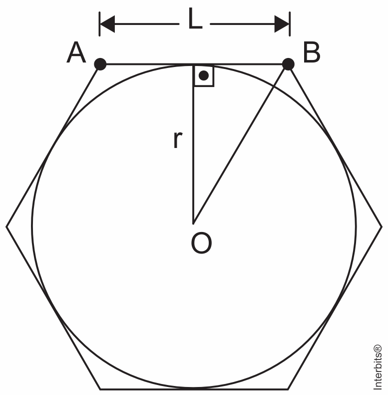
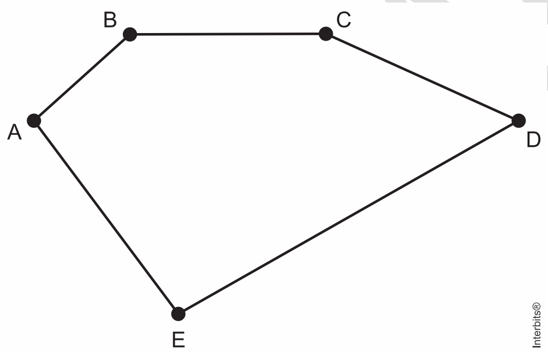
NÍVEL 1

1. Um brinquedo chamado pula-pula, quando visto de cima, consiste de uma cama elástica com contorno em formato de um hexágono regular.



Se a área do círculo inscrito no hexágono é 3π metros quadrados, então a área do hexágono, em metro quadrado, é
a) 9
b) $6\sqrt{3}$
c) $9\sqrt{2}$
d) 12
e) $12\sqrt{3}$

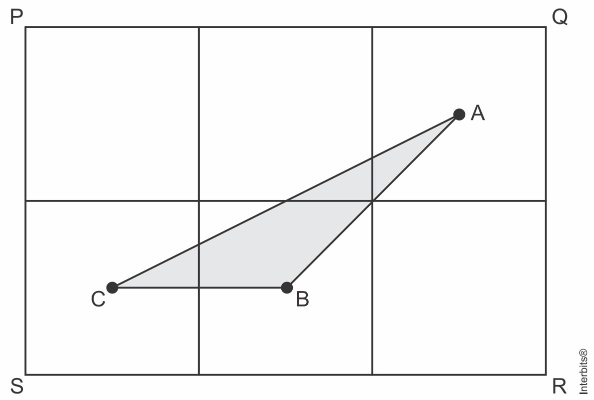
2. Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na figura.



Sabe-se que a diagonal AD mede 50 m e é paralela ao lado BC, que mede 29 m. A distância do ponto B a AD é de 8 m e a distância do ponto E a AD é de 20 m.

A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a
a) 658.
b) 700.
c) 816.
d) 1.132.
e) 1.632.

3. O retângulo $PQRS$ é formado por seis quadrados cujos lados medem 2 cm. O triângulo ABC, em seu interior, possui os vértices definidos pela interseção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.

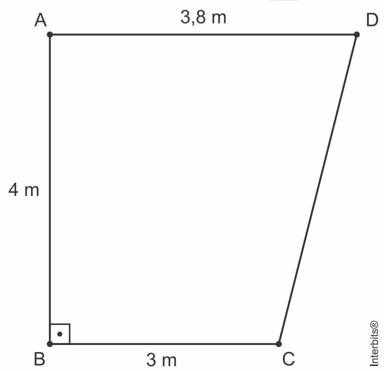


Determine a área do triângulo ABC.

4. Um fabricante recomenda que, para cada m^2 do ambiente a ser climatizado, são necessários $800\ BTUh$, desde que haja até duas pessoas no ambiente. A esse número devem ser acrescentados $600\ BTUh$ para cada pessoa a mais, e também para casa aparelho eletrônico emissor de calor no ambiente. A seguir encontram-se as cinco opções de aparelhos desse fabricante e suas respectivas capacidades térmicas:

Tipo I: $10.500\ BTUh$
Tipo II: $11.000\ BTUh$
Tipo III: $11.500\ BTUh$
Tipo IV: $12.000\ BTUh$
Tipo V: $12.500\ BTUh$

O supervisor de um laboratório precisa comprar um aparelho para climatizar o ambiente. Nele ficarão duas pessoas mais uma centrífuga que emite calor. O laboratório tem forma de trapézio retângulo, com as medidas apresentadas na figura:



Para economizar energia, o supervisor deverá escolher o aparelho de menor capacidade térmica que atenda às necessidades do laboratório e às recomendações do fabricante.

A escolha do supervisor recairá sobre o aparelho do tipo
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Gabarito Comentado – NÍVEL 1

QUESTÃO 1
[B]

Se a área do círculo é $3\pi\ m^2$, então

$$\pi \cdot r^2 = 3\pi \Rightarrow r = \sqrt{3}\ m.$$

Ademais, como o triângulo ABO é equilátero, temos

$$r = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow L = 2\ m.$$

Portanto, a resposta é

$$\frac{3 \cdot 2^2 \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ m^2.$$

QUESTÃO 2
[C]

O resultado é dado por

$$\begin{aligned}(ABCD) + (ADE) &= \frac{1}{2} \cdot (50 + 29) \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 \\ &= 816\ m^2.\end{aligned}$$

QUESTÃO 3
Calculando:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\ cm^2$$

QUESTÃO 4
[C]

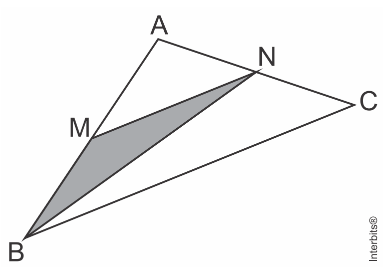
Desde que área do trapézio é dada por

$$\left(\frac{3{,}8 + 3}{2}\right) \cdot 4 = 13{,}6\ m^2,$$

podemos concluir que a quantidade mínima de $BTUh$ necessária é $13{,}6 \cdot 800 + 600 = 11480.$
Em consequência, a escolha do supervisor recairá sobre o aparelho do tipo III.

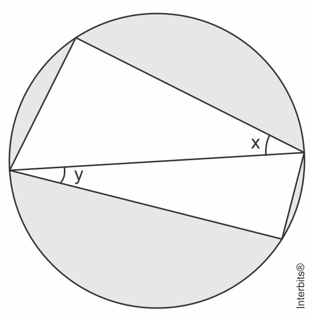
NÍVEL II

1. No triângulo ABC exibido na figura a seguir, M é o ponto médio do lado AB, e N é o ponto médio do lado AC.



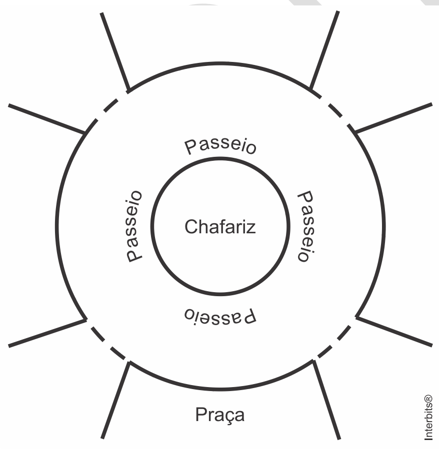
Se a área do triângulo MBN é igual a $t,$ então a área do triângulo ABC é igual a
a) $3t.$
b) $2\sqrt{3}t.$
c) $4t.$
d) $3\sqrt{2}t.$

2. O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio $1.$ A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.

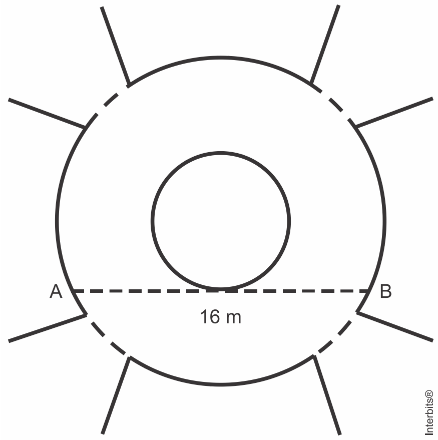


Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e $y,$ é:
a) $\pi + \text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(2y)$
b) $\pi - \text{sen}\,(2x) - \text{sen}\,(2y)$
c) $\pi - \cos\,(2x) - \cos\,(2y)$
d) $\pi - \dfrac{\cos\,(2x) + \cos\,(2y)}{2}$
e) $\pi - \dfrac{\text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(2y)}{2}$

3. A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



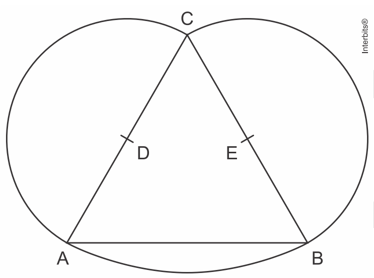
O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e $B,$ conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta $AB: 16\text{ m}.$



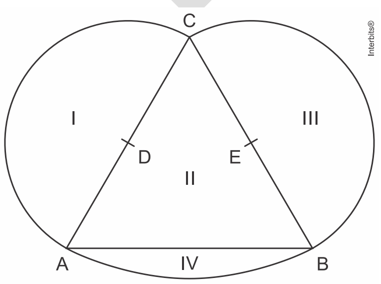
Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi
a) 4π
b) 8π
c) 48π
d) 64π
e) 192π

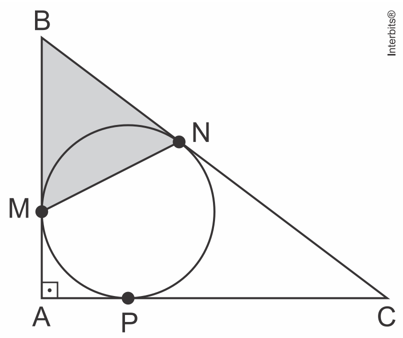
4. Seja ABC um triângulo equilátero de lado $16.$. Com centro em $C,$ temos um arco de círculo entre A e $B,$ como na figura. Sejam D e E os pontos médios de AC e $BC,$ respectivamente. Com centros em D e $E,$ temos semicírculos de A a C e de B a $C,$ como na figura.



a) Determine os raios dos círculos na figura, de centros C, D e $E,$ respectivamente.
b) Calcule o comprimento dos arcos AC, CB e $BA.$
c) Calcule as áreas das quatro regiões indicadas na figura abaixo.



5. Na figura abaixo, M, N e P são os pontos de tangência do triângulo retângulo ABC com sua circunferência inscrita. Se $AB = 3$ e $AC = 4,$ a área do triângulo BMN é igual a:



a) $1,2$
b) $2,0$
c) $1,8$
d) $2,4$
e) $1,6$

6. Uma empresa de construção comprou um terreno de formato retangular por R$ 700.000,00. O terreno tem 90 m de comprimento e 240 m de largura. O engenheiro da empresa elaborou três projetos diferentes para serem avaliados pela direção da construtora, da seguinte maneira:

Projeto 1: dividir o terreno em lotes iguais de $45\text{ m} \times 10\text{ m}$, sem ruas entre os lotes, e vender cada lote por R$ 23.000,00;

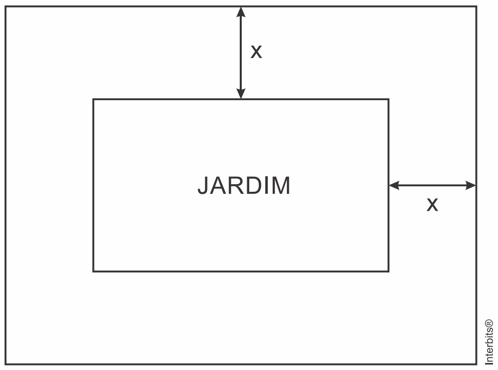
Projeto 2: dividir o terreno em lotes iguais de $20\text{ m} \times 30\text{ m}$, deixando entre lotes ruas de 10 m de largura e 240 m de comprimento, e vender cada lote por 35.000,00.

Projeto 3: dividir o terreno em lotes iguais de $35\text{ m} \times 20\text{ m}$, deixando entre lotes ruas de 20 m de largura e 240 m de comprimento, e vender cada lote por 45.000,00.

A direção da empresa decidiu dividir o terreno e utilizar o projeto que permitirá o maior lucro, sendo que este será igual ao valor obtido pela venda dos lotes, menos o valor da compra do terreno.

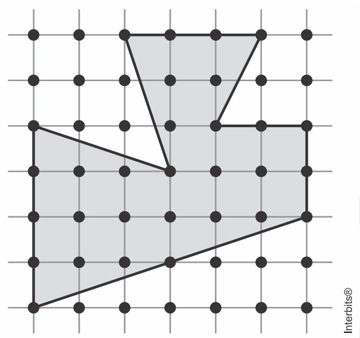
Nesse caso, o lucro da construtora, em real, será de
a) 380.000,00.
b) 404.000,00.
c) 1.104.000,00.
d) 1.120.000,00.
e) 1.460.000,00.

7. Um terreno de 120 m^2 contém um jardim central de $8\text{ m} \times 10\text{ m}$. Em volta do jardim, existe uma calçada de largura X, conforme a figura abaixo:



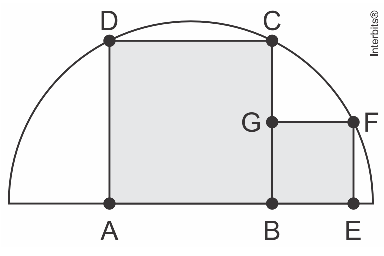
Qual é o valor de X, em metros?
a) 1
b) 3
c) 5
d) 10
e) 11

8. Considere uma malha quadriculada cujas células são quadrados de lado 1. Segundo o teorema de Pick, a área de um polígono simples cujos vértices são nós dessa malha, é igual ao número de nós da malha que se encontram no interior do polígono mais metade do número de nós que se encontram sobre o perímetro do polígono, menos uma unidade.



De acordo com esse teorema, a área do polígono representado na figura acima é igual a:
a) 21
b) 18
c) 23
d) 19
e) 22

9. Considere a semicircunferência y, que possui raio de $5\sqrt{5}$ cm e contém os quadrados ABCD e BEFG, conforme indica a imagem.

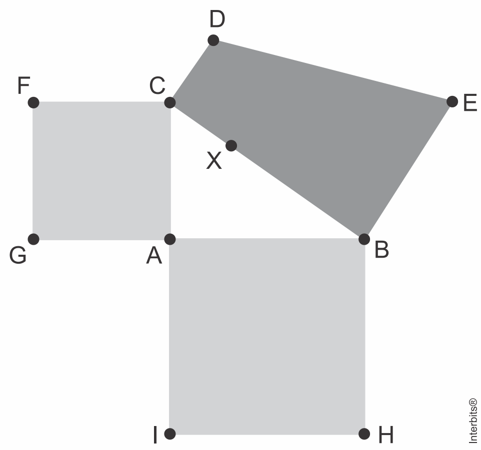


Os vértices C, D e F pertencem à y, e os vértices A, B e E estão sobre seu diâmetro.

A área do quadrado BEFG, em cm^2, é igual a:
a) 25
b) 35
c) 45
d) 55

10. Considere na imagem abaixo:

- os quadrados ACFG e ABHI, cujas áreas medem, respectivamente, S_1 e S_2;
- o triângulo retângulo ABC;
- o trapézio retângulo BCDE, construído sobre a hipotenusa BC, que contém o ponto X.



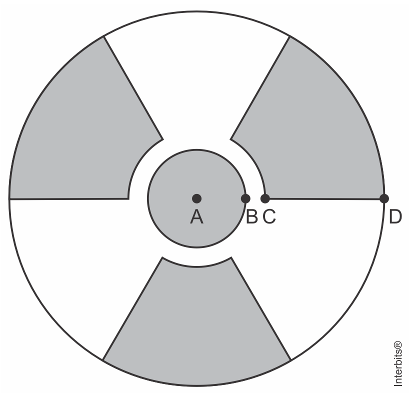
Sabendo que $CD = CX$ e $BE = BX$, a área do trapézio BCDE é igual a:
a) $\dfrac{S_1 + S_2}{2}$
b) $\dfrac{S_1 + S_2}{3}$
c) $\sqrt{S_1 S_2}$
d) $\sqrt{(S_1)^2 + (S_2)^2}$

11. A área de um trapézio mede $1.800\ cm^2$. A altura desse trapézio mede 50 cm. Considere o problema de determinar as medidas das bases desse trapézio, sabendo que essas medidas, em centímetros, são números inteiros divisíveis por 8.

O número de soluções desse problema é:
a) 3.
b) 2.
c) 1.
d) 4.
e) 5.

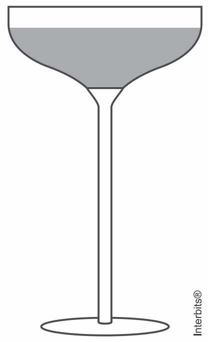
12. A figura abaixo representa o símbolo utilizado para materiais radioativos. Nesse símbolo, aparecem duas circunferências de centro A, estando a externa dividida em seis arcos iguais. Todos os segmentos que aparecem no desenho estão contidos em raios da circunferência externa e os três pequenos arcos possuem, também, centro A.

Na figura, os pontos A, B, C e D são colineares e $AB = 2$, $BC = 1$ e $CD = 6$.



Considerando as regiões que estão no interior da circunferência externa, calcule a razão entre as áreas das regiões sombreada e não sombreada.

13. Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a
a) 192.
b) 300.
c) 304.
d) 320.
e) 400.

Gabarito – NÍVEL II

Resposta da questão 1:
[C]

Sendo M o ponto médio de AB e tendo os triângulos AMN e MBN a mesma altura, temos $(AMN) = (MBN) = t.$ Analogamente, sendo N o ponto médio de $AC,$ vem $(BCN) = (BAN).$
Portanto, a reposta é $4(MBN) = 4t.$

Resposta da questão 2:
[B]

A diagonal do quadrilátero o divide em dois triângulos retângulos. Sendo $2\operatorname{sen}x$ e $2\cos x$ os catetos do primeiro e $2\operatorname{sen}y$ e $2\cos y$ os catetos do segundo, podemos concluir que o resultado é

$$\pi\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}x\cdot 2\cos x-\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}y\cdot 2\cos y=\pi-\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}2y.$$

Resposta da questão 3:
[D]

Sejam O e M, respectivamente, o centro do chafariz e o ponto médio do segmento de reta AB. Logo, se $R=\overline{OB}$ é o raio da praça e $r=\overline{OM}$ é o raio do chafariz, então, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$R^2=r^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2-r^2=64.$$

A área do passeio é $\pi\cdot(R^2-r^2)=64\pi\text{ m}^2$.

Resposta da questão 4:
a) Centro C: 16
Centros A e B: 8

b) Teremos:

$$m(AC)=\frac{2\cdot\pi\cdot 8}{2}=8\cdot\pi$$

$$m(BC)=\frac{2\cdot\pi\cdot 8}{2}=8\cdot$$

$$\pi m(AB)=\frac{2\cdot\pi\cdot 16\cdot 60^\circ}{360^\circ}=\frac{16\cdot\pi}{3}$$

c) Teremos:

$$A_I=\frac{\pi\cdot 8^2}{2}=32\cdot\pi$$

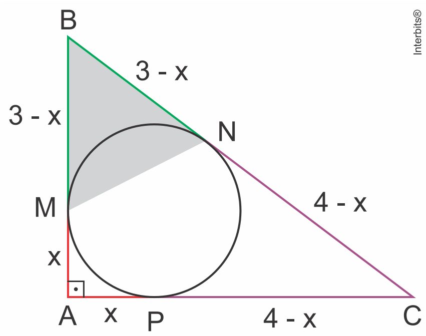
$$A_{II}=\frac{16^2\cdot\sqrt{3}}{4}=64\cdot\sqrt{3}$$

$$A_{III}=A_I=32\cdot\pi$$

$$A_{IV}=\frac{\pi\cdot 16^2\cdot 60^\circ}{360^\circ}-\frac{16^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{128\cdot\pi}{3}-64\cdot\sqrt{3}$$

Resposta da questão 5:
[E]

Do enunciado e da figura, temos:



No triângulo $ABC,$
$(BC)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5$

Daí,
$3 - x + 4 - x = 5 \Rightarrow x = 1$

Ainda no triângulo $ABC,$
$\text{sen}\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{4}{5}$

Assim, sendo S a medida da área do triângulo $BMN,$ temos:
$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{4}{5} \Rightarrow S = 1{,}6$

Resposta da questão 6:
[B]

No projeto 1, o número de lotes é igual a $2 \cdot 24 = 48.$ Logo, o lucro será
$48 \cdot 23000 - 700000 = \text{R\$ } 404.000{,}00.$

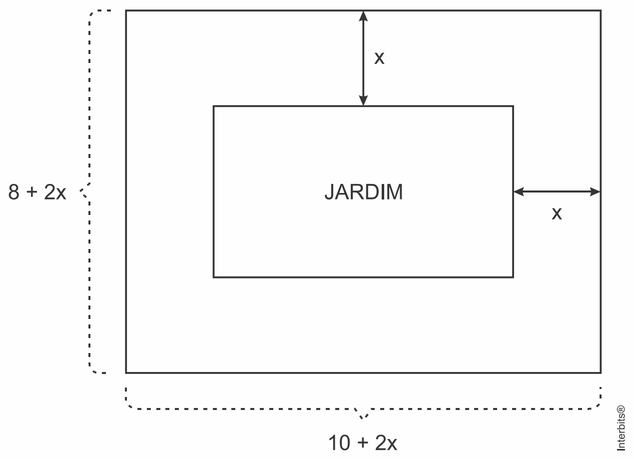
No projeto 2, o número de lotes é $3 \cdot 8 = 24.$ Desse modo, o lucro será
$24 \cdot 35000 - 700000 = \text{R\$ } 140.000{,}00.$

No projeto 3, o número de lotes é $2 \cdot 12 = 24.$ Em consequência, o lucro será
$24 \cdot 45000 - 700000 = \text{R\$ } 380.000{,}00.$

Portanto, deverá ser escolhido o Projeto 1.

Resposta da questão 7:
[A]

As dimensões do terreno são dadas por $8 + 2x$ e $10 + 2x,$ portanto sua área será dada por:



$(8 + 2x) \cdot (10 + 2x) = 120$

$80 + 16x + 20x + 4x^2 = 120$

$4x^2 + 36x - 40 = 0$

$x^2 + 9x - 10 = 0 \Rightarrow x = -10 \text{ ou } x = 1$

Portanto, $x = 1$ metro.

Resposta da questão 8:
[A]

Do enunciado e da figura, a área do polígono representado na figura é $14 + \frac{16}{2} - 1 = 21.$

Resposta da questão 9:
[A]

Sejam O, L e $\ell,$ respectivamente, o centro da circunferência, a medida do lado do quadrado $ABCD$ e a medida do quadrado $BEFG.$ Desse modo, pelo Teorema de Pitágoras, do triângulo $OBC,$ encontramos

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow (5\sqrt{5})^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2$$
$$\Rightarrow L = 10\,\text{cm}.$$

Em consequência, pelo Teorema de Pitágoras, do triângulo $OEF,$ vem

$$\overline{OF}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow (5\sqrt{5})^2 = (\ell + 5)^2 + \ell^2$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 + 5\ell - 50 = 0$$
$$\Rightarrow \ell = 5\,\text{cm}.$$

Portanto, segue que a resposta é $5^2 = 25\,\text{cm}^2.$

Resposta da questão 10:
[A]

Tem-se que $(ACFG) = \overline{AC}^2 = S_1$ e $(ABHI) = \overline{AB}^2 = S_2.$ Logo, do triângulo $ABC,$ pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = S_1 + S_2.$$

Portanto, segue que a área do trapézio $BCDE$ é dada por

$$\begin{aligned}(BCDE) &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{CD} + \overline{BE}) \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{CX} + \overline{BX}) \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}^2 \\ &= \frac{S_1 + S_2}{2}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 11:
[D]

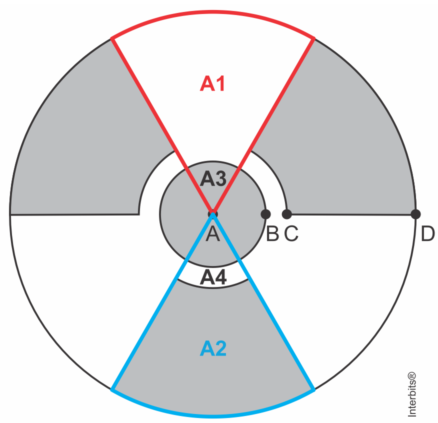
Calculando:

$$S=\frac{(b+B)\cdot h}{2}=\frac{(b+B)\cdot 50}{2}=1800\Rightarrow b+B=72$$

$$\frac{b}{8}+\frac{B}{8}=\frac{72}{8}\Rightarrow\frac{b}{8}+\frac{B}{8}=9$$

$$2\ n^{os}\ \text{inteiros cuja soma é } 9\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}1\text{ e }8\Rightarrow 1\cdot 8+8\cdot 8=72\\ 2\text{ e }7\Rightarrow 2\cdot 8+7\cdot 8=72\\ 3\text{ e }6\Rightarrow 3\cdot 8+6\cdot 8=72\\ 4\text{ e }5\Rightarrow 4\cdot 8+5\cdot 8=72\end{matrix}\right\}4\text{ possibilidades}$$

Resposta da questão 12:
Calculando:



$$A_3=\frac{\pi\cdot\left(\overline{AB}\right)^2}{6}=\frac{\pi\cdot(2)^2}{6}\Rightarrow A_3=\frac{2\pi}{3}$$

$$A_2=\frac{\pi\cdot\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}\right)^2-\pi\cdot\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)^2}{6}=\frac{81\pi-9\pi}{6}\Rightarrow A_2=12\pi$$

$$S_{sombreado}=6\cdot A_3+3\cdot A_2=6\cdot\frac{4\pi}{6}+3\cdot 12\pi\Rightarrow S_{sombreado}=40\pi$$

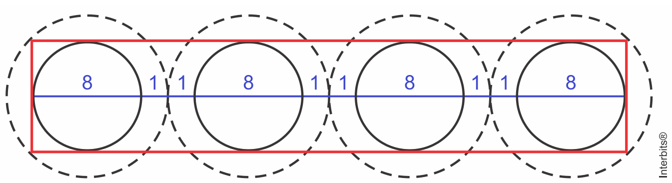
$$S_{total}=\pi\cdot\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}\right)^2=81\pi$$

$$S_{branco}=S_{total}-S_{sombreado}=81\pi-40\pi\Rightarrow S_{branco}=41\pi$$

$$\frac{S_{sombreado}}{S_{branco}}=\frac{40}{41}$$

Resposta da questão 13:
[C]

As taças devem ficar alinhadas, portanto seus diâmetros também ficarão. O desenho a seguir demonstra a disposição das taças, sendo os círculos menores suas bases (raio de 4 cm) e os círculos maiores pontilhados suas bordas superiores (raio de 5 cm). Em vermelho está delimitada a área mínima da bandeja.



Assim, a área mínima seria:
$A = 38 \cdot 8 = 304\ cm^2$

NÍVEL 3

1. O TANGRAM é um quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos retângulos isósceles, um paralelogramo e um quadrado que, ao serem colocadas lado a lado, sem sobreposição, formam um quadrado $ABCD$, conforme mostra a figura 01.

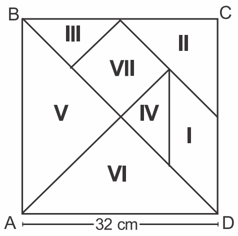


Figura 01

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tangram. Acesso: 24 de set. 2017. (adaptado)

Com as peças desse TANGRAM, pode-se formar uma casinha, como a representada na figura 02.

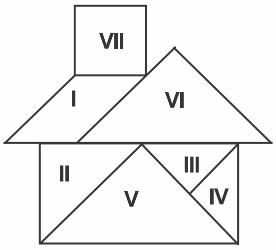
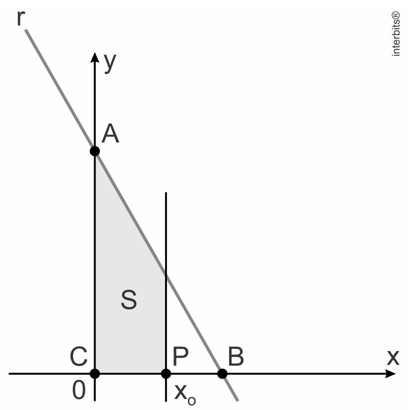


Figura 02

Suponha que as superfícies I, II, III e IV serão revestidas com pedaços de isopor que foram comprados em quadrados de área igual a $45\ mm^2$. Se o quadrado $ABCD$ tem lado igual a $32\ cm$, a quantidade mínima "inteira" de pedaços de isopor necessária para cobrir toda a superfície desejada é
a) 853.
b) 854.
c) 1.137.
d) 1.138.

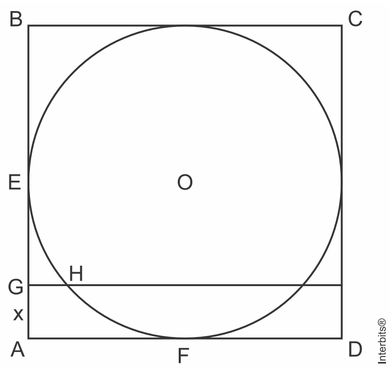
2. Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r, que passa por $A(0, 4)$ e $B(2, 0)$, e pela reta perpendicular ao eixo x no ponto $P(x_0, 0)$, sendo $0 \leq x_0 \leq 2$.



Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices $C(0, 0)$, A e B, o valor de x_o deve ser igual a:

a) $2-\sqrt{2}$
b) $3-\sqrt{2}$
c) $4-\sqrt{2}$
d) $5-\sqrt{2}$

3. Considere, como na figura, um quadrado $ABCD$ de lado 2 e um círculo inscrito de centro O e raio 1. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente.



a) Calcule a área do quadrado e a área do círculo.
b) Calcule a área da região limitada pelos segmentos AE, AF e pelo arco EF.
c) Seja GH um segmento de reta paralelo ao lado AD, em que G pertence ao segmento AE e H pertence ao arco EF. Sabendo que os pontos A, H e C são colineares, calcule a área da região limitada pelos segmentos AF, AG, GH e pelo arco FH.

Gabarito – NÍVEL III

Resposta da questão 1:
[B]

Observe que as áreas são dadas pela metade do quadrado menos a área VII, ou seja, a área do triangulo BCD menos a área VII.

Note que do fato do lado do quadrado valer 32 sua diagonal valerá $32\sqrt{2}$, via Teorema de Pitágoras (uma das principais propriedades do quadrado).

Observe que a diagonal BD divide-se em quatro, e uma dessas quatro partes representam o lado do quadrado, no caso, da área VII. Sendo assim, dividindo o valor da diagonal por quatro obtendo o lado do quadrado, logo:

$$\frac{32\sqrt{2}}{4} = 8\sqrt{2}$$

Como a área procurada é a área do triângulo BCD menos a área VII, temos:

$$A_{BCD} - A_{VII} = \left(\frac{32 \times 32}{2}\right) - \left(8\sqrt{2} \times 8\sqrt{2}\right) = 512 - 128 = 384$$

$512 - 128 = 384\ cm^2$ ou 38400 milímetros quadrados.

Dividindo pelos quadrados de isopor temos:

$$\frac{38400}{45} = 853{,}3$$

Logo, o mínimo devera ser de 854 peças.

Resposta da questão 2:
[A]

$$S\square = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \rightarrow \text{Metade de } S\square \text{ será } 2$$

$$\text{Reta } r \rightarrow a = \frac{0-4}{2-0} = -2 \rightarrow y = -2x + 4$$

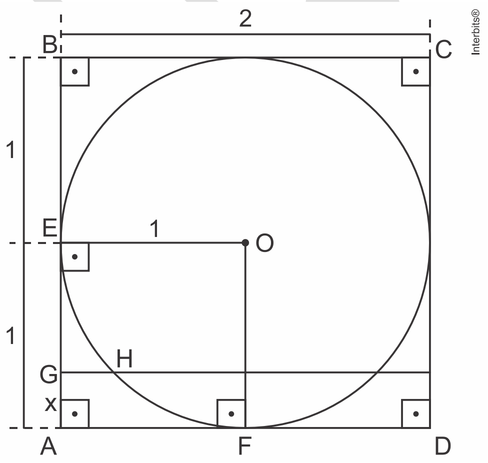
$$\text{Ponto } D = (x_0, y) \rightarrow y = -2x_0 + 4 \ \text{ com } \ x_0 < 2$$

$$S_{trapézio} = \frac{(4 - 2x_0 + 4) \cdot x_0}{2} = 2 \rightarrow -2x_0^2 + 8x_0 - 4 = 0 \rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \rightarrow \Delta = 8$$

$$x_0 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 + \sqrt{2} \rightarrow 2 + \sqrt{2} > 2 \text{ (não convém)} \\ x_0 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

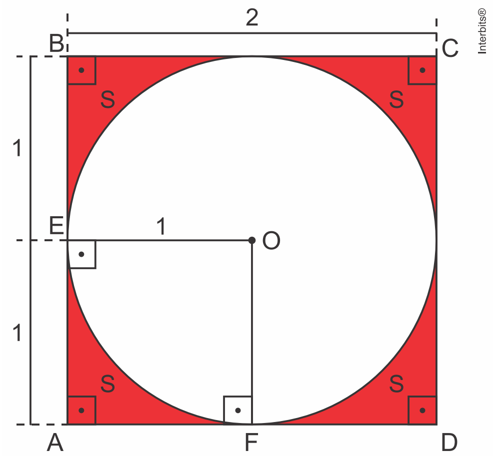
Resposta da questão 3:
a) Teremos:



Do enunciado e da figura, temos:

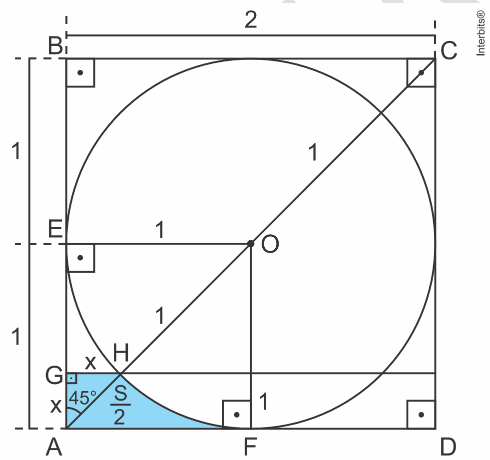
$$S_{quadrado} = 2^2 = 4$$
$$S_{círculo} = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

b) Teremos:



$$4S + \pi = 4$$
$$4S = 4 - \pi$$
$$S = 1 - \frac{\pi}{4}$$

c) Teremos:



No triângulo AGH,

$$(AH)^2 = x^2 + x^2$$
$$(AH)^2 = 2x^2$$

Como $AH > 0$ e $x > 0$,

$$AH = x\sqrt{2}$$

No triângulo ABC,

$$(AC)^2 = 2^2 + 2^2$$
$$(AC)^2 = 2 \cdot 2^2$$

Como $AC > 0,$
$$AC = 2\sqrt{2}$$

Então,
$$AC = 2AH + 2$$
$$2\sqrt{2} = 2 \cdot x\sqrt{2} + 2$$
$$\sqrt{2} = x\sqrt{2} + 1$$
$$x\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$
$$\left(x\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$
$$2x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$x^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$$
$$x^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

Assim, a área pedida é dada por:
$$\frac{x \cdot x}{2} + \frac{S}{2}$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{S}{2}$$
$$\frac{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}{2} + \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{2}$$
$$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$
$$\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8}$$