Estratégia
Militares

Aula 09

Binômio de Newton

EsPCEx - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 - Introdução

Olá, querido aluno(a).

Chegamos a uma aula rica de fórmulas. Ainda que isso seja verdade, e é (rsrsrs), não podemos nos prender a somente às decorebas. Faz-se necessário um entendimento como um todo, para que vai gabarite qualquer questões deste tema na sua prova.

Aconselho ler o pdf antes mesmo de partir para o vídeo, isso fará você entender melhor.

Sem mais, vamos à luta!

2 – Números Binomiais e o Triângulo de Pascal

1 – Definição de Números Binomiais

Vamos no prender ao conjunto dos números naturais como o seguinte: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$. Assim, temos como definição: um número binomial (também chamado de coeficiente binomial ou ainda, de números combinatórios) é um número escrito no formato $\binom{n}{p}$ (lê-se "binomial n, p"), que é definido da seguinte forma:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} \Rightarrow Número\ Binomial$$

Para que um número binomial tenha resultado natural, as condições abaixo devem ser satisfeitas: para que $\binom{n}{p}$ seja um número natural, devemos ter $n \geq p$ com $n, p \in \mathbb{N}$. Dessa forma, não estaremos estudando números binomiais que não sejam naturais, como os seguintes: $\binom{3}{8}, \binom{\pi}{1}, \binom{\sqrt{50}}{3}$. Esses binomiais não nos são interessantes e não serão cobrados em seus exames.

Devemos nos lembrar aqui o que significa $C_{n,p}$. Trata-se, como vimos na aula passada da combinação de n elementos tomados p a p. Dessa forma, podemos deduzir, a partir da definição de $\binom{n}{p}$ que:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

A definição verdadeira de número binomial, conforme foi definida por Isaac Newton, envolve o desenvolvimento de binômio do tipo $(x+y)^n$, com $n \in \mathbb{Z}^+$. Os números que multiplicam as variáveis desse desenvolvimento são os "verdadeiros" números binomiais. É plenamente possível provar que esses binomiais têm valores idênticos àqueles calculados nas combinações simples (essa importante igualdade entre números binomiais e combinações simples é a conclusão do chamado Teorema do Coeficiente Binomial).

Vejamos um exemplo de cálculo utilizando os números binomiais.

Exemplo:

Calcule o valor de $\binom{4}{2}$.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,.\,(4-2)!}$$

$$\frac{4!}{2!\,.\,4!}$$

$$\frac{4.\,3.\,2!}{2\,.\,2!}$$

$$\frac{4.\,3}{2} = 6$$

Dessa forma, conclui-se que $\binom{4}{2} = 6$.

2 - Nomenclaturas

Segue, abaixo, algumas nomenclaturas. Dado o número binomial $\binom{\boxed{n}}{\boxed{p}}$, temos que:

$n \rightarrow$ **índice superior ou base**

$p \rightarrow$ **índice inferior ou ordem**

$\binom{n}{p} \rightarrow$ **número binomial**

3 - Propriedades

Aprenderemos, em seguida, seis propriedades referentes à utilização dos números binomiais.

- **Ordem nula**: Um número binomial que tenha ordem nula será sempre igual a 1, isto é:

$$\binom{n}{0} = 1$$

Façamos os cálculos:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,.\,(n-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{1.\,n!}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

- **Ordem igual à unidade**: Em matemática, quando um determinado valor é dito igual à unidade, está se querendo dizer que aquele valor é igual a 1. Como essas expressões são utilizadas em exames diversos, resolvi coloca-la aqui para que você a veja sendo utilizada, tudo bem? Bom, vamos então à propriedade. Um número binomial que tenha ordem igual à unidade será sempre igual a base, isto é:

$$\boldsymbol{\binom{n}{1} = n}$$

Façamos os cálculos:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,.\,(n-1)!}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1.\,(n-1)!}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n.\,(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

- **Ordem igual à base**: Um número binomial que tenha ordem igual à base será sempre igual a 1, isto é:

$$\boldsymbol{\binom{n}{n} = 1}$$

Demonstração:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,.\,(n-n)!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,.\,0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,.\,1}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!}$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

➢ **Números binomiais complementares**: observe bem os pares de números binomiais a seguir:

$$\binom{8}{2} \text{ e } \binom{8}{6};$$

$$\binom{13}{3} \text{ e } \binom{13}{10}$$

Consegue perceber um padrão presente em cada par? Vamos analisar um a um.

$$\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{2}} \text{ e } \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{6}}$$

Ele tem base 8 e ordem 2; fazendo a conta $8 - 2$ encontramos 6, que é justamente a ordem de $\binom{8}{6}$.

Agora observe o outro par:

$$\binom{\mathbf{13}}{\mathbf{3}} \text{ e } \binom{\mathbf{13}}{\mathbf{10}}$$

Veja que $13 - 3 = 10$ e $13 - 10 = 3$, isto é, a subtração da base e da ordem de $\binom{\mathbf{13}}{\mathbf{3}}$ resulta na ordem de $\binom{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}$ e vice versa.

Conclusão do que acabamos de ver: o binomial complementar de $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}$ é:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-p}}$$

E agora, vamos à propriedade.

Um número binomial qualquer será sempre igual ao seu complementar. Algebricamente, podemos escrever a propriedade acima da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Demonstração:

Comecemos utilizando a definição de números binomiais para $\binom{n}{n-p}$, lembrando-nos sempre de que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,[n-(n-p)]!}$$

Colocando o sinal de menos em evidência no segundo fator do denominador, temos:

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,(n-n+p)!}$$

Simplificando os elementos simétricos, temos:

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$$

Reescrevendo o lado direito da igualdade na forma de número binomial, temos:

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$$

Logo:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Abaixo, seguem algumas consequências da demonstração que acabamos de ver.

Conforme propriedades anteriores, podemos dizer que:

$$\binom{n}{n} = 1 \text{ e } \binom{n}{0} = 1$$

Veja que:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n}$$

Segundo a propriedade do número binomial complementar, podemos substituir o elemento destacado. Veja:

$$\Rightarrow \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

Logo:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

- **Relação de Stifel**: A relação de Stifel diz que somando dois números binomiais com ordens consecutivas $(p\ e\ p+1)$ de mesma base (n), obtemos um outro elemento binomial de base $(n+1)$ e ordem $(p+1)$. Assim:

$$\boldsymbol{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$

Vejamos um exemplo:

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$$

Demonstração:

Sabemos que:

$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,.\,[(n+1)-(p+1)]!}$$

Ou seja,

$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,.\,(n-p)!}$$

Agora, imaginemos uma soma de números binomiais da forma:

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!\,.\,[n-(p+1)]!}$$

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1).\,p!\,.\,(n-p-1)!}$$

Multiplique o numerador e o denominador da segunda fração por $n-p$:

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}+\frac{n!\,.\,(\boldsymbol{n-p})}{(p+1)\,.\,p!\,.\,(n-p-1)!.\,(\boldsymbol{n-p})}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1).\,p!\,.\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}\cdot\left(1+\frac{n-p}{p+1}\right)$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}\cdot\left(\frac{p+1+n-p}{p+1}\right)$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}\cdot\left(\frac{n+1}{p+1}\right)$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{(n+1).\,n!}{(p+1).\,p!\,.\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{(n+1)!}{(p+1)!\,.\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

- **Soma de binomiais com ordens consecutivas até a base**: uma soma de binomiais de mesma base com ordens consecutivas até igualar ao valor da base será igual a uma potência de 2, cujo expoente será igual ao valor da base dos números binomiais. Veja:

$$S_1=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$$

$$S_2=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$

$$S_3=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$$

Veja que, em todas as somas acima, cada parcela possui base constante e as ordens crescentes desde 0 até o valor da base. O que aprenderemos aqui é a calcular essa soma. Em primeiro lugar, para uma base n qualquer, podemos escrever essa soma como segue:

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Utilizando a notação de somatório:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Então, veja como é simples o cálculo daquelas três somas que te propus como exemplo:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 16$$
$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$$
$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$$

2 – Triângulo Pascal

Aqui nessa seção aprenderemos a utilizar uma ferramenta útil na resolução de certos problemas. Essa ferramenta é chamada de Triângulo de Pascal. Tudo começa com um triângulo numérico como o abaixo:

$$\boldsymbol{Linha\ 0 \longrightarrow 1}$$
$$\boldsymbol{Linha\ 1 \longrightarrow 1 \quad 1}$$

Fique ligado que as extremidades do triângulo, como veremos a seguir, serão sempre iguais a 1.

Segue a regra simples de construção: logo abaixo de dois números (destacados em amarelo) aparecerá um terceiro (destacado em vermelho) igual à soma dos dois. Veja com isso a próxima linha desse triângulo.

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{Linha\ 0 \longrightarrow 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 1 \longrightarrow 1 \quad 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 2 \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1} \end{array}$$

Veja então que o 3 da linha 3 é o resultado da soma $1 + 2$. Observe:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{Linha\ 0 \longrightarrow 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 1 \longrightarrow 1 \quad 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 2 \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 3 \longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \end{array}$$

Veja, então, que o padrão é bem simples de ser entendido. Dois números quaisquer somados sempre resultarão no número imediatamente abaixo ao segundo dentre eles.

$$\begin{array}{llllllll} \boldsymbol{Linha\ 0 \longrightarrow 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 1 \longrightarrow 1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 2 \longrightarrow 1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 3 \longrightarrow 1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 4 \longrightarrow 1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 5 \longrightarrow 1} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 6 \longrightarrow 1} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{20} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{1} \end{array}$$

E assim segue com essa padronização. Observe um triângulo de Pascal construído até a linha 10:

$$\begin{array}{llllllllllll} \boldsymbol{Linha\ 0} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} \\ \boldsymbol{Linha\ 1} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 2} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 3} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 4} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 5} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 6} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{20} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 7} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{21} & \boldsymbol{35} & \boldsymbol{35} & \boldsymbol{21} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 8} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{28} & \boldsymbol{56} & \boldsymbol{70} & \boldsymbol{56} & \boldsymbol{28} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 9} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{36} & \boldsymbol{84} & \boldsymbol{126} & \boldsymbol{126} & \boldsymbol{84} & \boldsymbol{36} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{Linha\ 10} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{45} & \boldsymbol{120} & \boldsymbol{210} & \boldsymbol{252} & \boldsymbol{210} & \boldsymbol{120} & \boldsymbol{45} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{1} \end{array}$$

A linha de um triângulo de Pascal será identificada pela letra n. A posição de um elemento em uma linha qualquer será identificada pela letra p, e é contada a partir do 0. Por exemplo, na linha 7 do Triângulo de Pascal (dê uma olhada lá na linha 7 do triângulo anterior) temos que o primeiro 1 ocupa a posição 0. E assim poderíamos dizer que, na linha 7, cada elemento ocupa a seguinte posição.

$$\begin{array}{llllllllll}
\textit{Linha } 6 & \rightarrow 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
\boxed{\textit{Linha } 7} & \rightarrow 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\
\textit{Linha } 8 & \rightarrow 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
\end{array}$$

Elemento da linha 7	Posição (p)
1	0
7	1
21	2
35	3
35	4
21	5
7	6
1	7

2.1 - Propriedades do Triângulo de Pascal

Agora que já aprendemos a construir, vamos a alguns fatos importantes sobre o triangulo de Pascal. É, de fato, um triângulo cheio de propriedades; listarei as mais importantes.

- **Números binomiais e o Triângulo de Pascal:** Esse é de fato mais importante acerca de Triângulo de Pascal. É bastante simples de entende-lo. Vejamos aqui o que ele quer dizer: o elemento da linha n e que ocupe a posição p de um Triângulo de Pascal é o número binomial $\binom{n}{p}$.

  Na forma de números binomiais, o nosso triângulo fica assim:

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{Linha\ 0} \longrightarrow & \binom{0}{0} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} \longrightarrow & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} \longrightarrow & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} \longrightarrow & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} \longrightarrow & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} \longrightarrow & \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} \longrightarrow & \binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} \longrightarrow & \binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} \longrightarrow & \binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}$$

Se fizermos os cálculos para cada número binomial, encontraremos o triângulo que aprendemos a montar anteriormente:

$$\begin{array}{llllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \longrightarrow \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Agora faz muito sentido o fato de binomiais do tipo $\binom{n}{0}$ valerem 1: isso é porque eles ocupam as extremidades do Triângulo de Pascal. E vemos, na sua construção, que valem 1, correto?

- **Linhas palindrômicas**: Uma determinada lista de caracteres será dita palindrômica se a leitura independer do sentido adotado. Exemplos: 1674761, arara, ▭ ⊗ ♡ ⊡ ♡ ⊗ ▭.

Por definição, qualquer caracter isolado é considerado um palíndromo em si. Então, por exemplo, 7 é um palíndromo, assim como um artigo definido (a ou o). Bom, segue então a propriedade palindrômica do Triângulo de Pascal:

Os elementos de uma linha qualquer de um Triângulo de Pascal formam uma sequência palindrômica.

$$\begin{array}{llllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \longrightarrow \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Veja por exemplo, a linha 7: $[1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1]$. Veja que, lida de trás para frente, resulta na mesma leitura que a usual. É, portanto, um palíndromo. Agora observe que cada elemento é um número binomial:

$$\left[\binom{7}{0} = 1, \binom{7}{1} = 7, \binom{7}{2} = 21, \binom{7}{3} = 35, \binom{7}{4} = 35, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{6} = 7, \binom{7}{7} = 1\right]$$

Perceba então, que, de fato, números binomiais complementares resultam em valores iguais! Isso acontece porque números binomiais complementares **equidistam** da mediana (termo do meio) da lista.

Outro ponto tão importante quanto sabermos que cada linha inicia e termina com a unidade (1), gostaria de destacar que o 2º elemento e o penúltimo serão iguais ao número que representa a linha do desenvolvimento do Triângulo de Tartaglia (Pascal). Observe:

$$\boldsymbol{Linha\ 7} \Rightarrow \left[\binom{7}{0} = 1, \binom{7}{1} = 7, \binom{7}{2} = 21, \binom{7}{3} = 35, \binom{7}{4} = 35, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{6} = 7, \binom{7}{7} = 1\right]$$

- **Contagens**: Vamos a algumas contagens importantes. Em primeiro lugar, quanto à quantidade de linhas:

Um triângulo de Pascal possui tantas linhas quanto se queria, isto é, infinitas.

Cada linha possui uma determinada quantidade de elementos. Por exemplo, vimos que a linha 7 possui 8 elementos, a linha 10 possui 11, e assim por diante. Dessa forma, podemos dizer que:

A linha n de um Triângulo de Pascal possui $n+1$ termos.

- **Somas das diagonais**: a soma dos elementos das diagonais destacadas abaixo forma uma sequência bem conhecida, chamada: Sequência de Fibonacci. Observe.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$1+1 = a_3 = 2 \ (soma\ dos\ dois\ anteriores)$$

$$2+1 = a_4 = 3 \ (soma\ dos\ dois\ anteriores)$$

$$1+3+1 = a_5 = 5 \ (soma\ dos\ dois\ anteriores)$$

$$3+4+1 = a_6 = 8 \ (soma\ dos\ dois\ anteriores)$$

$$1+6+5+1 = a_7 = 13 \ (soma\ dos\ dois\ anteriores)$$

Assim, podemos dizer que, os resultados das somas dos elementos dessas diagonais formam a Sequência de Fibonacci. Essa sequência possui uma lei de recorrência, mais conhecida da forma:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ou seja, o resultado é igual a soma dos dois elementos anteriores.

- **Somas diagonais de uma outra forma do Triângulo de Pascal**: Observemos mais uma vez um triângulo de Pascal qualquer:

$$\begin{array}{llllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \longrightarrow \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Agora eu vou selecionar uma sequência de elementos de uma diagonal qualquer (começando a partir do lado do triângulo de Pascal). Veja:

$$\begin{array}{llllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \longrightarrow \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Agora, efetue a adição desses elementos. Veja:

$$\begin{array}{lllllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \longrightarrow \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Poderíamos reescrever, a soma de uma diagonal, da seguinte forma:

$$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{4}$$

Ou seja,

$$\begin{array}{lllllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \longrightarrow \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \longrightarrow \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Poderíamos generalizar essa propriedade da seguinte forma:

$$\underbrace{\binom{n-p}{0}+\binom{n-p+1}{1}+\binom{n-p+2}{2}+\cdots+\binom{n-1}{p-1}+\binom{n}{p}}_{soma\ dos\ elementos\ da\ diagonal\ linha\ n\ até\ o\ elemento\ p\ dessa\ diagonal}=\binom{n+1}{p}$$

Em forma de somatório:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n-p+k}{k}=\binom{n+1}{p}}$$

V. **Soma dos elementos da linha de um Triângulo de Pascal**: Primeiro, vejamos um exemplo de Triângulo de Pascal até a linha 6:

$$\begin{array}{llllllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} \\
\boldsymbol{Linha\ 1} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 2} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 3} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 4} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 5} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 6} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 7} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{7} & \mathbf{21} & \mathbf{35} & \mathbf{35} & \mathbf{21} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\
\boldsymbol{Linha\ 8} & \boldsymbol{\longrightarrow 1} & \mathbf{8} & \mathbf{28} & \mathbf{56} & \mathbf{70} & \mathbf{56} & \mathbf{28} & \mathbf{8} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Agora, efetuemos a soma dos elementos de cada linha:

Linha	Elementos presentes na linha	Soma dos elementos da linha
0	1	$1 = 2^0$
1	$1,1$	$2 = 2^1$
2	$1,2,1$	$4 = 2^2$
3	$1,3,3,1$	$8 = 2^3$
4	$1,4,6,4,1$	$16 = 2^4$
5	$1,5,10,10,5,1$	$32 = 2^5$
6	$1,6,15,20,15,6,1$	$64 = 2^6$

A soma dos elementos da linha n de um Triângulo de Pascal é 2^n.

3 – Binômio de Newton e seu Termo Geral

1 – Binômio de Newton

Agora falaremos sobre o desenvolvimento do Binômio de Newton, importante tópico de nosso conteúdo.

O que aprenderemos nessa seção essencialmente é a desenvolver algebricamente binômios como $(x+y)^{11}$, $(x+1)^7$, $(b-6)^{10}$ etc.

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1.x + 1.y$$
$$(x+y)^2 = 1.x^2 + 2xy + 1.y^2$$
$$(x+y)^3 = 1.x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1.y^3$$

Porém, caso queiramos desenvolver binômios como $(x+y)^4$, $(x+y)^7$, teremos um pouco mais de trabalho. Dá pra fazer, claro, mas será mais trabalhoso. A técnica do Binômio de Newton servirá então para remover uma boa parte desse trabalho.

Farei o desenvolvimento de $(x+y)^6$.

Veja que estamos lidando com um binômio elevado à sexta potência. Daí vem a dica para o próximo passo: escreva o x e o y sete vezes (uma unidade a mais que seis), da seguinte forma:

$$\boldsymbol{xy \quad xy \quad xy \quad xy \quad xy \quad xy \quad xy}$$

Agora, escreva o expoente 6 no primeiro x, e vá diminuindo 1 em cada expoente seguinte, dessa forma:

$$\boldsymbol{x^6y \quad x^5y \quad x^4y \quad x^3y \quad x^2y \quad x^1y \quad x^0y}$$
$$\boldsymbol{x^6y^0 \quad x^5y^1 \quad x^4y^2 \quad x^3y^3 \quad x^2y^4 \quad x^1y^5 \quad x^0y^6}$$

Agora, nos coeficientes, desenhe um número binomial ao lado de cada termo, com a base igual ao expoente:

$$\boldsymbol{\binom{6}{\ }x^6y^0 \quad \binom{6}{\ }x^5y^1 \quad \binom{6}{\ }x^4y^2 \quad \binom{6}{\ }x^3y^3 \quad \binom{6}{\ }x^2y^4 \quad \binom{6}{\ }x^1y^5 \quad \binom{6}{\ }x^0y^6}$$

Para a ordem dos números binomiais, comece com zero e vá adicionando um:

$$\boldsymbol{\binom{6}{0}x^6y^0 \quad \binom{6}{1}x^5y^1 \quad \binom{6}{2}x^4y^2 \quad \binom{6}{3}x^3y^3 \quad \binom{6}{4}x^2y^4 \quad \binom{6}{5}x^1y^5 \quad \binom{6}{6}x^0y^6}$$

Calcule cada número binomial. Você pode, se quiser, montar um Triângulo de Pascal até a linha 6 e copiar os resultados, veja:

$$\begin{array}{lllllll}
\boldsymbol{Linha\ 0 \longrightarrow 1} & & & & & & \\
\boldsymbol{Linha\ 1 \longrightarrow 1} & \mathbf{1} & & & & & \\
\boldsymbol{Linha\ 2 \longrightarrow 1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & & & & \\
\boldsymbol{Linha\ 3 \longrightarrow 1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & & & \\
\boldsymbol{Linha\ 4 \longrightarrow 1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & & \\
\boldsymbol{Linha\ 5 \longrightarrow 1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \\
\boldsymbol{Linha\ 6 \longrightarrow 1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Daí substituindo a linha 6 nos números binomiais:

$$\mathbf{1}\boldsymbol{x^6y^0} \quad \mathbf{6}\boldsymbol{x^5y^1} \quad \mathbf{15}\boldsymbol{x^4y^2} \quad \mathbf{20}\boldsymbol{x^3y^3} \quad \mathbf{15}\boldsymbol{x^2y^4} \quad \mathbf{6}\boldsymbol{x^1y^5} \quad \mathbf{1}\boldsymbol{x^0y^6}$$

Intercale todos os termos com sinais positivos e termine as contas:

$$\boldsymbol{x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6}$$

Essa é, então, a forma expandida de $(x+y)^6$. Perceba que, caso quiséssemos fazer $(x-y)^6$, bastaria trocar os sinais das potências ímpares para um sinal negativo, dessa forma:

$$\boldsymbol{x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6}$$

Podemos então generalizar o seguinte:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

Poderíamos escrever a equação acima utilizando-nos da notação de somatório:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

2 – Termo Geral

Vamos retornar ao desenvolvimento de $(x+y)^6$, como fizemos no início desse capítulo:

$$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Você se lembra como cada termo "nasceu"? Vou te ajudar com a correlação a seguir:

$$\underbrace{x^6}_{\binom{6}{0}.x^6.y^0} + \underbrace{6x^5y}_{\binom{6}{1}.x^5.y^1} + \underbrace{15x^4y^2}_{\binom{6}{2}.x^4.y^2} + \underbrace{20x^3y^3}_{\binom{6}{3}.x^3.y^3} + \underbrace{15x^2y^4}_{\binom{6}{4}.x^2.y^4} + \underbrace{6xy^5}_{\binom{6}{5}.x^1.y^5} + \underbrace{y^6}_{\binom{6}{6}.x^0.y^6}$$

Quantos termos essa expansão possui? Ora, contando, percebemos que há 7 termos. Daí, é possível extrapolarmos o seguinte:

A expansão de um binômio elevado à n^{a} potência terá $n+1$ termos.

Veja que $(x+6)^6$ é uma sexta potência, e, portanto, terá $6+1=7$ termos em seu desenvolvimento. Cada termo é identificado pela forma $T_n, n \in \mathbb{N}^*$, de forma, que, por exemplo, na expansão de $(x+y)^6$:

Termo	**Expressão**	**Valor**	**Forma binomial**
Primeiro	T_1	1	$\binom{6}{0}.x^6.y^0$
Segundo	T_2	6	$\binom{6}{1}.x^5.y^1$
Terceiro	T_3	15	$\binom{6}{2}.x^4.y^2$
Quarto	T_4	20	$\binom{6}{3}.x^3.y^3$
Quinto	T_5	15	$\binom{6}{4}.x^2.y^4$
Sexto	T_6	6	$\binom{6}{5}.x^1.y^5$
Sétimo	T_7	1	$\binom{6}{6}.x^0.y^6$

Veja então que, aqui, a contagem começa a partir do 1 e não do 0. Observando as equivalências entre a coluna "Expressão" na tabela acima e a coluna "Forma binomial", percebemos que $T_m = \binom{6}{m-1}.x^{7-m}.y^{m-1}$ (para verificar que isso é de fato verdadeiro , substitua m por 1,2,3 ... ,7 e veja que surgirá exatamente a expressão da coluna "Forma Binomial"). Perceba, porém, que a expressão $\binom{6}{m-1}.x^{7-m}.y^{m-1}$ é diferente daquele presente na fórmula do Binômio de Newton, e isso é ruim para a gente. Então, vamos tentar transformá-la.

Nossa expressão encontra-se assim: $T_m = \binom{6}{m-1}.x^{7-m}.y^{m-1}$. Façam $m = -1 = k$. Teremos então $m = k + 1$, e daí:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}.x^{n-k}.y^k$$

Essa é a expressão mais importante de todo esse livro eletrônico. É o mais recorrente em prova.

Bom, chegamos ao fim desta aula. Espero que tenha entendido. De qualquer forma, aconselho a assistir as aulas em vídeo, para que pegue uma boa bagagem.

Fé na missão.

Agora, vamos praticar um pouco!!

4 – Lista de Questões

01. (EEAR-2000)

A soma das raízes da equação binomial $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5

---

02. (EEAR-2001)

Se $a_n = \frac{n!\cdot(n^2-1)}{(n+1)!}$, então a_{1985} é igual a:

a) 1984
b) 1983
c) $\frac{1985}{1984^2-1}$
d) $\frac{1984^2-1}{1984}$

03. (EEAR-2002)

Considere o sistema:

$$\begin{cases} m+n=4 \\ m^5-\binom{5}{1}m^4n+\binom{5}{2}m^3n^2-\binom{5}{3}m^2n^3+\binom{5}{4}mn^4-n^5=32 \end{cases}$$

onde $\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}\ e\ \binom{5}{4}$ são números binomiais. Então o valor de m é

a) 4
b) 1
c) 2
d) 3

04. (EEAR-2004)

Na equação $(y+3)!+(y+2)!=15(y+1)!$, o conjunto solução é

a) $\{-7,1\}$
b) $\{-7\}$
c) $\{1\}$
d) $\{2\}$

05. (Ita 2020) A expansão decimal do número $100!=100\cdot 99\cdots 2\cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.
b) 21.
c) 22.
d) 23.
e) 24.

06. (Efomm 2020) Assinale a alternativa que apresenta o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2+\frac{1}{x^6}\right)^8$.

a) 1
b) 8

c) 28
d) 56
e) 70

---

07. (Uece 2019) O número inteiro n, maior do que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é

Observação: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a) $n = 6.$
b) $n = 8.$
c) $n = 5.$
d) $n = 7.$

---

08. (Mackenzie 2019) Se $S = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10\}$, o número de pares ordenados distintos, $(A,\ B)$, em que A e B são subconjuntos, disjuntos, de S é

a) 3^{10}
b) $3^{10} - 1$
c) 3^{9}
d) $2^{10} - 1$
e) 2^{10}

---

09. (Ita 2018) Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos

de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7.920, então $a + b$ é

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

---

10. (Fgv 2018) Uma aplicação financeira de C reais à taxa mensal de juros compostos de $x\%$ é resgatada depois de 8 meses no montante igual a C_8 reais. Sendo assim, $\frac{C_8}{C}$ é um polinômio $P(x)$ de grau 8 cujo coeficiente do termo em x^5 será

a) $70 \cdot 10^{-8}$
b) $35 \cdot 10^{-8}$
c) $56 \cdot 10^{-10}$
d) $35 \cdot 10^{-10}$
e) $21 \cdot 10^{-10}$

---

11. (Epcar 2018) O menor dos possíveis coeficientes do termo em x^8, no desenvolvimento de $(2 + x^2 + 3x^3)^{10}$ é igual a

a) 11.240
b) 12.420
c) 13.440
d) 14.720

---

12. (Espcex 2018) Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$ para $x = 89$.

a) $53\ 213\ 009$.
b) $57\ 138\ 236$.
c) $61\ 342\ 008$.
d) $65\ 612\ 016$.
e) $67\ 302\ 100$.

---

13. (Espm 2018) No desenvolvimento do binômio $(x + p \cdot y)^n$, com p e n naturais, o termo $112x^6y^2$ é o terceiro quando feito com potências crescentes de y e o sétimo quando feito com potências crescentes de x. O valor de $p + n$ é igual a:

a) 10
b) 12
c) 9
d) 11
e) 13

---

14. (Espcex) 2017) Determine o algarismo das unidades da seguinte soma $S = \sum_{n=1}^{2016} n!,$ em que $n!$ é o fatorial do número natural $n.$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

---

15. (Ifal 2017) O termo independente no desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^5$ é

a) $-720.$
b) $-360.$
c) $0.$
d) $360.$
e) $720.$

---

16. (Uece 2017) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 18.
b) 24.
c) 34.
d) 30.

---

17. (Mackenzie 2017) O número de valores de $x,$ para os quais os coeficientes binomiais $\binom{6}{2x}$ e $\binom{6}{x^2}$ sejam iguais, é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

---

18. (Fgv 2017) O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ é igual a

a) 120.

b) 90.

c) 81.

d) 60.

e) 54.

---

19. (Mackenzie 2017) Sabendo que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 256$, então o valor de n vale

a) 8

b) 7

c) 6

d) 5

e) 4

---

20. (Espcex 2017) O valor da expressão $E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1$ é igual a

a) $9 \cdot 10^3$

b) $9 \cdot 10^{15}$

c) 10^{15}

d) 999.999

e) $999 \cdot 10^{15}$

---

21. (Esc. Naval 2016) O par ordenado $(x,\ y)$ de números reais, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, satisfaz ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{16} \end{cases}$$

em que x é o menor elemento do par. Se $p = 3x + y$, encontre o termo de ordem $(p+1)$ do binômio $\left(\frac{x^2 z}{\sqrt[5]{143}} - y^2\right)^{15}$ e assinale a opção correta.

a) $-21x^{10}z^5y^{20}$
b) $21x^5z^{10}y^{20}$
c) $-21x^{10}z^5y^{10}$
d) $21x^{32}z^{10}y^{20}$
e) $21x^{10}z^5y^{20}$

---

22. (Espcex 2016) A solução da equação $\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!} = \frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!}$ é um número natural

a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

---

23. (Uece 2016) Se n é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de x, verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, o valor de n é

a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 10.

---

24. (Fgvrj 2016) Um grupo de oito alunos está sendo liderado em um passeio por dois professores e, em determinado momento, deve se dividir em dois subgrupos. Cada professor irá liderar um dos subgrupos e cada aluno deverá escolher um professor.
A única restrição é que cada subgrupo deve ter no mínimo um aluno.
O número de maneiras distintas de essa subdivisão ser feita é

a) 128.
b) 64.

c) 248.

d) 254.

e) 256.

---

25. (Upf 2016) Desenvolvendo o binômio $(2\,x - 3\,y)^{3n}$, obtém-se um polinômio de 16 termos. O valor de n é:

a) 15

b) 10

c) 5

d) 4

e) 2

---

26. (Uece 2016) No desenvolvimento de $x(2\,x + 1)^{10}$ o coeficiente de x^3 é

a) 480.

b) 320.

c) 260.

d) 180.

---

27. (Ime 2016) O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6}$$

a) $\binom{2020}{6}$

b) $\binom{2020}{7}$

c) $\binom{2021}{5}$

d) $\binom{2021}{6}$

e) $\binom{2022}{5}\binom{2022}{5}$

---

28. (Espcex (Aman) 2015) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é igual a

a) 110.
b) 210.
c) 310.
d) 410.
e) 510.

---

29. (Ita 2014) Para os inteiros positivos k e n, com $k \le n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

a) $2^n + 1$.
b) $2^{n+1} + 1$.
c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.
d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
e) $\frac{2^n-1}{n}$.

---

30. (Esc. Naval 2013) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7$ é

a) 30
b) 90
c) 120
d) 270
e) 560

---

31. (Ita 2013) O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1 + x + y)^{10}$ é

a) 3150
b) 6300
c) 75600
d) 81900
e) 151200

32. (Uern 2013) A soma dos algarismos do termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton $\left(\frac{2}{x} + x\right)^8$ é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

33. (Fgv 2013) Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (x + 1)^5$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16

b) 24

c) 32

d) 40

e) 48

34. (Espm 2012) Para $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$, a expressão $\frac{(x^2-1)!\cdot x!}{(x^2-2)!\cdot(x+1)!}$ é equivalente a:

a) $x - 2$

b) $(x - 2)!$

c) $(x - 1)!$

d) x

e) $x - 1$ x − 1

35. (Fgv 2012) O termo independente de x do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$ é

a) 26.

b) 169.

c) 220.

d) 280.

e) 310.

36. (Esc. Naval 2012) Seja m a menor raiz inteira da equação $\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right]! = 1$. Pode-se afirmar que o termo médio do desenvolvimento de $(\sqrt{y} - z^3)^{12m}$ é

a) $\frac{12!}{6!6!} y^{18} z^{\frac{3}{2}}$
b) $\frac{-12!}{6!6!} y^3 z^{18}$
c) $\frac{30!}{15!15!} y^{\frac{15}{2}} z^{45}$
d) $\frac{-30!}{15!15!} y^{\frac{15}{2}} z^{45}$
e) $\frac{12!}{6!6!} y^3 z^{18}$

---

37. (Uespi 2012) Qual o coeficiente de x^7 na expansão de $(2+3x+x^2)^4$?

a) 18
b) 16
c) 14
d) 12
e) 10

---

38. (Uern 2012) Qual é o valor do termo independente de x do binômio $\left(\frac{2}{x^2} + x\right)^n$, considerando que o mesmo corresponde ao sétimo termo de seu desenvolvimento?

a) 435
b) 672
c) 543
d) 245

---

39. (Ifal 2011) No desenvolvimento $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes binominais do quarto e do décimo terceiro termos são iguais. Então, o termo independente de x é o:

a) décimo.
b) décimo-primeiro.
c) nono.
d) décimo-segundo.
e) oitavo.

40. (Ita 2010) A expressão $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$.

b) $2690\sqrt{5}$.

c) $2712\sqrt{5}$.

d) $1584\sqrt{15}$.

e) $1604\sqrt{15}$.

41. (Ufc 2009) O símbolo $\binom{n}{k}$ indica a combinação de n objetos k a k. O valor de $x^2 - y^2$ quando $x = 4^{20} \cdot \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$ e $y = 5^{20} \cdot \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k$ é igual a:

a) 0.

b) - 1.

c) - 5.

d) - 25.

e) - 125.

5 – Questões Comentadas

01. (EEAR-2000)

A soma das raízes da equação binomial $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é:

e) 8
f) 7
g) 6
h) 5

Comentário:

Temos que

$$\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1} \rightarrow \begin{cases} 4x - 1 = 6 \\ 4x - 1 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ x' = \dfrac{13}{4} \end{cases} \rightarrow x + x' = \frac{7}{4} + \frac{13}{4} = 5$$

Gabarito: D.

---

02. (EEAR-2001)

Se $a_n = \frac{n!\cdot(n^2-1)}{(n+1)!}$, então a_{1985} é igual a:

e) 1984
f) 1983
g) $\frac{1985}{1984^2-1}$
h) $\frac{1984^2-1}{1984}$

Comentário:

Temos que

$$a_n = \frac{n!\cdot(n^2-1)}{(n+1)!} \rightarrow a_{1985} = \frac{1985!\cdot(1985^2-1)}{(1985+1)!}$$

$$a_{1985} = 1985!\cdot\frac{(1985-1)\cdot(1985+1)}{1986\cdot 1985!} = 1984$$

Gabarito: A.

---

03. (EEAR-2002)

Considere o sistema:

$$\begin{cases} m + n = 4 \\ m^5 - \binom{5}{1}m^4n + \binom{5}{2}m^3n^2 - \binom{5}{3}m^2n^3 + \binom{5}{4}mn^4 - n^5 = 32 \end{cases}$$

onde $\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}$ e $\binom{5}{4}$ são números binomiais. Então o valor de m é

e) 4
f) 1
g) 2
h) 3

Comentário:

Temos que

$$\begin{cases} m+n=4 \\ m^5-\binom{5}{1}m^4n+\binom{5}{2}m^3n^2-\binom{5}{3}m^2n^3+\binom{5}{4}mn^4-n^5=32 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ (m-n)^5=2^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ m-n=2 \end{cases} \rightarrow m=3$$

Gabarito: D.

---

04. (EEAR-2004)

Na equação $(y+3)!+(y+2)!=15(y+1)!$, o conjunto solução é

e) $\{-7,1\}$
f) $\{-7\}$
g) $\{1\}$
h) $\{2\}$

Comentário:

Temos que

$$(y+3)!+(y+2)!=15(y+1)!$$

$$(y+2)!\cdot(y+3+1)=15\cdot(y+1)!$$

$$(y+2)(y+4)=15$$

$$y^2+6y-7=0\rightarrow\begin{cases} y=-7\ (não\ convém, pois\ y+3>0) \\ y=1 \end{cases}$$

$$S=\{1\}$$

Gabarito: C.

---

05. (Ita 2020) A expansão decimal do número $100!=100\cdot 99\cdots 2\cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.

b) 21.

c) 22.
d) 23.
e) 24.

Comentário:

Note que, toda vez que aparecer $5 \cdot 2$, aparecerá um 0 (zero).

O fator 5 aparece nos seguintes números:

$$\underbrace{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots,\ 100}_{20\ números}$$

Note que:

$25 = 5 \cdot 5$
$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$
$100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$

Então, o fator 5 aparece $20 + 4 = 24$ vezes.

Há mais fatores 2 do que fatores 5, logo, nas 24 vezes em que o 5 aparece, é possível fazer aparecer o fator 10, gerando um 0 (zero).

Portanto, $100!$ possui, contados da direita para a esquerda, 24 zeros, antes de um dígito não nulo aparecer.

Gabarito: E

---

06. (Efomm 2020) Assinale a alternativa que apresenta o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$.

a) 1
b) 8
c) 28
d) 56
e) 70

Comentário:

O termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$ é dado por:

$\binom{8}{p} \cdot (x^2)^p \cdot (x^{-6})^{8-p}$

$\binom{8}{p} \cdot x^{2p} \cdot x^{-48+6p}$

$\binom{8}{p} \cdot x^{8p-48}$

Fazendo $8p - 48 = 0$,

$p = 6$

Daí, o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$ é:

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \boxed{6!}}{\boxed{6!} \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{8}{6} = 28$$

Gabarito: C

07**.** (Uece 2019) O número inteiro n, maior do que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é

Observação: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a) $n = 6$.
b) $n = 8$.
c) $n = 5$.
d) $n = 7$.

Comentário:

Do enunciado,

$$\frac{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}}{2}=\binom{n}{2}$$

$$n+\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=2\cdot\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}$$

$$n+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}=n\cdot(n-1)$$

$$6n+n\cdot(n^2-3n+2)=6n\cdot(n-1)$$

$$n\cdot(6+n^2-3n+2)=6n\cdot(n-1)$$

$$6+n^2-3n+2=6n-6$$

$$n^2-9n+14=0$$

$n=2$ ou $n=7$

Como $n>3$,

$n=7$

Gabarito: D

---

08. (Mackenzie 2019) Se $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 10\}$, o número de pares ordenados distintos, $(A,\ B)$, em que A e B são subconjuntos, disjuntos, de S é

a) 3^{10}

b) $3^{10}-1$

c) 3^{9}

d) $2^{10}-1$

e) 2^{10}

Comentário:

Seja A um subconjunto de S, com n elementos e $n\in\{0,\ 1,\ \dots,\ 10\}$. Logo, B pode ser qualquer subconjunto de $S-A$ com $10-n$ elementos.

Assim, para cada valor de n, existem $\binom{10}{n}$ maneiras de escolher os elementos de A e $\sum_{i=0}^{10-n}\binom{10-n}{i}=2^{10-n}$ modos de escolher um subconjunto de $S-A$.

Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, existem $\binom{10}{n}\cdot 2^{10-n}$ maneiras de escolher os subconjuntos A e B, B, com $0\le n\le 10$.

A resposta é

$$\sum_{n=0}^{10}\binom{10}{n}\cdot 2^{10-n}=\binom{10}{0}\cdot 2^{10}+\binom{10}{1}\cdot 2^{9}+\ldots+\binom{10}{10}\cdot 2^{0}$$
$$=(2+1)^{10}$$
$$=3^{10}.$$

Gabarito: A

---

09. (Ita 2018) Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos

de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7.920, então $a+b$ é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Comentário:

Do enunciado,

$a=2b$

O termo geral de $\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é:

$$\binom{12}{p}\cdot(ax)^{12-p}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{p}$$
$$\binom{12}{p}\cdot a^{12-p}\cdot x^{12-p}\cdot\frac{(-b)^{p}}{x^{\frac{p}{2}}}$$
$$\binom{12}{p}\cdot a^{12-p}\cdot(-b)^{p}\cdot x^{\frac{24-3p}{2}}$$

O termo independente de $\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é obtido tomando-se $\frac{24-3p}{2}=0$, ou seja, $p=8$.

Daí,

$$7920=\binom{12}{8}\cdot a^{4}\cdot(-b)^{8}$$
$$7920=495\cdot a^{4}\cdot b^{8}$$

Mas, $a = 2b$, logo,
$16 = (2b)^4 \cdot b^8$
$16 = 2^4 \cdot b^4 \cdot b^8$
$b^{12} = 1$

Como b é positivo,
$b = 1$

De $a = 2b$ e $b = 1$,
$a = 2$

Assim,
$a + b = 3$

Gabarito: B

---

10. (Fgv 2018) Uma aplicação financeira de C reais à taxa mensal de juros compostos de $x\%$ é resgatada depois de 8 meses no montante igual a C_8 reais. Sendo assim, $\frac{C_8}{C}$ é um polinômio $P(x)$ de grau 8 cujo coeficiente do termo em x^5 será

a) $70 \cdot 10^{-8}$
b) $35 \cdot 10^{-8}$
c) $56 \cdot 10^{-10}$
d) $35 \cdot 10^{-10}$
e) $21 \cdot 10^{-10}$

Comentário:

Calculando:

$$C_8 = C \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 \Rightarrow \frac{C_8}{C} = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8$$

$$termo \quad x^5 \Rightarrow C_{8,3} \cdot 1^8 \cdot \left(\frac{x}{100}\right)^{8-3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{x^5}{10^{10}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56 \cdot 10^{-10} \cdot x^5$$

Gabarito: C

---

11. (Epcar 2018) O menor dos possíveis coeficientes do termo em x^8, no desenvolvimento de $(2+x^2+3x^3)^{10}$ é igual a

a) 11.240

b) 12.420

c) 13.440

d) 14.720

Comentário:

Pelo Teorema Multinomial, temos

$$(2+x^2+3x^3)^{10} = \sum \frac{10!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot 2^{\alpha_1}\cdot(x^2)^{\alpha_2}\cdot(3x^3)^{\alpha_3}$$
$$= \sum \frac{10!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot x^{2\alpha_2+3\alpha_3}.$$

Logo, queremos encontrar os valores de α_1, α_2 e α_3 que satisfazem o sistema

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=10\\ 2\alpha_2+3\alpha_3=8\end{cases}.$$

Vejamos a tabela abaixo com as possíveis soluções e o respectivo termo T.

α_1	α_2	α_3	T
6	4	0	$13440x^8$
7	1	2	$414720x^8$

A resposta é 13440.

Gabarito: C

---

12. (Espcex 2018) Determine o valor numérico do polinômio $p(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+2017$ para $x=89$.

a) 53 213 009.

b) 57 138 236.

c) 61 342 008.

d) 65 612 016.

e) 67 302 100.

Comentário:

$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$
$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 + 2016$
$p(x) = \binom{4}{0}x^4 \cdot 1^0 + \binom{4}{1}x^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}x^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{4}x^0 \cdot 1^4 + 2016$
$p(x) = (x+1)^4 + 2016$
$p(89) = (89+1)^4 + 2016$
$p(89) = 90^4 + 2016$
$p(89) = 65610000 + 2016$
$p(89) = 65612016$

Gabarito: D

---

13. (Espm 2018) No desenvolvimento do binômio $(x + p \cdot y)^n$, com p e n naturais, o termo $112x^6y^2$ é o terceiro quando feito com potências crescentes de y e o sétimo quando feito com potências crescentes de x. O valor de $p + n$ é igual a:

a) 10
b) 12
c) 9
d) 11
e) 13

Comentário:

O termo geral de $(x + py)^n$ é:
$\binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot (py)^k = \binom{n}{k} p^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k$

Daí,
$\binom{n}{k} \cdot p^k = 112,\ n - k = 6$ e $k = 2$.

De $k = 2$ e $n - k = 6,\ n = 8$.
De $\binom{n}{k} \cdot p^k = 112,\ n = 8$ e $k = 2$,
$\binom{8}{2} \cdot p^2 = 112$
$28p^2 = 112$
$p^2 = 4$

Como $p \in \mathbb{N}$,
$p = 2.$

Assim,
$p + n = 2 + 8$
$p + n = 10$

Gabarito: A

---

14. (Espcex) 2017) Determine o algarismo das unidades da seguinte soma $S = \sum_{n=1}^{2016} n!$, em que $n!$ é o fatorial do número natural n.

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Comentário:

$$S = \sum_{n=1}^{2016} n! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + \ldots$$

O último algarismo da soma acima é igual ao último algarismo da soma:
$1 + 2 + 6 + 24 = 33$, já que a partir do fatorial de cinco todos os últimos algarismos valem zero.

Portanto, o último algarismo da soma pedida é 3.

Gabarito: D

---

15. (Ifal 2017) O termo independente no desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^5$ é

a) $-720.$
b) $-360.$
c) $0.$
d) $360.$

e) 720.

Comentário:

Utilizando a formula do termo geral temos:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \binom{5}{k} \cdot (2x^2)^{5-k} \cdot \left(\frac{3}{x^3}\right)^k =$$

$$= \binom{5}{k} \cdot 2^{5-k} \cdot x^{10-2k} \cdot 3^k \cdot x^{-3k} = \binom{5}{k} \cdot 3^k \cdot 2^{5-k} \cdot (x)^{10-5k}$$

Igualando o expoente a zero, pois procuramos o termo independente de x temos:
$10 - 5k = 0 \Rightarrow k = 2$

Logo, o termo independente é o terceiro termo, pois $T_{k+1} = T_{2+1} = T_3$ e dessa maneira:
$T_3 = \binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^{5-2} \cdot (x)^0 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Gabarito: E

---

16. (Uece 2017) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 18.
b) 24.
c) 34.
d) 30.

Comentário:

Sendo

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p},$$

o termo geral de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$, e

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot (x^2)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q = \binom{3}{q} \cdot 2^{-q} \cdot x^{6-3q},$$

o termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$, e

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{p} \cdot \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}.$$

Logo, deve-se ter $p+q=1$, o que implica em $(p,q)=(0,1)$ ou $(p,q)=(1,0)$. Em consequência, a resposta é

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 2^2 = 24.$$

Gabarito: B

---

17. (Mackenzie 2017) O número de valores de x, para os quais os coeficientes binomiais $\binom{6}{2x}$ e $\binom{6}{x^2}$ sejam iguais, é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentário:

Sendo x um número natural, tem-se que $\binom{6}{2x} = \binom{6}{x^2}$ se, e somente se,

$$\left|\begin{array}{l} x^2 = 2x \\ \quad \text{ou} \\ x^2 + 2x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x(x-2) = 0 \\ \quad \text{ou} \\ x^2 + 2x - 6 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, a igualdade se verifica para dois valores naturais de x.

Gabarito: B

---

18. (Fgv 2017) O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ é igual a

a) 120.
b) 90.
c) 81.
d) 60.
e) 54.

Comentário:

Sendo α_1, α_2 e α_3 números naturais, temos

$$(1+x^4+x^5)^{10} = \sum \frac{10!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot 1^{\alpha_1}\cdot(x^4)^{\alpha_2}\cdot(x^5)^{\alpha_3}$$
$$= \sum \frac{10!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot x^{4\alpha_2+5\alpha_3}.$$

A fim de calcularmos o coeficiente de x^{12}, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 10\\ 4\alpha_2+5\alpha_3 = 12\end{cases}.$$

Portanto, como tal sistema possui solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (7, 3, 0)$, segue que a resposta é $\frac{10!}{7!\cdot 3!\cdot 0!} = 120.$

Gabarito: A

---

19. (Mackenzie 2017) Sabendo que $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 256$, então o valor de n vale

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

Comentário:

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$$

Assim,

$2^n = 256$

$2^n = 2^8$

$n = 8$

Gabarito: A

---

20. (Espcex 2017) O valor da expressão $E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1$ é igual a

a) $9 \cdot 10^3$

b) $9 \cdot 10^{15}$

c) 10^{15}

d) 999.999

e) $999 \cdot 10^{15}$

Comentário:

$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1 = (1 + 999)^5 = 1000^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$

Gabarito: C

---

21. (Esc. Naval 2016) O par ordenado $(x,\ y)$ de números reais, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, satisfaz ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{16} \end{cases}$$

em que x é o menor elemento do par. Se $p = 3x + y$, encontre o termo de ordem $(p + 1)$ do binômio $\left(\frac{x^2 z}{\sqrt[5]{143}} - y^2\right)^{15}$ e assinale a opção correta.

a) $-21x^{10}z^5y^{20}$

b) $21x^5z^{10}y^{20}$

c) $-21x^{10}z^5y^{10}$

d) $21x^{32}z^{10}y^{20}$
e) $21x^{10}z^{5}y^{20}$

Comentário:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{16}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}=\dfrac{9}{16}\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{16}\end{cases} \rightarrow \frac{2}{xy}=\frac{9}{16}-\frac{5}{16} \rightarrow \frac{2}{xy}=\frac{4}{16} \rightarrow xy=8$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\\ xy=8\end{cases} \rightarrow \frac{x+y}{8}=\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases}x+y=6\\ xy=8\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$$

$$p=3x+y \rightarrow p=3\cdot 2+4 \rightarrow p=10$$

$$T_{p+1}=T_{11}=\binom{15}{10}\left(\frac{x^2z}{\sqrt[5]{143}}\right)^{15-10}\cdot(-y^2)^{10}=21x^{10}z^5y^{20}$$

Gabarito: E

---

22. (Espcex 2016) A solução da equação $\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!}=\frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!}$ é um número natural

a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

Comentário:

$$\frac{3!\cdot(x-1)!}{4\cdot(x-3)!}=\frac{182\cdot(x-2)!-x!}{2\cdot(x-2)!} \Rightarrow \frac{3!\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{4}=\frac{182-x(x-1)}{2} \Rightarrow 6(x-1)(x-2)$$
$$=364-2x^2+2x$$
$$\Rightarrow 8x^2-20x-352=0 \Rightarrow 8x^2-5x-88=0$$
$$x=\frac{5\pm 27}{2} \Rightarrow x=8 \;\text{ ou }\; \mathrm{x}=-11/2 \quad (\text{não convém})$$

Portanto, 8 é um cubo perfeito.

Gabarito: C

23. (Uece 2016) Se n é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de x, verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, o valor de n é

a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 10.

Comentário:

O termo geral do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de x, é

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}\cdot(x^2)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^k=\frac{1}{2^k}\cdot\binom{n}{k}\cdot x^{2n-3k}.$$

Assim, os coeficientes dos três primeiros termos são: 1, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n\cdot(n-1)}{8}$.

Portanto, segue que

$$2\cdot\frac{n}{2}=1+\frac{n\cdot(n-1)}{8}\Leftrightarrow n^2-9n+8=0\Rightarrow n=8.$$

Gabarito: A

24. (Fgvrj 2016) Um grupo de oito alunos está sendo liderado em um passeio por dois professores e, em determinado momento, deve se dividir em dois subgrupos. Cada professor irá liderar um dos subgrupos e cada aluno deverá escolher um professor.
A única restrição é que cada subgrupo deve ter no mínimo um aluno.
O número de maneiras distintas de essa subdivisão ser feita é

a) 128.
b) 64.
c) 248.
d) 254.
e) 256.

Comentário:

Considerando dois grupos A e B.

Portanto, o número de maneiras de se formar os grupos A ou B será dado por:

$$\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{6}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}=2^8-\binom{8}{0}-\binom{8}{8}=256-1-1=254$$

Portanto, o número de maneiras de se realizar a divisão pedida será dada por 254.

Gabarito: D

---

25. (Upf 2016) Desenvolvendo o binômio $(2\,x-3\,y)^{3n}$, obtém-se um polinômio de 16 termos. O valor de n é:

a) 15
b) 10
c) 5
d) 4
e) 2

Comentário:

$(2\,x-3\,y)^{3n}$ possui 16 termos, então: $3n+1=16 \Rightarrow n=5$

Gabarito: C

---

26. (Uece 2016) No desenvolvimento de $x(2\,x+1)^{10}$ o coeficiente de x^3 é

a) 480.
b) 320.
c) 260.
d) 180.

Comentário:

O termo geral de $x(2x+1)^{10}$ é dado por

$$T_{p+1} = x \cdot \binom{10}{p} \cdot (2x)^p \cdot 1^{10-p} = \binom{10}{p} \cdot 2^p \cdot x^{p+1}.$$

Assim, temos $p = 2$ e, portanto, a resposta é $\binom{10}{2} \cdot 2^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 4 = 180.$

Gabarito: D

27**.** (Ime 2016) O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6}$$

a) $\binom{2020}{6}$
b) $\binom{2020}{7}$
c) $\binom{2021}{5}$
d) $\binom{2021}{6}$
e) $\binom{2022}{5}\binom{2022}{5}$

Comentário:

Utilizando a Relação de Stifel, pode-se escrever:

$$Re\,l\,ação\ de\ Stifel \rightarrow \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6} =$$
$$\binom{2016}{5} + \binom{2016}{6} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} =$$
$$\binom{2017}{6} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} =$$
$$\binom{2018}{6} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} = \binom{2019}{6} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} = \binom{2020}{6} + \binom{2020}{5} =$$
$$\binom{2021}{6}$$

Gabarito: D

28. (Espcex (Aman) 2015) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é igual a

a) 110.
b) 210.
c) 310.
d) 410.
e) 510.

Comentário:

Qualquer termo do desenvolvimento do binômio será dado por:

$$\binom{10}{p} \cdot (x^3)^{10-p} \cdot (-x^{-2})^p = \binom{10}{p} (-1)^p \cdot x^{30-5p}$$

Para que o termo acima seja independente de x devemos ter:

$$30 - 5p = 0 \Rightarrow p = 6$$

Fazendo agora p = 6, temos:

$$\binom{10}{6} (-1)^6 \cdot x^{30-5\cdot6} = \frac{10!}{4!\cdot6!} = 210$$

Gabarito: B

29. (Ita 2014) Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

a) $2^n + 1$.
b) $2^{n+1} + 1$.
c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.
d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
e) $\frac{2^n-1}{n}$.

Comentário:

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} =$$

$$\frac{\frac{n+1}{1}\binom{n}{0} + \frac{n+1}{2}\binom{n}{1} + \frac{n+1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{n+1}{n}\binom{n}{n}}{n+1} =$$

$$= \frac{\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{2^{n+1} - \binom{n+1}{0}}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Gabarito: D

---

30. (Esc. Naval 2013) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7$ é

a) 30
b) 90
c) 120
d) 270
e) 560

Comentário:

$$\binom{7}{p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{7-p} \cdot (x^3)^p = \binom{7}{p} \cdot 2^{7-p} \cdot x^{4p-7}$$

Como o expoente de x é 5, temos $4p - 7 = 5$, isto é $p = 3$. Fazendo, agora, $p = 3$, temos:
$\binom{7}{3} \cdot 2^{7-3} \cdot x^{4\cdot 3-7} = 35 \cdot 16 \cdot x^5 = 560x^5$.

Portanto, o coeficiente pedido é 560.

Gabarito: E

---

31. (Ita 2013) O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é

a) 3150

b) 6300

c) 75600

d) 81900

e) 151200

Comentário:

O termo de y^4 no desenvolvimento de $\left((1+x)+y\right)^{10}$ é $\binom{10}{4}(1+x)^6 \cdot y^4$

O termo de x^4 no desenvolvimento de $(1+x)^6$ é $\binom{10}{4} 1^6 \cdot x^4$

Portanto, o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 210 \cdot 15 = 3150.$ $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 210 \cdot 15 = 3150.$

Gabarito: A

---

32. (Uern 2013) A soma dos algarismos do termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton $\left(\frac{2}{x}+x\right)^8$ é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

Comentário:

O termo geral do binômio é

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{8}{p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{8-p} \cdot x^p \\ &= \frac{8!}{p! \cdot (8-p)!} \cdot 2^{8-p} \cdot x^{2p-8}. \end{aligned}$$

O termo independente de x, se existir, é o natural p que torna o expoente de x igual a zero, ou seja,

$2p - 8 = 0 \Leftrightarrow p = 4.$

Em consequência, o termo independente de x existe e é igual a

$$\begin{aligned} T_5 &= \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} \cdot 2^{8-4} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 2^4 \\ &= 1120. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que o resultado é $1 + 1 + 2 + 0 = 4.$

Gabarito: B

---

33. (Fgv 2013) Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (x+1)^5$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16

b) 24

c) 32

d) 40

e) 48

Comentário:

A soma dos coeficientes de P é dada por

$P(1) = (1+1)^5 = 2^5 = 32.$

Gabarito: C

---

34. (Espm 2012) Para $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$, a expressão $\frac{(x^2-1)!\cdot x!}{(x^2-2)!\cdot(x+1)!}$ é equivalente a:

a) $x - 2$
b) $(x-2)!$
c) $(x-1)!$
d) x
e) $x - 1$ x−1

Comentário:

$$\frac{(x^2-1)!\cdot x!}{(x^2-2)!\cdot(x+1)!} = \frac{(x^2-1)\cdot(x^2-2)!\cdot x!}{(x^2-2)!\cdot(x+1)\cdot x!} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)} = x - 1$$

Gabarito: E

---

35. (Fgv 2012) O termo independente de x do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$ é

a) 26.
b) 169.
c) 220.
d) 280.
e) 310.

Comentário:

O termo Geral do Binômio de Newton será dado por: $\binom{12}{p} x^{12-p} \cdot (x^{-3})^p = \binom{12}{p} \cdot x^{12-4p}$

Para que T seja o termo independente do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$, devemos admitir $12 - 4p = 0 \Rightarrow p = 3$

Logo, $T = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = 220$

Gabarito: C

---

36. (Esc. Naval 2012) Seja m a menor raiz inteira da equação $\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right]! = 1$. Pode-se afirmar que o termo médio do desenvolvimento de $(\sqrt{y} - z^3)^{12m}$ é

a) $\frac{12!}{6!6!} y^{18} z^{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{-12!}{6!6!} y^3 z^{18}$

c) $\frac{30!}{15!15!} y^{\frac{15}{2}} z^{45}$

d) $\frac{-30!}{15!15!} y^{\frac{15}{2}} z^{45}$

e) $\frac{12!}{6!6!} y^3 z^{18}$

Comentário:

Sabendo que $0! = 1$ e $1! = 1$, vem

$$\frac{(x-1)(5x-7)}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{5}$$

ou

$$\frac{(x-1)(5x-7)}{3} = 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{2}{5}.$$

Donde concluímos que $m = 1$.

Assim, como o termo geral de $(\sqrt{y} - z^3)^{12}$ é

$$\binom{12}{p} (\sqrt{y})^p (-z^3)^{12-p^{12-p}\binom{12}{p}^{\frac{p}{2}^{36-3p}}}$$

e o termo médio é tal que

$$p + 1 = \frac{12}{2} + 1 \Leftrightarrow p = 6,$$

concluímos que o termo médio é igual a

$(-1)^{12-6}\binom{12}{6}y^{\frac{6}{2}}z^{36-3\cdot 6}=\frac{12!}{6!6!}y^3z^{18}.$

Gabarito: E

---

37. (Uespi 2012) Qual o coeficiente de x^7 na expansão de $(2+3x+x^2)^4$?

a) 18
b) 16
c) 14
d) 12
e) 10

Comentário:

Reescrevendo o polinômio, obtemos

$$
\begin{aligned}
(2+3x+x^2)^4 &= \sum \frac{4!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot 2^{\alpha_1}\cdot(3x)^{\alpha_2}\cdot(x^2)^{\alpha_3}\\
&= \sum \frac{4!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot x^{\alpha_2+2\alpha_3}.
\end{aligned}
$$

Para que o expoente de x seja 7, devemos ter $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4$ e $\alpha_2+2\alpha_3=7$. Desse modo, como $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(0,\ 1,\ 3)$ é a única terna coordenada que satisfaz essas condições, temos que o coeficiente de x^7 é dado por

$$\frac{4!}{0!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot 2^0\cdot 3^1=12.$$

Gabarito: D

---

38. (Uern 2012) Qual é o valor do termo independente de x do binômio $\left(\frac{2}{x^2}+x\right)^n$, considerando que o mesmo corresponde ao sétimo termo de seu desenvolvimento?

a) 435
b) 672
c) 543

d) 245

Comentário:

O termo geral do binômio é dado por

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{n}{p} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^{n-p} \cdot x^p \\ &= \binom{n}{p} \cdot \frac{2^{n-p}}{x^{2n-2p}} \cdot x^p \\ &= \binom{n}{p} \cdot 2^{n-p} \cdot x^{3p-2n}. \end{aligned}$$

Sabendo que o termo independente de x é o sétimo, segue que $p = 6$ e, assim,

$$T_{6+1} = \binom{n}{6} \cdot 2^{n-6} \cdot x^{18-2n}.$$

Daí, impondo $18 - 2n = 0$, concluímos que $n = 9$ e, portanto,

$$T_7 = \binom{9}{6} \cdot 2^{9-6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} \cdot 2^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot 8 = 672.$$

Gabarito: B

---

39. (Ifal 2011) No desenvolvimento $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes binominais do quarto e do décimo terceiro termos são iguais. Então, o termo independente de x é o:

a) décimo.
b) décimo-primeiro.
c) nono.
d) décimo-segundo.
e) oitavo.

Comentário:

O termo geral do binômio $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n$ é $T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot (x^2)^{n-p} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^p$.

Se os coeficientes binominais do quarto e do décimo terceiro termos são iguais, então $\binom{n}{3} = \binom{n}{12} \Leftrightarrow n = 3 + 12 = 15.$

Logo,

$$T_{p+1} = \binom{15}{p} \cdot (x^2)^{15-p} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^p$$
$$= \binom{15}{p} \cdot x^{30-2p} \cdot \frac{3^p}{x^p}$$
$$= \binom{15}{p} \cdot x^{30-3p} \cdot 3^p$$

Como o desenvolvimento do binômio apresenta um termo independente de x, deve-se ter $30 - 3p = 0 \Leftrightarrow p = 10.$

Portanto, o termo pedido é o décimo primeiro.

Gabarito: B

---

40. (Ita 2010) A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$.

b) $2690\sqrt{5}$.

c) $2712\sqrt{5}$.

d) $1584\sqrt{15}$.

e) $1604\sqrt{15}$.

Comentário:

Utilizando o Binômio de Newton, temos

$$(a + b)^5 = a^5 + 5.a^4.b + 10.a^3.b^2 + 10.a^2.b^2 + 5.a.b^4 + b^5$$
$$(a + b)^5 = a^5 - 5.a^4.b + 10.a^3.b^2 - 10.a^2.b^2 + 5.a.b^4 - b^5$$
$$(a + b)^5 - (a - b)^5 = 10a^4.b + 20.a^2.b^2 + 2b^5$$

Logo:

$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5=10.(2\sqrt{3})^4.\sqrt{5}+20.(2\sqrt{3})^2.\sqrt{5}^3+2.\sqrt{5}^5$$
$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5=1440\sqrt{5}+1200\sqrt{5}+50\sqrt{5}$$
$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5=2690\sqrt{5}$$

Gabarito: B

---

41. (Ufc 2009) O símbolo $\binom{n}{k}$ indica a combinação de n objetos k a k. O valor de x^2-y^2 quando $x=4^{20}\cdot\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k$ e $y=5^{20}\cdot\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k$ é igual a:

a) 0.
b) - 1.
c) - 5.
d) - 25.
e) - 125.

Comentário:

$$x=4^{20}\cdot\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\cdot 3^k\cdot 4^{20-k}=(3+4)^{20}=7^{20}.$$

$$y=5^{20}\cdot\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\cdot 2^k\cdot 5^{20-k}=(2+5)^{20}=7^{20}.$$

$$x^2-y^2=(7^{20})^2-(7^{20})^2=0.$$

Gabarito: A

62