MATEMÁTICA APLICADA

1 As grandezas *P*, *T* e *V* são tais que *P* é diretamente proporcional a *T* e inversamente proporcional a *V*. Se *T* aumentar 20% e *V* diminuir 20%, determine a variação percentual de *P*.

RESOLUÇÃO

As três grandezas estão ligadas pela relação: $P = k \cdot \frac{T}{V}$.

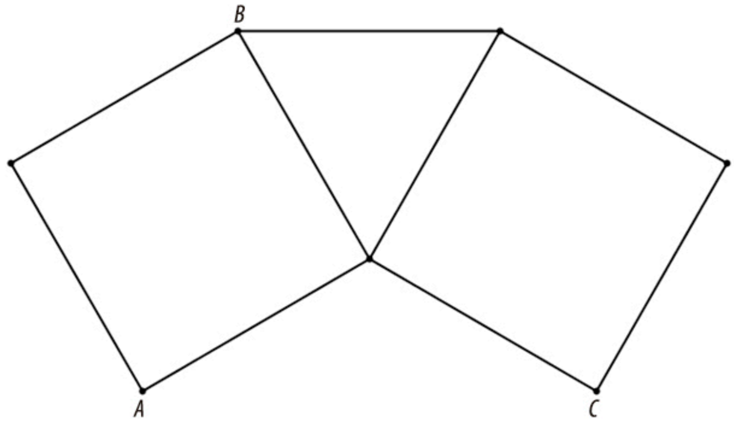
Após as modificações em *T* e em *V*, o novo valor de *P* é $P' = k \cdot \frac{1{,}2T}{0{,}8V} = \frac{1{,}2}{0{,}8} \cdot k \cdot \frac{T}{V} = 1{,}5P = (1 + 0{,}5)P$.

A grandeza P aumentou em 50%.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

2 A figura ao lado mostra dois quadrados e um triângulo equilátero entre eles.
Determine os ângulos internos do triângulo *ABC*.



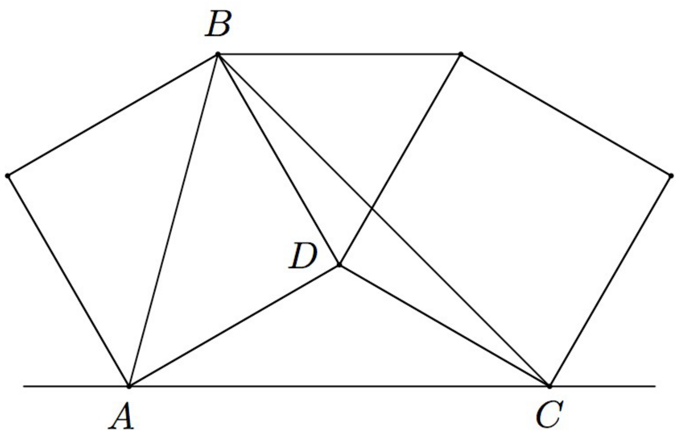
RESOLUÇÃO

Como $A\hat{D}B = 90^o$ então $D\hat{A}B = D\hat{B}A = 45^o$.

Como $B\hat{D}C = 90^o + 60^o = 150^o$ então $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 15^o$.

Como $A\hat{D}C = 120^o$ então $D\hat{A}C = D\hat{C}A = 30^o$

Assim, os ângulos do triângulo ABC são, $\hat{A} = 75^o$, $\hat{B} = 60^o$ e $\hat{C} = 45^o$.



NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

3 Seis bolas brancas e seis bolas pretas estão distribuídas em três caixas e nenhuma caixa contém bolas de uma só cor. A primeira caixa contém 3 bolas, a segunda 4 bolas e a terceira 5 bolas. Sabe-se que a segunda caixa é a única em que o número de bolas pretas é maior do que o número de bolas brancas.
Retirando uma bola de cada caixa, determine a probabilidade de que sejam da mesma cor.

RESOLUÇÃO

De acordo com o enunciado, a única disposição possível para as bolas brancas e pretas nas caixas é:

1ª caixa: B B P
2ª caixa: B P P P
3ª caixa: B B B P P

A probabilidade de retirar uma bola branca de cada caixa é: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$.

A probabilidade de retirar uma bola preta de cada caixa é: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

Logo, a probabilidade de que as três bolas sejam da mesma cor é $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

4 No plano cartesiano são dados os pontos $A=(-3,\ 1)$ e $B=(4,\ 5)$. A reta *r* de equação $kx-y+2=0$ é variável, pois sua posição depende do coeficiente real *k*.

A Determine para que valores de *k* os pontos *A* e *B* ficam de um mesmo lado da reta *r*.

B Determine para que valor de *k* os pontos *A* e *B* ficam equidistantes da reta *r*.

Obs. *os itens são independentes.*

RESOLUÇÃO

A A equação da reta r na forma reduzida é $y=kx+2$. Imaginemos inicialmente que os pontos *A* e *B* fiquem acima de *r*. Nesse caso devemos ter $1>k(-3)+2$, ou seja $k>\frac{1}{3}$ e $5>k\cdot 4+2$, ou seja, $k<\frac{3}{4}$. Assim, se os pontos *A* e *B* estão acima de *r* temos $\frac{1}{3}<k<\frac{3}{4}$. Procedendo da mesma forma imaginando que os pontos *A* e *B* fiquem abaixo de *r* encontraremos $k>\frac{3}{4}$ e $k<\frac{1}{3}$, o que é impossível. Não existem, portanto, valores de *k* para os quais os pontos *A* e *B* fiquem abaixo de r. Assim, os pontos *A* e *B* ficam de um mesmo lado de *r* apenas para $\frac{1}{3}<k<\frac{3}{4}$.

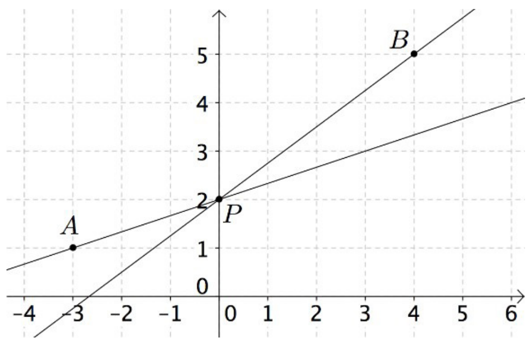
B Se os pontos *A* e *B* são equidistantes de r então duas situações podem ocorrer:

1) *r* é paralela à reta *AB*. Como o coeficiente angular da reta r é k devemos ter $k=\frac{5-1}{4-(-3)}=\frac{4}{7}$.

2) *r* passa pelo ponto médio do segmento *AB*. O ponto médio do segmento *AB* é $M=(\frac{1}{2},\ 3)$ e esse ponto pertence à reta *r*. Devemos então ter $3=\frac{k}{2}+2$, ou seja, $k=2$. Assim, os pontos *A* e *B* ficam equidistantes da reta *r* para $k=\frac{4}{7}$ ou $k=2$.

Solução 2 (somente item a)

A A reta $y=kx+2$ passa pelo ponto $P=(0,\ 2)$ independente do valor de *k*.
Observando o gráfico ao lado, como *P* está abaixo da reta *AB*, uma reta passa por *P* e deixa *A* e *B* de um mesmo lado se, e somente se, seu coeficiente angular for maior do que o da reta *AP* e for menor do que o da reta *PB*.



O coeficiente angular de *AP* é $\frac{2-1}{0-(-3)}=\frac{1}{3}$ e o coeficiente angular da reta *PB* é $\frac{5-2}{4-0}=\frac{3}{4}$.

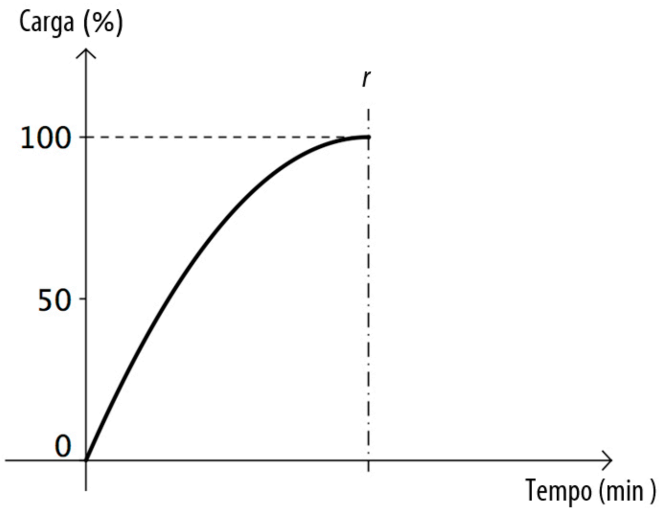
Assim, os pontos *A* e *B* ficam de um mesmo lado de *r* apenas para $\frac{1}{3}<k<\frac{3}{4}$.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

5 João colocou para carregar seu celular que estava completamente descarregado e, em seguida, anotou diversas vezes o tempo decorrido de carregamento, em minutos, e a porcentagem correspondente da carga total que estava acumulada naquele instante. O tempo até o final do carregamento durou exatamente duas horas.

João representou suas observações como pontos no plano cartesiano, onde, no eixo horizontal, assinalou o tempo decorrido após o início do carregamento e, no vertical, a correspondente carga acumulada. Esses pontos sugeriram que uma boa aproximação para a relação entre essas duas grandezas era o arco da parábola de eixo *r* representado no gráfico ao lado:



A Determine a expressão da função que fornece, para cada valor *x* do tempo de carregamento (em minutos), a porcentagem *y* da carga total acumulada até aquele instante.

B Determine a porcentagem da carga total acumulada após 1 hora de carregamento.

RESOLUÇÃO

A A abscissa do ponto mais alto é o tempo total de carregamento: $x = 120$ (min).

Como a reta *r* é o eixo de simetria da parábola a função quadrática correspondente tem como zeros $x = 0$ e $x = 240$. Assim, a expressão da função tem a forma: $y = a\,x(x - 240)$.

No ponto mais alto do gráfico, $x = 120$ e $y = 100$. Logo, $100 = a \cdot 120 \cdot (-120)$, ou seja, $a = -\dfrac{1}{144}$. Assim, a expressão da função é $y = -\dfrac{1}{144}x(x - 240)$ para $0 \leq x \leq 120$.

B Para $x = 60$ obtemos $y = -\dfrac{1}{144} \cdot 60 \cdot (60 - 240) = \dfrac{60 \cdot 180}{144} = 75$. Após 1 hora de carregamento o celular estava com 75% da carga total.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

6 Em uma experiência de Física, para cada valor da variável contínua *x*, obteve-se, no laboratório, um resultado *y*. A tabela a seguir mostra os resultados de cinco medidas realizadas para valores inteiros de *x*:

x	y
1	2,97
2	9,05
3	26,8
4	81,6
5	241

Os resultados sugeriram que, para os valores de *x* do intervalo [1, 5], uma função adequada para modelar essa experiência é exponencial, ou seja, da forma $y = a^x$. De fato, para certo valor inteiro de *a*, os valores encontrados na experiência e os valores dados por essa função diferem muito pouco.

Usando essa função, determine, aproximadamente, para que valor de *x* encontra-se $y = 100$.
Utilize o que for necessário:

$\log 2 = 0{,}301$

$\log 3 = 0{,}477$

$\log 5 = 0{,}699$

RESOLUÇÃO

Para $a = 3$ os valores de y são próximos de 3^x como se vê na tabela a seguir:

x	y		3^x
1	2,97		3
2	9,05		9
3	26,8		27
4	81,6		81
5	241		243

Adotando essa função, devemos encontrar o valor de x tal que $3^x = 100$.

Calculando os logaritmos decimais temos: $x \cdot \log 3 = \log 100 = 2$

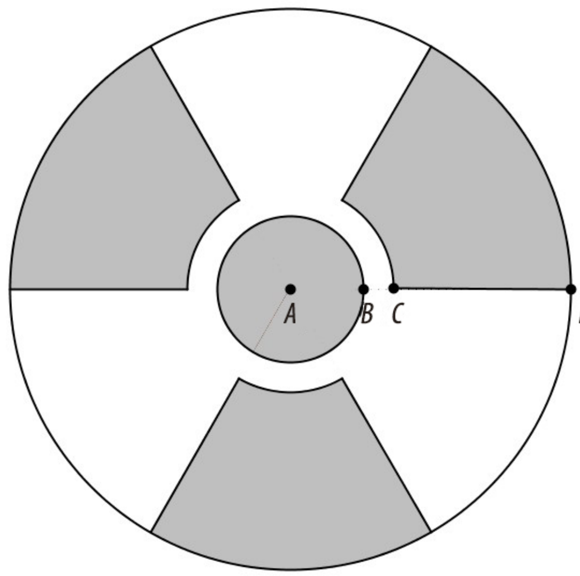
Assim, $x = \dfrac{2}{0{,}477} \cong 4{,}2$.

NOTA

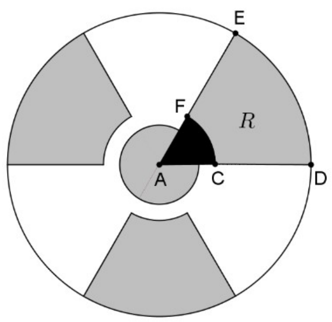
MATEMÁTICA APLICADA

7 A figura ao lado representa o símbolo utilizado para materiais radioativos. Nesse símbolo, aparecem duas circunferências de centro *A*, estando a externa dividida em seis arcos iguais. Todos os segmentos que aparecem no desenho estão contidos em raios da circunferência externa e os três pequenos arcos possuem, também, centro A.
Na figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são colineares e $AB = 2$, $BC = 1$ e $CD = 6$.

Considerando as regiões que estão no interior da circunferência externa, calcule a razão entre as áreas das regiões sombreada e não sombreada.



RESOLUÇÃO



A circunferência externa está dividida em arcos de 60^o.
A área da região *R* da figura ao lado é igual à área do setor ADE subtraída da área do setor ACF, ou seja,

$$S(R) = \frac{\pi \cdot 9^2}{6} - \frac{\pi \cdot 3^2}{6} = 12\pi \ .$$

A área total sombreada compreende três áreas iguais à de *R* mais a área do círculo central, ou seja,

$$S_1 = 3 \cdot 12\pi + \pi \cdot 2^2 = 40\pi \ .$$

A área da região não sombreada na figura dada é $S_2 = \pi \cdot 9^2 - 40\pi = 41\pi$.

A razão entre as áreas das regiões sombreada e não sombreada é $\frac{S_1}{S_2} = \frac{40}{41}$.

NOTA

8 Um fazendeiro compra semanalmente um saco de farelo de milho, um saco de farelo de soja e um saco de farelo de cevada, mas compra também um saco extra de um desses três produtos. Quando o saco extra é o de milho, o peso total dos quatro sacos é de 110kg, quando o saco extra é o de soja, o peso total dos quatro sacos é de 106kg e quando o saco extra é o de cevada, o peso total dos quatro sacos é de 104kg. Os pesos dos sacos de cada produto são sempre iguais.

Determine o peso de um saco de cada produto.

RESOLUÇÃO

Os pesos dos sacos de milho, soja e cevada serão representados, respectivamente, por x, y e z.

Pelas informações do enunciado temos:

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=110 \\ x+2y+z&=106 \\ x+y+2z&=104 \end{aligned}$$

Somando essas equações temos $4(x+y+z)=320$, ou seja, $x+y+z=80$.

A primeira equação pode ser escrita como $x+x+y+z=110$.

Portanto, $x+80=110$, ou seja, $x=30$.

A segunda equação pode ser escrita como $x+y+z+y=106$.

Portanto, $80+y=106$, ou seja, $y=26$.

Substituindo esses valores em qualquer uma das equações encontramos $z=24$.

Os pesos de um saco de milho, soja e cevada são, respectivamente, 30kg, 26kg e 24kg.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

9 Os números naturais, a partir do 1, foram escritos em ordem e arrumados em duas colunas, A e B, como no quadro a seguir:

	A	**B**
Linha 1	1	2
Linha 2	3, 4	5, 6
Linha 3	7, 8, 9	10, 11, 12
Linha 4	13, 14, 15, 16	17, 18, 19, 20
Linha 5	21, 22, 23, 24, 25	26, 27, 28, 29, 30
Linha ..	...	...

Na linha *n*, o conjunto dos elementos da coluna A será representado por L_{nA}, e o da coluna B, por L_{nB}.

A Mostre que o último elemento de L_{nA} é um quadrado perfeito.

B Calcule a soma dos elementos de L_{10B}.

RESOLUÇÃO

A O último elemento de L_{nA} é a quantidade de números naturais escritos desde 1 até ele.

Esse número é: $a_n = 2(1+2+\cdots+(n-1)) + n$.

Assim, $a_n = 2\cdot\dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2} + n = n(n-1)+n = n^2 - n + n = n^2$

B O último elemento de L_{10A} é $10^2 = 100$. Assim $L_{10B} = \{101, 102, \ldots, 110\}$.

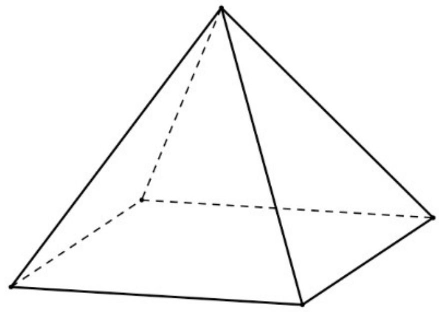
A soma desses elementos é $\dfrac{(101+110)\cdot 10}{2} = 1055$.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

10 As cinco faces de uma pirâmide quadrangular regular serão pintadas e cada face terá uma só cor. Tintas de 5 cores diferentes estão disponíveis e duas faces vizinhas da pirâmide não poderão ter a mesma cor.
De quantas maneiras diferentes a pirâmide poderá ser pintada?

Obs. *pinturas que coincidem por rotação da pirâmide são consideradas iguais.*



RESOLUÇÃO

a) As 5 cores serão utilizadas.
Para escolher a cor da base há 5 possibilidades.

Para pintar as faces laterais temos as permutações circulares das 4 cores restantes que totalizam $(4-1)!=6$ possibilidades.

O número total de possibilidades de pintar a pirâmide usando as 5 cores é $5\cdot 6=30$.

b) Apenas 4 cores serão utilizadas.
Para pintar a base há 5 possibilidades.
Para escolher a cor que vai pintar duas faces laterais opostas há 4 possibilidades.
Para escolher as duas cores que vão pintar as duas outras faces há 3 possibilidades.

O número total de possibilidades de pintar a pirâmide usando 4 cores é $5\cdot 4\cdot 3=60$.

c) Apenas 3 cores serão utilizadas.
Para pintar a base há 5 possibilidades.

Para escolher as duas cores que vão pintar faces laterais opostas há $C_4^2=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$ possibilidades.

O número total de possibilidades de pintar a pirâmide é $30+60+30=120$.

NOTA