ e igual a $-x^2$ para $x < 0$. Dê uma expressão única definindo esta mesma função para todo e qualquer valor real de x.

61 O maior valor de $x^2 - |x| + 1$ no intervalo [–3,3] é:

(A) 2.
(B) – 3.
(C) 0.
(D) 6.
(E) 7.

62 A equação $|x + 1| - |x| = x + 2$:

(A) possui duas soluções reais cuja soma é 2.
(B) possui somente uma solução real.
(C) possui três soluções reais cuja soma é – 3.
(D) possui uma infinidade de soluções reais distintas.
(E) não possui solução real.

63 A equação $|x-1| = |x| + 1$:

(A) não tem solução.
(B) tem uma única solução.
(C) tem somente duas soluções.
(D) tem uma infinidade de soluções.
(E) n.r.a.

64 Resolva a inequação $\left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10}$.

65 Resolva a inequação $|x-1|<|x-3|$.

66 Resolva a equação $|x+1|+|x-4| = 5$

67 Resolva equação $||3-2x|-1| = 2|x|$.

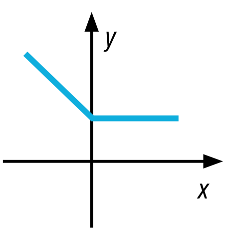
68 Resolva a equação $|x-2| = 7-7x$.

69 Resolva a equação $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$.

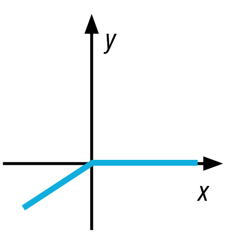
70 Qual é o valor mínimo da expressão $|x-1| + |x-3|$?

71 **(AFA)** O gráfico que melhor representa a função $f(x)=\frac{1}{2}(x-|x|)$ é:

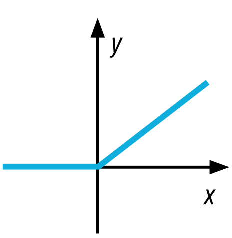
(A)



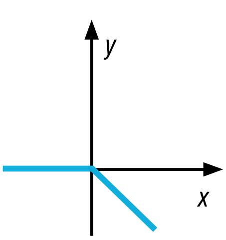
(B)



(C)

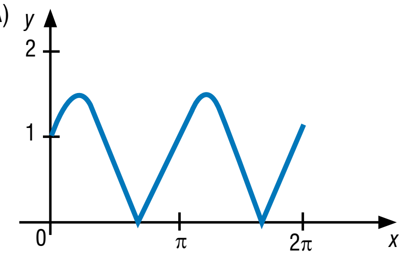


(D)

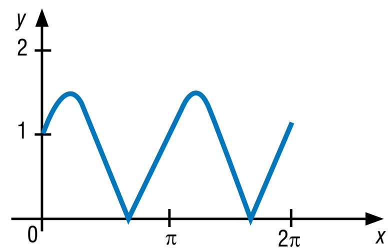


72 **(AFA – 2000)** O gráfico que melhor representa a função $y = |\text{sen}\,x + \cos x|$, com $0 \le x < 2\pi$, é:

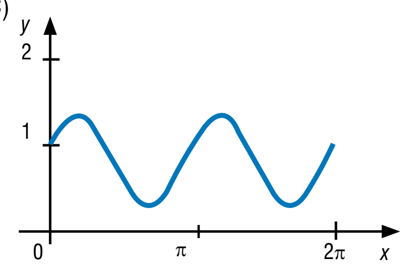
(A)



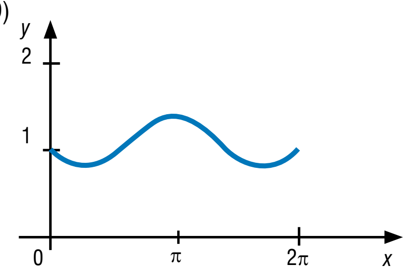
(B)



(C)

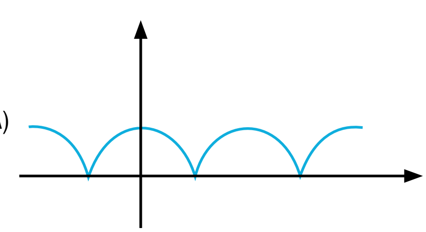


(D)

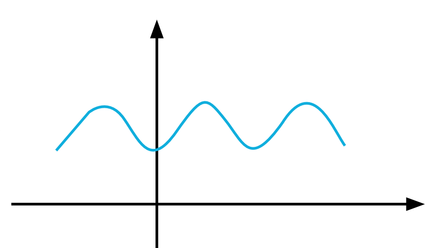


73 O gráfico que melhor representa a função dada por $f(x) = |\text{sen}\,x| + |\cos x|$ é:

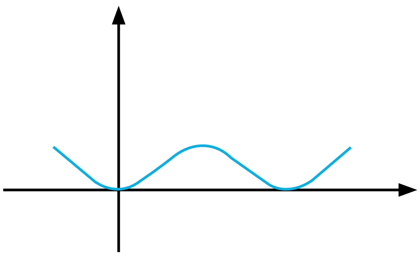
(A)



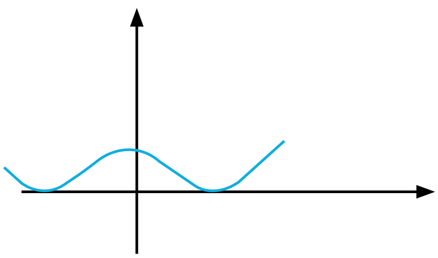
(B)



(C)

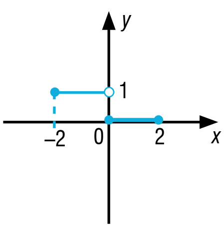


(D)

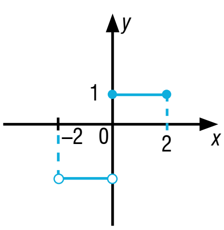


74 **(AFA)** Considere a função $f(x)=\begin{cases}1, \text{ se } 0 \leq x \leq 2\\ -2, \text{ se } -2 \leq x < 0\end{cases}$. A função $g(x) = |f(x)| - 1$ terá o seguinte gráfico:

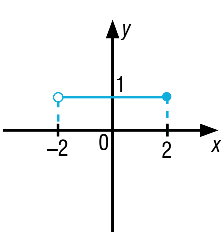
(A)



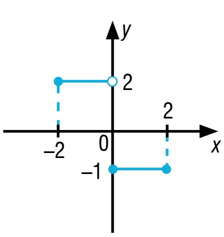
(B)



(C)

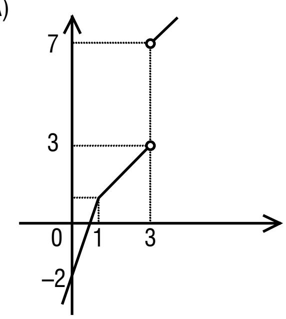


(D)

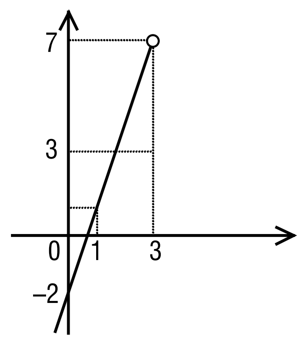


75 **(EN)** O gráfico da função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}+2x-1 & \text{se } x \neq 3\\ 0 & \text{se } x = 3\end{cases}$ é:

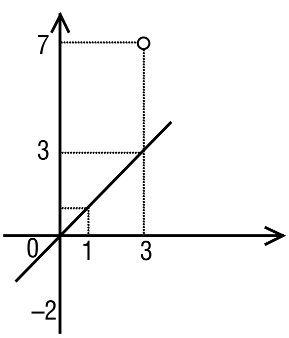
(A)



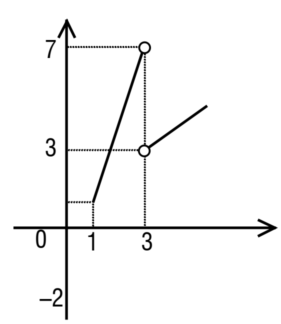
(B)



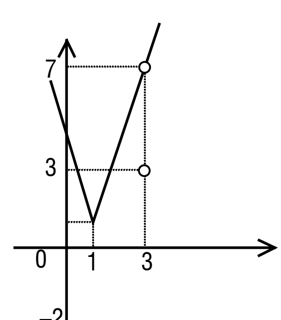
(C)



(D)

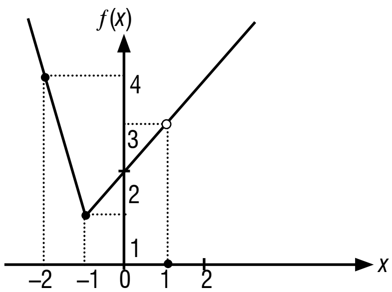


(E)

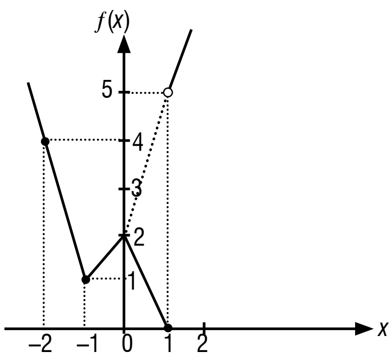


76 **(EN-01)** Assinale o gráfico que melhor representa a função real: $f(x) = \dfrac{x\,|x-1|}{x-1} + 2\,|x+1|$ *se* $x \neq 1$, $f(1) = 0$

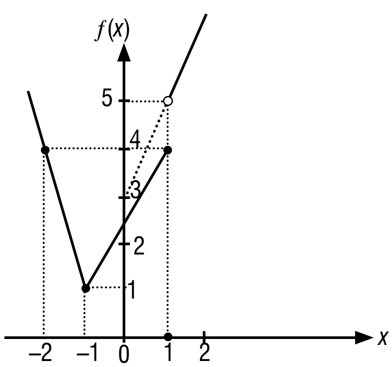
(A)



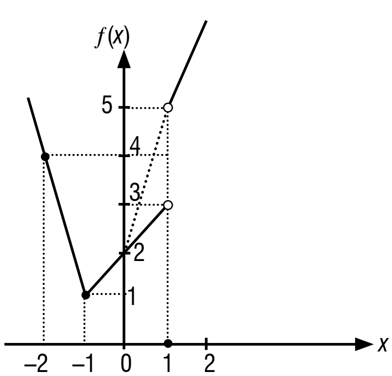
(B)



(C)



(D)



EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Há muito tempo, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a ideia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma ideia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos. Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17, o número de moedas que havia originalmente no baú era:

(A) 99.
(B) 95.
(C) 135.
(D) 87.
(E) n.d.a.

02 Para que valores de k as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$ admitem soluções de modo que uma das raízes da segunda equação seja o dobro de uma das raízes da primeira?

03 Calcule p para que as equações $x^2 + 11x + p = 0$ e $x^2 + 17x + 2p = 0$ possuam uma raiz comum.

04 **(CN 2011)** A soma das raízes de uma equação do 2º grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é 0,25. Determine o valor de $\dfrac{a^3 - b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$, sabendo que a e b são as raízes dessa equação do 2º grau e $a > b$:

(A) $\dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{4}$.
(C) -1.
(D) $\sqrt{2} + \dfrac{1}{4}$.
(E) $\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}$.

05 **(CN 2006)** O produto de dois números reais x e y é igual a 150. Assim sendo, $x + y$ não pode ser igual a:

(A) 31,71.
(B) 28,27.
(C) 25,15.
(D) 24,35.
(E) – 26,95.

06 **(ITA 80)** No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a curva $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (1, 1), (2, m) e (m, 2), onde m é um número real diferente de 2. Sobre esta curva, podemos afirmar que:

(A) ela admite um mínimo para todo m tal que $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$.
(B) ela admite um mínimo para todo m tal que $0 < m < 1$.
(C) ela admite um máximo para todo m tal que $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.
(D) ela admite um máximo para todo m tal que $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$.
(E) ela admite um máximo para todo m tal que $0 < m < 1$.

07 **(ITA 86)** Sejam a, b, c números reais dados com $a < 0$. Suponha que x_1 e x_2 sejam as raízes reais da função $y = ax^2 + bx + c$ e $x_1 < x_2$. Sejam $x_3 = -\frac{b}{2a}$ e $x_4 = -\frac{\left(2b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a}$. Sobre o sinal de y, podemos afirmar que:

(A) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_3$.
(B) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_4 < x < x_2$.
(C) $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_4$.
(D) $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > x_4$.
(E) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < x_3$.

08 **(CN 2005)** As raízes do trinômio do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ são 1000 e 3000. Se quando x vale 2010, o valor numérico de y é 16, qual é o valor numérico de y quando x vale 1990?

(A) 64.
(B) 32.
(C) 16.
(D) 8.
(E) 4.

09 Determine m para que o trinômio $y = (1 - m)x^2 - (1 + m)x + 2(m - 4)$ seja negativo para todo x.

10 Determine m para que $x^2 - 7x + 28 - 4m$ seja positivo para todo x negativo.

11 Qual é o valor máximo de $21n - n^2$, para n inteiro?

12 Determine o valor real de k tal que o mínimo de $2x^2 - 3x + k$, para x inteiro, seja 10.

13 **(ITA 85)** Considere as seguintes funções: $f(x) = x - \frac{7}{2}$ e $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ definidas para todo x real. Então, a respeito da solução da inequação $|g \circ f(x)| > g \circ f(x)$, podemos afirmar que:

(A) nenhum valor de x real é solução
(B) se $x < 3$, então x é solução
(C) se $x > \frac{7}{2}$, então x é solução
(D) se $x > 4$, então x é solução
(E) se $3 < x < 4$, então x é solução

14 **(ITA 2000)** Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação: $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$

A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$.
(B) $\frac{3}{2}$.
(C) $\frac{7}{3}$.
(D) $\frac{11}{6}$.
(E) $\frac{7}{6}$.

15 **(AFA 2004)** Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função real definida para todo número real. Sabendo-se que existem dois números x_1 e x_2, distintos, tais que $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, pode-se afirmar que:

(A) f passa necessariamente por um máximo.
(B) f passa necessariamente por um mínimo.
(C) $x_1 \cdot x_2$ é necessariamente negativo.
(D) $b^2 - 4ac > 0$.

16 A equação $x^2 - 3mx + 4m^2 = 0$ tem as soluções entre –1 e 1 para os seguintes valores de m:

(A) $m = 1$.
(B) $1 < m < 2$.
(C) $m \leq 0$.
(D) para nenhum valor de m.
(E) n.r.a.

17 Determine m para que o número 2 seja interno ao intervalo das raízes de $x^2 - 2mx + m = 0$.

18 Se ambas as raízes de $x^2 + m(x - 1) = 0$ são maiores que 1, qual o maior valor que o parâmetro m pode assumir?

19 Calcule p para que o gráfico do trinômio $y = x^2 - px - 3$ corte o eixo dos x apenas no interior do segmento de abscissas externas –2 e 2.

20 Determine m para que o número 2 seja exterior ao intervalo das raízes da equação $(m - 1)x^2 + (1 - 2m)x - 3 = 0$.

21 Dois barcos partem num mesmo instante de lados opostos de um rio de margens paralelas. Viajam cada qual, perpendicularmente às margens, com velocidade constante. Supondo que um deles é mais rápido que o outro, eles se cruzam num ponto situado a 720 m da margem mais próxima; completada a travessia, cada barco fica parado no respectivo cais por 10 minutos. Na volta eles se cruzam a 400 m da outra margem. Qual é largura do rio?

22 Resolva a equação: $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

23 Determine os valores reais de λ para os quais a equação $\sqrt{x^2+1} = \lambda x - 1$ admite solução real.

24 Resolva a equação $\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{x+a} = \sqrt[3]{x}$.

25 Resolva a equação $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+2} + 1 = 0$.

26 Se $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$, x^2 está compreendido entre:

(A) 55 e 65.
(B) 65 e 75.
(C) 75 e 85.
(D) 85 e 95.
(E) 95 e 105.

27 A solução de $2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\geq 2$ é:

(A) $0\leq x\leq 1$.
(B) Não existe x que satisfaça a inequação.
(C) $x = 1$.
(D) $x\geq 1$.
(E) n.r.a.

28 $\sqrt{2+x}>1-\sqrt{x+6}$ se e só se:

(A) $x\geq -2$.
(B) $x\leq 6$.
(C) $-2\leq x\leq 6$.
(D) $x < 1/4$.
(E) n.r.a.

29 Seja $f(m)$ o número de raízes reais da equação $\sqrt{x}+m=x$ (onde $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$).

a. Quantos elementos possui a imagem da função f?
b. Exiba a função f.

30 Resolva as inequações abaixo:

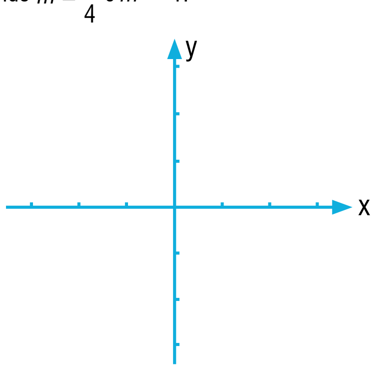
a. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\leq 1$
b. $\sqrt{2\sqrt{7}+x}-\sqrt{2\sqrt{7}-x}>\sqrt[4]{28}$
c. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}<x+8$
d. $(x-3)\sqrt{x^2-4}\leq x^2-9$
e. $(1+x^2)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$

31 Resolva a equação $2\sqrt[n]{1-x}+\sqrt[n]{1+x}=3\sqrt[2n]{1-x^2}$.

32 Resolver a equação: $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+2x=25-2\sqrt{x^2+5x}$.

33 **(FUVEST)** Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2\,|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a. Esboçar, no plano cartesiano representado a seguir, os gráficos de f e de g quando $m=\dfrac{1}{4}$ e $m = 1$.



b. Determinar as raízes de $f(x) = g(x)$ quando $m=\dfrac{1}{2}$.
c. Determinar, em função de m, o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

34 **(UFRJ)** Seja f a função real dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Determine a, b e c sabendo que as raízes da equação $|\,f(x)\,| = 12$ são -2, 1, 2 e 5. Justifique.

35 A área da região do plano cartesiano cujos pontos (x, y) satisfazem $|x| + |y| + |x + y| \leq 2$ é igual a:

(A) 2,5.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 4.
(E) 3,5.

36 Resolva as inequações abaixo:

a. $\left|5x^2-2x+1\right|<1$
b. $\left|x^2+x-10\right|\leq 3x^2+7x+2$
c. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$
d. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$
e. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2x$
f. $\left||2x+1|-5\right|>2$
g. $\left||x-2|-x+3\right|<5$
h. $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-12<0$

37 Prove que:

a. $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$
b. $\left||x|-|y|\right|\leq|x-y|$
c. $|a-b|<\varepsilon\Rightarrow|a|<|b|+\varepsilon$

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Seja $p > 0$ um número real tal que $x^2 - 3px - p = 0$ possui duas raízes distintas x_1 e x_2. Prove que $3px_1+x_2^2-p>0$.

02 Mostre que dados $2n$ reais $a_1, a_2,\ldots,a_n, b_1,\ldots, b_n$ sempre se tem: $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).
Sugestão: Considere o trinômio $P(x) = (a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2 + \ldots + (a_n + b_nx)^2$.

03 Determine os valores reais de x para os quais se tem $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$.

04 Determine o menor valor positivo que pode assumir a expressão $\dfrac{x^2+7}{x+1}$.

05 Calcule m para que $(m^2 - 1)x^2 - (m + 2)x + 1$ tenha um só de seus zeros interno ao intervalo $(-1, 1)$.

06 Considere a função $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R},\ f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b, c, d são constantes reais. Mostre que se $f(x) = x$ para três valores distintos de x, então necessariamente temos $a = d$ e $b = c = 0$.

07 Dados 3 reais a, b, c tais que $a + b + c = 0$, mostre que
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

08 Dados 3 reais a, b, c tais que $a + b + c = 0$, mostre que
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}.$$

09 Determine as soluções reais da equação $(x^2-3x-2)^2-3(x^2-3x-2)-2-x=0$.

10 Sendo a, b e c números ímpares, prove que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não admite raízes racionais.

11 Os números inteiros a e b são tais que para dois valores inteiros consecutivos a função $f(x) = x^2 + ax + b$ assume valores quadrados perfeitos, também consecutivos. Prove que $f(x)$ assume valores quadrados perfeitos para todo valor inteiro de x.

12 Prove que para todo p real o gráfico do trinômio $y = x^2 - px - 3$ corta o eixo dos x em algum ponto do interior do segmento de abscissas externas -2 e 2.

13 Sejam P_1, P_2 e P_3 polinômios quadráticos com coeficientes líderes positivos e raízes reais. Mostre que, se cada par de polinômios tem uma raiz em comum, então o trinômio $P_1 + P_2 + P_3$ possui raízes reais.

14 João e Gilberto jogam o seguinte jogo:

– João escreve num quadro dois números reais;
– Em seguida, Gilberto escreve um número real no quadro;
– Então, João monta uma equação do 2º grau com coeficientes iguais aos três números escritos no quadro (os coeficientes ficam numa ordem escolhida por João).
Mostre que Gilberto sempre pode escolher o número que vai escrever no quadro de modo que a equação escrita por João possua raízes reais.

15 Determine todas as soluções reais da equação $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y + 2 = 0$.

16 Quantas soluções inteiras possui a equação $x^2y + xy + x^2 + y = 4$?

17 Determine todos os x e y inteiros positivos tais que $2x^2 + 3xy + y^2 = 5x + 2y + 3$.

18 As seguintes operações são permitidas com a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

I. trocar a e c de lugar;
II. trocar x por $x + t$, onde t é um número real;

Repetindo estas transformações, é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

19 Sejam a, b, c reais com a diferente de 0 tais que a e $4a + 3b + 2c$ tem o mesmo sinal. Prove que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não pode ter as duas raízes no intervalo (1,2) simultaneamente.

20 Encontre todos os números reais x para os quais vale
$$\sqrt{\frac{x-7}{1989}}+\sqrt{\frac{x-6}{1990}}+\sqrt{\frac{x-5}{1991}}=\sqrt{\frac{x-1989}{7}}+\sqrt{\frac{x-1990}{6}}+\sqrt{\frac{x-1991}{5}}.$$

21 Determine todos os valores inteiros de m para os quais $mx^2 - (m + 5)x + 5m = 0$ só admite raízes inteiras.

22 Considere as equações $x^2 - (a - b)x + (b - c) = 0$, $x^2 - (b - c)x + (c - a) = 0$ e $x^2 - (c - a)x + (a - b) = 0$, onde a, b, c são reais. Mostre que pelo menos uma das equações só possui raízes reais.

23 a, b, c e d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$ e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

24
a. Para $a < b < c < d$, determine o valor mínimo da função $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$.
b. Para $a < 10^6 < c$, determine o valor mínimo da função $f(x) = |x - a| + |x - 10^6| + |x - c|$.

25 **(ESTÔNIA)** Determine o valor de a para que a equação $|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 2001| = a$ possua exatamente uma solução.

RASCUNHO

RASCUNHO

1. Motivação

Há mais de uma maneira de iniciarmos este assunto, no entanto, vamos nos ater à ordem histórica.

Ao tentar determinar as raízes de uma equação como $x^2 + 2x + 2 = 0$, percebemos que seu discriminante é negativo. Já sabemos que, neste caso, a equação não possui raízes reais. Mas se usássemos a fórmula de Bhaskara assim mesmo? Assim, chegaríamos a $\frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$. Veja que, de fato, esse número não pertence ao conjunto dos Reais, já que há ali um $\sqrt{-4}$. Se pudermos escrever $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, teremos que $x = -1 \pm \sqrt{-1}$.

Veja que este x possui uma parte que é real (o –1) e também uma parte que não é $(o\sqrt{-1})$.

Assim, definimos a chamada unidade imaginária, que é chamada de $i = \sqrt{-1}$. (É importante ficar muito claro que i não é um número real. Como $i^2 = -1 < 0$, isso é verdade.)

2. Definição

Definimos $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ como o conjunto dos números complexos. Para um elemento $z = a + bi$, com a e *b reais*, denotamos por

Re(z) = a (parte real de z)
Im (z) = b (parte imaginária de z)

Se Im(z) = 0, temos que z é *real* (ou seja, o conjunto dos complexos contém o dos reais).

Se Re(z) = 0 e Im(z) ≠ 0, dizemos que z é um *imaginário puro*.

3. Operações algébricas (sem surpresas)

As operações são feitas tratando i como uma variável e trocando sempre i^2 por – 1. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$ complexos, definem-se:

3.1 Adição e subtração

$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$

Ex.: $z = 2 + 4i,\ w = 3 - 2i \rightarrow$
$\rightarrow z + w = (2 + 3) + (4 + (-2))i = 5 + 2i$
$\rightarrow z - w = (2 - 3) + (4 - (-2))i = -1 + 6i$

3.2 Multiplicação

$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Ex.: $z = 2 + 4i,\ w = 3 - 2i \rightarrow z \cdot w = (2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2)) + (4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2))i = 14 + 8i$

3.3 Divisão

$$z / w = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Ex.: $z = 2 + 4i, w = 3 - 2i \rightarrow z \div w =$

$$\frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} + \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} i = \frac{2}{13} + \frac{16}{13} i$$

4. Igualdade (igualar partes reais e igualar partes imaginárias)

Sejam z e w números complexos tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$., com a, b, c e d reais:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Demonstração: De fato, se $b \neq d$, podemos escrever $i = \frac{a - c}{d - b}$. Isso é uma contradição, pois o lado direito da equação é real e o direito não. Logo, $b = d$ e, assim, $a = c$.

Por conta disso, numa equação com números complexos temos, na verdade, duas equações: podemos igualar as partes reais e, também, igualar as partes imaginárias.

5. Conjugado

Se $z = a + bi$ é um número complexo, definimos como $\overline{z} - a - bi$ o seu conjugado.

Propriedades:

I. $\overline{\overline{z}} = z$

II. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

III. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

IV. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{w}$

V. $\text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ e $\text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

VI. z é real $\Leftrightarrow \overline{z} = z$

VII. z é imaginário puro $\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z} = -z \\ z \neq 0 \end{cases}$

6. Módulo

Dado um complexo $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Mais à frente, veremos este conceito de uma forma geométrica e tudo fará mais sentido.

Propriedades:

I. $|z| \in \mathbb{R}_+$

II. $\left\|z\right\| = |z|$

III. $|\bar{z}| = |z|$

IV. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (uma boa maneira de eliminar um módulo é elevando-o ao quadrado)

V. $|zw| = |z||w|$

VI. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

VII. $|z+w| \le |z| + |w|$ (desigualdade triangular)

7. Potências de *i* (deixe o resto do expoente por 4)

Em muitas situações, é necessário elevar *i* a um número grande.

$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = 1$

Mais geralmente, como $(i^{4k}) = (i^4)^k = 1$ tem-se, para todo *k* inteiro:

$i^{4k} = i^0 = 1; \quad i^{4k+1} = i^1 = i; \quad i^{4k+2} = i^2 = -1; \quad i^{4k+3} = i^3 = -i$

Ou seja, basta deixar no expoente o seu resto na divisão por 4.

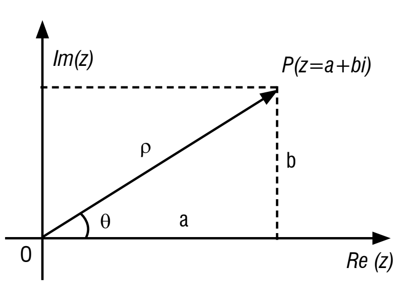
Ex.: $i^{273} = i^{4.68+1} = i^1 = i$

8. Plano de Argand-Gauss e forma trigonométrica

Como cada complexo $z = a + bi$ está definido por 2 parâmetros (*a* e *b*) de forma única, podemos fazer uma associação direta entre números complexos e pontos no plano:

$a + bi \to (a, b)$

Assim, representaremos cada complexo $z = a + bi$ por um ponto no chamado plano de Argand-Gauss.



θ: argumento

$\vec{P}$: afixo

$|OP| = \rho$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \to a = \rho\cos\theta$

$sen\theta = \dfrac{b}{\rho} \to b = \rho sen\theta$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Daí, $z = a + bi = \rho\cos\theta + i\rho\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Por isso, é natural definir $cis\theta = \cos\theta + isen\theta$. Então, temos a chamada forma trigonométrica de um complexo:

$$\boxed{z = \rho \cdot cis\theta}$$

Ex.: $z = 1 + i$

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, sen\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$, então:

$z = \sqrt{2}\ .\ \text{cis}\dfrac{\pi}{4}$

8.1 Conjugado

Dado $z = \rho \cdot cis\alpha$, veja que seu conjugado é dado por $\bar{z} = \rho \cdot cis(-\alpha)$. Para isso, basta lembrar que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $sen(-\alpha) = -sen\alpha$.

8.2 Igualdade

Sendo $z = \rho_1 \cdot cis\alpha$, $w = \rho_2 \cdot cis\beta$ tem-se:

$$z = w \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2) \wedge \alpha - \beta = 2k\pi, \ k \in Z$$

9. Propriedades do cis

I. $cis0 = 1, cis\dfrac{\pi}{2} = i$

II. $cis\alpha \cdot cis\beta = cis(\alpha + \beta)$

III. $cis(-\alpha) = \dfrac{1}{cis\alpha}$

IV. $\dfrac{cis\alpha}{cis\beta} = cis(\alpha - \beta)$

V. $(\text{cis}\,\alpha)^n = cis(n\alpha)$, para *n* inteiro (1ª Fórmula de DeMoivre).

Demonstrações:

I. definição.

II. $cis\alpha \cdot cis\beta = (\cos\alpha + isen\alpha)(\cos\beta + isen\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta) + i(sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha) = \cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta) = cis(\alpha+\beta)$.

III. Basta fazer $\beta = -\alpha$.

IV. $\dfrac{cis\alpha}{cis\beta} = cis\alpha \cdot \dfrac{1}{cis\beta} = cis\alpha \cdot cis(-\beta) = \text{cis}(\alpha - \beta)$

V. para *n* positivo, basta usar **II** várias vezes; para *n* negativo, basta usar **III** antes.

10. Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

Sejam *z* e *w* números complexos tais que $z = \rho_1 cis\alpha$ e $w = \rho_2 cis\beta$.

- **Multiplicação**

$$\boxed{z \cdot w = \rho_1\rho_2 cis(\alpha + \beta)}$$

- **Divisão**

$$\boxed{\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} cis(\alpha - \beta)}$$

- **Potência**

$$\boxed{z^n = \rho^n cis(n\alpha)}$$

- **Interpretação geométrica**

Ao multiplicarmos um complexo *z* por $u = cis\alpha$, onde *u* é unitário, geometricamente estamos girando o vetor *z* (isto é, o vetor que sai da origem e termina em *z*) de um ângulo α (sentido anti-horário).

- **Distância**

A distância entre os afixos dos complexos *z* e *w* é igual a $|z - w|$. (Isso pode ser muito útil para resolver alguns problemas!)

11. Radiciação (2ª fórmula de De Moivre)

$$\boxed{w^n = \rho \cdot cis\alpha \Rightarrow w = \sqrt[n]{p} \cdot cis\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1}$$

Demonstração: Seja $w = rcis\theta$ um complexo tal que $w^n = \rho cis\alpha$. Na forma trigonométrica:

$r^n cis(n\theta) = \rho cis\alpha$

Logo, $r = \sqrt[n]{\rho}$ e $\alpha - n\theta = 2k\pi$, $k \in Z$, o que dá $\therefore \theta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$.

Para ver que só precisamos tomar $k = 0,1,2,...,n-1$, veja que $\theta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$ assume valores côngruos de n em n.

Propriedade: As raízes n-ésimas do complexo $\rho cis\alpha$ determinam um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$. Isso acontece porque os argumentos das raízes estão em P.A.

Obs.: As raízes n-ésimas de 1 são comumente chamadas de “raízes da unidade”. Usando a fórmula acima, veja que $z^n = 1 = cis0$ implica $z = cis\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0,1,2,...,n-1$. Como $cis\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) = \left(cis\dfrac{2k\pi}{n}\right)^k$, fazendo $\dfrac{2\pi}{n} = \xi$, as raízes n-ésimas da unidade são $\xi^0, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^{n-1}$.

Ex.: $\sqrt[5]{1} = cis\dfrac{2k\pi}{5}$ (abuso de notação)

$k = 0 \rightarrow z_1 = 1$

$k = 1 \rightarrow z_2 = cis\dfrac{2\pi}{5} = \cos\dfrac{2\pi}{5} + isen\dfrac{2\pi}{5}$

$k = 2 \rightarrow z_3 = cis\dfrac{4\pi}{5} = \cos\dfrac{4\pi}{5} = isen\dfrac{4\pi}{5}$

$k = 3 \rightarrow z_4 = cis\dfrac{6\pi}{5} = \cos\dfrac{6\pi}{5} + isen\dfrac{6\pi}{5}$

$k = 4 \rightarrow z^5 = cis\dfrac{8\pi}{5} = \cos\dfrac{8\pi}{5} + isen\dfrac{8\pi}{5}$

Obs.:
I. Qualquer outro valor de k dará uma solução repetida.
II. As cinco raízes são os vértices de um pentágono regular centrado na origem.

12. Fórmula de Euler

Precisamos definir o que é uma potência com expoente complexo. É possível formalizar esta parte com os conceitos de fórmula de Taylor ou de equações diferenciais, no entanto, ficaremos apenas com o resultado:

$$\boxed{e^{i\theta} = cis(\theta)}$$

Veja que as propriedades do *cis* são compatíveis com as da exponencial, como, por exemplo: $cis(\alpha + \beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = cis\alpha \cdot cis\beta$

13. Transformação arco-metade

É muito comum, em problemas, aparecerem as expressões $cis\theta + 1$ e $cis\theta - 1$. O interessante é que conseguimos fatorar essas expressões

I. $cis\theta + 1 = cis\dfrac{\theta}{2} \cdot 2\cos\dfrac{\theta}{2}$

II. $cis\theta - 1 = cis\dfrac{\theta}{2} \cdot 2i \cdot sen\dfrac{\theta}{2}$

Podemos escrever, de forma equivalente, utilizando a fórmula de Euler:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{i\theta} - 1 &= 2i \cdot sen\frac{\theta}{2} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \\ e^{i\theta} + 1 &= 2 \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \end{aligned}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Determine todos os complexos z tais $z + 2i\bar{z} = 1 + 2i$.

Solução: Seja $z = a + bi$, com a e b reais. A equação é equivalente a $(a + bi) + 2i(a - bi) = 1 + 2i$, ou seja, $(a + 2b) + (2a + b)i = 1 + 2i$. Agora, podemos igualar as partes reais e igualar as partes imaginárias. Com isso, obtemos o sistema $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$, que tem como solução $a = 1$ e $b = 0$. Portanto, a única solução é $z = a + bi = 1 + 0i \cdot$ $\therefore S = \{1\}$.

02 Calcule o produto $P = i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot ... \cdot i^{2011}$.

Solução: Podemos somar os expoentes e obter que o produto é igual a $P = i^{1+2+3+...+2011}$. Somando a PA do expoente, temos $P = i^{\frac{2011 \cdot 2012}{2}} = i^{2011 \cdot 1006}$. Então, $P = (i^2)^{2011 \cdot 503} = (-1)^{impar} = -1$.

03 **(Mack)** Se $z = (a + bi)^4$ é um número real estritamente negativo, podemos ter:

(A) $a + b = 0$
(B) $a + 2b = 0$
(C) $2a + b = 0$
(D) $a + 4b = 0$
(E) $4a + b = 0$

Solução: Como $(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$, elevando ao quadrado, temos que $z = (a + bi)^4 = (a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4ab(a^2 - b^2)i$. Para que esse número seja real, devemos ter $4ab(a^2 - b^2) = 0$, ou seja, $a = 0$ ou $b = 0$ ou $b = a$ ou $b = -a$.

Temos:

$a = 0 \Rightarrow z = b^4 > 0$

$b = 0 \Rightarrow z = a^4 > 0$

$a = \pm b \Rightarrow z = -4a^4$

Portanto, para que z seja estritamente negativo, podemos ter a + b = 0 ou a – b = 0.

Resposta: Letra A.

04 Determine o menor natural n, $n > 1$, tal que $(\sqrt{3}+i)^n$ é um número real positivo.

Solução: Como queremos efetuar uma potência, uma alternativa é colocar a base na forma trigonométrica. Veja que $\rho=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$ e $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $\sqrt{3}+i$ está no 1º quadrante, temos $\sqrt{3}+i=2cis\frac{\pi}{6}$. Portanto, usando a fórmula de DeMoivre, temos que $(\sqrt{3}+i)^n=2^n cis\frac{n\pi}{6}$. Para que esse número seja real e positivo, devemos ter $\frac{n\pi}{6}=2k\pi$, com k inteiro. Daí, segue que $n = 12k$, ou seja, n é múltiplo de 12. Portanto, o menor valor natural > 1 existente é $n = 12$.

05 Qual é o lugar geométrico, no plano de Argand-Gauss, dos complexos z tais que $|z-2+3i|=4$?

Solução: Podemos escrever a equação dada como $|z-(2-3i)| = 4$. Lembrando que $|z-w|$ é igual à distância entre os afixos de z e w, temos que o afixo de z dista 4 unidades do afixo de $2-3i$. Portanto, o lugar geométrico é uma circunferência de raio 4 e centro no ponto (2, –3).

Obs.: O aluno que já está habituado à equação da circunferência pode escrever $z=x+yi$, com x e y reais e ver que $|z-2+3i|=|(x-2)+(y+3)i|$ $=\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}$. Isso gera a equação , que representa exatamente a equação de centro $(x+2)^2+(y+3)^2=16$ (2,–3) e raio 4.

06 No plano de Argand-Gauss, qual é o formato do lugar geométrico dos afixos dos z tais que $|z-i| = |z-2|$?

Solução: Poderíamos fazer a conta normalmente neste problema. No entanto, como é um problema qualitativo, podemos dar um argumento direto. Lembrando que $|z-i|$ = "distância de z até i" e $|z-2|$ = "distância de z até 2", queremos que o afixo de z equidiste de i e 2. Portanto, o L.G. é a mediatriz do segmento definido pelos pontos (0,1) e (2,0).

07 **(VUNESP – adaptada)** Quais são as raízes da equação $z^3=i$?

Solução: Primeiramente, o lado direito da equação deve ser colocado na forma trigonométrica: $z^3=cis\frac{\pi}{2}$.

Usando a 2ª fórmula de DeMoivre: $Z=cis\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)=cis\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$,

$k=0,1,2$. Substituindo os valores de k, as raízes são: $cis\frac{\neq}{6}, cis\frac{5\neq}{6}, cis\frac{3\neq}{2}$.

Então, $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; -i\right\}$.

08 Um quadrado está centrado na origem do plano de Argand-Gauss. Se um dos vértices é o afixo do complexo $2 + i$, qual é o produto de todos os complexos associados aos vértices?

Solução: Seja $w = 2 + i$. Como as diagonais do quadrado são perpendiculares e de mesmo comprimento, se cortando ao meio, temos que os vértices são w, wi, –w, –wi. Daí, o produto pedido é igual a $-w^4=-(2+i)^4$. Como $(2+i)^2=3+4i$, temos que $(2+i)^4=(3+4i)^2=-7+24i$. Portanto, o produto pedido é igual a $7-24i$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Determine reais x e y tais que:

a. $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$

b. $\frac{x-3}{3+i}+\frac{y-3}{3-i}=i$

02 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$.

03 Se z e w são números complexos, prove que:

a. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

b. $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

c. $|zw|=|z||w|$

d. $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$

04 Prove que os números abaixo são reais, para todo n natural:

a. $\left(2+i\sqrt{5}\right)^n+\left(2-i\sqrt{5}\right)^n$

b. $\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n$

05 **(ITA 85)** Seja a um número real. Os valores de $z \in C$ que satisfazem $\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\left(\frac{a+z^{-10}}{1-i}\right)\in\Re$ são:

(A) $z=-a+i\sqrt[10]{|a|}$
(B) não é possível determiná-los.
(C) $z=-i\sqrt[10]{|a|}$
(D) não existe $z \in C$ tal que isto aconteça
(E) todo $z\in\Re$

06 Resolva as equações :

a. $iz^2+(2+2i)z+2-i=0$

b. $z^2+z+1=0$

07 Um imaginário puro é um complexo cuja parte real é nula. Determine a real para que $\frac{2+ai}{1-i}$ seja um imaginário puro.

08 Determine o valor do somatório $S=\sum_{k=0}^{2014} i^k$, em que $i=\sqrt{-1}$.

09 Resolva o sistema a seguir: $\begin{cases} z+wi=w \\ i\overline{z}+\overline{w}=2i-1 \end{cases}$

10 Resolva o sistema de equações abaixo, em que z e w são complexos:

$$\begin{cases} iz+(1+i)w=1 \\ (1+i)\bar{z}-(6+i)\bar{w}=-4-8i \end{cases}$$

11 **(ITA 93)** Resolvendo a equação $z^2=\overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:

(A) nenhuma delas é um número inteiro.
(B) a soma delas é 2.
(C) estas são em número de 2 e são distintas.
(D) estas são em número de quatro e são 2 a 2 distintas.
(E) uma delas é da forma $z = bi$ com b real não nulo.

12 **(ITA 94)** Sejam x e y números reais, com $x \uparrow 0$, satisfazendo $(x+yi)^2=(x+y)i$. Então:

(A) x e y são números irracionais.
(B) $x > 0$ e $y < 0$.
(C) x é uma raiz da equação $x^3+3x^2+2x-6=0$.
(D) $x < 0$ e $x = y$.
(E) $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$.

13 **(ITA 87)** Seja N o número de soluções reais da sen$x$ = | 2 + 3i|. Então, temos:

(A) N > 50.
(B) N = zero.
(C) N = 2.
(D) N = 1.
(E) N > 2 e N < 10.

14 Resolva as equações:

a. $|z|-2z=3-4i$
b. $|z|+z=3+4i$
c. $z^2+|z|=0$

15 **(ITA 87)** Seja S a coleção de todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z|-z=1+2i$, em que i é a unidade imaginária. Então, podemos garantir que:

(A) $S=\left\{\frac{3}{2}-2i\right\}$.
(B) $S=\left\{\frac{1}{2}+2i,-\frac{1}{2}-2i\right\}$.
(C) $S=\left\{\frac{1}{2}+4k\pi;k=1,2,3\right\}$.
(D) $S=\left\{\frac{1}{4}+3i\right\}$.
(E) $S=\{1+2k\pi;k=1,2,3\}$.

16 **(ITA 89)** O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:

(A) $\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i$.
(B) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$.
(C) $-\frac{8}{5}-\frac{8}{5}i$.
(D) $2 + 2i$.
(E) não existe nenhum complexo que pertença à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

17 Determine os possíveis valores de $\sqrt{3+4i}$.

18 **(AFA 03)** Dado o número complexo z tal que $z+2\bar{z}-9=3i$, é correto afirmar que:

(A) $|z|=3\sqrt{10}$.
(B) $z=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i sen\frac{7\pi}{4}\right)$.
(C) $\bar{z}=9-3i$.
(D) $z^{-1}=\frac{1+i}{3}$.

19 **(AFA 99)** A representação trigonométrica do conjugado do número complexo $z=(1+\sqrt{3}i)^5$, sendo i a unidade imaginária e k inteiro, é:

(A) $32\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)-32isen\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$.
(B) $32\cos\left(\frac{5\pi}{4}+10k\pi\right)-32isen\left(\frac{5\pi}{4}+10k\pi\right)$.
(C) $32\cos\left(\frac{5\pi}{6}+10k\pi\right)-32isen\left(\frac{5\pi}{6}+10k\pi\right)$.
(D) $32\cos\left(\frac{5\pi}{3}+10k\pi\right)-32isen\left(\frac{5\pi}{3}+10k\pi\right)$.

20 **(ITA 96)** O valor da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

(A) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.
(B) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
(C) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.
(D) $\left(\sqrt{2}\right)^{93}i$.
(E) $\left(\sqrt{2}\right)^{93}+i$.

21 **(AFA 01)** Considere o polinômio $P(z)=z^2-2z+\sqrt{2}iw$, w complexo. Se $P(3+2i)=1+10i$, em que $i=\sqrt{-1}$, então uma forma trigonométrica de w é:

(A) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)$.
(B) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+isen\frac{3\pi}{4}\right)$.
(C) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+isen\frac{5\pi}{4}\right)$.
(D) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+isen\frac{5\pi}{4}\right)$.

22 **(ITA 94)** Considere as afirmações:

I. $(\cos\theta+isen\theta)^{10}=\cos(10\theta)+isen(10\theta)$, para todo θ real
II. $(5i)/(2+i)=1+2i$.
III. $(1-i)^4=-4$.
IV. Se $z^2=(\bar{z})^2$, então z é real ou imaginário puro.
V. O polinômio x^4+x^3-x-1 possui apenas raízes reais.

Podemos concluir:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) Apenas quatro são verdadeiras.
(C) Apenas três são verdadeiras.
(D) Apenas duas são verdadeiras.
(E) Apenas uma é verdadeira.

23 Seja $z = i + \sqrt{3}$. Escrever, na forma $a + bi$, o complexo z^{15}.

24 Utilizando as fórmulas de De Moivre, mostre que

$$\begin{cases} \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ sen(3\alpha) = 3\,\mathrm{sen}\,\alpha - 4sen^3\alpha \end{cases}$$

25

a. Desenhe e calcule o ângulo formado pelos complexos $i - 2$ e $3 + i$.

b. Determine o argumento de $\dfrac{i-2}{3+i}$.

26 **(ITA 80)** Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se n é um número inteiro positivo $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ é igual a:

(A) $cos(n\theta)$.
(B) $2\,cos(n\theta)$.
(C) $sen(n\theta)$.
(D) $2sen(n\theta)$.
(E) $sen(n\theta) + cos(n\theta)$.

27 **(ITA 97)** Considere os números complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + \sqrt{3}i$. Sendo $m = \left|\dfrac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i}\right|^2$, então m vale:

(A) 34.
(B) 26.
(C) 16.
(D) 4.
(E) 1.

28 **(ITA 97)** Considere um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente por $z_1, z_2, ..., z_6$ os seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$, então $2z_3$ é igual a:

(A) $2 + 4i$.
(B) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 3)i$.
(C) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)i$.
(D) $(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 3)i$.
(E) $\sqrt{2} + \left(\sqrt{6} + 2\right)i$.

29 **(ITA 93)** Seja a o módulo do número complexo $(2 - 2\sqrt{3}i)^{10}$. Então, o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

(A) 10/11.
(B) –2.
(C) 5/8.
(D) 3/8.
(E) 1/5.

30 **(AFA 01)** Seja $\bar{z}$ o conjugado do número complexo $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$.

A sequência de todos os valores de n naturais, tais $(\bar{z})^{-n}$ seja um imaginário puro é uma progressão:

(A) aritmética com primeiro termo igual a 2 e razão 8.
(B) geométrica com primeiro termo igual a 2 e razão 2.
(C) aritmética com primeiro termo igual a 2 e razão 4.
(D) geométrica com primeiro termo igual a 2 e razão 1.

31 **(EN 01)** O valor do menor inteiro positivo n tal que $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^n$ seja imaginário puro, com coeficiente negativo é:

(A) 3.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 9.

32 Admitindo a fórmula de Euler $e^{ix} = cisx$, (e = 2,71...):

(A) Calcule $e^{2\neq i}$;
(B) Calcule $e^{\frac{\neq}{4}i}$;
(C) Prove que $\cos x = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ e $senx = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$;
(D) Calcule $e^{\frac{\neq i}{2}}$ e conclua que um valor real correspondente a i^i é $e^{-\pi/2}$.

33 **(ITA 92)** Sabe-se que $2\left(\cos\dfrac{\pi}{20} + isen\dfrac{\pi}{20}\right)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \dfrac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$. Um subconjunto de S é:

(A) $\left\{2^{1/4}\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} + isen\dfrac{7\pi}{8}\right); 2^{1/4}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + isen\dfrac{\pi}{8}\right)\right\}$.

(B) $\left\{2^{1/4}\left(\cos\dfrac{9\pi}{8} + isen\dfrac{\pi}{8}\right); 2^{1/4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{8} + isen\dfrac{5\pi}{8}\right)\right\}$.

(C) $\left\{2^{1/4}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + isen\dfrac{7\pi}{4}\right); 2^{1/4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + isen\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$.

(D) $\left\{2^{1/4}\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} + isen\dfrac{7\pi}{8}\right); 2^{1/4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + isen\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$.

(E) n.d.a.

34 Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que:

(A) $|z| = 1$
(B) $|z + i| < 1$

35 Determine os possíveis valores complexos de $\sqrt[3]{-1}$.

36 Determine as raízes da equação $2x^2 + 4x + 2ix + 3 = 0$.

37 **(ITA 87)** A soma de todas as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ é:

(A) 1.
(B) 2.
(C) zero.
(D) $-2\sqrt{2i}$.
(E) $2 + \sqrt{3i}$.

38 **(ITA 88)** Seja a equação $z^4 - a - bi = 0$, em que *a* e *b* são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação, podemos afirmar que:

(A) uma delas é um imaginário puro.
(B) os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $(|a+bi|)^{1/4}$
(C) o seu produto é um imaginário puro.
(D) cada uma tem argumento igual a [arg $(a + bi)$] / 4.
(E) a sua soma é zero.

39 **(ITA 98)** Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

(A) $\sqrt{3}$.
(B) 5.
(C) π.
(D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
(E) $2\pi^2$.

40 **(EN 97)** As soluções da equação $(z - 1 + i)^4 = 1$pertencem à curva:

(A) $x^2 - x + y^2 + y = 0$.
(B) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 = 1$.
(E) $x^2 - x + y^2 - y = 0$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 **(ITA 88 e IME CG)** O número natural *n* tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$, em que *i* é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:

(A) n = 6.
(B) n = 3.
(C) n = 7.
(D) n = 4.
(E) não existe *n* nessas condições.

02 Considere uma função da forma $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, tal que $f(i) = 2i + 3$ e $f(3) = 2$. Determine *f* sabendo que *a, b, c, d* são números reais.

03 Seja *p(x)* um polinômio com coeficientes reais. Mostre que $p(\bar{x}) = \overline{p(x)}$, para todo x. Conclua que se $a+bi$ é raiz de $p(x)$, então seu conjugado $a-bi$ também é.

04 Sejam *a*, *b*, *c* e *d* reais. Prove que $w - \bar{w} = \dfrac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}$, em que $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Conclua que, se $ad - bc > 0$, então as partes imaginárias de *z* e *w* têm o mesmo sinal.

05 **(ITA 91)** Seja $w = a + bi$ com $b \uparrow 0$ e $a, b, c, \in \Re$. O conjunto dos números complexos *z* que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:

(A) um par de retas paralelas.
(B) uma circunferência.
(C) uma elipse.
(D) uma reta com coeficiente angular $m = \dfrac{a}{b}$.
(E) n.d.a.

06 **(ITA 98)** Sejam *x* e *y* números reais tais que $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$. Então, o número complexo $z = x + yi$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

(A) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$.
(B) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$.
(C) i e 1.
(D) – i e 1.
(E) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$.

07 **(ITA 89)** O valor da expressão $|1-z|^2 + |1+z|^2$, sendo *z* um número complexo, é:

(A) 5, se $|z|'' 1$.
(B) 4, se $|z| = 1$.
(C) 0, se $Im(z) = 0$.
(D) 2, para todo *z*.
(E) 3, se $Re(z) = 0$.

08

a. Mostre que $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$, para todos a e b complexos.
b. A partir disso, deduza um teorema geométrico.
c. Deduza também uma fórmula para a mediana de um triângulo em função de seus lados.

09 Prove que, se $|1+iz| = |1-iz|$, então *z* é real.

10 **(ITA 81)** O conjunto A definido por $A = \{z \in C; (z-i)\overline{(z-i)} = 4\}$ representa no plano complexo:

(A) uma elipse cujos focos se encontram nos pontos i e –i.
(B) uma circunferência de centro no ponto (0,1) e raio 2.
(C) uma circunferência de centro no ponto (0,0) e raio 4.
(D) um par de retas que se encontram no ponto (1,1).
(E) nenhuma das anteriores.

11 Determine os números complexos *z* tais que $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}$ e $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

12 **(ITA 97)** Seja *S* o conjunto dos números complexos que satisfazem simultaneamente as equações:

$$|z-3i| = 3 \quad \text{e} \quad |z+1| = |z-2-i|$$

O produto de todos os elementos de *S* é igual a:

(A) $-2 + i\sqrt{3}$.
(B) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$.
(C) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.
(D) $-3 + 3i$.
(E) $-2 + 2i$.

13 Demonstre que, para todos os complexos z_1, z_2, z_3, tem-se que:

a. $|z_1+z_2|^2 + |z_1+z_3|^2 + |z_2+z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1+z_2+z_3|^2$;
b. $|1+z_1\bar{z}_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$
c. $|1-z_1\bar{z}_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$

14 **(ITA 89)** Considerando que a imagem da função *arcsen* é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $i=\sqrt{-1}$, podemos garantir que $\operatorname{arcsen}\left(\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|\right)$ está definida:

(A) apenas para $x = 0$ e vale $\frac{\neq}{2}$.

(B) para todo $x \in \Re$ e vale $\frac{\neq}{2}$.

(C) apenas para $x \in \Re$ tal que $|x| < 1$ e seu valor depende do valor de x.
(D) apenas para $x \in \Re$ tal que $x \geq 1$ e seu valor é π
(E) apenas para $x \in \Re$ tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de x.

15 Os complexos de módulo 1 tais que $|z^2+\bar{z}^{-2}|=1$ determinam um polígono no plano complexo.

a. Qual é o gênero desse polígono? Ele é regular?
b. Quanto vale a área do polígono?

16 **(ITA 99)** Sejam a_k e b_k números reais com $k=1, 2, ..., 6$. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo $k=1, 2,..., 6$. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de $-\frac{1}{5}$ e soma 9, então z_3 é igual a:

(A) $2i$.
(B) $\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$.
(C) $\sqrt{3}+i$.
(D) $\frac{-3\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{73}}{5}i$.
(E) $\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{17}}{5}i$.

17 Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que $|2z - 1 + i| \leq 4$.

18 Determine os valores máximo e mínimo de $|z+i|$, quando $|z-2|=1$.

19 Entre os números complexos z que satisfazem a condição $|z - 25i| \leq 15$, determine o de menor argumento.

20 **(ITA 81)** Sejam a e k constantes reais, sendo $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z - ai| \leq ak$, qual é o de menor argumento?

(A) $z=ak\sqrt{1-k^2}+ia\left(1-k^2\right)$.
(B) $z=k\sqrt{1-k^2}-ia\left(1-k^2\right)$.
(C) $z=k\sqrt{1-k^2}-i\sqrt{1-k^2}$.
(D) $z=-k\sqrt{1-k^2}-ia(1-k^2)$.
(E) $z=a+ki$.

21 **(ITA 95)** Seja z um número complexo satisfazendo $Re(z) > 0$ e $(\bar{z}+i)^2+|\bar{z}+i|^2=6$. Se n é o menor natural para o qual z^n é um número imaginário puro, então n é igual a:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

22 **(ITA 78)** O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação $z\bar{z}-\bar{z}_0 z - z_0\bar{z}+k=0$, em que k é um número real positivo e $|z_0^2|>k$, é:

a) uma hipérbole com centro z_0.
b) uma elipse com um dos focos em z_0.
c) uma circunferência com centro em z_0.
d) uma parábola com vértice em z_0.
e) n.d.a.

23 **(ITA 86)** No conjunto C os números complexos, seja a tal que $|a| < 1$. O lugar geométrico dos pontos $z \in C$ que satisfazem a igualdade $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$ é:

(A) uma circunferência de centro na origem e raio 1.
(B) uma hipérbole.
(C) uma elipse de semieixo maior ou igual a 1.
(D) uma parábola.
(E) formado por duas retas concorrentes.

24 Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

a. $x_1^{2011} + x_2^{2011}$
b. $x_1^{2010} + x_2^{2010}$
c. $x_1^n + x_2^n$, n inteiro.

25 Determine todos os inteiros n tais que $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2$
.

26 Seja x um número complexo tal $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$.

a. Resolva a equação do 2º grau correspondente e ache x.
b. Mostre que $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos(n\alpha)$.

27 Supondo $2\pi < \theta < 4\pi$, determine o argumento principal do complexo $\frac{1+cis\theta}{1+cis(-\theta)}$.

28 Resolva a equação $z^3=\bar{z}$.

29 Seja $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Para m, n e p naturais, calcule $z^{3m}+z^{3n+1}+z^{3p+2}$.

30 Mostre que valem as seguintes fatorações : $e^{i\theta}-1=2i\,sen\frac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{i\theta}{2}}$ e $e^{i\theta}+1=2\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{i\theta}{2}}$.

31 **(ITA 91)** Se $z=\cos t+i\,sen\,t$, em que $0<t<2\pi$, , então podemos afirmar que $w=\frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

(A) $i\cot\frac{t}{2}$.
(B) $itg\frac{t}{2}$.
(C) $i\cot t$.
(D) $i\operatorname{tg} t$.
(E) n.d.a.

32 **(ITA 82)** Considere as famílias de curvas do plano complexo, definida por $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = c$, em que z é um complexo não nulo e c é uma constante real positiva.

Para cada c, temos uma:

(A) circunferência com centro no eixo real e raio igual a c
(B) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $1/c$.
(C) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $1/2c$.
(D) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $1/2c$.
(E) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a $1/c$.

33 **(ITA 83 - Adaptado)** Considerando um número complexo z tal que $\frac{z^2}{\overline{zi}}$ tem argumento igual a $\frac{\neq}{4}$ e $\log_2(z+\bar{z}+2) = 3$. Nestas condições, considerando $\text{Im}\, z > 0$, podemos afirmar que:

(A) não existe $ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)$.
(B) $z^4 + ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right) = -324$.
(C) $z + 2\bar{z}$ é um número real.
(D) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{10^3}(1+\text{i})$.
(E) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{108}(1+i)$.

34 **(ITA 90)** A igualdade $1+|z| = |1+z|$, em que $z \in C$, é satisfeita:

(A) para todo $z \in C$ tal que $\text{Re}\, z = 0$ e $\text{Im}\, z < 0$.
(B) para todo $z \in C$ tal que $\text{Re}\, z \geq 0$ e $\text{Im}\, z = 0$.
(C) para todo $z \in C$ tal que $|z| = 1$.
(D) para todo $z \in C$ tal que $\text{Im}\, z = 0$.
(E) para todo $z \in C$ tal que $|z| < 1$.

35 **(ITA 99)** O conjunto de todos os números complexos z, $z \uparrow 0$, que satisfazem a igualdade $|z+1+i| = ||z|-|1+i||$ é:

(A) $\left\{z \in C : \arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$.
(B) $\left\{z \in C : \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$.
(C) $\left\{z \in C : |z| = 1 \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\right\}$.
(D) $\left\{z \in C : |z| = \sqrt{2} \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$.
(E) $\left\{z \in C : \arg z = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$.

36 **(ITA 95)** Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$, então a soma das raízes reais é igual a:

(A) -1.
(B) $-1 + 2^{1/2}$.
(C) $1 - 2^{1/3}$.
(D) $1 + 3^{1/2}$.
(E) $-1 + 3^{1/2}$.

37 **(AFA 03)** Analise as alternativas e marque a correta:

(A) Dado o complexo $z = m + mi$, em que $m \in \Re^*$ e i é a unidade imaginária, pode-se dizer que o afixo de $(\bar{z})^2$ é, em relação à origem, simétrico do afixo $(-2m^2, 0)$.
(B) No plano de Argand-Gauss dos complexos z, tais que $|z-1| \leq 1$, são representados pelos pontos do círculo de centro (0, 1) e raio unitário.
(C) Se $n \in \mathbb{N}$ e i é a unidade imaginária, então $(i^{n+1} + i^n)^8$ é um número real maior do que zero.
(D) Se $z = a + bi (a \in \Re^*, b \in \Re$ e i é a unidade imaginária) é um complexo, então $z - \bar{z}$ é um imaginário puro.

38 **(AFA 02)** Considere no campo complexo uma curva tal que $\text{Im}\left(\frac{2}{z}\right) \geq k$, em que z é um complexo não nulo. Se $k = 2$, tem-se sua representação gráfica dada pelo:

(A) círculo de raio 1 / 4 e tangente ao eixo real.
(B) círculo de raio 1 / 2 e tangente ao eixo imaginário.
(C) conjunto de pontos do plano complexo exterior ao círculo de raio 1 / 2 e centro (– 1 / 2, 0).
(D)círculo de raio 1/2 e tangente ao eixo real.

39 **(ITA 90)** Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2 + i)z + 2i = 0$, em que z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então:

(A) $S_1 \cap S_2$ é vazio.
(B) $S_1 \cap S_2 \subset \Re$.
(C) S_1 possui apenas dois elementos distintos.
(D) $S_1 \cap S_2$ é unitário
(E) $S_1 \cap S_2$ possui 2 elementos

40 **(ITA 92)** Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sendo S o conjunto dos valores reais de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

(A) 4.
(B) $4i\sqrt{3}$.
(C) 8.
(D) $8i\sqrt{3}$.
(E) n.d.a..

41 Se ξ é raiz n-ésima da unidade, calcule $\xi^0 + \xi^1 + \xi^2 + ... + \xi^{n-1}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Seja z um número complexo. Se $z + \frac{1}{z}$ é um número real, então podemos afirmar:

(A) $z \neq 0$ e $\text{Re}(z) \geq 0$.
(B) $\text{Im}(z) = 0$ ou $|z| = 1$.
(C) z é necessariamente um número real.
(D) $z^2 = -1$.
(E) n.d.a..

02 Determine o valor do produtório:

$$P=\prod_{k=0}^{2014}\left[1+\frac{1+i^{2^k}}{2}\right],\quad \text{em que} \quad i=\sqrt{-1}$$

03 O par (z_1, z_2) de números complexos é chamado de "parceiro" se existe um número real a tal que $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=az_1z_2 \\ a\in[-2,2] \end{cases}$. Prove que, para todo n natural, se (z_1, z_2) é "parceiro", então (z_1^n, z_2^n) também é.

04 Considere os conjuntos:

$$A=\left\{(x,y): x^2-y^2=\frac{x}{x^2+y^2}\right\},\quad B=\left\{(x,y): 2xy+\frac{y}{x^2+y^2}=3\right\}$$

$$C=\left\{(x,y): x^3-3xy^2+3y=1\right\} \quad \text{e} \quad D=\left\{(x,y): 3x^2y-3x-y^3=0\right\}.$$

Prove que $A\cap B=C\cap D$.

05 Sejam z_1, z_2, z_3 complexos tais que $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \end{cases}$. Prove que $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

06 Determine os valores máximo e mínimo de $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$ quando $|z| = 3$

07 Prove que se $\text{Re}(z) > 1$, então $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

08 Determine o maior e o menor valores possíveis para $|z|$, dado que $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$.

09 Seja z um complexo não nulo tal que $\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|\le 2$. Prove que $\left|z+\frac{1}{2}\right|\le 2$.

10 Sendo x, y, z ângulos em $[0,2\pi)$, resolva o sistema

$$\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=\frac{3}{2} \\ \text{sen}x+\text{sen}y+\text{sen}z=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

11 Determine os valores dos somatórios abaixo:

a. $S=\sum_{k=0}^{n} sen(a+kr)$

b. $C=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kr)$

12 Determine as somas:

a. $\cos x+\binom{n}{1}\cos 2x+\binom{n}{2}\cos 3x+\ldots+\binom{n}{n}\cos((n+1)x);$

b. $senx+\binom{n}{1}sen2x+\binom{n}{2}sen3x+\ldots+\binom{n}{n}\text{sen}((n+1)x).$

13 Quantas soluções possui a equação $z^{n-1}=i\cdot\bar{z}$ (n é natural)?

14 Seja ξ uma raiz n-ésima da unidade diferente de 1. Prove que:

$$1+\xi^k+\xi^{2k}+\xi^{3k}+\ldots+\xi^{(n-1)k}\begin{cases} n, \text{ se } k \text{ não é múltiplo de } n \\ 0, \text{ se } k \text{ não é múltiplo de } n\cdot \end{cases}$$

15 Considere a equação $z^5 = 1$. Resolva essa equação fatorando (e usando uma substituição $w=z+\frac{1}{z}$). Em seguida, resolva utilizando as fórmulas de De Moivre para, então, determinar o valor de cos 36°.

16 Resolva a equação $(z + 1)^n = (z - 1)^n$, em que $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

17 Sejam A, B e C os afixos dos complexos a, b e c no plano complexo. Mostre que o ângulo BAC é reto se e somente se $\frac{b-a}{c-a}$ é imaginário puro.

18 Dado um triângulo ABC, constroem os quadrados ABDE e ACFG, exteriores ao triângulo. Mostre que CE é perpendicular a BG e que CE = BG. Sugestão: Observando a figura no plano de Argand-Gauss, você precisa mostrar que $C-E=\pm i\cdot(G-B)$.

19 Um turista faz um passeio por uma cidade em algumas etapas. Cada etapa consiste em 3 segmentos de tamanho de 100m separados por giros de 60 graus no sentido horário. Entre o último segmento de uma etapa e o primeiro da etapa seguinte, o turista gira de 60 graus no sentido anti-horário. Após 2014 etapas, a que distância do ponto inicial estará o turista?

20 Um antigo mapa dava instruções para localizar um tesouro enterrado em certa ilha...

"Ande da palmeira até a entrada da caverna . Lá chegando, vire 90º à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire 90º à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira à pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio das duas marcas."

Quando chegamos a ilha, a palmeira não existia mais. Como fazer para achar o tesouro?

1. Introdução

A Teoria das Probabilidades tem por objetivo facilitar a tomada de decisões em experimentos não determinísticos, ou seja, em situações nas quais não se sabe o resultado final. Teve início com os jogos de cartas, dados e roleta, uma vez que estes jogos, também chamados de jogos de azar, são exemplos clássicos em que não se pode prever o resultado final.

O presente assunto tem por objetivo apresentar o conceito de probabilidade e suas propriedades, além de mostrar os principais exemplos de sua aplicação.

Além disso, serão apresentados conceitos mais avançados como a probabilidade condicional e a probabilidade em espaços contínuos.

2. Probabilidade de Laplace

O conceito de probabilidade está associado à frequência com que um dado evento deve ocorrer se realizarmos um mesmo experimento certa quantidade de vezes. Uma vez que estamos tratando de experimentos aleatórios, ou seja, que não necessariamente possuem o mesmo resultado, a probabilidade deve determinar apenas o que ocorre na média dos eventos.

Por exemplo, mesmo que não se saiba nenhum conceito formal sobre probabilidade, é razoável pensarmos que se jogarmos um dado para o alto "muitas" vezes, em um sexto destas jogadas cada um dos números deve aparecer.

2.1 Espaço amostral (Ω) e evento

Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um dado experimento aleatório.

Ex. 1: Espaço amostral associado ao lançamento de um dado.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ex. 2: Espaço amostral associado ao lançamento de duas moedas.

$\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, C), (C, K)\}$

Além disso, chamamos de evento qualquer subconjunto de um espaço amostral associado a um experimento aleatório.

Por exemplo, no espaço amostral associado ao lançamento de um dado, podemos olhar para os lançamentos em que aparece um número par: $\{2, 4, 6\}$.

No caso dos subconjuntos unitários de um espaço amostral, dizemos que o evento é um evento elementar.

2.2. Probabilidade em espaços finitos e propriedades

Se um experimento aleatório obedece as seguintes restrições:

I. O espaço amostral Ω é finito, $\#\,\Omega = n$;
II. Os eventos elementares são equiprováveis;
III. Todo evento A é a união de m eventos elementares com $m \le n$.

Definimos a probabilidade de LaPlace por $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$.

Assim, estamos calculando que fração do espaço amostral um subconjunto representa.

Uma vez que o espaço amostral é o conjunto de todos os casos possíveis, e os eventos são os casos que queremos analisar, tem-se:

$$\boxed{P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}}$$

– Propriedades:
I. $\forall A \subseteq \Omega;\ 0 \le P(A) \le 1$
II. $P(\Omega) = 1$
III. $P(\varnothing) = 0$
IV. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
V. $P(A^c) = 1 - P(A)$

Ex.:

I. Probabilidade de cair cara exatamente uma vez lançando-se uma moeda três vezes:

$\#A$: (K, C, C); (C, K, C); (C, C, K) três possibilidades.

$\#\Omega$: cada moeda tem duas possibilidades: $2^3 = 8$.

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

II. Probabilidade de retirar duas cartas de mesmo símbolo em um baralho de 52 cartas:

$\#A$:

Escolha do símbolo: 13 possibilidades (A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K)

Escolha dos naipes desse símbolo: $C_{4,2} = 6$ possibilidades.

Total: $13 \cdot 6 = 78$ casos favoráveis

$$C_{52,2} = \frac{52!}{50! \cdot 2!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 26 \cdot 51$$

$$P(A) = \frac{13 \cdot 6}{26 \cdot 51} = \frac{1}{17}$$

III. Probabilidade de cair soma menor ou igual a 15 no lançamento de 3 dados:

$P(A) = 1 - P(A^c)$

$\#A^c$:

(6, 6, 6): uma possibilidade;

(5, 6, 6) e suas permutações: três possibilidades;

(4, 6, 6) e suas permutações: três possibilidades;

(5, 5, 6) e suas permutações: três possibilidades;

Total: 10 casos.

$\#\,\Omega$: cada dado lançado tem 6 possibilidades: $6^3 = 216$.

$$P(A) = 1 - \frac{10}{216} = \frac{206}{216} = \frac{103}{108}$$

3. Eventos mutuamente exclusivos e eventos independentes

Dizemos que dois eventos são mutuamente exclusivos, ou disjuntos, se não existe interseção entre eles, ou seja, se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Em geral, se tomarmos qualquer partição do espaço amostral, ou seja, se tomarmos uma união de conjuntos disjuntos ($A_i \cap A_j = \varnothing$) que cobre o espaço amostral $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega\right)$ teremos: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Finalmente, dizemos que dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não influência a ocorrência do outro. Nesse caso, temos: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Veja que isso funciona como o Princípio Multiplicativo em Combinatória, uma vez que para eventos sucessivos e independentes iremos multiplicar as probabilidades.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Uma moeda viciada é cunhada de tal forma que é quatro vezes mais provável cair cara que coroa. A probabilidade de cair cara ou coroa nessa moeda é:

Solução: $P(K) = 4 \cdot P(C)$ e $P(K) + P(C) = 1$, logo: $P(K) = \frac{4}{5}$ e $P(C) = \frac{1}{5}$.

02 Um dado é fabricado de tal modo que a probabilidade de cair um número é diretamente proporcional a esse número. Nesse caso a probabilidade de cair o número 4 no dado é:

Solução: Seja x a probabilidade de cair 1 no dado, temos: $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \therefore x = \frac{1}{21}$, donde a probabilidade de cair 4 no dado será: $\frac{4}{21}$.

03 Jogando-se uma moeda para o alto 5 vezes, qual a probabilidade de cair cara exatamente duas vezes?

Solução: Vejamos qual a probabilidade de cair a sequência CCCKK.

Como cada lançamento de moeda é um evento independente, podemos multiplicar as probabilidades $\frac{1}{2^5}$.

Além disso, temos $\frac{5!}{3!2!} = 10$ sequências equiprováveis, logo: $\frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$.

4. Probabilidade condicional

Chamamos de probabilidade condicional a probabilidade de ocorrer um evento A dado que um evento B já ocorreu.

Uma vez que o evento B já ocorreu, existe uma restrição no espaço amostral no cálculo da probabilidade, ou seja, devemos considerar como novo espaço amostral o conjunto B.

Assim,

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\#(A \cap B)/\#\Omega}{\#B/\#\Omega} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 **(UFSCAR)** Dois dados usuais e não viciados são lançados. Sabe-se que os números observados são ímpares. Então a probabilidade de que a soma deles seja 8 é:

(A) $\frac{2}{36}$.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $\frac{2}{9}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

(E) $\frac{2}{18}$.

Solução: Letra C.

Como os números são ímpares, o novo espaço amostral é dado por: $\Omega = \{(1,5); (5,1); (1,3); (3,1); (3,5); (5,3); (1,1); (3,3); (5,5);\}$.

Dentro deste espaço amostral, temos apenas dois pares ordenados com soma 8.

02 **(VUNESP)** Dois jogadores, A e B, vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha, e se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter ganhado?

(A) $\frac{10}{36}$.

(B) $\frac{5}{32}$.

(C) $\frac{5}{36}$.

(D) $\frac{5}{35}$.

(E) Não se pode calcular sem saber os números sorteados.

Solução: Letra B.

Seja A o evento em que a soma dos dados é 5 e B em que a soma é 8, temos:

Resultados com soma 5: (4, 1); (3, 2); (2, 3); (1, 4).

Assim, a probabilidade de A não ganhar é: $P(A^C) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$.

Além disso, temos os seguintes casos com soma 8: (6, 2); (5, 3); (4, 4); (3, 5); (2, 6).

Deste modo, $P(B) = \frac{5}{36}$ donde:

$$P(B|A^C) = \frac{P(B \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(B)}{P(A^C)} = \frac{5}{32}.$$

5. Probabilidade em espaço contínuo

Em alguns problemas de probabilidade pode ser impossível a contagem de elementos, uma vez que o conjunto pode não ser discreto. Quando temos um espaço amostral não enumerável e contínuo, dizemos que o cálculo de probabilidade se dá sobre um espaço contínuo.

Para determinar a probabilidade de um evento em um espaço contínuo, devemos usar a mesma ideia apresentada em espaços discretos, comparando casos favoráveis e casos possíveis, porém, dessa vez, devemos comparar duas coisas de mesma dimensão, por exemplo: áreas, volumes ou comprimentos.

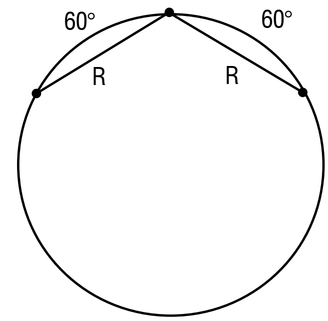
Ex.:

I. Considere um quadrado Q_1 e a circunferência C inscrita nele. Seja Q_2 um quadrado inscrito nessa circunferência, determine a probabilidade de ao escolhermos um ponto de Q_1 tomarmos um ponto que também pertence a Q_2.

Solução: Seja L o lado do quadrado Q_1, o raio da circunferência inscrita será $R = \frac{L}{2}$. Nesse caso, para determinar o lado de Q_2, temos: $l\sqrt{2} = 2R = L \Rightarrow l = \frac{L\sqrt{2}}{2}$.

Assim: $P(A) = \frac{l^2}{L^2} = \frac{L^2/2}{L^2} = \frac{1}{2}$

II. Considere uma circunferência de raio R. Se pegarmos dois pontos da circunferência, qual a probabilidade de que a distância entre esses dois pontos seja maior que R?



Solução: Considere o primeiro ponto fixo na circunferência (a probabilidade independe da escolha desse ponto).

Agora como o outro ponto deve distar R do primeiro, teremos uma corda que será lado de um hexágono regular inscrito, ou seja, teremos um arco de 60º. Como podemos ter essa corda para ambos os lados, o arco é de 120º. Qualquer ponto fora desse arco tem distância maior que R, assim:

$$P(A) = \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Três dados honestos de 6 faces são lançados. Qual é a probabilidade de o produto dos valores obtidos ser par?

Solução: O aluno desatento pode achar que, por haver duas opções (par ou ímpar), a probabilidade é igual a $\frac{1}{2}$. No entanto, isso está completamente errado. Veja que o produto de três números ser par depende de pelo menos um deles ser par. Problemas com 'pelo menos', em algumas ocasiões, têm solução muito mais simples através do seu complementar. Como o produto só é ímpar quando os três resultados são ímpares, a probabilidade de isso acontecer é igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ Portanto, a probabilidade de o produto ser par é igual a $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

02 Uma turma da NASA tem 10 alunos, dos quais 2 são irmãos. Se uma tripulação de 4 pessoas será escolhida na turma, determine a probabilidade de os 2 irmãos serem escolhidos.

Solução: O espaço amostral deste problema é o conjunto de todos os quartetos que podem ser formados na turma, que tem $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$ elementos. Portanto, o denominador é igual a 210. Para o em umerador, vamos calcular o número de quartetos que contêm os 2 irmãos. Veja que são $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28$, pois, supondo que os 2 irmãos estão no quarteto, das outras 8 pessoas precisamos escolher 2 para os acompanharem.

Portanto, a probabilidade é igual a $\frac{28}{210} = \frac{2}{15}$.

03 Uma caixa marrom tem x bolas brancas e 3 bolas pretas, enquanto uma caixa cinza tem 1 bola branca e x bolas pretas. Determine x sabendo que, ao escolher uma bola de cada caixa, a probabilidade de se obterem duas bolas pretas é de 40%.

Solução: A probabilidade de obter bola preta na caixa marrom é $\frac{3}{x+3}$. Já na caixa cinza, essa probabilidade é de $\frac{x}{x+1}$. Escrevendo $40\% = \frac{2}{5}$, temos $\frac{3}{x+3}\times\frac{x}{x+1} = \frac{2}{5}$, o que nos leva à equação do 2º grau $2x^2 - 7x + 6 = 0$, que tem raízes $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$. Como x é inteiro (número de bolas), devemos ter $x = 2$.

04 Em uma sala com 40 alunos, 25 gostam de alface e 20 gostam de jiló e sabe-se que todos os alunos gostam de alface ou jiló. Um aluno é escolhido ao acaso. Sabendo que ele gosta de alface, determine a probabilidade de ele também gostar de jiló.

Solução:

Estamos diante de um problema de probabilidade condicional, pois é dada uma informação sobre o aluno escolhido (ele gosta de alface). Sejam A o conjunto dos que gostam de alface e B o conjunto dos que gostam de jiló. Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$; logo, $40 = 25 + 20 - n(A \cap B)$ $\Rightarrow n(A \cap B) = 5$.

Queremos a probabilidade $P(B \mid A)$, que é igual a:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Dois dados são jogados simultaneamente. Calcule a probabilidade de que a soma dos números mostrados na face de cima seja 7.

02 **(AFA – 89)** Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade da soma ser menor do que 4?

(A) $\frac{1}{6}$.
(B) $\frac{1}{8}$.
(C) $\frac{1}{12}$.
(D) $\frac{1}{16}$.

03 Dois dados são jogados simultaneamente. Calcule a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual a 3.

04 Uma caixa contém 20 peças em boas condições. Uma amostra de 10 peças é extraída. Calcule a probabilidade de que ao menos uma peça na amostra seja defeituosa.

05 **(AFA – 90)** Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 são formados números de 4 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. A probabilidade desse número ser par é:

(A) $\frac{1}{3}$.
(B) $\frac{2}{5}$.
(C) $\frac{3}{5}$.
(D) $\frac{2}{3}$.
(E) n.r.a.

06 Uma moeda foi cunhada de tal forma que é quatro vezes mais provável dar cara do que coroa. Calcule as probabilidades de cara e coroa.

07 **(AFA - 09)** No lançamento de um dado viciado, a face 6 ocorre com o dobro da probabilidade da face 1, e as outras faces ocorrem com a probabilidade esperada em um dado não viciado de 6 faces e numeradas de 1 a 6.
Dessa forma, a probabilidade de ocorrer a face 1 nesse dado viciado é:

(A) $\frac{1}{9}$.
(B) $\frac{2}{3}$.
(C) $\frac{1}{3}$.
(D) $\frac{2}{9}$.

08 Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É três vezes mais provável que A vença do que B, é duas vezes mais provável que B vença do que C e é três vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de ganhar para cada um dos times?

09 **(AFA – 94)** Uma urna contém 2 peças boas e 5 defeituosas. Se 3 peças forem retiradas aleatoriamente, sem reposição, qual a probabilidade de serem 2 (duas) boas e 1 (uma) defeituosa?

(A) $\frac{1}{12}$.
(B) $\frac{3}{17}$.
(C) $\frac{33}{68}$.
(D) $\frac{33}{64}$.

10 **(AFA-1999)** A probabilidade de observarmos um número na face superior de um dado viciado é diretamente proporcional a esse número. Ao lançarmos esse dado, a probabilidade de ocorrer um número par é:

(A) $\frac{1}{2}$.
(B) $\frac{11}{21}$.
(C) $\frac{4}{7}$.
(D) $\frac{13}{21}$.

11 **(AFA-05)** Dentro de uma caixa há nove etiquetas. Cada etiqueta recebe um número de 01 a 09, sem repetir nenhum. Retira-se três delas, uma a uma, sem reposição. A probabilidade de que os três números correspondentes às etiquetas retiradas sejam, nesta ordem, ÍMPAR – PAR – ÍMPAR ou PAR – ÍMPAR – PAR é de:

(A) $\frac{1}{28}$.
(B) $\frac{5}{18}$.
(C) $\frac{20}{81}$.
(D) $\frac{5}{36}$.

12 **(EN-1991)** Lançam-se simultaneamente cinco dados honestos. Qual a probabilidade de serem obtidos, nesta jogada, uma trinca e um par (isto é, um resultado do tipo AAABB com $B \neq A$)?

(A) $\frac{5}{1296}$.
(B) $\frac{5}{3888}$.
(C) $\frac{25}{648}$.
(D) $\frac{125}{324}$.
(E) $\frac{125}{648}$

13 Para a Copa do Mundo, 32 países são divididos em oito grupos, com quatro países cada um. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcule a probabilidade de que dois países determinados *A* e *B* se encontrem no mesmo grupo. (Na realidade a escolha não é feita de forma completamente aleatória.)

14 Cinco pessoas são escolhidas aleatoriamente. Qual a probabilidade de haver alguma coincidência de signos zodiacais?

15 Os jogadores *X* e *Y* lançam cada um deles um dado. Qual a probabilidade de *X* obter um número de pontos maior ou igual a *Y*?

16 **(AFA-1995)** Uma urna contém bolas enumeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de o número da segunda bola ser estritamente menor que o da primeira é:

(A) $\frac{10}{27}$.
(B) $\frac{4}{9}$.
(C) $\frac{5}{9}$.
(D) $\frac{8}{9}$.

17 Um prédio de três andares com dois apartamentos por andar tem exatamente três apartamentos ocupados. Qual a probabilidade de haver exatamente um apartamento ocupado por andar?

18 Sete lâmpadas de neon estão dispostas formando um oito no visor de uma máquina de calcular. Acendem-se ao acaso quatro dessas lâmpadas. Qual a probabilidade de se formar um quatro?

19 **(OBM 02 – 1ªF – N3)** Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade.
A probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe é:

(A) 1/2.
(B) 2/5.
(C) 3/5.
(D) 12/25.
(E) 13/25.

20 Uma moeda equilibrada (probabilidade de cara = probabilidade de coroa = 1 / 2) é jogada n vezes. Calcule a probabilidade de se obterem exatamente k caras, $0 \le k \le n$.

21 Há oito carros estacionados em doze vagas consecutivas. Qual a probabilidade de as vagas vazias serem consecutivas?

22 Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcule a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7.

23 O extraterrestre X possui 6 dedos em cada mão, enquanto o Y possui 4. Na disputa de uma partida de "par ou ímpar", X escolhe par. Determine a probabilidade de X vencer, sabendo que X joga cada um dos valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 com igual probabilidade e Y joga cada um dos valores 0, 1, 2, 3 e 4 com igual probabilidade.

24 **(OBM04 – 1ªF – N3)** Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocre e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor (sim, ocre e magenta são cores!) é 1/2. Quantas faces ocre tem o segundo cubo?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

25 Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual a probabilidade de que seja ímpar?

26 Em uma cidade, 10% das pessoas possuem carro importado. Dez pessoas dessa cidade são selecionadas ao acaso e com reposição. Determine a probabilidade de que exatamente 7 das pessoas selecionadas possuam carro importado.

27 **(OBM06 – 1ªF – N3)** Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

(A) $\dfrac{1}{2^{2006}}$
(B) $\dfrac{1}{2006}$
(C) $\dfrac{1}{2007}$
(D) $\dfrac{1}{2006 \cdot 2007}$
(E) $\dfrac{2006}{2007}$

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 **(OBM 01 – 1ªF – N3)** Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas enumeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

(A) 1/29.
(B) 1/30.
(C) 1/31.
(D) 1/60.
(E) 2/31.

02 Escolhem-se ao acaso duas peças de um dominó. Qual a probabilidade de elas possuírem um número comum?

03 Uma urna contém 4 bolas brancas, 4 bolas pretas e 4 bolas vermelhas. Sacam-se 6 bolas dessa urna. Determine a probabilidade de serem sacadas 2 bolas de cada cor:

a. supondo a extração com reposição;
b. supondo a extração sem reposição.

04 Em uma caixa há sete bolas brancas e três bolas pretas. Sacam-se uma a uma as bolas dessas caixas até que todas as pretas sejam encontradas. Qual a probabilidade de o número de extrações ser igual a k $(3 \le k \le 10)$?

05 Tem-se n urnas. Bolas são colocadas ao acaso nas urnas, uma de cada vez, até que alguma urna recebe duas bolas. Qual é a probabilidade de colocarmos exatamente p bolas nas urnas?

06 A probabilidade de uma mulher ter câncer de mama é de 1%. Se uma mulher tem câncer de mama, a probabilidade de apresentar um exame positivo é de 60%. Entretanto, se uma mulher não tem câncer de mama, a chance de apresentar um exame positivo é de 7%. Qual é a probabilidade de uma mulher com exame positivo ter câncer de mama?

07 Há apenas dois modos, mutuamente excludentes, de Genésio ir para Genebra participar de um congresso: ou de navio ou de avião. A probabilidade de Genésio ir de navio é de 40% e de ir de avião é de 60%. Se ele for de navio, a probabilidade de chegar ao congresso com dois dias de atraso é de 8,5%. Se ele for de avião, a probabilidade de chegar ao congresso com dois dias de atraso é de 1%. Sabe-se que Genésio chegou com dois dias de atraso para participar do congresso em Genebra. Determine a probabilidade de Genésio ter ido de avião ao congresso.

08 Em uma certa cidade existem 10.000 bicicletas, que irão receber um número de licença de 1 a 10.000 (duas bicicletas não podem receber o mesmo número). Determine a probabilidade de que a primeira bicicleta vista por uma pessoa andando pelas ruas não contenha o dígito 8 em seu número de licença.

09 Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

10 Em um armário há n pares de sapatos. Retiram-se ao acaso m pés de sapato desse armário. Calcule a probabilidade:

a. que saia pelo menos um par;
b. que saia exatamente um par.

11 Seja P uma probabilidade sobre os eventos de um espaço amostral Ω. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 2/3$ e $P(B) = 4/9$. Prove que:

a. $P(A \cup B) \geq 2/3$.
b. $2/9 \leq P(A \cap B^c) \leq 5/9$.
c. $1/9 \leq P(A \cap B) \leq 4/9$.

12 Existem 1.001 bolas vermelhas e 1.001 bolas pretas em uma caixa. Seja P_1 a probabilidade de que duas bolas retiradas aleatoriamente da caixa sejam da mesma cor e seja P_2 a probabilidade de que sejam de cores diferentes. O valor de $|P_1 - P_2|$ é:

(A) 0.
(B) 1/2002.
(C) 1/2001.
(D) 2/2001.
(E) 1/1000.

13 Qual a probabilidade de obtermos soma 12 lançando três dados?

14 Considere um quadrado $ABCD$ de lado L. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto P em seu interior, determine a probabilidade de que o ângulo APB seja menor do que 90º.

15 Um ponto P é selecionado aleatoriamente no interior do pentágono de vértices A(0, 2), B(4,0), C(2π + 1,0), D(2π + 1,4) e E(0,4). Qual é a probabilidade de que o ângulo $A\hat{P}B$ seja obtuso?

(A) $\frac{1}{5}$.
(B) $\frac{1}{4}$.
(C) $\frac{5}{16}$.
(D) $\frac{3}{8}$.
(E) $\frac{1}{2}$.

16 Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo de raio 2 e centro O. Em seguida, constrói-se um quadrado, também centrado em O, que tem M como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo C.

17 **(OBM 13 – 1ªF – N3)** Uma potência perfeita é um número inteiro da forma a^b, a e b inteiros, $b > 1$. Seja $f(n)$ a maior potência perfeita que não excede n. Por exemplo, $f(7) = 4$, $f(8) = 8$ e $f(99) = 81$. Sorteando ao acaso um número inteiro k com $1 \leq k \leq 100$, qual a probabilidade de $f(k)$ ser um quadrado perfeito?

(A) 64%.
(B) 72%.
(C) 81%.
(D) 90%.
(E) 96%.

18 **(OMERJ)** Considere uma turma com n alunos (2 deles são Miguel e Rodrigo). Considere todas as comissões de p alunos que podem ser formadas nessa turma. Uma dessas comissões é escolhida ao acaso. Sabendo-se que Miguel é um aluno dessa comissão, qual é a probabilidade de Rodrigo também estar na mesma comissão?

19 **(IIT JEE)** Uma pessoa pode ir ao trabalho de carro, moto, ônibus ou trem com probabilidades: $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ e $\frac{1}{7}$ respectivamente. A probabilidade de ele chegar atrasado no trabalho, se for de carro, moto, ônibus ou trem é: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$ e $\frac{1}{9}$ respectivamente. Sabendo que ele chegou no escritório a tempo, qual a probabilidade dele ter ido de carro?

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta; devemos supor neste problema que o convidado prefere ganhar o carro. O procedimento para escolha da porta é o seguinte: o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Com uma boa estratégia, que probabilidade tem o convidado de ganhar o carro?

02 Resolva uma outra versão do exercício anterior, agora com 4 portas, sendo 3 bodes e 1 carro.

03 Um móvel tem três gavetas iguais. Em uma gaveta há duas bolas brancas, em outra há duas bolas pretas, e na terceira há uma bola branca e outra preta. Abrimos uma gaveta ao acaso e tiramos uma bola ao acaso sem olhar a segunda bola que está na gaveta. A bola que tiramos é branca. Qual é a probabilidade de que a segunda bola que ficou sozinha na gaveta seja também branca?

04 **(OBMU – 13)** Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade 1/2 para cada vértice. Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

05 **(Desafio PUC 09)** Zé Roberto e Humberto disputam um jogo. Eles jogam um dado comum até sair duas vezes consecutivas o mesmo número. Se este número a aparecer repetido for par, ganha Zé Roberto; se for ímpar, ganha Humberto.
Eles começam a partida: o primeiro número sorteado é 1, o segundo é 4, o terceiro é 2. Qual é, neste momento, a probabilidade de que Zé Roberto ganhe?

06 No programa de auditório Toto Bola, o apresentador Ciço Magallanes dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da plateia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si.

Determine o valor de $m + n$.

07 Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade 1/2 de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independentemente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

08 **(AIME-01)** Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 são escritos nas faces de um octaedro. Determine a probabilidade de não existirem dois números consecutivos em faces que possuem uma aresta em comum.
Obs: Considere 1 e 8 números consecutivos.

1. Introdução

Quando estudamos no 8º ano (antiga 7ª série), nos é apresentado de forma mais rigorosa o conceito de expressões algébricas. Neste momento deixamos de olhar apenas para expressões numéricas e tratamos também de expressões com incógnitas.

Após aprender a solução de alguns tipos de equação, aprendemos também algumas operações com variáveis, como a distributiva e o agrupamento, e finalmente, os produtos notáveis. Vemos então a expansão das expressões $(a+b)^2$ e $(a+b)^3$, e uma pergunta que normalmente acaba aparecendo é: o que aconteceria se aumentássemos esses expoentes?

Veremos a resposta para essa pergunta deduzindo uma fórmula geral para a expressão $(a+b)^n$, com n natural. Além disso, veremos que a expansão de $(a+b)^n$ tem relação direta com o desenvolvimento de $(a+b)^{n-1}$, o que nos traz a construção do triângulo de Pascal.

Esse "triângulo" basicamente é formado por combinações, que aqui denotaremos de números binomiais, e através dele é possível visualizar diversas relações entre esses números como o Teorema das Linhas, das Colunas e das Diagonais que serão vistos neste capítulo.

2. O binômio de Newton (distributiva inteligente)

Vejamos o desenvolvimento da expressão $(a+b)^n$ para $n = 2$ e $n = 3$.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Em geral no desenvolvimento de $(a+b)^3$ quando fazemos a distributiva pensamos em fazer $(a+b)^2\,(a+b)$. Não poderíamos fazer a distributiva direta? Ou seja, com os três parênteses de uma só vez, ao invés de multiplicar os dois primeiros e depois multiplicar pelo terceiro? Lembrando que a distributiva é a soma de todas as multiplicações possíveis com os elementos desses parênteses, tentemos desenvolver $(a+b)^3$ de forma inteligente:

Em cada parêntese devemos escolher a ou b durante a distributiva, como temos três termos, podemos escolher o b três, duas, uma ou nenhuma vez.

– Se escolhermos o b três vezes temos uma única opção: $bbb = b^3$;

– Escolhendo o b duas vezes temos três opções: $bba = bab = abb = ab^2$;

– Escolhendo o b uma vez, três opções: $aab = baa = aba = a^2b$;

– Não escolhendo o b em nenhum parêntese: $aaa = b^3$.

Como devemos somar todos os produtos possíveis:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Repare que os coeficientes da expressão acima estão associados ao número de escolhas possíveis nos parênteses então, por exemplo, o termo ab^2 aparece multiplicado por 3, uma vez que temos três parênteses e queremos escolher o b em dois deles: $\binom{3}{2} = 3$.

Uma vez entendido isso, podemos deduzir uma expressão geral para $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ldots(a+b)$, podendo na distributiva escolher o b de zero a n vezes.

Seja p o número de parênteses em que escolhemos o b $(0 \le p \le n)$, nos demais $n - p$ parênteses escolheremos o a. Temos $\binom{n}{p}$ escolhas desse tipo, e como esse é o formato de qualquer termo do binômio, chamaremos este de termo geral, denotado por T_{p+1}.

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p}$$

T_{p+1} denota o termo da posição $p + 1$ no desenvolvimento do binômio em potências decrescentes de a. Repare que o $+ 1$ aparece uma vez que devemos começar com $p = 0$.

Assim, como o Binômio de Newton é uma multiplicação de vários fatores, devemos somar todas as multiplicações presentes na distributiva, logo:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p}$$

3. O triângulo de Pascal

Analisemos novamente a expressão $(a+b)^n$ para n pequeno:

$(a+b)^0 = 1$, $a + b \neq 0$;

$(a+b)^1 = a + b$;

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Repare que as extremidades sempre possuem coeficiente 1, uma vez que $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

Além disso, veja que existe uma relação entre os coeficientes de uma linha e outra, por exemplo, se somarmos dois coeficientes consecutivos de $(a+b)^3$ obteremos os coeficientes de $(a+b)^4$: $1 + 3 = 4$; $3 + 3 = 6$; $3 + 1 = 4$. A pergunta é se isso realmente vale independente do valor de n.

Uma vez que estamos interessados apenas nas possíveis relações entre coeficientes, para facilitar a visualização, omitiremos as variáveis a e b, montando assim um triângulo com as combinações presentes nos binômios, chamadas aqui de números binomiais $\binom{n}{p}$.

$$\begin{array}{lllllll}
C_0^0 & & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & \\
\text{-------------} & & & & & & \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^p & \ldots & C_n^n
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
\text{---------------} & & &
\end{array}$$

Repare então que na combinação $\binom{n}{p}$ o n representa a linha do elemento e o p a coluna, contando a linha e a coluna zero.

3.1. Relação de Stifel

Como vimos anteriormente, a primeira motivação para montarmos o Triângulo de Pascal foi a análise de que, nos primeiros casos, a soma de dois termos consecutivos gera o termo imediatamente abaixo. De fato isso vale independente do expoente n do binômio, ou seja,

$$\boxed{\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}}$$

Essa relação é de fundamental importância uma vez que é através dela que se dá toda construção do Triângulo de Pascal, já que ela permite construir uma linha a partir da anterior.

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & \boxed{2} & + & \boxed{1} & \\ & & & \downarrow & \\ 1 & 3 & & \boxed{3} & 1 \\ 1 & 4 & & 6 & 4 \quad 1 \end{array}$$

Demonstração (1): algébrica

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}=$$

$$\frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!}=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}=\binom{n+1}{p+1}$$

Demonstração (2): argumentos combinatórios

Considere o conjunto $\{1, 2, 3, ..., n+1\}$ dos quais queremos escolher $p+1$ elementos. De quantos modos isso pode ser feito?

Resp: $\binom{n+1}{p+1}$

Por outro lado, na nossa escolha o elemento $n+1$ pode entrar ou não, assim:

1º Caso: n + 1 entra. Aqui ainda devemos escolher p elementos no conjunto {1, 2, 3, .., n}, donde temos $\binom{n}{p}$ possibilidades.

2º Caso: $n+1$ não entra. Nesse caso ainda faltam escolher $p+1$ elementos no conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, logo temos $\binom{n}{p+1}$ escolhas.

Como dividimos o problema em casos devemos somar as respostas, e como ambas as soluções se referem ao mesmo problema, elas devem ser iguais.

3.2. Combinações complementares

Outra propriedade que á facilmente notada no triângulo é que elementos equidistantes das extremidades são sempre iguais:

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & \boxed{3} & \boxed{3} & 1 \end{array}$$

De fato $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$, para todo n e p naturais.

3.3. Teorema das linhas

Outra propriedade interessante é o que ocorre quando somamos todos os termos da uma linha do Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 1} & & & & \rightarrow & 1+2+1=2^2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \rightarrow & 1+3+3+1=2^6 \end{array}$$

Repare que ao somarmos os termos da linha n (contando a linha zero) sempre obtemos como resultado uma potência de 2, ou seja, 2^n.

Assim devemos ter:

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n}$$

Demonstração (1): algébrica

Considere o binômio de Newton: $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$, agora tome $a=b=1$: $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n$.

Demonstração (2): argumento combinatório

Lembre que os coeficientes do binômio de Newton servem para ver quantas vezes cada parcela aparece assim, se somarmos todos os coeficientes, ou seja, todas as combinações da linha n do Triângulo de Pascal, devemos ter o total de termos obtidos na distributiva de $(a+b)^n$. Como na distributiva temos que fazer basicamente a escolha entre dois elementos possíveis em todos os parênteses, a ou b, devemos ter 2^n elementos.

3.4. Teorema das colunas

Repare através dos primeiros termos do Triângulo de Pascal que se somarmos os elementos de uma coluna, começando no primeiro termo desta coluna, até um ponto qualquer, essa soma será equivalente ao número imediatamente na diagonal inferior a direita da última parcela.

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & \boxed{1} & & & & \\ 1 & \boxed{2} & 1 & & & \\ 1 & \boxed{3} & 3 & 1 & & \\ 1 & \boxed{4} & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

De modo geral, têm-se:

$$\boxed{\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+...+\binom{p+n}{p}=\binom{p+n+1}{p+1}}$$

Demonstração: por indução em n,

1º Passo: $n=0$, $\binom{p}{p}=1=\binom{p+1}{p+1}$, ok!

2º Passo: Supondo válido para n,

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+...+\binom{p+n}{p}+\binom{p+n+1}{p}=\binom{p+n+1}{p+1}+\binom{p+n+1}{p}=$$

$$=\binom{p+n+2}{p+1}$$

De fato, na primeira igualdade usamos a hipótese de indução e na segunda a Relação de Stifel. Assim, podemos perceber que quando a relação vale para n também vale para $n+1$, fechando a indução.

3.5. Teorema das diagonais

Podemos reparar através dos primeiros termos que se somarmos os elementos de uma diagonal do Triângulo de Pascal, começando no primeiro termo, obteremos um valor igual ao termo imediatamente abaixo da última parcela:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Generalizando: $\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\dots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}}$

Demonstração pela Relação de Stifel:

$$+\left[\begin{array}{l}
\binom{n+p+1}{p}=\binom{n+p}{p}+\binom{n+p}{p-1}\\
\binom{n+p}{p-1}=\binom{n+p-1}{p-1}+\binom{n+p-1}{p-2}\\
\binom{n+p-1}{p-2}=\binom{n+p-2}{p-2}+\binom{n+p-2}{p-3}\\
\vdots\\
\binom{n+2}{1}=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0}
\end{array}\right.$$

$$\binom{n+p+1}{p}=\binom{n+p}{p}+\binom{n+p-1}{p-1}+\dots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$$

Basta ver que é uma soma telescópica e que $\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}$

De fato o que fizemos aqui é equivalente a fazer indução em p, e também poderia ser feito na dedução do Teorema das Colunas.

4. Polinômio de Leibiniz

Quando aprendemos produtos notáveis, é comum vermos não só as expressões para $(a+b)^2$ e $(a+b)^3$, mas também para $(a+b+c)^2$. Se foi possível generalizar a expansão do binômio para qualquer expoente, é natural pensarmos que também podemos aumentar o número de termos.

Chamaremos a expressão $(x_1+x_2+x_3+\dots+x_k)^n$ de Polinômio de Leibiniz e deduziremos uma fórmula para ela, utilizando a mesma ideia que foi usada no Binômio de Newton.

Nesse caso, iremos escolher x_1 em a_1 parênteses, x_2 em a_1 parênteses, ..., x_k em a_k parênteses de modo que $a_1+a_2+\dots+a_k=n$. Assim o termo geral do polinômio de Leibiniz será igual a:

$T=C_n^{a_1}\cdot C_{n-a_1}^{a_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-a_1-\dots-a_{k-1}}^{a_k}\cdot x_1^{a_1}\,x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{a_k}$ e abrindo as combinações:

$$T=\frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_k!}\cdot x_1^{a_1}\,x_2^{a_2}\dots x_k^{a_k}$$

E o polinômio de Leibiniz será um somatório de parcelas com esse formato obedecendo à restrição $a_1+a_2+\dots+a_k=n$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Determine n tal que $\dfrac{6\cdot12\cdot18\cdot\ldots\cdot300}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot50}=6^n$.

02 **(EN-1983)** O menor valor natural de n para o qual se tem $\dfrac{n!}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}<\dfrac{1}{40^2}$ é:

(A) 6
(B) 1600
(C) 40
(D) 11
(E) 9

03 **(EN-1998)** Se $a_n=\dfrac{(n+1)!-n!}{n^2[(n-1)!+n!]}$ então a_{1997} é:

(A) $\dfrac{1997}{1996}$
(B) $\dfrac{1}{1998}$
(C) 1998!
(D) 1997
(E) 1

04 **(ITA-1996)** Dadas as afirmações:

I. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n,\ n\in N$

II. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},\ n\in N,\ k=1,2,3\ldots,n$

III. Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(C) Apenas I é verdadeira.
(D) Apenas II é verdadeira.
(E) Apenas II e III são verdadeiras.

05 Calcule $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$.

06 Se n é um número natural não nulo, então $\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{2}+\dots+\binom{2n+1}{n-1}+\binom{2n+1}{n}$ é igual a:

(A) 2^{2n}
(B) 2^{2n+1}
(C) 2^{2n-1}
(D) 2^n
(E) 2^{n+1}

07 Calcule o valor da soma: $S=C_{20}^0-\dfrac{C_{20}^1}{2}+\dfrac{C_{20}^2}{2^2}-\dots+\dfrac{C_{20}^{20}}{2^{20}}$.

08 Calcule $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots$ (soma sobre os índices pares)

09 Calcule $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}+8\binom{n}{3}+16\binom{n}{4}+...$

10 Calcule $\binom{n}{0}+4\binom{n}{2}+16\binom{n}{4}+64\binom{n}{6}+...$

11 Na expansão em potências decrescentes de $(x+y)^n$, a diferença entre o terceiro coeficiente e o segundo coeficiente é 54. Determine o valor de n.

12 Prove que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

13 Seja n natural tal que $C_9^3 + C_9^4 + C_{10}^5 + C_{11}^6 + C_{12}^7 = C_{13}^n$. Determine os possíveis valores de n.

14 **(EN-1990)** O coeficiente x^2 no desenvolvimento de $(x^3+3x^2+3x+1)^{12}$ é:

(A) 1260.
(B) 630.
(C) 315.
(D) 230.
(E) 115.

15 Qual é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x^3 – 2x^2)^{15}$?

16 **(ITA-2001)** Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^n$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

(A) 80.
(B) 90.
(C) 70.
(D) 100.
(E) 60.

17 **(EN-1981)** A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar do desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ é 216. O coeficiente do termo do 2º grau deste desenvolvimento é:

(A) –136.
(B) 136.
(C) –17.
(D) 680.
(E) –2380.

18 Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$.

19 **(AFA-2001)** O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4+\frac{1}{x^3}\right)^7$ é:

(A) 4.
(B) 10.
(C) 21.
(D) 35.

20 Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4-\frac{1}{x^8}\right)^m$.

(A) m deve ser múltiplo de 5
(B) m deve ser múltiplo de 3
(C) m deve ser múltiplo de 7
(D) m deve ser múltiplo de 11
(E) m deve ser múltiplo de 4

21 O símbolo $\binom{n}{k}$ indica a combinação de n objetos k a k. O valor de $x^2 – y^2$ quando $x = 4^{20}\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ e $y = 5^{20}\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k$ é igual a:

(A) 0.
(B) –1.
(C) –5.
(D) –25.
(E) –125.

22 **(ITA – 92)** A igualdade $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{j}2^m = 64$, é válida para:

(A) quaisquer que sejam n e m naturais positivos.
(B) Qualquer que seja n natural positivo e $m = 3$
(C) $n = 13$ e $m = 6$
(D) n ímpar e m par
(E) n.d.a

23 **(UERJ-Específica)** Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração abaixo.

(Disponível em: <http://chiquinho.org/gabteste012AB20101tri.pdf>.)

Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + ... + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$, na qual n e p são números naturais, $n \geq p$ e C_n^p correspondem ao número de combinações simples de n elementos tomados p a q.
Com base nessas instruções, calcule:

a. a soma $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + ... + C_{18}^2$.
b. o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Calcule: $CR_n^0 + CR_n^1 + CR_n^2 + \cdots + CR_n^p$.

02 Qual é o valor da soma: S = 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + 50·51·52?

03 Considere o desenvolvimento de $(x + a)^n$ ordenado do modo usual, isto é, segundo as potências decrescentes de x. Calcule a soma dos termos de ordem par desse desenvolvimento.

04 Calcule :

(A) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k$
(B) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k$
(C) $\sum_{k=0} kC_n^k$

05 Calcule o valor de $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

06 Qual é o valor da soma: $S = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$?

07 **(ITA – 90)** Sejam os números reais α, x, onde α está no primeiro quadrante e x é não nulo. Se no desenvolvimento de $\left[(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)\frac{1}{x}\right]^8$, o termo independente de x vale $\frac{35}{8}$, então o valor de α é:

(A) $\frac{\neq}{6}$

(B) $\frac{\neq}{3}$

(C) $\frac{\neq}{12}$

(D) $\frac{\neq}{4}$

(E) n.d.a

08 Escreva o desenvolvimento do binômio $\left(tg^3 x - \csc^6 x\right)^m$, onde m é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de sen x e cos x. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função sen x. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então P = –64/9 quando x for igual a:

(A) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$

(B) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$

(C) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

(D) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$

(E) não existe x satisfazendo a igualdade desejada.

09 Sejam m, n naturais primos entre si. Sabendo que no desenvolvimento de $(mx+n)^{2011}$ os coeficientes de x^2 e x^3 são iguais, determine os valores de m e n.

10 **(ITA-94)** No desenvolvimento de $A = \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ e a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ é igual a $\frac{9}{16}$. Se a e m são números reais positivos tais que $A = (m^2+4)^5$, então:

(A) $a \cdot m = \frac{2}{3}$

(B) $a \cdot m = \frac{1}{3}$

(C) $a + m = \frac{5}{2}$

(D) $a + m = 5$

(E) $a - m = \frac{5}{2}$

11 Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$.

12 Para quantos valores de n, com n variando de 1 a 1000, a expressão $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^n$ possui termo independente de x?

13 Prove que se $0<k<p$ é inteiro, onde p é primo, então $\binom{p}{k}$ é múltiplo de p.

14 Prove a identidade:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{2k} \left[1 + 2^k \frac{1}{\left(1 - tg^2\left(x/2\right)\right)^k}\right] = \sec^{2n}\frac{x}{2} + \sec^n x$$

15 Determine o valor da soma: $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$

16 Determine o valor da soma: $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots$

17 **(ITA–95)** Para cada $n \in N$, temos que:

$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a:

(A) $(-1)^n \cdot 2^{2n}$
(B) 2^{2n}
(C) $(-1)^n \cdot 2^n$
(D) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$
(E) $(-1)^{n+1} \cdot 2^n$

18 Calcule:

$$\left(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots\right)^2.$$

19 Determine o termo máximo do desenvolvimento de $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$

20 Qual é o valor da soma: $S = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + \ldots + (3n-1) \cdot n^2$.

21 Calcule o valor da soma: $S = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \cdots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.

22 Determine o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

23 Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^2 - x + 2)^6$.

24 Calcule $\sum_{\substack{a+b+c=n \\ 0 \le a,b,c \le n}} \frac{n!}{a!b!c!}$

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Eduardo e Mônica estão disputando uma série de partidas de peteca. Em cada partida, a probabilidade de Eduardo vencer é 0,6 e a de Mônica vencer é 0,4. Seja P a probabilidade de Eduardo vencer uma quantidade par de partidas nas 10 primeiras partidas. Determine se P < 0,5 ou P = 0,5 ou P > 0,5

02 Calcule o valor de: $S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^p C_n^p$.

03

a. Demonstre a fórmula de Euler:
$C_m^0 C_h^p + C_m^1 C_h^{p-1} + C_m^2 C_h^{p-2} + \cdots + C_m^p C_h^0 = C_{m+h}^p.$

b. Demonstre a fórmula de Lagrange:
$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

c. Calcule: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^k$, $(n \le m)$.

04 Calcule a soma $\sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k \binom{6n}{2k+1} 3^k$.

05 Mostre que não há 4 termos consecutivos (numa mesma linha) do triângulo de Pascal em progressão aritmética.

06 Para cada inteiro positivo n considere a_n, b_n e c_n os coeficientes inteiros da expansão de $\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^n$, ou seja, considere:
$a_n + b_n\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^n$

Mostre que: $2^{-\frac{n}{3}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \begin{cases} a_n, \text{ se } n \text{ é múltiplo de 3.} \\ b_n\sqrt[3]{2}, \text{ se } n \text{ deixa resto 2 na divisão por 3.} \\ c_n\sqrt[3]{4}, \text{ se } n \text{ deixa resto 1 na divisão por 3.} \end{cases}$

RASCUNHO

Introdução

A geometria analítica surgiu com o objetivo de estabelecer uma relação entre a geometria sintética (que estudamos em Matemática V) e a álgebra (que estudamos, principalmente, em Matemática II). Esta representação algébrica é a forma como computadores conseguem modelar problemas geométricos e efetuar simulações de problemas estruturais (por exemplo, medir a resistência de uma ponte quando sujeita ao peso de múltiplos carros). Em provas, além de a geometria analítica ser importante para a solução de problemas deste assunto, ela pode fornecer uma alternativa para a abordagem de questões de geometria plana.

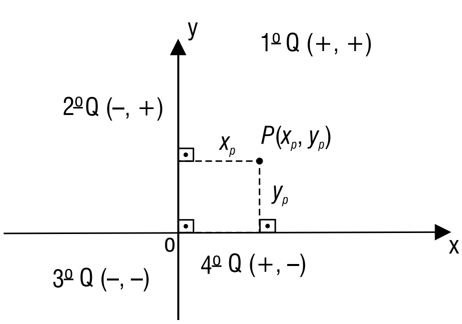
Nesta seção, estudaremos as retas (equações de grau 1 em duas variáveis). Nas seções subsequentes, estudaremos o círculo e as cônicas (equações de grau 2 em duas variáveis) e, por último, os elementos básicos da geometria espacial, incluindo o plano (equação de grau 1 em três variáveis).

Os seus objetivos nesta seção incluem entender a representação algébrica do ponto, saber encontrar o ponto que divide um segmento em uma razão dada, calcular área de polígonos a partir de seus vértices, achar a equação de uma reta rapidamente (este é o seu principal objetivo!), identificar condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas, memorizar a fórmula de distância ponto-reta e, finalmente, modelar problemas de geometria algebricamente.

1. Pontos no plano

1.1 Representação algébrica de um ponto no plano

Para representar uma situação geométrica plana algebricamente, inicialmente traçamos um par de retas orientadas perpendiculares, denominadas eixos *x* e *y*. Chamamos as quatro regiões definidas por esse desenho de 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes, conforme figura abaixo.



Um ponto no 1º quadrante que esteja situado a uma distância x_p do eixo *y* e y_p do eixo *x* é representado algebricamente pelo par ordenado (x_p, y_p). Nos outros quadrantes, a representação também é feita pela distância do ponto aos eixos, mas utilizamos um número negativo na primeira coordenada se o ponto estiver à esquerda do eixo *y* e um número negativo na segunda coordenada se o ponto estiver abaixo do eixo *x*.

1.2 Operações básicas entre pontos

As operações de adição, subtração e multiplicação dos números reais são estendidas para pares ordenados (isto é, pontos) da seguinte forma:

Adição de pontos: Dados $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, define-se:
$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Multiplicação por um escalar: Dados $A = (a_1, a_2), t \in \mathbb{R}$, define-se:
$t \cdot A = (ta_1, ta_2)$

Subtração de pontos: Dados $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, define-se:
$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Exs.: $(1,2) + (2,3) = (3,5)$, $k \cdot (1,2) = (k, 2k)$, $(2,3) - (1,2) = (1,1)$

Nota: A diferença $B - A$ entre os pontos A e B representa um vetor $\overrightarrow{AB}$, orientado de A para B.

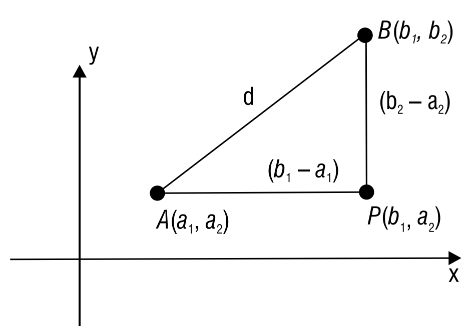
Obs.: Essas operações de adição e subtração claramente obedecem às propriedades comutativas e associativas e, junto com a multiplicação por escalar, obedecem à propriedade distributiva.

1.3 Distância entre pontos

Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, podemos calcular a distância entre eles pela fórmula:

$$\boxed{d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}$$

Demonstração: Basta aplicar o teorema de Pitágoras na figura abaixo.



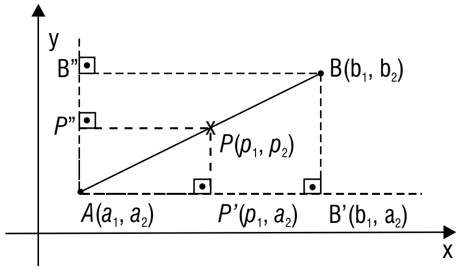
Obs.: Trocar a ordem dos pontos A e B na fórmula acima não modifica o resultado, pois $x^2 = (-x)^2$.

1.4 Divisão de um segmento em uma razão dada

Um problema comum da geometria é encontrar um ponto *P*, dentro de um segmento *AB*, de tal forma que a razão $\frac{AP}{AB}$ seja igual a uma constante pré-definida *k*. Esse ponto tem coordenadas dadas por:

$$\boxed{P = (1 - k) \cdot A + k \cdot B \text{, em que } k = \frac{AP}{AB}}$$

Demonstração: A partir das semelhanças na figura, temos:



$$\Delta APP' \sim \Delta ABB' \Rightarrow \frac{AP'}{AB'} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{p_1 - a_1}{b_1 - a_1} = k \Rightarrow p_1 = (1-k)a_1 + kb_1$$

$$\Delta APP" \sim \Delta ABB" \Rightarrow \frac{AP"}{AB"} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{p_2 - a_2}{b_2 - a_2} = k \Rightarrow p_2 = (1-k)a_2 + kb_2$$

Obs. 1: Se k estiver entre 0 e 1, P pertence ao segmento AB; se $k > 1$, então P está no prolongamento de AB a partir de B; se $k < 0$, então P pertence ao prolongamento de AB a partir de A.

Obs. 2: Também vale a recíproca desse resultado, isto é, se $P' = (1-k)\cdot A + k \cdot B$ para k entre 0 e 1, então P' pertence ao segmento AB (pois $P' = P$).

Corolário: Se P divide AB na razão $m{:}n$ (isto é, $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$), então $k = \frac{AP}{AB} = \frac{m}{m+n}$, $1-k = \frac{n}{m+n}$ e, portanto: $P = \frac{n\cdot A + m\cdot B}{m+n}$.

1.5 Ponto médio, baricentro e caracterização de paralelogramos

Ponto médio de AB

$$\boxed{M = \frac{A+B}{2}}$$

Demonstração: Basta tomar $k = \frac{1}{2}$ em 1.4.

Baricentro G de um triângulo ABC

$$\boxed{G = \frac{A+B+C}{3}}$$

Demonstração: Basta provar que o ponto G definido acima está nas três medianas.

Como $G = \frac{1}{3}\cdot A + \frac{2}{3}\cdot\frac{B+C}{2}$, temos que G está na mediana por A (pela obs. 2 de 1.4, com $k = \frac{1}{3}$).

Analogamente, G está nas medianas por B e por C, pois:

$$G = \frac{1}{3}\cdot B + \frac{2}{3}\cdot\frac{A+C}{2} = \frac{1}{3}\cdot C + \frac{2}{3}\cdot\frac{A+B}{2}.$$

Condição para que A, B, C, D formem, nesta ordem, um paralelogramo

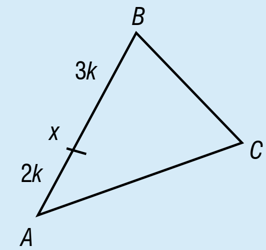
$$A + C = B + D$$

Demonstração: Esta condição é equivalente a dizer que as diagonais de $ABCD$ se cortam ao meio.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Considere o triângulo formado pelos vértices $A(1,1)$, $B(2, 3)$ e $C(3, 2)$. Sendo X o ponto que divide AB em segmentos proporcionais a 2 e 3, $AX < XB$, determine o comprimento da ceviana CX.

Solução:



Pelo resultado 1.4. (divisão em uma razão dada), temos:

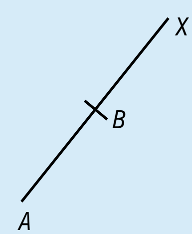
$$X = \frac{3A + 2B}{5} = \left(\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 2, \frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 3\right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right).$$

Pelo resultado 1.3. (distância entre pontos), temos:

$$CX^2 = \left(\frac{7}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{9}{5} - 2\right)^2 = \frac{65}{25}, \text{ logo } CX = \frac{\sqrt{65}}{5}.$$

02 Dados dois pontos $A(1,2)$ e $B(2, 3)$, determine as coordenadas do ponto X que é simétrico de A em relação a B.

Solução:



X é simétrico de A em relação a B se, e somente se, B é ponto médio de AX:

$$B = \frac{A+X}{2} \Rightarrow X = 2B - A$$

Substituindo, temos: $X = (2\cdot 2 - 1, 2\cdot 3 - 2) = (3,4)$.

2. Área de polígonos

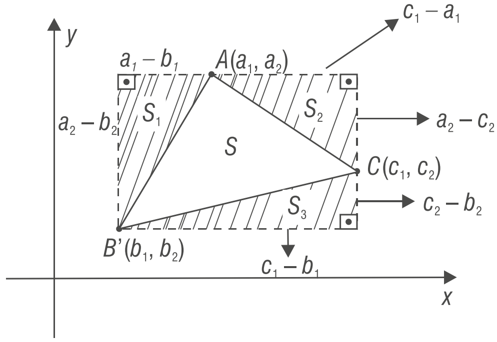
2.1 Área de um triângulo

Sendo $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ os vértices de um triângulo, sua área é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|, \text{ em que } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Obs.: Δ é positivo se, e somente se, os vértices A, B, C estiverem no sentido anti-horário.

Demonstração: Com base na figura abaixo para o caso em que A, B, C estão no sentido anti-horário:



$$S = S_{retângulo} - S_1 - S_2 - S_3$$

$$2S = 2(c_1 - b_1)\cdot(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1)\cdot(a_2 - b_2) - (a_2 - c_2)\cdot(c_1 - a_1) - (c_1 - b_1)\cdot(c_2 - b_2)$$

Os termos da forma $x_1 x_2$ se cancelam, restando:

$$2S = a_2c_1 - a_2b_1 - c_1b_2 + a_1b_2 - a_1c_2 + b_1c_2 = \Delta$$

2.2 Área de um polígono convexo

Sendo $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, ..., $P(p_1, p_2)$ os vértices de um polígono, tomados no sentido anti-horário, sua área é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ \dots & \dots \\ p_1 & p_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot((a_1b_2 - a_2b_1) + (b_1c_2 - b_2c_1) + \dots + (p_1a_2 - p_2a_1))$$

Ideia da demonstração: Ligando cada vértice do polígono até a origem, nota-se que cada termo da forma $\frac{1}{2}\cdot(a_1b_2 - a_2b_1)$ representa a área de um triângulo formado pela origem e dois vértices do polígono.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03 Considere um triângulo de vértices $A = (1,2)$, $B = (5,5)$ e $C = (-3,1)$. Determine o comprimento da altura relativa ao vértice A.

Solução:

A ideia é calcular a área. Lembre que a área do triângulo é igual a $\frac{1}{2}|\varnothing|$, em que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 + 5 - 6 - 10 + 15 - 1 = 8\,.$$

Portanto, a área é igual a 4. Por outro lado, a distância entre B e C é igual a $\sqrt{(5-(-3))^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5}$. Segue que $\frac{BC \cdot h_A}{2} = 4$, logo $h_A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

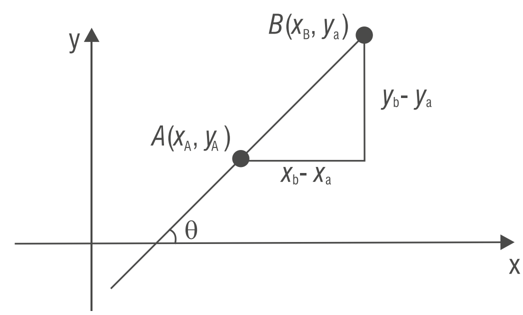
3. Retas no plano

3.1 Coeficiente angular

Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, com $x_a \uparrow x_b$, define-se o coeficiente angular m como a tangente do ângulo que a reta AB forma com o eixo x. Algebricamente, tem-se:

$$\boxed{m_{AB} = \tan\theta = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Demonstração: Para mostrar que as definições algébricas e geométricas coincidem, basta usar a definição de tangente na figura a seguir.



3.2 Equação rápida da reta

Dado um ponto $A(x_a, y_a)$, a reta que passa por esse ponto e faz ângulo $\theta \neq 90^\circ$ com o eixo x é dada por:

$$\boxed{y = m\cdot(x - x_a) + y_a\text{, em que } m = \tan\theta.}$$

Essa equação pode também ser escrita como $y = m\cdot x + q$ (denominada equação reduzida da reta), em que m e q são constantes reais.

Demonstração: Um ponto $P = (x, y)$ está na reta se, e somente se, o ângulo entre AP e o eixo x é igual a θ. Essa condição nada mais é que $m_{AP} = m$, i.e., $\frac{y - y_a}{x - x_a} = m$.

Obs.: Se $\theta = 90^\circ$ (reta vertical), a equação é dada por $x = x_a$. Em ambos os casos, podemos escrever $y = m\cdot x + q$.

A equação rápida é muito útil quando precisamos achar uma reta por dois pontos dados ou quando temos o coeficiente angular e um ponto da reta. O segundo caso é a própria fórmula. No primeiro, calculamos primeiramente $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ e, em seguida, escrevemos a reta $y = m\cdot(x - x_a) + y_a$.

Ex.: Encontrar a equação da reta que passa pelos pontos $A = (1,1)$, $B = (2,4)$:

Temos $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = 3$, logo $y = 3\cdot(x-1) + 1$ ou $y = 3x - 2$.

Se usássemos o ponto B na etapa final, o resultado seria o mesmo: $y = 3\cdot(x-2) + 4 \Rightarrow y = 3x - 2$

3.3 Condição de paralelismo, perpendicularismo e ângulo entre retas

Paralelismo

Duas retas r e s são paralelas se, e somente se, formam ângulos iguais com o eixo x, isto é:

$$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

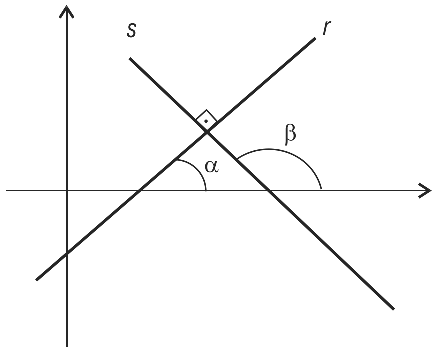
Perpendicularismo

Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Demonstração: Como indicado na figura,

$$r \perp s \Leftrightarrow \beta = \alpha + 90^\circ \Leftrightarrow \cot(\beta - \alpha) = 0$$



Pela fórmula da soma da tangente, a última condição é:

$$\frac{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} = 0 \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

Ângulo entre retas

No caso geral, o ângulo θ entre duas retas r e s, medido no sentido anti-horário de r para s, é tal que:

$$\tan\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Demonstração: Similar à anterior, partindo de $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$.

Obs.: Se a orientação entre as retas s e r não for conhecida, deve-se colocar um módulo no lado direito da fórmula de ângulo entre retas.

3.4 Equação geral da reta

Multiplicando-se a equação reduzida por uma constante qualquer, obtemos a forma mais geral possível para a equação de uma reta:

$$Ax + By + C = 0$$

Conforme estudaremos mais adiante, os coeficientes A e B são as coordenadas de um vetor $\vec{n} = (A, B)$ perpendicular (normal) à reta. Dada a equação geral de uma reta, para obter o seu coeficiente angular basta isolar o y e olhar para o coeficiente de x.

3.5 Outras equações de reta

Na maioria dos problemas de reta em analítica, você deve pensar nas equações 3.4. e 3.3. Entretanto, em alguns casos pode ser mais eficiente pensar em outras formas de se encontrar uma reta:

Equação paramétrica da reta

Em problemas de lugar geométrico, é muito útil escrever os pontos da reta em termos de uma única variável $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, podemos escrever a equação da reta como:

$$x = x_0 + a_1 t$$
$$y = y_0 + a_2 t$$

Em que t percorre o conjunto dos números reais, (x_0, y_0) é um ponto da reta e a_1, a_2 são constantes.

Demonstração: Eliminando t, temos:

$$t = \frac{x - x_0}{k_1} = \frac{y - y_0}{k_2} \Leftrightarrow k_2 x - k_1 y - (k_2 x_0 - k_1 y_0) = 0$$

Que tem a forma da equação geral

$ax + by + c = 0$ para: $a = k_2, b = -k_1, c = -(k_2 x_0 - k_1 y_0)$.

Equação segmentar da reta

Sendo $(p, 0)$ e $(0, q)$, $p \cdot q \neq 0$, as coordenadas dos pontos de interseção da reta com os eixos x e y, respectivamente, a equação da reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

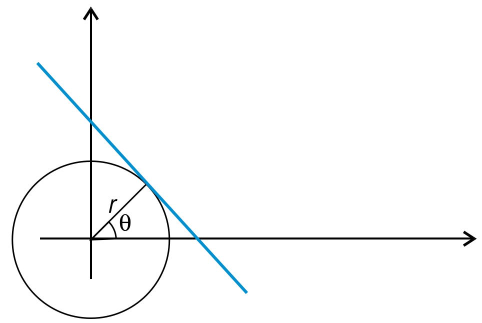
Demonstração: Partindo da equação rápida da reta:

$$y = \frac{q - 0}{0 - p} \cdot x + q \Leftrightarrow qx + py = pq \Leftrightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Equação normal da reta

Escrevendo a equação segmentar em função dos parâmetros r e θ da figura abaixo, temos $p = \frac{r}{\cos\theta}$ e $q = \frac{r}{\operatorname{sen}\theta}$, logo a equação da reta pode ser escrita como:

$$x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = r$$

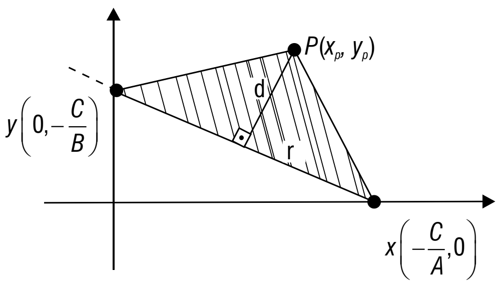


3.6 Distância entre ponto e reta

Sendo $P = (x_p, y_p)$ um ponto e $r: Ax + By + C = 0$ uma reta, a distância de P até r é dada por:

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Demonstração: O caso em que r é paralela a um dos eixos é simples. Nos demais casos, considere, como na figura, o triângulo XPY tal que $X = \left(-\frac{C}{A}, 0\right), Y = \left(0, -\frac{C}{B}\right)$ são as interseções de r com os eixos:



Por um lado, tem-se

$$S_{XPY} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -C/B \\ -C/A & 0 \\ x_P & y_P \\ 0 & -C/B \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{Cy_P}{A} - \frac{Cx_P}{B} - \frac{C^2}{AB} \right|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{C}{AB} \right| \cdot \left| Ax_P + By_P + C \right|$$

Por outro lado, tem-se $S_{XPY} = \frac{1}{2} \cdot XY \cdot d(P,r)$.

Como $XY = \sqrt{\frac{C^2}{B^2} + \frac{C^2}{A^2}} = \left| \frac{C}{AB} \right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$, obtém-se:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Nota: Se $ax_p + by_p + c$ e c têm o mesmo sinal, então P e a origem O estão do mesmo lado em relação à reta r; se $ax_p + by_p + c$ e c têm sinais contrários, então P e O estão em lados opostos da reta r.

Ex.: Determine a distância entre o ponto $P_0(2, -4)$ e a reta r: $3x - y + 2 = 0$.

$$d(P_0, r) = \frac{|3 \cdot 2 - (-4) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{u.c.}$$

3.7 Equação da bissetriz

Bissetriz dadas duas retas

As bissetrizes das retas $r: ax + by + c = 0$, $s: a'x + b'y + c' = 0$:

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}$$

Demonstração: Basta usar 3.6. e lembrar que as bissetrizes são o lugar geométrico dos pontos que equidistam das duas retas dadas.

Nota: Na prática, a melhor forma de diferenciar a bissetriz do ângulo agudo e a do ângulo obtuso é fazer um bom desenho. Uma alternativa mais formal seria calcular o ângulo θ entre a bissetriz e uma das retas. Temos $|\tan\theta| < 1 \Leftrightarrow 2\theta < 90^\circ \Leftrightarrow$ a bissetriz é do ângulo agudo.

Bissetriz de um triângulo dados os três vértices

Neste caso, em vez de encontrar a equação dos lados do triângulo, é mais simples usar o teorema da bissetriz interna (ou externa). Primeiramente, descobrimos o ponto em que a bissetriz divide o lado oposto e depois utilizamos o resultado 1.4. para encontrar o pé da bissetriz.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

04 Sejam $O = (0,0)$, $P = (1,0)$ e um ponto Q variável sobre a reta r de equação $y = x + 3$. Determine o lugar geométrico do baricentro do triângulo OPQ quando Q varia sobre r.

Solução: Se Q está na reta de equação $y = x + 3$, podemos escolher um parâmetro t real variável e escrever $Q = (t, t + 3)$. Sendo G o baricentro do triângulo OPQ, temos $G = \frac{O + P + Q}{3}$, logo $G = \left(\frac{t+1}{3}, \frac{t+3}{3} \right)$.

Isso já nos dá G em seu formato paramétrico. Para finalizar o problema, precisamos 'desparametrizar' G. Fazendo $\begin{cases} x_G = \frac{t+1}{3} \\ y_G = \frac{t+3}{3} \end{cases}$ e eliminando t do sistema, temos que $3y_G - 3 = 3x_G - 1$, ou seja, G se move sobre a reta de equação $y = x + \frac{2}{3}$.

05 Considere os pontos $A = (1,2)$, $B = (5,5)$ e $C = (-3,1)$. Determine o pé da altura traçada de C no triângulo ABC.

Solução: Seja r a reta perpendicular a AB que passa por C. Como $m_{AB} = \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4}$, temos (pela condição de perpendicularidade em 3.3.) que $m_r = -\frac{4}{3}$.

Tendo o coeficiente angular e um ponto de r, podemos usar a equação rápida da reta (3.2.):

$y = m_r(x - x_C) + y_C$, que nos dá $r: y = -\frac{4}{3}x - 3$.

Da mesma forma, a equação de AB é $y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$, que nos dá $AB: y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

Resolvendo o sistema resultante da interseção das duas retas, encontramos $x = -\frac{57}{25}$ e $y = -\frac{7}{25}$.

06 Qual o ângulo agudo entre as retas $2x - y + 1 = 0$ e $x - 3y + 3 = 0$?

Solução: Isolando y em cada equação, temos $y = 2x + 1$, $y = \frac{x}{3} + 1$. Logo, os coeficientes angulares das retas são $m_1 = 2$ e $m_2 = \frac{1}{3}$.

Pela fórmula do ângulo entre retas (3.3.), o ângulo agudo procurado satisfaz

$$\tan\theta = \left| \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \right| = 1, \text{ logo, } \theta = 45^\circ.$$

07 Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas de equações $3x - 4y + 1 = 0$ e $5x + 12y + 3 = 0$.

Solução: Pelo resultado 3.7., temos que (x,y) está na bissetriz se, e somente se,

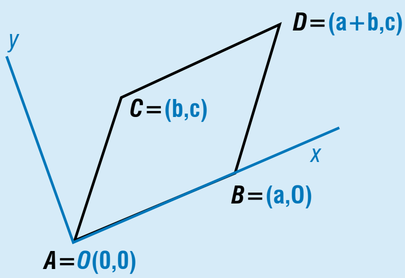
$$\frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5x + 12y + 3|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}, \text{ ou seja, } \left| \frac{3x - 4y + 1}{5} \right| = \left| \frac{5x + 12y + 3}{13} \right|.$$

Com isso, temos duas possibilidades: $\frac{3x - 4y + 1}{5} = \pm \left(\frac{5x + 12y + 3}{13} \right)$.

Multiplicando cruzado, temos que as bissetrizes são $7x - 56y - 1 = 0$ e $16x + 2y + 7 = 0$.

08 Mostre que, em um paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais.

Solução:



Dado o paralelogramo *ABCD*, sempre podemos escolher um par de eixos ortogonais de forma que a origem esteja no ponto *A* e o eixo *Ox* sobre o lado *AB*.
Como *ABCD* é paralelogramo, temos $A+D = B+C$, logo podemos escrever as coordenadas de *A*, *B*, *C* e *D* como indicado na figura.
Segue que:

$$AD^2 + BC^2 = (a+b)^2 + c^2 + (b-a)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$AC^2 + CD^2 + BD^2 + AB^2 = (b^2 + c^2) + a^2 + (b^2 + c^2) + a^2$$

Logo, $AC^2 + CD^2 + BD^2 + AB^2 = AD^2 + BC^2$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Ache no eixo das ordenadas um ponto *M*, de tal forma que sua distância ao ponto *N*(– 8,13) seja igual a 17.

02 Calcule a área de um triângulo equilátero cujos dois vértices são os pontos *A*(– 3,2) e *B*(1,6).

03 A área de um triângulo é *S* = 3 u.a. e dois de seus vértices são os pontos *A*(3,1) e *B*(1,– 3), achando-se o centro de gravidade desse triângulo sobre o eixo *Ox*. Determine as coordenadas do vértice *C*.

04 Dados os vértices *A*(1,4); *B*(3,– 9) e *C*(– 5,2) de um triângulo, calcule o comprimento da mediana traçada do vértice *B*.

05 Dados dois pontos *A*(3,– 1) e *B*(2,1); ache:

a. as coordenadas do ponto *M* simétrico do ponto *A*, em relação ao ponto *B*;
b. as coordenadas do ponto *N* simétrico do ponto *B*, em relação ao ponto *A*.

06 Dados três vértices *A*(3,– 5); *B*(5,– 3) e *C*(– 1,3) de um paralelogramo, ache o quarto vértice *D* oposto ao vértice *B*.

07 Dados três vértices *A*(3,–7), *B*(5,–7), *C*(–2,5) de um paralelogramo *ABCD* cujo quarto vértice *D* é oposto a *B*, calcule o comprimento das diagonais do paralelogramo.

08 Dado um quadrilátero de vértices *A*(–2,14), *B*(4,–2), *C*(6,–2) e *D*(6,10), ache o ponto de interseção de suas diagonais *AC* e *BD*.

09 Determine a área do quadrilátero *ABCD* tal que *A* = (–2, 6); *B* = (–1, 8); *C* = (0, 9); *D* = (–3, 7).

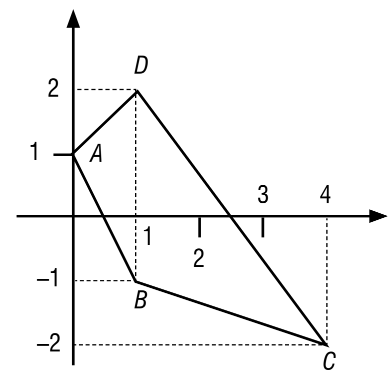
10 **(AFA)** Determine os pontos *A* na reta (*r*) 2*x* + *y* = 0 e *B* na reta (*s*) *x* – *y* – 2 = 0 tal que *P*(2,1) seja ponto médio de *AB*.

(A) *A*(0,0) e *B*(4,2).
(B) *A*(0,0) e *B*(– 2,– 4).
(C) *A*(–2,4) e *B*(2,0).
(D) *A*(–1,2) e *B*(4,2).

11 **(EFOMM)** A área do quadrilátero de vértices *A*(0,1), *B*(1,0), *C*(3,2) e *D*(2,4) é:

(A) 11/2.
(B) 13/2.
(C) 15/4.
(D) 17/4.
(E) 19/4.

12 **(EFOMM)** A área da figura abaixo vale:



(A) 3/2.
(B) 5.
(C) 7/2.
(D) 6.
(E) 9.

13 **(AFA)** Dadas as retas de equações $r: y = ax + b$ e $r_1: y = a_1x + b_1$, pode-se afirmar que:

(A) se $a = a_1$ e $b \uparrow b_1$, tem-se *r* paralela a r_1.
(B) se $a = a_1$ e $b = b_1$, tem-se $r \uparrow r_1$.
(C) se $a \uparrow a_1$, tem-se $r = r_1$.
(D) se $a \uparrow a_1$ e $b \uparrow b_1$, tem-se *r* paralela a r_1.

14 Seja *PS* a mediana do triângulo de vértices *P*(2, 2), *Q*(6, –1) e *R*(7, 3). A equação de reta que passa por (1, –1) e é paralela a *OS* é dada por:

(A) $2x - 9y - 7 = 0$.
(B) $2x - 9y - 11 = 0$.
(C) $2x + 9y - 11 = 0$.
(D) $2x + 9y + 7 = 0$.

15 Dados dois pontos *M*(2,2) e *N*(5,–2), ache sobre o eixo das abscissas um ponto tal que o ângulo $M\hat{P}N$ seja reto.

16 O ortocentro do triângulo formado pelas retas *xy* = 0 e pela reta *x* + *y* = 1 é:

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
(B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
(C) (0,0).
(D) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

17 **(AFA)** O eixo das ordenadas, a reta $y = 2x - 1$ e a reta *s* que é perpendicular a *r* e passa pela origem determinam um polígono cujo valor da área é:

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

18 Dados dois pontos $P(2,3)$ e $Q(-1,0)$, ache a equação da reta que passa pelo ponto Q e é perpendicular ao segmento PQ.

19 Se o ponto $P(x, y)$ é equidistante dos pontos $A(a + b, a - b)$ e $B(a - b, a + b)$, então, necessariamente:

(A) $ax = by$.

(B) $P = (a,b)$.

(C) $bx = ay$.

(D) $x^2 - y^2 = 2(ax + by)$.

20 Se as coordenadas dos vértices de um triângulo são números racionais, então qual dos pontos abaixo necessariamente tem coordenadas racionais?

(A) Baricentro.
(B) Incentro.
(C) Circuncentro.
(D) Ortocentro.

21 **(ITA)** Dadas as retas r_1: $x + 2y - 5 = 0$, r_2: $x - y - 2 = 0$, r_3: $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:

(A) são 2 a 2 paralelas.
(B) r_1 e r_3 são paralelas.
(C) r_1 é perpendicular a r_3.
(D) r_2 é perpendicular a r_3.
(E) as três retas são concorrentes em um mesmo ponto.

22 Os vértices de um triângulo são os pontos $A(3, 6)$; $B(-1, 3)$ e $C(2, -1)$. Calcule o comprimento da altura traçada do vértice C.

23 **(EFOMM)** Determine o coeficiente angular da reta cujas equações são dadas por $x = 2t + 1$, $y = t + 2$, $t \in \mathbb{R}$.

(A) -1.
(B) $-1/2$.
(C) $2/5$.
(D) $1/2$.
(E) 1.

24 **(AFA)** Uma reta, que passa pelo primeiro quadrante, intercepta os eixos cartesianos nos pontos $A(k, 0)$ e $B(0, k)$, determinando o triângulo OAB com 8 unidades de área. Então, a equação geral dessa reta pode ser escrita por:

(A) $x - y - 4 = 0$.
(B) $x + y - 4 = 0$.
(D) $x + y + 4 = 0$.
(D) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

25 **(ITA)** Dados os pontos $A(0, 8)$, $B(-4, 0)$ e $C(4, 0)$, sejam r e s as retas tais que $A,B \in r; B,C \in s$. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de $P(5, 3)$ às retas r e s, respectivamente. Então, a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:

(A) $y + x = 5$.
(B) $y + 2x = 5$.
(C) $3y - x = 15$.
(D) $y + x = 2$.
(E) n.d.a.

26 **(AFA)** Há dois pontos sobre a reta $y = 2$ que distam 4 unidades da reta $12y = 5x + 2$. A soma das abcissas desses pontos é:

(A) -2.
(B) 6.
(C) 42/5.
(D) 44/5.

27 **(AFA)** A distância entre o ponto de interseção das retas $r: 2x + 3y + 4 = 0$ e $s: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ e a reta $q: y = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ é:

(A) $4\sqrt{5}$.

(B) $\frac{3\sqrt{7}}{20}$.

(C) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

(D) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

28 **(ITA)** Considere a reta r mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ à reta r é:

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

(C) $3\sqrt{13}$.

(D) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

(E) $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

29 **(ITA)** A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta $y = mx$, $m > 0$ forma com o eixo x é:

(A) $y = \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}x$.

(B) $y = \frac{1 - \sqrt{1 + m^2}}{m}x$.

(C) $y = \frac{-1 - \sqrt{1 + m^2}}{m}x$.

(D) $y = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}x$.

(E) n.d.a.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Determine as coordenadas do ponto simétrico a $P(a, b)$ com relação à bissetriz do primeiro quadrante.

02 O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem $\max\{|x|,|y|\} = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ é:

(A) uma circunferência.
(B) uma reta.
(C) um quadrado.
(D) um triângulo.

03 Os lados de um triângulo pertencem às retas $x + 5y - 7 = 0$; $3x - 2y - 4 = 0$ e $7x + y + 19 = 0$. Calcule a área S desse triângulo.

04 Dadas as equações de dois lados de um paralelogramo $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ e a equação de uma de suas diagonais $3x + 2y + 3 = 0$, ache as coordenadas de seus vértices.

05 **(ITA)** As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que essas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área desse paralelogramo, em cm^2, vale:

(A) $\frac{36}{5}$.
(B) $\frac{27}{4}$.
(C) $\frac{44}{3}$.
(D) $\frac{48}{3}$.
(E) $\frac{48}{5}$.

06 A área de um triângulo é $S = 8$ u.a.; dois de seus vértices são os pontos $A(1, -2)$; $B(2, 3)$ e o terceiro vértice C pertence à reta $2x + y - 2 = 0$. Ache as coordenadas do vértice C.

07 A área de um paralelogramo é $S = 17$ u.a.; dois dos vértices coincidem com os pontos $A(2, 1)$ e $B(5, -3)$. Ache os dois outros vértices, sabendo que o ponto de interseção das diagonais se encontra sobre o eixo das ordenadas.

08 A área de um triângulo é $S = 1{,}5$ u.a.; dois de seus vértices são os pontos $A(2, -3)$; $B(3, -2)$ e o baricentro desse triângulo pertence à reta $3x - y - 8 = 0$. Ache as coordenadas do vértice C.

09 A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A(2,1)$ e $B(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abscissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:

(A) (– 1/2, 0) ou (5, 0).
(B) (– 1/2, 0) ou (4, 0).
(C) (– 1/3, 0) ou (5, 0).
(D) (– 1/3, 0) ou (4, 0).
(E) (– 1/5, 0) ou (3, 0)

10 Ache um ponto Q simétrico do ponto $P(-5, 13)$ em relação à reta $2x - 3y - 3 = 0$.

11 Dado um quadrilátero de vértices $A(-3, 12)$; $B(3, -4)$, $C(5, -4)$ e $D(5, 8)$, determine a razão na qual sua diagonal AC divide a diagonal BD.

12 Ache a projeção do ponto $P(-6, 4)$ sobre a reta $4x - y + 3 = 0$.

13 **(AFA)** Seja $P(3, 1)$ o ponto médio do segmento AB, em que A é interseção da reta t com a reta $r: 3x - y = 0$, e B é a interseção de t com a reta s $x + 5y = 0$. O coeficiente angular de t é:

(A) negativo.
(B) par positivo.
(C) 5, pois t é perpendicular a s.
(D) nulo.

14 A equação da reta perpendicular à reta $ax + by + c = 0$ passando pelo ponto (x_0, y_0) pode ser escrita como:

(A) $Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0$.
(B) $Bx + Ay = Bx_0 + Ay_0$.
(C) $Ax - By = Ax_0 - By_0$.
(D) $Ax + By = Ax_0 + By_0$.
(E) $Bx - Ay = C$.

15 Dadas duas retas concorrentes $r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, pode-se dizer que a equação $\alpha \cdot (a_1x + b_1y + c_1) + \beta \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sempre representa:

(A) uma reta paralela à reta r_1.
(B) uma reta paralela à reta r_2.
(C) uma reta paralela à bissetriz do ângulo agudo das retas dadas.
(D) uma reta passando pela interseção das retas dadas.

16 **(ITA)** Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e ½, respectivamente, se interceptam na origem 0. Se $B \in r$, e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento BC é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a 1,2, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale:

(A) $\frac{8}{5}$.
(B) $\frac{4}{5}$.
(C) $\frac{2}{5}$.
(D) $\frac{1}{5}$.
(E) 1.

17 Dados dois vértices $M_1(-10, 2)$ e $M_2(6, 4)$ de um triângulo cujas alturas se intersectam no ponto $N(5, 2)$, ache as coordenadas do terceiro vértice M_3.

18 O ponto $P(-2, 3)$ é comum a três retas. Uma delas (r_1) é paralela ao eixo das abscissas, outra (r_2) contém o ponto de coordenadas (2, 1) e a terceira (r_3) passa pela origem.

a. Mostre que dado qualquer ponto A em r_1, é possível encontrar B e C, em r_2 e r_3 respectivamente, de modo que B é o pé da mediana relativa a P no triângulo PAC.

b. Mostre que o ângulo que a reta CA forma com o eixo x é constante quando A varia e determine seu valor.

19 Seja PQR um triângulo retângulo isósceles com ângulo reto em $P(2, 1)$. Se a equação da reta QR é $2x + y = 3$, então a equação representando o par de retas PQ e PR é:

(A) $3x^2 - 3y^2 + 8xy + 20x + 10y + 25 = 0$.
(B) $3x^2 - 3y^2 + 8xy - 20x - 10y + 25 = 0$.
(C) $3x^2 - 3y^2 + 8xy + 10x + 15y + 25 = 0$.
(D) $3x^2 - 3y^2 - 8xy - 10x - 15y - 20 = 0$.

20 Um raio luminoso parte do ponto $M_0(-2, 3)$ sob um ângulo α com o eixo Ox. Sabe-se que $\tan\alpha = 3$. Atingido o eixo Ox, o raio é refletido. Ache as equações das retas que representam os raios incidente e refletido.

21 **(AFA)** A reta (s), simétrica de (r) $x - y + 1 = 0$ em relação à reta (t) $2x + y + 4 = 0$:

(A) passa pela origem.
(B) forma um ângulo de 60 graus com (r).
(C) tem – 1/5 como coeficiente angular.
(D) é paralela à reta de equação $7y - x + 7 = 0$.

22 Ache a equação de uma reta que passe pelo ponto de interseção das retas $3x + y - 5 = 0$ e $x - 2y + 10 = 0$ e que esteja a uma distância $d = 5$ u.c. do ponto $C(-1, -2)$.

23 **(ITA)** Sendo r uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então, a equação da reta s simétrica à reta r em relação ao eixo das abscissas é descrita por:

(A) $x + 2y = 0$.
(B) $3x - y + 3 = 0$.
(C) $2x + 3y + 1 = 0$.
(D) $x + 2y + 2 = 0$.
(E) $x - 2y - 2 = 0$.

24 Sobre os pontos $P(x, y)$ que estão no interior do triângulo formado pelos pontos $A(1, 3)$, $B(5, 0)$ e $C(-1, 2)$, considere as afirmativas abaixo:

I. $3x+2y \geq 0$
II. $2x+y-13 \geq 0$
III. $2x+-3y-12 \leq 0$
IV. $-2x+y \geq 0$

O número de afirmativas corretas é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

25 Calcule a distância entre as retas paralelas $ax+by+c_1=0$ e $ax+by+c_2=0$.

26 **(IME)** Prove que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.2

27 Ache a equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 4y - 5 = 0$ e $5x - 12y + 15 = 0$.

28 Dado um triângulo de vértices $A(2, -2)$; $B(3, -5)$ e $C(5, 7)$, ache a equação da perpendicular traçada do vértice C à bissetriz do ângulo interno do vértice A.

29 Dado um triângulo de vértices $A(3, -5)$; $B(-3, 3)$ e $C(-1, -2)$, calcule o comprimento da bissetriz do ângulo interno do vértice A.

30 Mostre que as retas da forma $(a+2b)\cdot x+(a+3b)\cdot y=a+b,\ a, b\in\mathbb{R}$ têm um ponto em comum e encontre esse ponto.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 **(ITA)** A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^2+2y^2+5xy-9x-8y+6=0\}$ é igual a:

(A) $\sqrt{6}$.
(B) $\frac{5}{2}$.
(C) $2\sqrt{2}$.
(D) 3.
(E) $\frac{10}{3}$.

02 **(ITA)** Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a essas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm^2, a:

(A) $3\sqrt{15}$.
(B) $7\sqrt{3}$.
(C) $5\sqrt{6}$.
(D) $\frac{15}{2}$.
(E) $\frac{7}{2}\cdot\sqrt{15}$.

03 Ache a equação de uma reta que passa pelo ponto $C(-5, 4)$, sabendo-se que o comprimento do segmento compreendido entre as retas $x + 2y + 1 = 0$ e $x + 2y - 1 = 0$ é igual a 5.

04 **(IIT)** Considere um segmento AB de comprimento constante c, tal que A encontra-se sempre no eixo x e B no eixo y. Sendo $OAPB$ um retângulo, determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P ao segmento AB.

05 Dado um triângulo de vértices $A(-1, -1)$; $B(3, 5)$ e $C(-1, -2)$, ache o ponto de interseção da bissetriz do ângulo externo do vértice A com o prolongamento do lado BC.

06 Um raio luminoso se desloca segundo a reta $x - 2y + 5 = 0$. Após ter alcançado a reta $3x - 2y + 7 = 0$, o raio é refletido. Ache a equação da reta que representa o raio refletido.

07 Ache as equações dos lados de um triângulo ABC, conhecendo-se um dos vértices $A(3, -1)$, bem como as equações de uma bissetriz $x - 4y + 10 = 0$ e de uma mediana $6x + 10y - 59 = 0$.

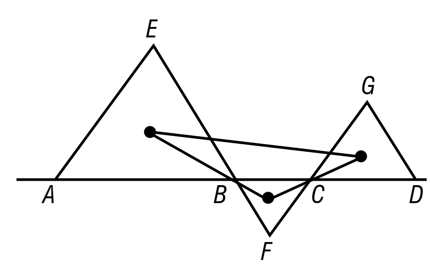
08 Ache todos os vértices de um triângulo ABC, conhecendo-se um dos vértices $C(4,3)$, bem como as equações de uma bissetriz interna $x + 7y + 5 = 0$ e da mediana $4x + 13y - 10 = 0$.

09 Um reta L passando pela origem intersecta a reta $x+y=1$ e $x+y=3$ nos pontos P e Q respectivamente. Por P e Q, duas retas L_1 e L_2 são desenhadas, paralelas às retas $2x-y=5$ e $3x+y=5$ respectivamente. Determine o lugar geométrico da interseção de L_1 e L_2 quando L varia.

10 Mostre que não existe triângulo equilátero tal que todos os vértices tenham coordenadas inteiras.

11 **(IME)** Considere um quadrado $ABCD$. Determine o ponto P do plano que minimiza a soma $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$.

12 **(IME)** Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontrem-se do mesmo lado da reta r, enquanto o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.



13 **(IME)** As medianas BM e CN de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que $\tan(BGC)=\dfrac{12S}{b^2+c^2-5a^2}$, em que S é a área do triângulo ABC, $AC = b$, $AB = c$ e $BC = a$.

14 Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. Se D é o ponto médio de BC, E é o pé da perpendicular de D a AC e F é o ponto médio de DE, mostre que AF é perpendicular a BE.

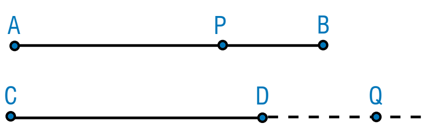
15 E e F são pontos do lado AB, do triângulo obtusângulo ABC ($C > 90°$), tais que $AE = EF = FB$. D é ponto da reta BC tal que BC é perpendicular a ED. AD é perpendicular a CF. Os ângulos BDF e CFA medem x e $3x$, respectivamente. Calcule a razão DB/DC.

RASCUNHO

Na primeira apostila, essencialmente vimos como comparar segmentos e ângulos, por vezes calculando-os, embora mais por igualdade a outros já dados anteriormente. Nessa apostila, veremos efetivamente como calculá-los, sem necessariamente comparar uns aos outros.

Como dito no bloco sobre triângulos, a estrutura triangular nos permite determinar muitos elementos a partir de poucas informações dadas. Esta apostila vem para corroborar isso e mostrar como exatamente podemos usar tal ferramenta, entre várias outras, a nosso favor.

Dado um segmento *AB,* se *P* está entre *A* e *B,* dizemos que *P* divide internamente *AB*. Chamamos os segmentos *PA* e *PB* de aditivos [$PA + PB = AB$]. Associado a essa divisão, dizemos que *P* divide *AB* na razão PA:PB. Se Q é tal que está na reta *AB*, porém fora do segmento *AB*, dizemos que *Q* divide externamente *AB*. Chamamos *QA* e *QB* de segmentos subtrativos [$|QA - QB| = AB$]. Associado a essa divisão, dizemos que *Q* divide *AB* na razão *QA:QB*.



Dado um segmento *AB* e uma razão *k* real positiva, prova-se que existem e são únicos os pontos *P* e *Q* que dividem interna e externamente, respectivamente, o segmento *AB*, na razão $PA : PB = k$, $QA:QB = k$ [desde que *k* seja diferente de 1].

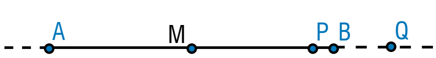
1. Divisão Harmônica

Dado um segmento *AB* e dois pontos, *P* e *Q*, que dividem internamente e externamente, respectivamente, o segmento *AB* numa dada razão *k,* dizemos que *P* e *Q* dividem harmonicamente *AB* na razão *k*.

Ou seja, se *P* e *Q* dividem harmonicamente *AB*, vale que $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$.

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k < 1$$

$$\frac{PA}{PB} = 1, \nexists Q \mid \frac{QA}{QB} = 1$$



$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k > 1$ [suficientemente grande]

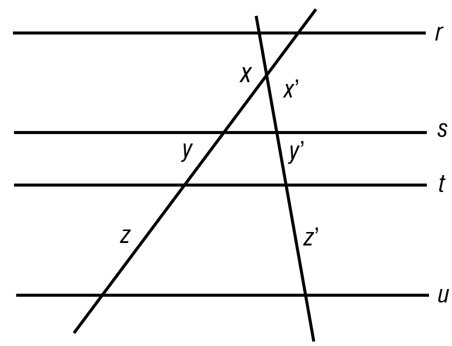
Veja que sempre o ponto da divisão externa está mais afastado de *A* e *B* do que o da divisão interna.

Propriedades da Divisão Harmônica

I. Se *P* e *Q* dividem harmonicamente *AB*, então *A* e *B* dividem harmonicamente *PQ*.
II. Se *P* e *Q* dividem harmonicamente *AB* na razão *k*, sendo O médio de *PQ*, valem as duas:
   - $OA \times OB = OP^2 = OQ^2 = OP \,.\, OQ$
   - $\frac{OA}{OB} = k^2$
III. Se P e Q dividem harmonicamente AB na razão k, vale a fórmula: $PQ = AB.\frac{2k}{|k^2 - 1|}$.
IV. Se P e Q dividem harmonicamente AB, vale a fórmula: $\frac{2}{PQ} = \frac{1}{QA} \pm \frac{1}{QB}$ [se Q divide externamente].

2. Teorema de Tales

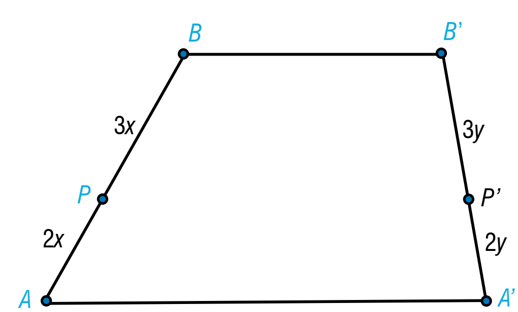
Se várias retas paralelas entre si [feixe de paralelas] seccionam retas transversas, gerando segmentos, então eles são correspondentemente proporcionais entre si.



Na figura, $r \parallel s \parallel t \parallel u \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$

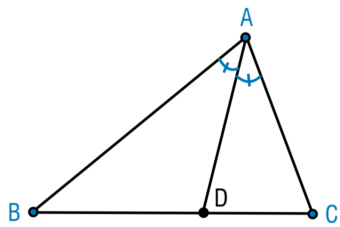
Recíproca do teorema de Tales

Se *AA'*//*BB'* e dois pontos, *P* e *P'*, dividem *AB* e *A'B'* respectivamente na mesma razão, ou seja, $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A'}{P'B'}$, então tem-se que *PP'* é paralelo a *AA'* e a *BB'*.

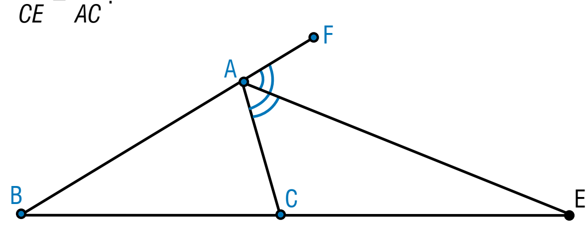


3. Teoremas das bissetrizes

– Interna: Seja *ABC* um triângulo, e *AD* a bissetriz interna. Então, *D* divide *BC* numa razão igual à dos lados. Precisamente, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.



– Externa: Seja ABC um triângulo, e AE a bissetriz externa em A. Então, E divide BC [externamente] numa razão igual à dos lados. Precisamente, $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$.

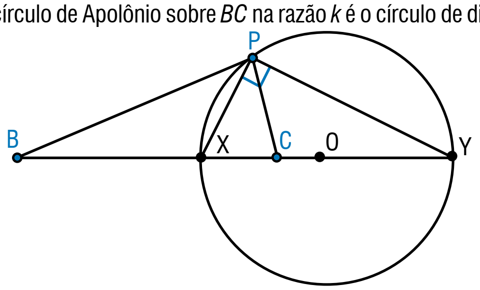


Observe que, como consequência, podemos dizer que D e E dividem harmonicamente BC numa razão igual à dos lados.

Círculo de Apolônio

Dado um segmento BC e uma razão k, o círculo de Apolônio sobre BC na razão k é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\frac{PB}{PC} = k$.

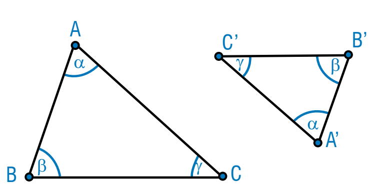
Sejam X e Y os pontos que dividem BC harmonicamente na razão k. Então, o círculo de Apolônio sobre BC na razão k é o círculo de diâmetro XY.



4. Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando eles apresentam os mesmos ângulos internos e os lados opostos aos ângulos correspondentes são respectivamente proporcionais. Precisamente, vale:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}, \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$



Nos triângulos ao lado, tem-se que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$

Se dois triângulos são semelhantes, então ângulos homólogos [correspondentes pela semelhança] são sempre iguais, e segmentos homólogos estão sempre na mesma razão de semelhança. Por exemplo, se dois triângulos são semelhantes, então o ângulo entre uma mediana e uma bissetriz partindo do mesmo vértice é igual ao ângulo entre mediana e bissetriz no vértice homólogo no outro triângulo, e as medianas estão na mesma razão que as bissetrizes, que o perímetro, que o circunraio, etc.

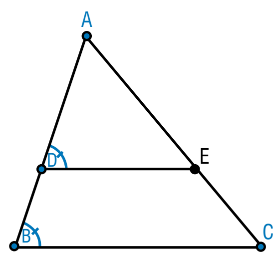
Casos de semelhança

Existem três grupos de informações que são necessárias e suficientes para determinarem que dois triângulos são semelhantes. Chamamos essas informações de 'casos de semelhança'. Vejamos:

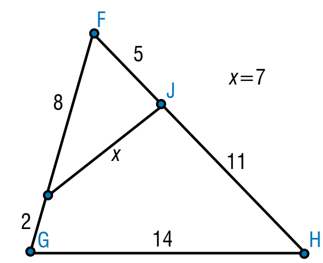
– Ângulo Ângulo [AA]: Se dois triângulos têm dois pares de ângulos iguais entre si, então os triângulos são semelhantes.

– Lado Ângulo Lado [LAL de semelhança]: Se dois triângulos têm um par de ângulos iguais, e os lados que os formam são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

– Lado Lado Lado [LLL de semelhança]: Se dois triângulos têm todos os seus lados proporcionais entre si, então os triângulos são semelhantes.



Veja que DE//BC, logo os triângulos ABC e ADE são semelhantes [AA]



Os lados de FJI são 5 e 8, e os de FGH são 10 e 16, e eles têm o ângulo F em comum, logo FJI~FGH [caso LAL]

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que

$$B\hat{A}C = C\hat{B}D \text{ e } A\hat{C}D = A\hat{D}B. \text{ Prove que } BC^2 + AD^2 = AC^2.$$

Solução:

Este é um problema muito importante, pois exemplifica uma situação extremamente comum em geometria: a semelhança invertida.

Seja P a interseção das diagonais AC e BD. Veja que os triângulos ABC e BCP são semelhantes e o mesmo acontece com os triângulos ACD e ADP (os triângulos têm os mesmos ângulos). Das duas semelhanças, tiramos que:

$$\frac{BC}{CP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC^2 = AC \cdot CP \text{ e } \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AP.$$

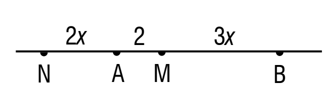
Somando as duas relações, temos que:

$BC^2 + AD^2 = AC \cdot (CP + AP) = AC^2$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Um segmento AB é tal que $7.AB = 3.CD$. Qual será sua medida na unidade $\frac{1}{4}CD$?

02 Calcule x para que os pontos da figura abaixo formem divisão harmônica:



03 Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB de 42 cm na razão $\frac{5}{2}$. Calcule MN.

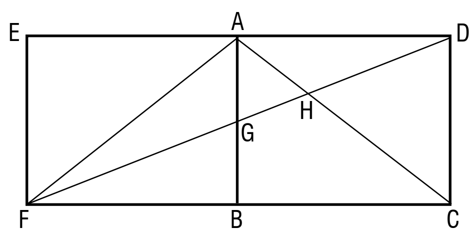
04 Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB na razão $\frac{3}{2}$.

Sabemos que os pontos A e B dividem o segmento harmonicamente. Calcule a razão desta divisão.

05 Os lados de um triângulo medem 6 cm, 9 cm e 10 cm. Calcule de quanto se deve prolongar o lado maior para que ele encontre a bissetriz externa traçada do ângulo oposto.

06 Num triângulo retângulo, os ângulos agudos medem 30º e 60º. Qual a razão entre os segmentos determinados sobre o lado oposto pela bissetriz do ângulo de 60º?

07 Considere os quadrados $ABCD$ e $ABEF$ da figura. Se $FG = 12$, calcule HD.



08 Em um ∅ABC, de lados $AB = 9$, $AC = 12$ e $BC = 15$, traça-se DE paralela a BC passando pelo baricentro do triângulo (D em AB e E em AC). Determine o perímetro do ∅ADE.

09 As bases de um trapézio medem 6 cm e 8 cm e a altura 5 cm. Quais as alturas dos triângulos obtidos, prolongando-se os lados não paralelos?

10 Determine o comprimento do lado do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 8, sabendo que um dos lados do quadrado está contido nessa base do triângulo.

11 AD e BC são as bases de um trapézio $ABCD$, de medidas a e b ($a > b$). MN é um segmento paralelo às bases, com M e N internos aos lados AB e CD. Sabendo que $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{p}{q}$, calcule a medida de MN.

12 Pelas extremidades do segmento $AB = 32$ cm levantam-se, no mesmo semiplano, duas perpendiculares $AC = 10$ cm e $BD = 6$ cm. Pede-se localizar um ponto E sobre AB tal que tenham o ângulo $C\hat{E}D$ reto.

13 Os lados de um triângulo ABC medem AB=4 cm, AC=8 cm e $BC = 6$ cm. Uma tangente ao círculo circunscrito no vértice A intersecta o prolongamento de BC no ponto P. Quanto mede o segmento PA?

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Demonstre que dado um segmento AB e uma razão k, é único o ponto M, interno a AB, tal que a razão $\frac{AM}{BM}$ vale k.

Demonstre também que é único o ponto N, externo a AB, tal que a razão $\frac{AN}{BN}$ vale k.

02 Os pontos P e Q pertencem ao interior do segmento AB e estão de um mesmo lado de seu ponto médio. P divide AB na razão $\frac{2}{3}$ e Q divide AB na razão $\frac{3}{4}$. Se $PQ = 2$, determine a medida de AB.

03 Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB = k}$. Se J é o ponto médio de MN, determine a razão $\frac{JA}{JB}$.

04 Em um ∅ABC de lados $AB = 12$, $AC = 8$, $BC = 10$, a bissetriz interna de $\hat{B}$ encontra a bissetriz AN externa de $\hat{A}$ no ponto F. Determine a razão $\frac{FN}{FA}$.

05 Um triângulo ABC tem 9 cm de perímetro e $AB = 3$ cm. Os pés das bissetrizes dos ângulos interno e externo no vértice C dão formação a um segmento que mede 4 cm. Calcular AC e BC.

06 Em um ∅ABC, BC = a e $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$. Calcule o comprimento da altura relativa ao lado a sabendo que ela é máxima.

07 Considere em um círculo de centro O um diâmetro AB. Prolongue uma corda AP qualquer do círculo de um comprimento $PQ = AP$. Os segmentos QO e BP cortam-se em J. Calcule a razão $\frac{JQ}{JO}$.

08 Em um ∅ABC, a bissetriz interna de $\hat{A}$ encontra BC em D e o círculo circunscrito em E. Se $AB = 8$, $AC = 6$ e $DE = 3$, calcule o comprimento da bissetriz AD.

09 É dada uma reta r e três círculos A, B e C, num mesmo semiplano gerado por r. Tais círculos são tangentes à reta r, e seus centros são colineares. Além disso, A e B são tangentes externamente, bem como B e C. Sabendo que os raios de A e C são 4 e 9, calcule o raio de B:

(A) 5.
(B) 5.5.
(C) 6.
(D) 6.5.
(E) 7.

10 Num círculo de raio igual a 12 está inscrito um ∅ABC cujos lados AB e AC medem 8 e 9, respectivamente. Determine a altura relativa ao lado BC.

11 Um trapézio tem bases com medidas 2 e 3. Calcule a medida do segmento paralelo às bases, que contém o ponto de interseção das diagonais.

12 Em um ∅ABC, BC = a e $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$. Calcule o comprimento da altura relativa ao lado a, sabendo que ela é máxima.

13 Em um triângulo, os lados de medidas m e n são opostos aos ângulos de 60° e 40°. O segmento da bissetriz do maior ângulo interno do triângulo é dado por:

(A) $m\sqrt{\frac{m+n}{n}}$.
(B) $m\sqrt{\frac{n}{m+n}}$.
(C) $n\sqrt{\frac{m+n}{m}}$.
(D) $n\sqrt{\frac{m+n}{m}}$.
(E) $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

14 No triângulo ABC, temos que I é seu incentro, e M e N são pontos sobre AC e BC tais que $BN.AB = BI^2$, e $AM.AB = AI^2$. Prove que M, N e I são colineares.

15 Os segmentos PA e PB são tangentes a um círculo nos pontos A e B, e Q é um ponto qualquer da circunferência. Se as distâncias de Q às retas PA e PB são, respectivamente, 4 e 9, quanto vale a distância de Q a AB?

(A) 4.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 7.
(E) 8.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Em um triângulo ABC, de incentro I e exincentro J relativo a BC, demonstre que vale a relação: $AI \times AJ = AB \times AC$.

02 Um triângulo ABC tem lados em progressão aritmética. $AB < BC < AC$. Sendo G o baricentro de ABC, I o seu incentro, e L o ponto em que AI intersecta o círculo circunscrito a ABC, prove que $IG//B$ e que I é ponto médio de AL.

03 Sejam ABC um triângulo, H seu ortocentro, O seu circuncentro, G seu baricentro e M o ponto médio de BC.

a. Prove que $AH = 2OM$.
b. Prove que H, O e G são colineares (reta de Euler).
c. Determine a razão $\dfrac{GH}{GO}$.

04 Seja ABC um triângulo qualquer, e AD, BE, CF cevianas internas a esse triângulo, que se intersectam em P. Prove que a soma $\dfrac{AP}{AD}+\dfrac{BP}{BE}+\dfrac{CP}{CF}$ é constante. [Dica: Prove que $\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{EP}{BE}+\dfrac{FP}{CF}$, considerando uma paralela a BC pelo ponto P.]

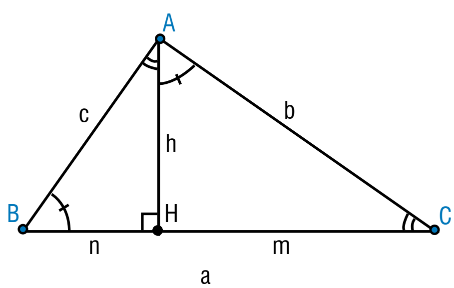
RASCUNHO

Com as ferramentas do bloco anterior, e algumas definições convenientes que relacionam ângulos e segmentos, podemos deduzir importantes relações métricas em triângulos que permitirão calcular muitas informações a partir de poucas.

1. Relações métricas no triângulo retângulo –

1.1 Teorema de Pitágoras

Seja *ABC* um triângulo retângulo em *A, AH* altura relativa à hipotenusa, como na figura abaixo. Observe que o ângulo $B\hat{A}H$ é igual ao ângulo agudo *C*, e $C\hat{A}H$ é igual ao ângulo agudo *B* [por soma de ângulos internos]. A partir disso, podemos observar triângulos *BAH, ACH* e *BCA* semelhantes, e, daí, deduzir relações métricas importantes no triângulo retângulo. Veja abaixo:



$$\Delta BAH \sim \Delta ACH \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow h^2 = mn$$

$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{AH}{BA} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow ah = bc$$

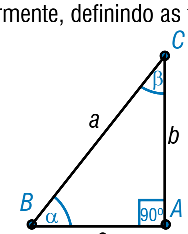
$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow b^2 = ma$$

Analogamente, deduzimos $c^2 = na$. Somando as duas últimas relações, obtemos: $b^2 + c^2 = ma + na = (m+n)a = a \cdot a = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$ [Teorema de Pitágoras]

Também é possível deduzir a seguinte relação a partir daí: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

2. Trigonometria Básica

Por semelhança, se dois triângulos retângulos possuem ângulos iguais, tem-se que as razões entre seus catetos e a hipotenusa são sempre iguais. Dessa forma, podemos relacionar um ângulo agudo e as razões ditas anteriormente, definindo as funções trigonométricas.



$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{c}$$

Para que essa definição alternativa esteja de acordo com as definições algébricas, devemos estendê-la para os ângulos obtusos, da seguinte forma:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\text{sen}\alpha = \text{sen}\beta$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta$$
$$\tan\alpha = -\tan\beta$$

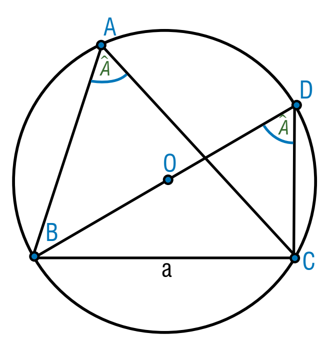
Observe que, por Pitágoras, tem-se $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ [Relação fundamental]

Seguem algumas fórmulas úteis no estudo de trigonometria, a respeito de como calcular seno e cosseno de arco-soma e arco-diferença:

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$$
$$\text{sen}(x-y) = \text{sen}(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen(x)sen(y)}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen(x)sen}(y)$$

3. Lei dos Senos

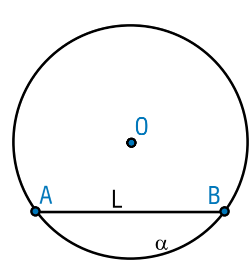
Em um triângulo *ABC*, cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto. Além disso, o coeficiente de proporcionalidade é o diâmetro do círculo circunscrito.



$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R$$

3.1 Lei dos Senos para cálculo de cordas

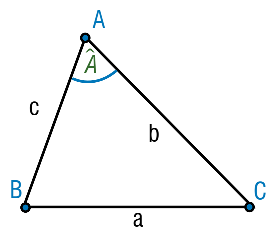
Em um círculo de raio *R*, se uma corda determina um arco de medida angular igual a α, então vale que a corda mede $2R \cdot sen\frac{\alpha}{2}$. . Essa fórmula é muito útil para calcular lados e diagonais de polígonos regulares, ou para calcular os lados de um quadrilátero inscritível.



Na figura, $L = 2R \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

4. Lei dos Cossenos

Em um triângulo *ABC*, vale a seguinte relação entre os lados e um ângulo: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$. Dados os lados de um triângulo, podemos então calcular cada ângulo através dessa fórmula.



Na figura, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$

4.1 Síntese de Clairault

Serve para testar se um triângulo é acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Se os lados de um triângulo são $a > b > c$, temos então:

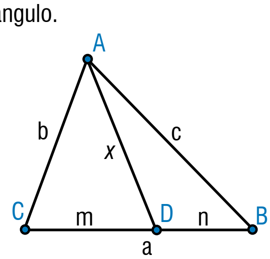
$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^o$ (obtusângulo)

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^o$ (retângulo)

$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^o$ (acutângulo)

5. Relação de Stewart

Seja *AD* uma ceviana interna em um triângulo *ABC*. A relação de Stewart determina o cálculo da ceviana *AD* em função dos lados do triângulo.



$\dfrac{b^2}{m \cdot a} - \dfrac{x^2}{m \cdot n} + \dfrac{c^2}{n \cdot a} = 1$, ou equivalente, $b^2 n + c^2 m = x^2 a + mna$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Em um triângulo retângulo de catetos *b* e *c* e altura relativa à hipotenusa *h*, prove que $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Solução:
Lembrando que $ah = bc$, temos que $h = \dfrac{bc}{a}$, portanto, $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{a^2}{b^2c^2} = \dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

02 Em um triângulo ABC qualquer, demonstre que sen*A* < sen*B* + sen*C*.

Solução:
Sejam *a, b, c* os lados e *R* o circunraio. Pela desigualdade triangular, temos que $a < b + c$. Utilizando a lei dos senos, segue que 2*R*sen*A* < 2*R*sen*B* + 2*R*sen*C*, o que finaliza o problema.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Considere um $\triangle$ABC retângulo de catetos $AB = 5a$ e $AC = 4a$. Pelo ponto *M*, médio de *AC*, trace *MN* perpendicular a *AC*. Se *N* é exterior ao triângulo e se $MN = a$, calcule BN.

02 Dois círculos de raios 8 e 6 são ortogonais. Determine o comprimento da corda comum.

03 Considere um ponto P no interior de um quadrado de lado a, de forma que tenha mesma distância a dois vértices consecutivos e ao lado oposto a esse vértice. Se d é a distância comum, calcule d.

04 O triângulo *ABC* é retângulo em *A*. Sabendo-se que a hipotenusa *BC* é igual a 25 cm e o cateto *AB* mede 20 cm, pede-se calcular:

a. O cateto *AC*, a altura *AH* e os segmentos *BH* e *CH* determinados pela referida altura.
b. Toma-se *HN* paralelo a *AB*. Calcule *HN* e os segmentos *AN* e *NC* determinados pela altura *HN* sobre *AC*.
c. Toma-se *HM*, bissetriz do ângulo BHA. Calcule os segmentos determinados sobre *AB*.

05 *ABC* é um triângulo retângulo de hipotenusa *BC* e altura *AH*. Seja *P* um ponto do mesmo semiplano de *A* em relação à reta suporte de *BC*. Os ângulos $H\hat{P}C$ e $A\hat{B}C$ são iguais a 15°. Se o segmento *PH* é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:

(A) AC.
(B) AB.
(C) $\dfrac{BC}{2}$.
(D) $\dfrac{HC}{2}$.
(E) AH.

06 Prove que a equação $\dfrac{2}{a}x^2 - \dfrac{2}{h}x + \dfrac{1}{b} = 0$ admite sempre raízes reais, se *a* e *b* forem catetos de um triângulo retângulo e *h* a altura relativa à hipotenusa.

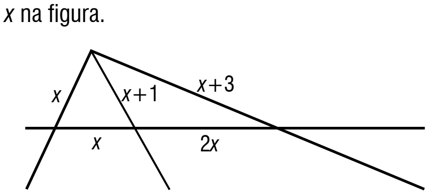
07 Determine o raio de um círculo inscrito num setor circular de 60° e raio 6 dm.

08 Em um triângulo retângulo *ABC*, com ângulo reto em *C*, pontos *D* e *E* dividem o lado *BC* em três partes iguais. Prove que se $BC = 3AC$, então $A\hat{E}C + A\hat{D}C + A\hat{B}C = 90^o$.

09 O produto dos senos dos ângulos de um triângulo é $k \cdot \dfrac{abc}{R^3}$, em que *a, b* e *c* são os lados e *R* é o raio do círculo circunscrito. Calcule *k*.

10 Considere o triângulo *ABC* de lados $AB = AC = 6$ e $BC = 4$. Seja *M* o prolongamento do lado *AC* tal que $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{1}{3}$. Calcule *BM*.

11 Calcule *x* na figura.



12 Seja *ABC* um triângulo de lados *a, b* e *c*. Calcule a mediana relativa ao vértice *A*.

13 Seja ABC um triângulo de lados *a, b* e *c*. Calcule a altura relativa ao vértice A.

14 Seja ABC um triângulo de lados *a, b* e *c*. Calcule a bissetriz interna relativa ao vértice A.

15 Seja ABC um triângulo de lados *a, b* e *c*. Calcule $\frac{\cos\hat{A}}{a}+\frac{\cos\hat{B}}{b}+\frac{\cos\hat{C}}{c}$.

16 São dados dois círculos concêntricos. De um ponto *P* variável do círculo exterior traçam-se *PA* e *PB*, sendo *A* e *B* extremos de um diâmetro do círculo interior. Prove que $PA^2 + PB^2$ é constante.

17 Em um triângulo as medianas são $m_a = 6$ cm, $m_b = 8$ cm e $m_c = 12$ cm. Calcule os lados.

18 Considere um triângulo equilátero *T*, de lado a, e três círculos internos a T, tangentes exteriormente entre si, e a cada dois dos lados do triângulo. Sendo r o raio dos círculos, a razão $\frac{r}{a}$ vale:

(A) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$
(B) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$
(C) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$
(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
(E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

19 Em um triângulo *ABC*, em que *AB*=6 e *AC*=8, uma ceviana interna *AP* mede 4. Sabendo-se que *PC*=3 · PB, temos que a medida de *BC* é:

(A) 13.
(B) 12.
(C) 11.
(D) 10.
(E) 9.

20 Considere o losango de lado 5 cm, em que uma das diagonais mede 8 cm. A altura do losango mede:

(A) 3,6 cm.
(B) 4,0 cm.
(C) 4,8 cm.
(D) 5,2 cm.
(E) 6,0 cm.

21 Dois círculos secantes têm raios 10 cm e 17 cm. Sabendo que a corda comum a eles mede 16 cm, qual é a distância entre os seus centros?

(A) 18 cm.
(B) 20 cm.
(C) 21 cm.
(D) 24 cm.
(E) 25 cm.

22 Seja ABCD um quadrilátero de diagonais perpendiculares. Prove que $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

23 **(ITA-88)** Por um ponto *A* de uma circunferência traça-se o segmento *AA*' perpendicular a um diâmetro desta circunferência. Sabendo-se que o ponto *A*' determina no diâmetro segmentos de 4 cm e 9 cm, podemos afirmar que a medida do segmento *AA*'é:

(A) 4 cm.
(B) 12 cm.
(C) 13 cm.
(D) 6 cm.
(E) $\sqrt{13}$ cm.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 No quadrilátero *ABCD*, $\hat{B}=\hat{D}=90°$. Traçamos por *C* paralelas *CE* e *CF* aos lados *AB* e *AD*, respectivamente. Se AF = 8, FB = 3, *AE* = 4 e *ED* = 6, determine a medida da diagonal AC.

02 Calcule o comprimento do segmento que une os pontos médios das bases *AB* e *CD* de um trapézio, conhecendo seus lados: *AB* = 14, *BC* =7, *CD* = 4 e *DA* = 5.

03 Considere um quadrado Q de lado *a* e cinco círculos de mesmo raio *r*, interiores a *Q*, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de *Q*. Calcule *r*.

04 Determine a medida do lado de um quadrado ABCD sabendo que M é ponto médio de *AB*, *CP* é perpendicular a MD e MP = 3.

05 Uma reta passando pelo vértice A de um quadrado ABCD intersecta o lado *CD* em E e a reta BC em F. Prove que $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}$.

06 Seja ABCD um retângulo. Prove que para um ponto P qualquer: $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

07 Seja *ABCD* um retângulo de centro O. Prove que, se um ponto P varia sobre um círculo de centro O, a soma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ é constante.

08 Sendo *M* e *N* os pontos que dividem em três segmentos congruentes a hipotenusa *BC* de um triângulo *ABC*, prove que: $AM^2+AN^2+MN^2=\frac{2}{3}BC^2$.

09 Dado um segmento *AB*, prove que se *P* varia numa reta perpendicular a *AB*, a quantidade $PA^2–PB^2$ é constante.

10 A partir de *P*, interno a *ABC*, traçam-se perpendiculares aos lados BC, *CA* e *AB*, cujos pés são *D, E* e *F*. Sabendo que *BD* = 8, *DC* = 14, *CE* =13, *AF* = 12, e *BF* = 6, então calcule *AE*.

11 Considere um triângulo *ABC* tal que *AB* = 20, *AC* = 21 e *BC* = 29. Sejam *D* e *E* pontos do segmento *BC* tais que *BD* = 8 e *CE* = 9. Determine o ângulo $D\hat{A}E$.

12 Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas *a* e *b*, e uma das diagonais tem por medida *c*. Determine a medida da outra diagonal.

13 Sendo *AD* a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ do ∆ABC, prove que: $AD^2 = AB \,.\, AC – BD \,.\, DC$.

14 No triângulo ABC, AM é mediana, e a razão dos ângulos $B\hat{A}M$ e $M\hat{A}C$ é $\frac{1}{2}$. Prolonga-se AM até *D*, de forma que *M* está entre *A* e *D*, e *BD* é perpendicular a BA. Prove que $AC=\frac{AD}{2}$.

15 Seja ABCDEF um hexágono convexo inscrito numa circunferência de raio *r*. Dado que *AB* = *BC* = *CD* = *2* e *DE* = *EF* = *FA* = *1*, determine *r*.

16 Considere *AOB* um quadrante de círculo de centro *O* e raio *R*. Toma-se um semicírculo de diâmetro *OA* interno ao quadrante. Calcule o raio do círculo tangente ao semicírculo, a *OB* e ao arco *AB* do quadrante.

17 **(AFA-00)** Uma corda de comprimento *a* define em uma circunferência de raio 2*a* um arco $\theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Nessa mesma circunferência, o arco 2θ é definido por uma corda de comprimento:

(A) $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.
(B) $\frac{a\sqrt{13}}{3}$.
(C) $\frac{a\sqrt{15}}{4}$.
(D) $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

18 **(EN-84)** As medidas dos lados de um triângulo *ABC* são 3 números inteiros e consecutivos e o ângulo maior, *A*, é o dobro do menor, *C*. Os lados deste triângulo são:

(A) 2, 3 e 4.
(B) 3, 4 e 5.
(C) 8, 9 e 10.
(D) 4, 5 e 6.
(E) 5, 6 e 7.

19 **(EN-88)** O ponto *B* pertence ao segmento $\overline{AC}$, dista 2 cm do ponto *A* e dista 1 cm do ponto *C*. O raio de um círculo que tangencia exteriormente os círculos de diâmetro $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e tangencia internamente o círculo de diâmetro $\overline{AC}$ é:

(A) $\frac{1}{3}$cm.
(B) $\frac{2}{5}$cm.
(C) $\frac{3}{7}$cm.
(D) $\frac{4}{6}$cm.
(E) $\frac{5}{11}$cm.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 No retângulo *ABCD*, o lado BC é igual a 2*AB.* O ponto P está sobre o lado *AB* e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta *PS* com *S* no interior de *ABCD* e *C* pertence a *PS*. Marcam-se, ainda, *M* em *AD* e *N* em *BC* de modo que *MPNS* seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

(A) $\frac{3}{7}$.
(B) $\frac{3}{11}$.
(C) $\frac{5}{7}$.
(D) $\frac{5}{11}$.
(E) $\frac{7}{11}$.

02 *ABC* é um triângulo retângulo em *A*. Considere o círculo que tangencia os lados *AB* e *AC*, e também o círculo circunscrito a *ABC*. Calcule o raio desse círculo, sabendo que *AB* = 6 e *AC* = 8.

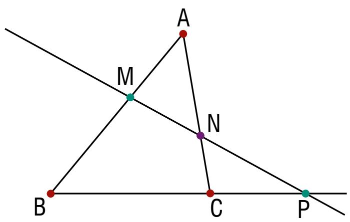
RASCUNHO

Metricamente, existem dois critérios muito úteis e recorrentes em geometria plana para determinar se três pontos são colineares, ou, igualmente, determinar se três cevianas de um triângulo são concorrentes: os teoremas de Menelaus e Ceva.

Os dois envolvem calcular também razões em que retas bissectam segmentos, então podem ser úteis para contas envolvendo divisão de segmentos, bem como, mais pra frente, para calcular razões de áreas e determinar a posição de pontos sobre segmentos, mesmo no espaço.

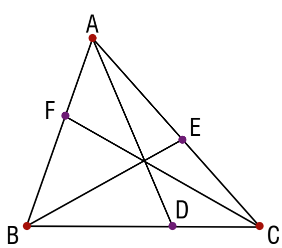
1. Colinearidade de pontos – Teorema de Menelaus

Sejam M, N e P pontos sobre os lados de um triângulo – dois sobre os lados e um no prolongamento do terceiro lado, ou os três nos prolongamentos dos lados–. Então os pontos M, N e P são colineares se, e somente se, vale a relação de Menelaus: $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$.



2. Concorrência de retas – Teorema de Ceva

Sejam AD, BE e CF cevianas de um triângulo – as três internas ou duas externas e uma interna–. Então as retas AD, BE e CF são concorrentes se, e somente se, vale a relação de Ceva: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.



EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Os pontos E e D pertencem aos lados AB e BC de um $\triangle ABC$ e são tais que $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3}$ e $\frac{CD}{DB}=\frac{1}{2}$. Sendo F o ponto de concurso de AD e CE, então calcule o valor de $\frac{EF}{FC}+\frac{AF}{FD}$.

02 No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS.

03 Num triângulo ABC, os lados medem $AB = \ell$, $AC = CB = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Sendo H o pé da altura de A, M médio de AH e X a interseção das retas CM e AB, calcule a razão $AX : XB$.

04 O lado AB de um quadrado $ABCD$ é prolongado de um segmento $BP = 2 \cdot AB$. Com M, ponto médio de CD, traça-se BM, que corta AC em Q. Sabendo que PQ corta BC em R, calcule a razão $CR : RB$.

05 **(Gergonne)** Seja ABC um triângulo, e D, E e F os pontos de tangência do incírculo de ABC com BC, AC e AB, respectivamente. Prove que as cevianas AD, BE e CF são concorrentes.

06 No triângulo ABC, AM é uma mediana, P é um ponto dela, e as cevianas BX e CY são concorrentes no ponto P. Prove que $XY//BC$.

07 Num triângulo ABC, AD é bissetriz interna, e I é incentro. Calcule a razão $AI : ID$ em função dos lados do triângulo ABC.

08 Do vértice C do ângulo reto do triângulo ABC, a altura CK é traçada, e no triângulo ACK traça-se a bissetriz CE. A reta que passa por B paralela a CE encontra CK no ponto F. Calcule a razão em que EF divide o segmento AC.

09 Prove que os pés das bissetrizes internas a partir de dois vértices de um triângulo escaleno e o pé de uma externa pelo terceiro vértice são colineares.

10 **(Menelaus para quadriláteros)** Seja r uma reta que corta os lados (ou prolongamentos) AB, BC, CD e DA de um quadrilátero convexo $ABCD$ nos pontos M, N, P e Q, respectivamente. Prove que $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}=1$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Demonstre (via Ceva) que, num triângulo, são concorrentes:

a. as medianas;
b. as bissetrizes internas;
c. as alturas;
d. duas bissetrizes externas e uma interna.

02 Prove que, num triângulo escaleno, os pés das bissetrizes externas são colineares.

03 Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Seja E a interseção das retas que contêm os lados AD e BC. Seja F a interseção das retas que contêm os lados AB e CD. Prove que as diagonais AC e BD intersectam a reta EF em pontos conjugados harmônicos em relação a E e F.

04 Prove que os três pares de tangentes externas comuns a três círculos, tomadas duas a duas, cortam-se em três pontos colineares.

05 Seja ABC um triângulo escaleno, e seja AD uma ceviana tal que os triângulos ADB e ADC tenham o mesmo perímetro. Construa analogamente as cevianas BE e CF. Prove que as cevianas AD, BE e CF são concorrentes.

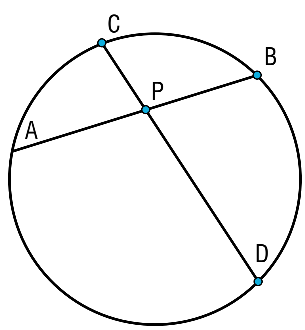
RASCUNHO

Neste assunto, veremos propriedades métricas a respeito de cordas em um círculo, que induzirão a uma definição de 'potência de ponto'. Entre outros motivos puramente métricos, tal definição pode ser usada até para detectar a existência de quadriláteros inscritíveis.

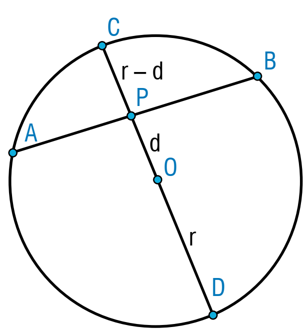
1. Potência de ponto

Seja P um ponto interno a um círculo de centro O, e AB e CD cordas quaisquer que se intersectam em P. Observe que os triângulos PAD e PCB são semelhantes [ângulos iguais pela ideia do arco capaz], logo vale que PA:PC :: PD:PB, e, portanto, vale que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Isso independe da escolha das cordas AB e CD, logo podemos deduzir que o produto $PA \cdot PB$ é constante, se variarmos a corda AB.

Como o produto $PA \cdot PB$ é constante, tomando o diâmetro que passa por P, temos que $PA \cdot PB = (R+d) \cdot (R-d) = R^2 - d^2$, sendo R o raio do círculo, e d = OP, a distância do ponto P ao centro do círculo.



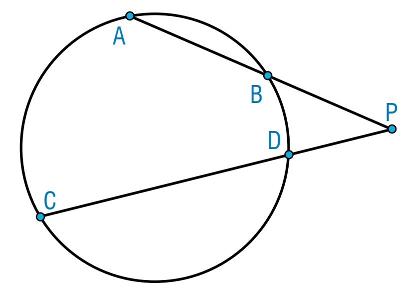
Na figura, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



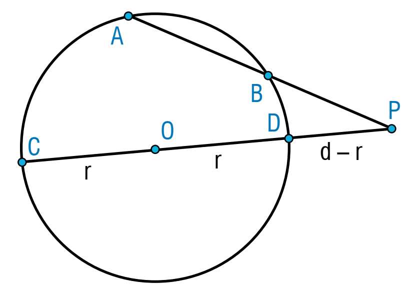
Na figura, $PA \cdot PB = (r+d) \cdot (r-d) = r^2 - d^2$

Agora, consideremos P externo a um círculo de centro O, e PAB e PCD retas secantes ao círculo em A, B, C e D. Observe que os triângulos PAD e PCB são semelhantes, de novo, e que vale PA:PC :: $PD \cdot PB$, logo $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Isso independe das retas secantes escolhidas, logo podemos dizer que o produto $PA \cdot PB$ é também constante, se variarmos a secante PAB.

Como o produto $PA \cdot PB$ é constante, então, temos duas coisas: se escolhermos a reta tangente PT ao círculo em T, temos que $PA \cdot PB = PT \cdot PT = PT^2$; e também, se escolhermos a reta diametral PO, temos que $PA \cdot PB = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$, sendo R o raio do círculo e d = OP, a distância de P ao centro O do círculo.



Na figura, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



Na figura, $PA \cdot PB = (d-r) \cdot (d+r) = d^2 - r^2$

Observe que nas duas situações a quantidade $d^2 - R^2$ é extremamente relacionada com o produto $PA \cdot PB$ associado. Chamaremos a quantidade $d^2 - r^2$ de potência do ponto P em relação ao círculo Γ, sendo d a distância de P ao centro de Γ, e r o raio de Γ.

Da definição, podemos ver se um ponto é interno, externo ou se pertence a um círculo:

I. se $d^2 - r^2 = Pot_\Gamma P < 0$, então P é interno a Γ;
II. se $d^2 - r^2 = Pot_\Gamma P = 0$, então P pertence a Γ;
III. se $d^2 - r^2 = Pot_\Gamma P < 0$, então P é externo a Γ.

Observe também que, para o caso em que P é externo a Γ, temos que se PT é segmento tangente a Γ, então $PT^2 = d^2 - r^2 = Pot_\Gamma P$. Logo, o cálculo de segmentos tangentes está relacionado com cálculo de potência de ponto.

Dada uma circunferência Γ de raio r, o lugar geométrico dos pontos que têm potência igual a k é um círculo concêntrico a Γ, de raio $\sqrt{k+r^2}$. Em particular, o lugar geométrico dos pontos que têm tangente a Γ igual a um certo L é o círculo concêntrico a Γ de raio $\sqrt{L^2+r^2}$.

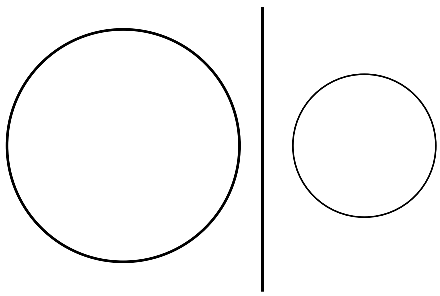
Como visto anteriormente, podemos estabelecer mais um critério para observar quadriláteros inscritíveis: seja ABCD um quadrilátero convexo, P a interseção das diagonais AC e BD. Se $PA \cdot PC = PB \cdot PD$, então o quadrilátero ABCD é inscritível.

Outro jeito de identificar quadriláteros inscritíveis é: seja ABCD um quadrilátero convexo, e P a interseção dos lados AB e CD. Se $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, então o quadrilátero ABCD é inscritível.

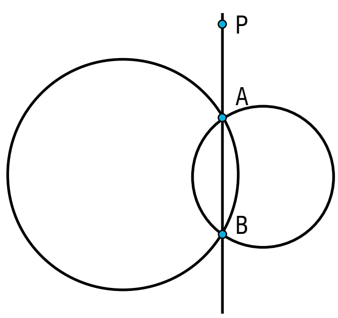
Essas afirmativas são verdadeiras porque, a partir das premissas, podemos reconhecer triângulos semelhantes, logo ângulos iguais. A partir deles, notamos que os quadriláteros são inscritíveis.

2. Eixo radical

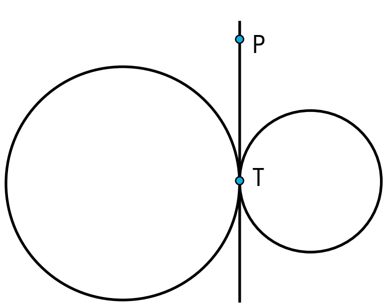
Dados dois círculos Γ e Γ', chamamos de eixo radical de Γ e Γ' o lugar geométrico dos pontos P tais que $Pot_{\Gamma}P = Pot_{\Gamma'}P$. Se os círculos não forem concêntricos, temos que o eixo radical é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros dos círculos. A posição do eixo radical depende da posição dos centros dos círculos e das medidas dos raios. Em alguns casos, situar o eixo radical é complicado, mas em alguns outros o eixo radical está numa posição bem simples, como veremos abaixo.



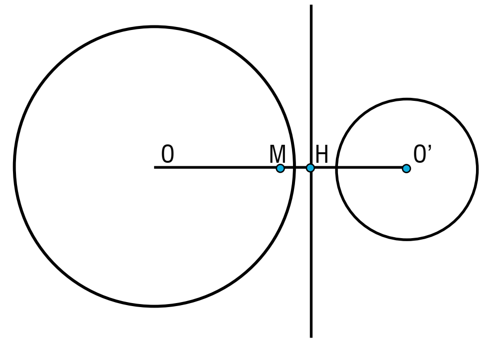
Se os círculos são secantes em dois pontos A e B, então seu eixo radical é a reta AB. Veja que, se P pertence a AB, então a potência de P em relação aos círculos é igual a PA · PB, para os dois círculos (– PA · PB, caso P esteja dentro do segmento AB, que é a corda comum aos círculos).



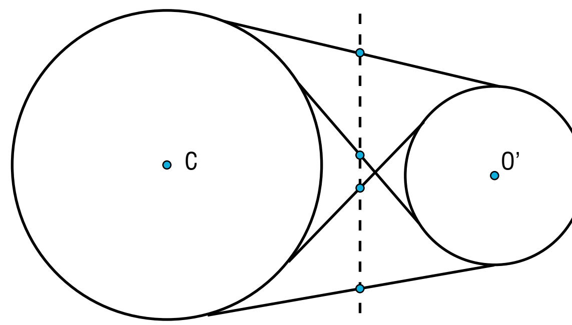
Se os círculos são tangentes, interna ou externamente, em T, então seu eixo radical é a reta tangente comum em T. Veja que, se P pertence a essa reta, então a potência de P em relação aos círculos é igual a PT^2, o quadrado da tangente aos círculos, para os dois círculos.



Se os círculos não se cortam, então a visualização do eixo radical fica um pouco mais complicada. Sejam R e r os raios dos círculos, com R>r, e sejam O e O', nessa ordem, seus centros. Então o eixo radical é uma reta perpendicular a OO' que dista $\frac{R^2 - r^2}{2 \cdot OO'}$ do ponto médio do segmento OO', do lado mais próximo do círculo de menor raio. Veja o esquema a seguir:



Veja que os pontos médios dos segmentos tangentes comuns [internos e externos] são todos colineares. Isso, porque, se TT' é segmento tangente comum, e M é médio de TT', então $Pot_{\Gamma}M = MT^2 = MT'^2 = Pot_{\Gamma'}M$. Como os pontos que têm igual potência estão no eixo radical, que é uma reta, então esses pontos médios são colineares. Além do mais, ligando-os, construímos o eixo radical.



Na figura, os pontos médios dos segmentos tangentes. Eles são colineares, estão no eixo radical dos círculos.

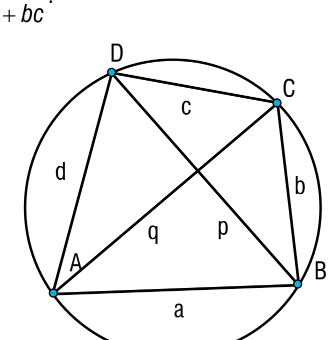
3. Relações métricas nos quadriláteros inscritíveis – Teoremas de Ptolomeu e Hiparco

Teorema de Ptolomeu

Seja ABCD um quadrilátero inscritível de lados a, b, c, d e diagonais p, q. Vale a relação $pq = ac + bd$. [O produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos].

Teorema de Hiparco

Seja ABCD um quadrilátero inscritível, como descrito antes. Vale a relação: $\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Ache a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

Solução:
Sejam as cordas $AB = 2$ e $AC = 10$. Tomando o diâmetro $AD = 10\sqrt{2}$, tem-se que os triângulos ABD e ACD são retângulos, portanto, por Pitágoras, vale que $BD = 14$ e $CD = 10$. No quadrilátero $BACD$, AD e BC são as diagonais [para que BC seja a corda do arco soma].
Por Ptolomeu, tem-se que: $BC \cdot 10\sqrt{2} = 2 \cdot 10 + 10 \cdot 14$, logo $BC = 8\sqrt{2}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Seja P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio r e tal que $OP = r\sqrt{3}$. Traça-se por P a secante PAB ao círculo. Se $PA = r$. Determine AB.

02 Em um $\triangle ABC$, a ceviana AD encontra o círculo circunscrito em E. Se $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ e $BD = 4$. Determine DE:

03 Em um círculo, as cordas AB e CD são perpendiculares e cortam-se em I. Traça-se por I um perpendicular a AD que corta o círculo em E e G e AD em F (F entre I e G). Se $AF = 4$, $FD = 9$ e $FG = 5$, então, determine EI.

04 Calcule a menor diagonal do quadrilátero inscritível $ABCD$ cujos lados AB, BC, CD e DA medem, respectivamente, 1, 2, 2 e 3.

05 Seja ABC um triângulo tal que os lados AB, BC e AC são respectivamente proporcionais a 6, 3 e 4. Considere o círculo circunscrito ao triângulo, e seja P um ponto do menor arco AC. Se $PA = 2a$, $PB = 3a$, qual o valor de PC?

06 $ABCD$ é um paralelogramo tal que $AC = 8$ e $BD = 4$. A circunferência de círculo que passa pelos pontos A, B e C intersecta o prolongamento de BD no ponto P. O comprimento do segmento DP é:

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Dois círculos de raios 3 e 4 são ortogonais. Calcule a distância de um ponto P à reta que contém os centros sabendo que ele possui potência igual a 16 em relação aos dois círculos.

02 Em um quadrilátero inscritível $ABCD$, $AD = DC$. Se as diagonais desse quadrilátero cortam-se em I e se $AI = 6$, $CI = 4$ e $BI = 8$, então, determine o maior lado desse quadrilátero.

03 As cordas AB e CD de um círculo são perpendiculares e cortam-se em I. Se $AI = 4$, $IB = 6$ e $CI = 3$, calcule o diâmetro desse círculo.

04 É dado um triângulo isósceles ABC ($AB = AC$), inscrito em um círculo, e um ponto M do prolongamento da base BC do triângulo. Prove que: $MA^2 = AB^2 - MB \cdot MC$

05 Os segmentos das tangentes traçadas de P a dois círculos distintos não concêntricos são congruentes. Determine o lugar geométrico de P.

06 Um círculo de centro O é circunscrito a um triângulo ABC, obtusângulo em C. Traça-se o círculo de diâmetro OC, que intersecta AB em D e D'. $AD = 3$ e $DB = 4$. Encontre a medida de DC.

07 O quadrilátero $ABCD$ é inscritível em um círculo de diâmetro $AD = 4$ cm. Sabendo que $AB = BC = 1$ cm, calcule CD.

08 Do vértice A de um triângulo ABC, traçam-se a mediana AM e a bissetriz interna AD. O círculo que passa por A, D e M corta AB em E e AC em F. Sendo $BE = 9$ cm, o valor de FC é:

(A) 4 cm.
(B) 4,5 cm.
(C) 9 cm.
(D) 6 cm.
(E) 10 cm.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 O ângulo entre as tangentes traçadas de P ao círculo A é o mesmo ângulo formado pelas tangentes traçadas desse ponto ao círculo B. Determine o lugar geométrico de P.

02 Prove que, se uma secante a dois círculos ortogonais passa pelo centro de um deles, os quatro pontos de interseção formam uma divisão harmônica.

03 Considere três círculos 1, 2 e 3. Sejam A e B as interseções de 1 e 2; C e D as interseções de 1 e 3; E e F as interseções de 2 e 3. Prove que os segmentos AB, CD e EF são concorrentes.

04 Considere um ponto P no exterior de uma circunferência w. As duas retas tangentes a w partindo de P intersectam w nos pontos A e B. Sendo M o ponto médio de AP e N a interseção de BM com w, prove que $PN = 2MN$.

05 Seja ABC um triângulo, I seu incentro e O seu circuncentro. Sendo r o raio do círculo inscrito, R o raio do círculo circunscrito, prove que $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

RASCUNHO

Neste assunto, mais ferramentas métricas surgirão: como medir áreas de superfícies. É claro que muitos problemas falam exclusivamente de calcular áreas, mas é necessário observar e entender como usar áreas pode ser bom para calcular comprimentos, inclusive. Medir áreas será muito útil para deduzir razões de segmentos, bem como a medida deles.

1. Definição e propriedades

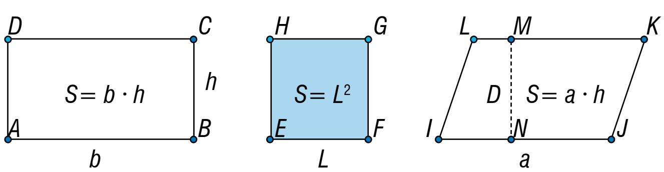
Área é uma função de medida que associa a cada subconjunto do plano um certo número real positivo, com as seguintes propriedades:

I. se duas figuras são congruentes, então são equivalentes [possuem a mesma área];
II. se duas [ou mais] figuras são disjuntas [não possuem interseção], então a área da união é a soma das áreas de cada figura;
III. se duas figuras são semelhantes em uma razão k, a razão das suas áreas é k^2.

2. Área do retângulo / Área do paralelogramo

Se um retângulo tem lados B, H, então a área dele é $S = B \cdot H$. Em particular, a área de um quadrado de lado L é igual a $S = L^2$.

Se um paralelogramo tem lado a e altura relativa a esse lado igual a h, então a área é $S = a \cdot h$.



3. Área do triângulo

Valem as fórmulas abaixo:

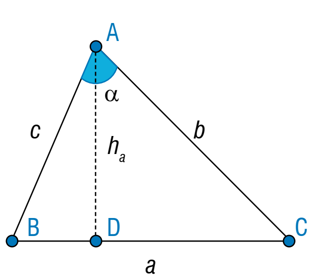
$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \text{ [R = circunraio]}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ [p = semiperímetro]}$$

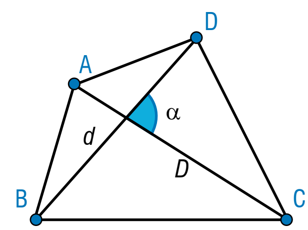
$S = p \cdot r = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$, em que r = inraio, r_a = exinraio relativo ao lado a.



4. Área de um quadrilátero / Área do losango

Se um quadrilátero tem diagonais D e d, formando ângulo α, então a área dele é dada por $S = \frac{D \cdot d}{2} \operatorname{sen}\alpha$.

Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares, então a área é $S = \frac{D \cdot d}{2}$. A área de um losango de diagonais D,d vale $S = \frac{D \cdot d}{2}$.



$$S = \frac{D \cdot d}{2} \operatorname{sen}\alpha$$

5. Área do trapézio

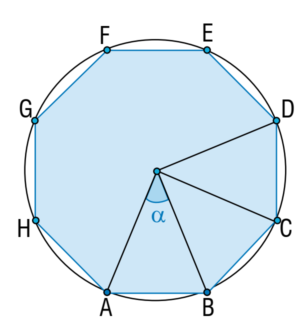
A área de um trapézio de bases B, b, e altura h é o produto da base média pela altura.

$$S = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$$

6. Área de alguns polígonos regulares

A ideia aqui não é dar um formulário, mas uma maneira esperta para deduzir a partir do raio do círculo circunscrito ao polígono dado. Se n é o gênero do polígono, então:

$S = n \cdot \frac{R^2}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$. Basta unir o centro aos vértices do polígono, quebrando-o em vários triângulos isósceles de lados R, e ângulo principal igual ao externo do polígono.



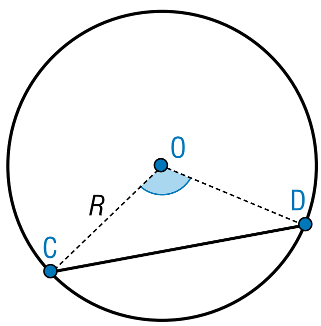
Na figura, $S = 8 \cdot \frac{R^2}{2} \operatorname{sen}45 = 2R^2\sqrt{2}$

7. Área do círculo, do setor circular e do segmento circular

A área de um círculo de raio R é $S = \pi R^2$.

Para calcular a área de um setor circular, basta fazer uma regra de três com o ângulo que o define: $S = \pi R^2 . \frac{\alpha}{360^o}$ [se α for medida em graus]

Para calcular a área de um segmento circular, basta fazer a área do setor que o define menos a área do triângulo formado pelos raios $S_{segm} = S_{setor} - S_{\Delta}$.



8. Fórmula de Bramagupta

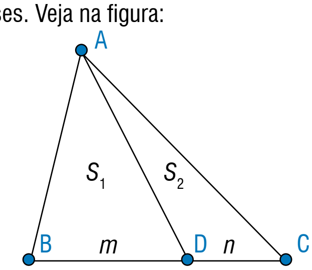
Para um quadrilátero de lados a,b,c,d e dois ângulos opostos α, β, vale a seguinte fórmula de área:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Caso o quadrilátero seja inscritível, a fórmula se reduz para $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

9. A ideia do "colado"

Seja um triângulo ABC e AD uma ceviana interna qualquer. Então, a ceviana divide o triângulo em duas regiões cuja razão entre áreas vale a razão entre as bases. Veja na figura:



Na figura, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Em um triângulo ABC de lados a, b, c e área S, prove que $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

Solução:
Pela lei dos cossenos, temos (*) $2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2$. Sabemos, também, que (**) $\frac{1}{2} bc \cdot senA = S$. Dividindo (*) por (**), segue o resultado.

02 Considere um triângulo ABC e um ponto P em BC tal que $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{A}C = \beta$. Calcule o comprimento da ceviana AP em função dos lados AB e AC e dos ângulos dados.

Solução:
A ideia é usar áreas. Fazendo $AB = c, AC = b$ e $AP = x$ e considerando que área (ABC) = área(ABP) + área(ACP), temos que $\frac{1}{2} bc \cdot sen(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} cx \cdot sen\alpha + \frac{1}{2} bx \cdot sen\beta$, o que nos leva a $x = \frac{bc \cdot sen(\alpha+\beta)}{c \cdot sen\alpha + b \cdot sen\beta}$.

Observação importante: Com essa ideia, é possível obter uma fórmula muito útil para o cálculo do comprimento de uma bissetriz interna em um triângulo (é o caso $\alpha = \beta = \frac{A}{2}$).

$$bissetriz_A = \frac{bc \cdot senA}{(b+c) \cdot sen\frac{A}{2}} = \frac{bc \cdot 2sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c) \cdot sen\frac{A}{2}} \Rightarrow bissetriz_A = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{A}{2}.$$

03 Considere um triângulo ABC tal que AB = 13, BC = 14, AC = 15.

a. Determine a altura relativa ao lado BC.
b. Determine o raio do círculo inscrito.
c. Dado um ponto P em seu interior que dista 2 de AB e 3 de BC, determine a distância de P ao lado AC.

Solução:
Todos os itens podem ser resolvidos usando conceitos de áreas. Inicialmente, utilizamos o radical de Heron para determinar a área. Observando que o semiperímetro é igual a $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$, temos que $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

a. 1Sendo h_a a altura relativa a BC, temos que $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$, o que nos dá $84 = \frac{14 \cdot h_a}{2} \Rightarrow h_a = 12$.
b. Lembrando que S = pr, temos que $84 = 21r \Rightarrow r = 4$.
c. Seja x a distância de P ao lado AC. Essas distâncias de P aos lados são alturas de triângulos, portanto, a ideia é usar áreas. Usando que $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{BCP} + S_{ACP}$, temos $84 = \frac{13 \cdot 2}{2} + \frac{14 \cdot 3}{2} + \frac{15 \cdot x}{2}$, logo $x = \frac{20}{3}$.

04 Em um triângulo qualquer de inraio r e circunraio R, prove que $R \geq 2r$.

Solução:
Para obtermos expressões para os raios em função dos lados do triângulo, devemos usar as fórmulas de área. Sejam a, b, c os lados e S a área do triângulo. É sabido que $r = \frac{S}{p}$ e $R = \frac{abc}{4S}$. Portanto, temos $\frac{R}{r} = \frac{abcp}{4S^2}$.

Utilizando o radical de Heron, temos que $\dfrac{R}{r} = \dfrac{abcp}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*).

Agora, façamos uma mudança de variáveis: $\begin{cases} p-a = x \\ p-b = y \\ p-c = z \end{cases}$. Somando as equações duas a duas, temos que $\begin{cases} a = y+z \\ b = x+z \\ c = x+y \end{cases}$. Substituindo em (*), temos que $\dfrac{R}{r} = \dfrac{(y+z)(x+z)(x+y)}{4xyz}$. Utilizando a desigualdade das médias, temos $\begin{cases} y+z \geq 2\sqrt{yz} \\ x+z \geq 2\sqrt{xz} \\ x+y \geq 2\sqrt{xy} \end{cases}$, logo $\dfrac{R}{r} \geq \dfrac{2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{xz}\cdot 2\sqrt{xy}}{4xyz} = 2$, o que finaliza a demonstração.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Dois círculos de centros A e B e raios R e 4R são tangentes exteriormente. Uma reta é tangente em C e D aos dois círculos. Determine a área do quadrilátero ABCD.

02 Considere um paralelogramo ABCD de lados AB = 12 e BC = $4\sqrt{3}$. Se um dos ângulos desse paralelogramo mede 60º, calcule a área do losango inscrito de forma que uma diagonal seja formada pelos pontos médios dos lados AD e BC.

03 Determine a razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo.

04 Um ângulo de um losango mede 60°. Qual a razão da área desse losango para a área de um quadrado de mesmo perímetro?

05 No quadrilátero qualquer ABCD, P é médio de AD e M é médio de BC. Se a área de ABCD é 18, determine a área do quadrilátero APCM.

06 Considere um triângulo equilátero DEF inscrito em um triângulo equilátero ABC de modo que os lados de DEF sejam respectivamente perpendiculares aos lados de ABC. Determine a área do triângulo DEF.

07 Dado um triângulo de altura *h*, considere duas paralelas à base que o dividam em três partes equivalentes. Calcule, em função de *h*, as distâncias destas retas ao vértice do triângulo.

08 Sejam ABCD um trapézio de bases AB e CD e O o ponto de interseção de suas diagonais. Prove que os triângulos ADO e BCO têm áreas iguais.

09 Calcule a área do trapézio de bases 25 e 4 e lados não paralelos 17 e 10.

10 Em um triângulo ABC os lados são medidos por três números inteiros e consecutivos. O número que mede a área é o mesmo que mede o semiperímetro. Calcule as alturas do ΔABC.

11 Um triângulo ABC tem lados AB = 13, BC = 14 e AC = 15. Um ponto P no interior do triângulo dista 3 de AB e 6 de BC. Calcule a distância deste ponto AC.

12 Divida a área de um círculo de raio *R* em *"n"* partes equivalentes por meio de círculos concêntricos de raios $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_{n-1}$. Estabeleça o valor de r_i em função de R, *n* e *i*.

13 O centro de um círculo de raio $r = \sqrt{\pi}$ coincide com o centro de um quadrado. Calcule o lado do quadrado sabendo-se que a porção do quadrado exterior ao círculo possui área igual à porção do círculo exterior ao quadrado.

14 Calcule a área do quadrilátero ABCD inscritível cujos lados medem: AB = 2, BC = 3, *CD* = 4 e *DA* = 7.

15 As cevianas internas AP e BQ de um triângulo ABC se interceptam em um ponto K. Sabendo-se que a área do triângulo KAB é 80 m², do triângulo KPB é 10 m² e do triângulo KAQ é 160 m², a área do triângulo ABC, em metros quadrados, é:

(A) 270.
(B) 330.
(C) 360.
(D) 420.
(E) 520.

16 ABCD é um quadrilátero cujas diagonais se intersectam no ponto I. Sabendo que as áreas de AIB, BIC e CID são, respectivamente, 2 cm², 4 cm² e 6 cm², qual a área, em cm², do quadrilátero ABCD?

(A) 12.
(B) 14.
(C) 15.
(D) 16.
(E) 18.

17 As medianas BM = 8 cm e CN = 12 cm de um triângulo ABC são perpendiculares entre si. Calcule a área do triângulo ABC, em cm²:

(A) 96.
(B) 48.
(C) 64.
(D) 108.
(E) 72.

18 O círculo inscrito ao triângulo retângulo ABC tangencia a hipotenusa BC no ponto P. Sabendo que BP = 4 cm, CP = 9 cm, calcule a área do triângulo ABC.

19 Duas circunferências de raio R são tangentes entre si, e tangentes internamente a uma outra de raio 3R. Calcule a menor das duas áreas limitadas por arcos das três circunferências.

20 Dado o segmento AB=*x*, calcule a área da lúnula determinada pelos arcos capazes de 30° e 45° sobre o segmento AB.

21 **(AFA-99)** Considere um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular, todos com o mesmo perímetro. Sejam A_T, A_Q e A_H as áreas do triângulo, do quadrado e do hexágono, respectivamente. Então, pode-se afirmar que:

(A) $A_T < A_Q < A_H$.
(B) $A_T = A_Q = A_H$.
(C) $A_T < A_Q$ e $A_Q > A_H$.
(D) $A_T < A_Q$ e $A_Q = A_H$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

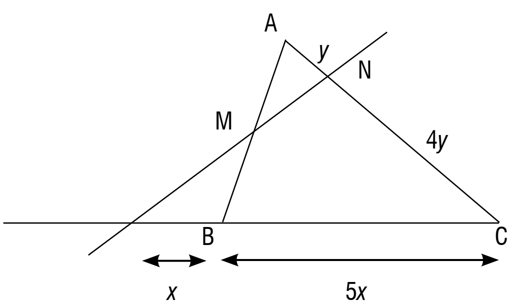
01 Calcule os lados de um triângulo sabendo-se que suas alturas medem 3 cm, 4 cm e 2,4 cm.

02 Em um trapézio isósceles de bases 10 e 6, as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases. Determine a área desse trapézio.

03 Considere duas cordas de um semicírculo de raio 6 que determinam neste semicírculo arcos de 60º e 120º. Calcule a área da figura limitada por essas cordas e pelo semicírculo.

04 Calcule em função das bases *a* e *b* de um trapézio, o comprimento do segmento das paralelas às bases que divide o trapézio em dois outros equivalentes.

05 Calcule a razão entre as áreas dos triângulos AMN e ABC, na figura abaixo.



06 No triângulo ABC, AB = c, BC = a, CA = b. Uma reta corta AB em F, BC em D e o prolongamento de AC em E. O triângulo tem área igual a 36. Se $CD = \frac{a}{3}$ e $CE = \frac{b}{3}$, calcule a área do triângulo BDF.

07 Um triângulo equilátero ABC tem 60 cm de perímetro. Prolonga-se a base BC e sobre esse prolongamento toma-se CS = 12 cm. Une-se o ponto S ao ponto médio (M) do lado AB. A interseção de AC e MS é G. Calcule a área do quadrilátero BCGM.

08 Seja ABC um triângulo de área 1. Sejam D, E e F pontos em seu interior tais que:
- D é ponto médio de CE;
- E é ponto médio de BF;
- F é ponto médio de AD.

Determine a área do triângulo DEF.

09 Um triângulo acutângulo ABC está inscrito em um círculo. Sendo AM, BN e CP diâmetros, prove que a área do hexágono APBMCN é o dobro da área do triângulo ABC.

10 Se um dos lados não paralelos de um trapézio mede 12 cm e dista 6 cm do meio do outro lado não paralelo, determine a área do trapézio.

11 Dados 3 pontos consecutivos A, B e C sobre uma reta r, traçam-se três semicírculos de diâmetros AB, AC, BC do mesmo lado da reta. Determine a área do triângulo formado pelos pontos de máxima elevação dos três semicírculos , sabendo-se que o segmento BF (F sobre o maior semicírculo), perpendicular a reta r, mede 6 cm.

12 Um dos lados de um quadrilátero simples mede 4 cm. Um lado consecutivo a este é perpendicular e mede 6 cm. O lado oposto ao primeiro mede $3\sqrt{2}$ cm e forma com o segundo um ângulo de 135°. Calcule a área do quadrilátero.

13 São dados dois círculos de raios 4 cm e 9 cm, tangentes externamente entre si. Traçam-se as duas tangentes comuns externas a eles, obtendo-se quatro pontos de tangência com essas retas. Calcule a área do trapézio cujos vértices são esses pontos.

14 Dados dois círculos de raios 4 cm e 6 cm e cuja distância, entre os centros, é de $10\sqrt{2}$ cm, determine a área do triângulo formado por uma tangente comum exterior aos dois círculos e pelas duas tangentes comuns interiores.

15 Um triângulo é dividido em 6 triângulos menores por cevianas concorrentes em um ponto. São S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 as áreas desses triângulos menores, no sentido horário. Prove que $S_1 S_3 S_5 = S_2 S_4 S_6$.

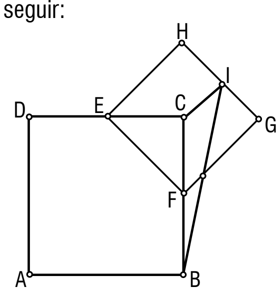
16 Sejam ABCD um trapézio de bases AB e CD e O a interseção de suas diagonais. Se as áreas dos triângulos ABO e CDO são iguais a S_1 e S_2, respectivamente, determine a área do trapézio.

17 Considere um triângulo de área S, inraio *r* e raios dos círculos ex-inscritos iguais a r_a, r_b, r_c.

a. Prove que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

b. Prove que $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$.

18 Observe a figura a seguir:



A figura acima apresenta um quadrado ABCD de lado 2. Sabe-se que E e F são os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, EFGH também é um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

(A) $\frac{7}{8}$

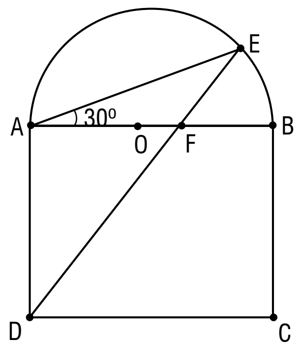
(B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{3}{4}$

19



Na figura acima, ABCD é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é:

(A) $2(3\sqrt{3}+3)$.
(B) $6(4\sqrt{3}-3)$.
(C) $5(4\sqrt{3}-6)$.
(D) $3(4\sqrt{3}-3)$.
(E) $8(4\sqrt{3}-3)$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Dado um triângulo ABC, um ponto W em seu interior é chamado de ponto de Brocard se $W\hat{A}B = W\hat{B}C = W\hat{C}A = \alpha$. Nesse caso, prove que $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$ (e veja que só há 2 pontos de Brocard para cada triângulo).

02 Considere o quadrilátero convexo ABCD tal que as retas BC e AD se cruzem em E. Sendo G e H médios de AC e BD, prove que a área de EGH é um quarto da área de ABCD.

03 Sobre o lado AB de um quadrilátero ABCD tomam-se os pontos A' e B', e sobre o lado CD os pontos C' e D', de forma que AA'=BB'= p.AB, e CC'=DD'=p.CD, com p<0,5. Prove que $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = 1-2p.$.

04 Sejam AD, BE e CF cevianas bissetrizes internas em um triângulo ABC. Prove que $\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, sendo a, b, c os lados do triângulo ABC.

RASCUNHO