MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

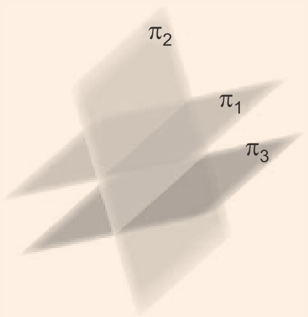
10

01| Considere os planos definidos por:

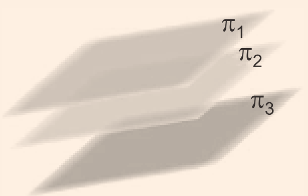
$\eth_1 : 2x - 3y + z = 1;$
$\eth_2 : -x + y + 2z = 0$ e
$\eth_3 : -4x + 6y - 2z = -2.$

Qual das figuras a seguir pode descrever a posição relativa desses três planos no espaço?

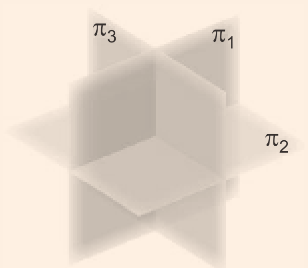
A



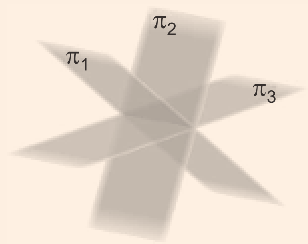
B



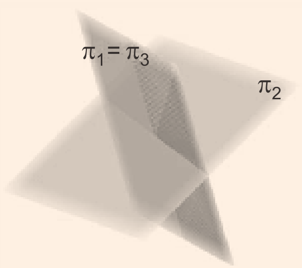
C



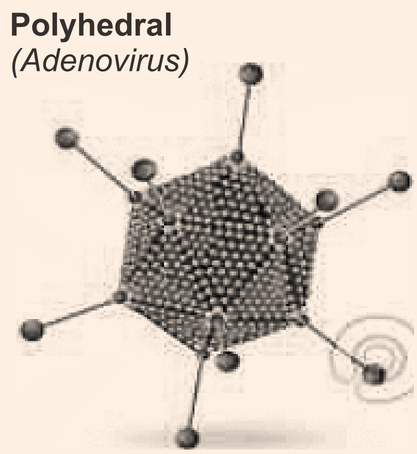
D



E



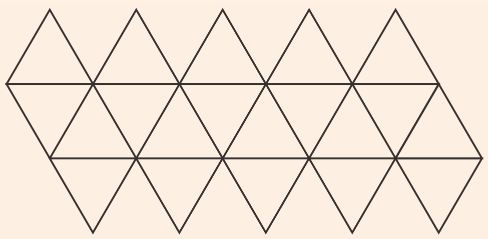
02| Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.



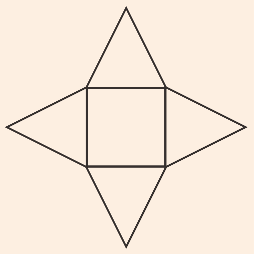
Disponível em: <http://www.thinkstockphotos.com/image/stockillustration-shapes-of-viruses/507687357>. Acesso em: 14 set. 2016.

Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

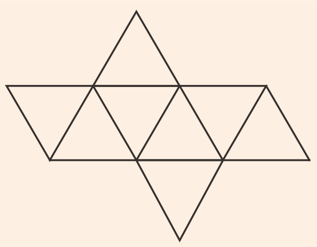
A



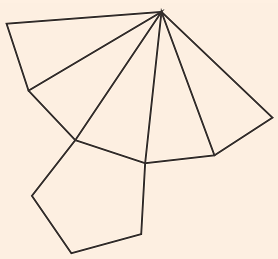
B



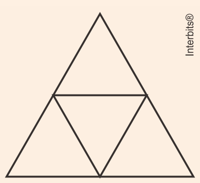
C



D



E



03| Cada aresta de um cubo é pintada de verde ou de amarelo.

Após a pintura, em cada face desse cubo há pelo menos uma aresta pintada de verde.

O número máximo de arestas desse cubo pintadas de amarelo é:

A 6

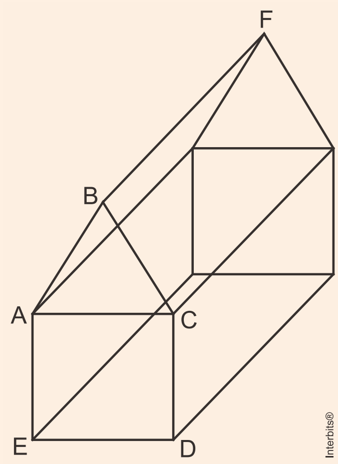
B 9

C 8

D 10

E 4

04| Na figura a seguir, os pontos A, B, C formam um triângulo equilátero de lado x, os pontos A, C, D, E um quadrado e o segmento BF é o dobro do tamanho de CD.



Considerando-se os dados apresentados, verifica-se que a distância do ponto F ao ponto E é

A $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$

B $\dfrac{x^2(\sqrt{3}-1)}{2}$

C $x^2+\sqrt{3}x$

D $\dfrac{4x^2\sqrt{3x}}{2}$

E $x^2(8+\sqrt{3})$

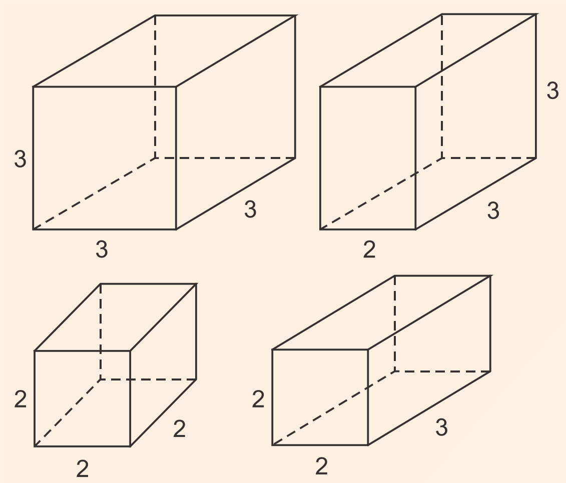
05| Um quebra-cabeça tem 8 peças, sendo:

- 01 peça cúbica com 2 cm de lado

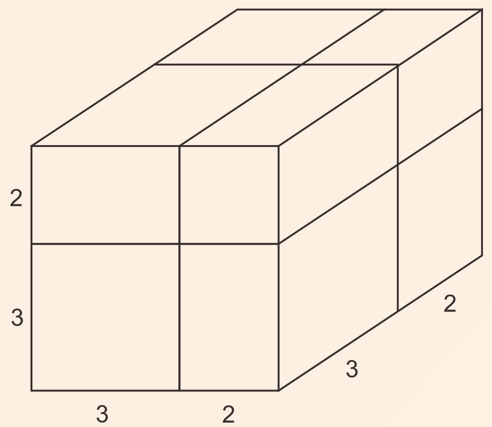
- 01 peça cúbica com 3 cm de lado

- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas $2\text{ cm}\times 2\text{ cm}\times 3\text{ cm}$

- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas $3\text{ cm}\times 3\text{ cm}\times 2\text{ cm}$



Além disso, o quebra-cabeça montado é um cubo $5\times5\times5$ conforme ilustração abaixo.



Se pintarmos todas as faces do cubo montado, após desmontá-lo podemos afirmar que as peças:

A cúbicas totalizam 5 faces não pintadas.

B cúbicas totalizam 5 faces pintadas.

C $2\times2\times3$ totalizam $16\ \text{cm}^2$ de área de faces não pintadas.

D $3\times3\times2$ totalizam $63\ \text{cm}^2$ de área de faces não pintadas.

E não cúbicas totalizam 15 faces não pintadas.

06| A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores abaixo mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

A 37.500 litros.

B 375.000 litros.

C $3.750.000$ litros.

D $37.500.000$ litros.

E $375.000.000$ litros.

07| Um cubo de lado $2a$ possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

A $\frac{ð}{6}$

B $\frac{2\sqrt{3}}{3ð}$

C $\frac{ð\sqrt{3}}{6}$

D $\frac{2ð}{6\sqrt{3}}$

E $\frac{1}{2}$

08| O líquido AZ não se mistura com a água. A menos que sofra alguma obstrução, espalha-se de forma homogênea sobre a superfície da água formando uma fina película circular com $0{,}2\ \text{cm}$ de espessura. Uma caixa em forma de paralelepípedo retangular, com dimensões de $7\ \text{cm}$, $10\ \text{cm}$ e $6\ \text{cm}$, está completamente cheia do líquido AZ. Seu conteúdo é, então, delicadamente derramado em um grande recipiente com água.

O raio da película circular que o líquido AZ forma na superfície da água, em centímetros, é:

A $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{21}{ð}}$

B $\sqrt{\frac{210}{ð}}$

C $10\sqrt{\frac{21}{ð}}$

D $\sqrt{\frac{21}{10ð}}$

E $\frac{\sqrt{21}}{10ð}$

09| Muitos prédios que estão sendo construídos em nossa cidade possuem caixas d'água com a forma de um paralelepípedo. Um construtor quer adquirir duas delas que tenham internamente a mesma altura, mas diferindo na base, que deverá ser quadrada em ambas. A primeira deverá ter capacidade para 16.000 litros, e a segunda para 25.000 litros. A razão entre a medida do lado da base da primeira e a da segunda, em decímetros, é

A 0,08

B 0,60

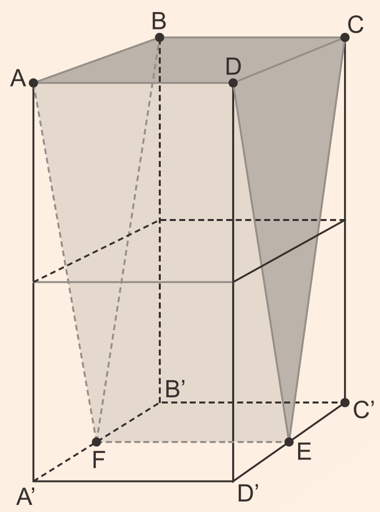
C 0,75

D 0,80

E 1,25

10| Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A'B' e C'D', respectivamente.

A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.



O volume do sólido ABCDEF, em cm^3, é igual a:

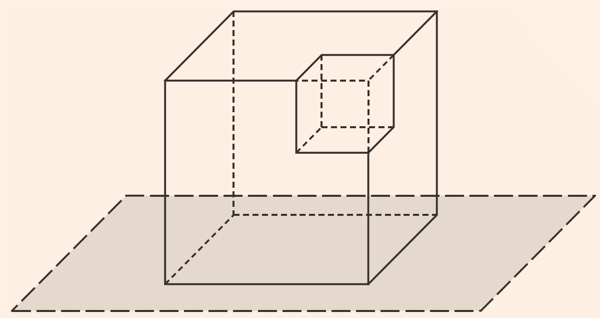
A 4

B 6

C 8

D 12

11| Um sólido foi construído removendo-se um cubo menor de um cubo maior, como mostra a figura a seguir. Se a diferença entre as medidas das arestas dos dois cubos é de 4 cm e a medida do volume do sólido é 208 cm^3, qual a medida da área lateral da superfície do sólido?



A 136 cm^2

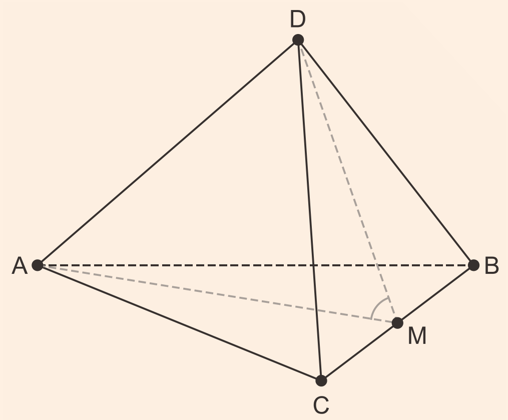
B 144 cm^2

C 160 cm^2

D 204 cm^2

E 216 cm^2

12| Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.



O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

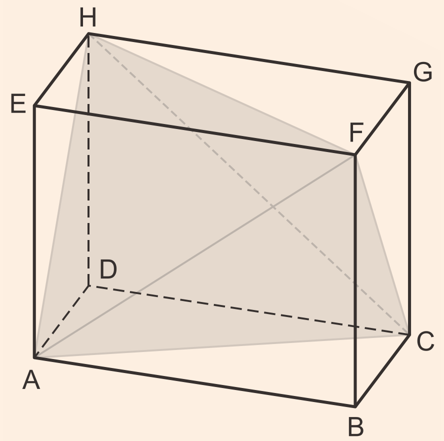
A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{2}{3}$

D $\frac{2}{5}$

13| Considere ABCDEFGH paralelepípedo reto-retângulo, indicado na figura abaixo, tal que $\overline{AB} = 4$, $\overline{AE} = 3$ e $\overline{BC} = 2$.



O volume do tetraedro AHFC é

A 4.

B 8.

C 12.

D 16.

E 18.

14| Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3 m de altura e cada aresta da base medirá 2 m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento.

Se a medida do lado de cada folha é igual a 20 cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será

Utilize $\sqrt{10} \cong 3,2$

A 285

B 301

C 320

D 333

15| Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

A $50\ \text{cm}^3$

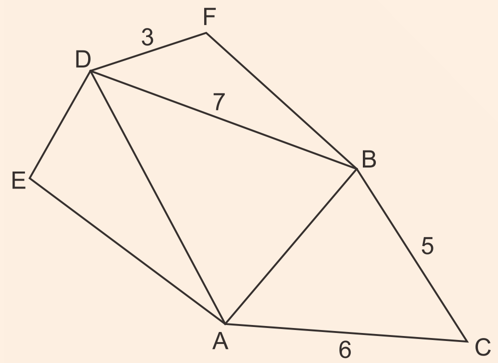
B $42\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$

C $43\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$

D $43\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

E $42\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

16| Considere a planificação de um tetraedro, conforme a figura abaixo.



Os triângulos ABC e ABD são isósceles respectivamente em B e D. As medidas dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DF}$ estão indicadas na figura.

A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é

A 33.

B 34.

C 43.

D 47.

E 48.

17| Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura "a" e lados da base "b" e "c" (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e "a", "b" e "c" são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

A 16

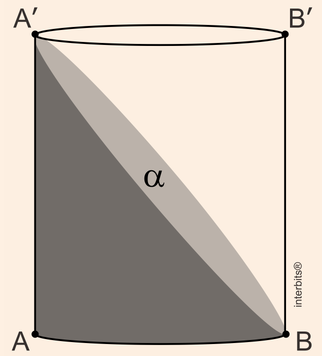
B 36

C 108

D 432

E 648

18| Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4 cm e altura AA' de 10 cm. O plano α perpendicular à seção meridiana $ABB'A'$, que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm^3, é igual a:

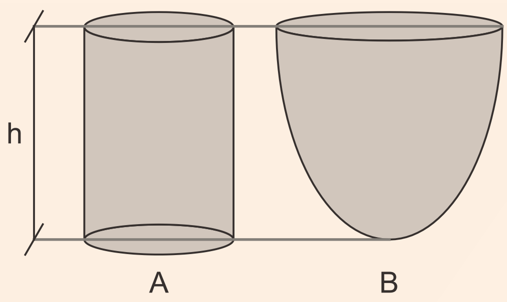
A 8π

B 12π

C 16π

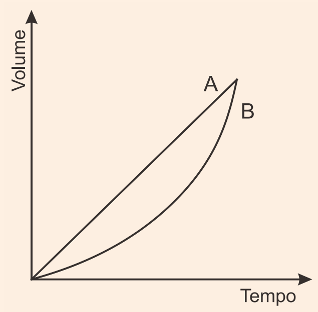
D 20π

19| Dois vasilhames A e B, representados a seguir, possuem a mesma capacidade e foram cheios por duas torneiras que mantiveram a mesma vazão de água no mesmo intervalo de tempo.

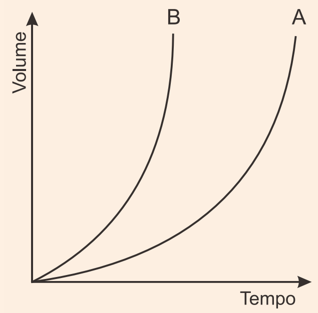


Identifique qual dos gráficos melhor representa o momento em que os dois vasilhames estavam sendo cheios e atingiram a altura h.

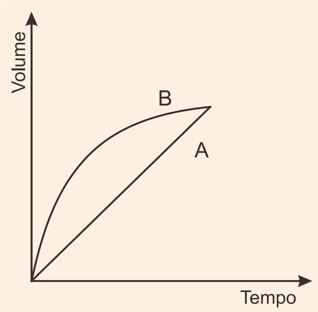
A



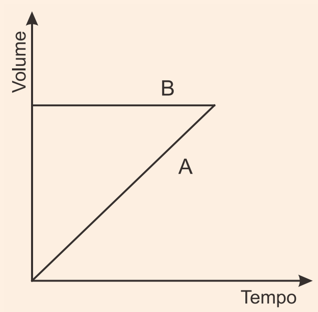
B



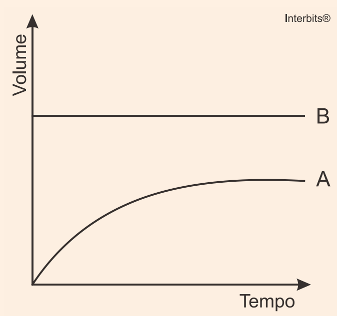
C



D



E



20| O volume do cilindro circular reto que se obtém aumentando-se x metros no raio da base desse cilindro, com $x \neq 0$, é igual ao do que se obtém aumentando-se x metros na sua altura.

Nessas condições, x é um

A produto de dois números primos.

B número primo maior do que 5.

C número irracional.

D divisor de 64.

E múltiplo de 7.

21| Com uma chapa de um certo material na forma de um setor circular de ângulo central igual a $ð/4$ radianos e raio igual a 5 dm, constrói-se um cone circular de volume V. Diminuindo-se em 20% o valor do raio e mantendo-se o mesmo ângulo central, a capacidade do novo cone diminui:

A entre 49% e 50%.

B entre 48% e 49%.

C entre 50% e 51%.

D entre 51% e 52%.

22| Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{5}$

C 3

D 4

E 5

23| Um cone reto está inscrito num cubo de aresta 8 cm. Se a altura do cone e o diâmetro de sua base têm medidas iguais, qual é a diferença entre as medidas dos seus volumes? Considere $\pi = 3{,}0$.

A $128\ cm^3$

B $256\ cm^3$

C $384\ cm^3$

D $424\ cm^3$

E $512\ cm^3$

24| Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:

- π é aproximadamente $3{,}14$.

- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3} ð r^2 h$.

A 4 horas e 50 minutos.

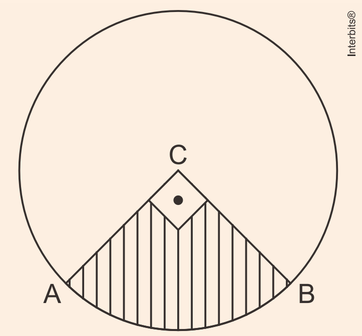
B 5 horas e 20 minutos.

C 5 horas e 50 minutos.

D 6 horas e 20 minutos.

E 6 horas e 50 minutos.

25| Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{ð}{2}$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios CA e CB.



desenho ilustrativo – fora de escala

O volume desse cone, em cm^3, é igual a

A $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

B $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

C $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

D $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

E $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

26| Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de 6 m de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende 3 m^2 por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, _____ litros de tinta. (Considere $\pi \cong 3$)

A 18

B 24

C 36

D 48

27| Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

A 2 vezes maior

B 3 vezes maior

C 9 vezes maior

D 12 vezes maior

E 20 vezes maior

28| Considere dois troncos de pirâmides retas exatamente iguais. A base maior é um quadrado de lado igual a 2 metros, a base menor um quadrado de lado igual a 1 metro, e a distância entre as bases igual a 1 metro. Um monumento foi construído justapondo-se esses dois troncos nas bases menores, apoiando-se em um piso plano por meio de uma das bases maiores, formando um sólido. Desta maneira, a medida da área da superfície exposta do monumento é, em m^2, igual a

A $4+6\sqrt{5}$.

B 8.

C $12\sqrt{2}+4$.

D $\frac{16}{3}$.

E $12\sqrt{2}-8$.

29| Considerando-se um cubo cuja medida de cada aresta é igual a 1m pode-se afirmar corretamente que a medida do volume do poliedro convexo cujos vértices são os centros das faces desse cubo é

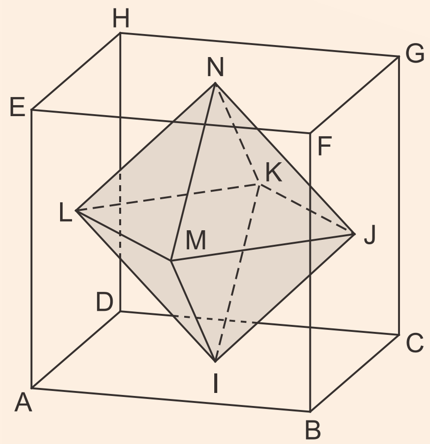
A $\frac{2}{3}\text{m}^3$.

B $\frac{2}{7}\text{m}^3$.

C $\frac{1}{6}\text{m}^3$.

D $\frac{4}{7}\text{m}^3$.

30| Considere um cubo de aresta a. Os pontos I, J, K, L, M e N são os centros das faces $ABCD$, $BCFG$, $DCGH$, $ADHE$, $ABFE$ e $EFGH$, respectivamente, conforme representado na figura abaixo.



O octaedro regular, cujos vértices são os pontos I, J, K, L, M e N, tem aresta medindo

A $a\sqrt{3}$.

B $a\sqrt{2}$.

C $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

E $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

31| Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio R. A medida de um diâmetro $(2R)$ da esfera é

A $2\sqrt{3}$ dm.

B $3\sqrt{2}$ dm.

C $3\sqrt{3}$ dm.

D $4\sqrt{3}$ dm.

32| Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede 16ð cm^2. O volume da esfera inscrita é

A 8π

B 16π

C $\dfrac{32}{3}\pi$

D $\dfrac{256}{3}\pi$

GABARITO

01| E

Analisando $ð_1$ e $ð_3$ pode-se escrever:

$$-4x+6y-2z+2=-2\cdot(2x-3y+z-1)\Rightarrow ð_1=ð_3$$

Logo, estes planos serão coincidentes. O plano $ð_2$ será concorrente aos outros planos (não há proporcionalidade entre seus coeficientes a, b e c, logo não serão nem coincidentes nem paralelos, podendo apenas ser concorrentes). A alternativa correta será a letra [E].

02| A

O sólido da figura é um icosaedro. Portanto, só pode ser a alternativa [A].

03| B

Para que em cada face desse cubo exista pelo menos uma aresta pintada de verde é preciso que no mínimo 3 arestas estejam pintadas de verde. Como o cubo possui 12 arestas, o número máximo de arestas desse cubo pintadas de amarelo será igual a 9.

04| ANULADA

Gabarito Oficial: [E]

Gabarito SuperPro®: ANULADA

Seja $A'C'D'E'$ a face oposta à face $ACDE$. Considerando o triângulo isósceles $A'E'F$, pela Lei dos Cossenos, vem

$$\overline{E'F}^2=\overline{A'E'}^2+\overline{A'F}^2-2\cdot\overline{A'E'}\cdot\overline{A'F}\cdot\cos E\hat{A'}F \Leftrightarrow$$
$$\overline{E'F}^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos 150° \Leftrightarrow$$
$$\overline{E'F}^2=x^2(2+\sqrt{3}).$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo $FE'E$, temos

$$\overline{FE}^2=\overline{E'F}^2+\overline{E'E}^2 \Leftrightarrow \overline{FE}^2=x^2(2+\sqrt{3})+(2x)^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{FE}^2=x^2(6+\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow \overline{FE}=x\sqrt{6+\sqrt{3}}.$$

05| D

O número total de faces pintadas das 8 peças é igual a $4\cdot 6=24$. Destas, $2\cdot 3=6$ são cúbicas. Logo, temos $12-6=6$ faces cúbicas não pintadas. Ademais,

Cada peça do tipo $2\times 2\times 3$ apresenta uma face 2×2 e duas faces 2×3 não pintadas. Logo, as faces não pintadas deste tipo totalizam $3\times 2\times 2+3\times 2\times 2\times 3=48\,cm^2$.

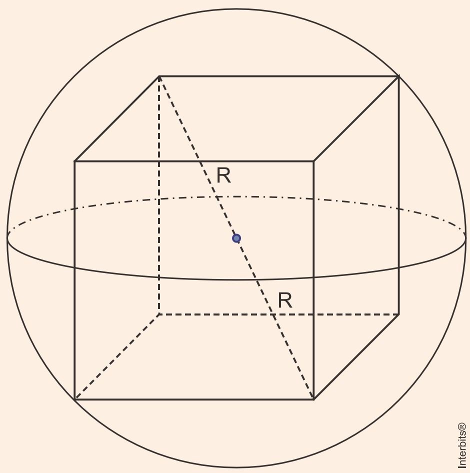
Cada peça do tipo $3\times 3\times 2$ apresenta uma face 3×3 e duas faces 2×3 não pintadas. Assim, as faces não pintadas deste tipo totalizam $3\times 3\times 3+3\times 2\times 2\times 3=63\,cm^2$.

As peças não cúbicas totalizam $6\cdot 6=36$ faces. Portanto, como foram pintadas $2\times 3\times 3=18$ faces destas peças, segue que o número de faces não pintadas é $36-18=18$.

06| C

Sabendo que $1\,m^3=1.000\,L$, podemos concluir que a resposta é $50\cdot 25\cdot 3\cdot 1000=3.750.000\,L$.

07| B



O raio da esfera será a metade da diagonal do cubo:

$$R = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a \cdot \sqrt{3}$$

A probabilidade será dada pela razão entre o volume do cubo e o volume da esfera.

$$P = \frac{(2 \cdot a)^3}{\frac{4}{3} \cdot \eth \cdot R^3} = \frac{8 \cdot a^3}{\frac{4}{3} \cdot \eth \cdot (a\sqrt{3})^3} = \frac{2a^3}{\eth \cdot a^3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\eth \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \eth}$$

08| C

Calculando:

$$V_{caixa} = 7 \cdot 10 \cdot 6 = 420 \text{ cm}^3$$
$$V_{película} = V_{caixa}$$
$$\eth \cdot R^2 \cdot 0,2 = 420 \Rightarrow R^2 = \frac{2100}{\eth} \Rightarrow R = 10\sqrt{\frac{21}{\eth}} \text{ cm}$$

09| D

Sejam a, b e c, respectivamente, a medida do lado da primeira, a medida do lado da segunda e a altura das caixas d'água. Desse modo, vem $a^2 \cdot c = 16000$ e $b^2 \cdot c = 25000$ e, portanto, dividindo ordenadamente essas equações, encontramos

$$\frac{a^2 \cdot c}{b^2 \cdot c} = \frac{16000}{25000} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{16}{25}}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b} = 0,8.$$

10| C

O sólido $ABCDEF$ é um prisma triangular de bases ABF e DCE. Portanto, a resposta é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AA'} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 8 \text{cm}^3.$$

11| B

Medida da aresta do cubo maior: $x + 4$

Medida da aresta do cubo menor: x

Como a diferença entre os volumes é de 208 cm^3, podemos escrever que:

$$(x+4)^3 - x^3 = 208$$
$$x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - x^3 = 208$$
$$12x^2 + 48x - 144 = 0$$
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Resolvendo a equação, temos:

$$x = -6 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, a aresta do cubo maior será 6 cm.

Considerando a área lateral da figura igual a área lateral do cubo, temos:

$$A_L = 4 \cdot 6^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

12| B

Seja ℓ a medida da aresta do tetraedro. Desde que as faces do tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, vem $\overline{DM} = \overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Por conseguinte, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AMD, temos

$$\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{DM} \cdot \cos A\hat{M}D \Leftrightarrow$$
$$\ell^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \cos A\hat{M}D \Leftrightarrow$$
$$\frac{3\ell^2}{2} \cdot \cos A\hat{M}D = \frac{\ell^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\cos A\hat{M}D = \frac{1}{3}.$$

13| B

O volume do tetraedro será a diferença entre o volume do paralelepípedo e os volumes dos quatro tetraedros trirretângulos, como segue:

$$V = V_{Paralelepípedo} - V_{(EHFA)} - V_{(BAFC)} - V_{(GHFC)} - V_{(DAHC)}$$
$$V = 4 \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2}$$
$$V = 24 - 16$$
$$V = 8$$

14| C

Sendo 1m a medida do apótema da base e p a medida do apótema da pirâmide, pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$p^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow p = \sqrt{10} \text{ m} \cong 320 \text{cm}.$$

Portanto, tem-se que o resultado pedido é dado por

$$4 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 320}{20^2} = 320.$$

15| E

Se o tronco possui 12 vértices, portanto a pirâmide tem base hexagonal regular. Sendo ℓ o lado da base menor (topo) e L o lado da base maior, pode-se escrever:

$$\begin{cases} 6\cdot(L+\ell)=36 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(L^2+\ell^2\right)=30\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L+\ell=6 \\ L^2+\ell^2=20 \end{cases}$$

$$(L+\ell)^2=6^2 \rightarrow L^2+2\cdot L\cdot\ell+\ell^2=36 \rightarrow 2\cdot L\cdot\ell=16 \rightarrow L\cdot\ell=8$$

$$V=\frac{h}{3}\cdot\left(B+B'+\sqrt{B\cdot B'}\right)=\frac{3}{3}\cdot\left(30\sqrt{3}+\sqrt{6\cdot\frac{\ell^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 6\cdot\frac{L^2\cdot\sqrt{3}}{4}}\right)=30\sqrt{3}+\sqrt{3\cdot 36\cdot\frac{(L\cdot\ell)^2}{16}}$$

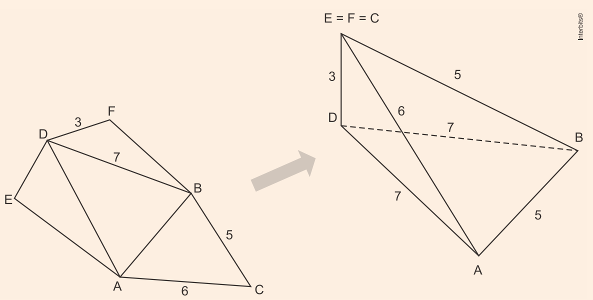
$$V=30\sqrt{3}+\sqrt{432} \rightarrow V=42\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

16| A

De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir que:

$DB=DA=7$ e $BA=BC=5.$

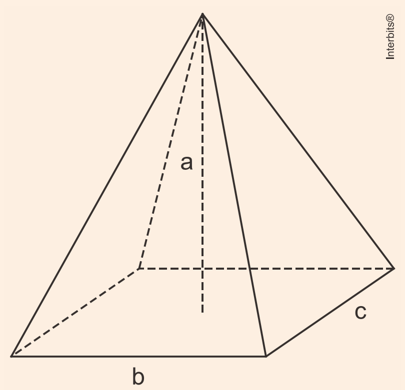
Construindo o tetraedro, temos:



Portanto, a soma das arestas será dada por:

$3+5+6+7+7+5=33.$

17| D



$$\frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{2}=k \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a=6k \\ b=4k \\ c=2k \end{array}\right.$$

Portanto,

$6k+4k+2k=36 \Rightarrow k=3.$

O volume da pirâmide será dada por:

$$V=\frac{b\cdot c\cdot a}{3}=\frac{12\cdot 6\cdot 18}{3}=432$$

18| D

O volume pedido é igual a metade do volume do cilindro. Assim, pode-se escrever:

$$V_{metade}=\frac{\text{ð}\cdot 2^2\cdot 10}{2}=\frac{40\text{ð}}{2}\rightarrow V=20\text{ð}$$

19| ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

Justificativa: A banca equivocou-se ao apresentar nos gráficos o volume como função do tempo e não altura como função do tempo.

20| ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

Sejam r e $h,$ respectivamente, o raio e a altura do cilindro original. Assim, temos

$$\text{ð}\cdot(r+x)^2\cdot h=\text{ð}\cdot r^2\cdot(h+x)\Leftrightarrow r^2h+2rhx+x^2h=r^2h+r^2x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{r(r-2h)}{h}.$$

Daí, sabendo que x, r e h são reais positivos, temos $r>2h.$ Porém, nada mais pode se afirmar sobre $x,$ a não ser que é um número real.

21| B

$$R_{setor}=\text{geratriz}$$

$$\ell=\text{á}\cdot R=\frac{\text{ð}}{4}\cdot 5=\frac{5\text{ð}}{4}$$

$$2\text{ð}R_{cone}^2=\frac{5\text{ð}}{4}\Rightarrow R_{cone}^2=\frac{5}{8}$$

$$g^2=R^2+h^2\Rightarrow 5^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2+h^2\Rightarrow h=\frac{15\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{Reduzindo } g\Rightarrow 20\%\cdot g=20\%\cdot 5=0{,}2\cdot 5=4\Rightarrow g_{nova}=4$$

$$\ell=\frac{\text{ð}}{4}\cdot 4=\text{ð}$$

$$2\text{ð}R_{cone}^1=\text{ð}\Rightarrow R_{cone}^1=\frac{1}{2}$$

$$g^2=R^2+h^2\Rightarrow 4^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+h^2\Rightarrow h=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{15\sqrt{7}}{8}=\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\frac{25}{64}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{8}=\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\frac{25}{64}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\text{ð}\cdot\frac{25}{64}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}}=\frac{1}{\frac{25}{64}\cdot 5}=\frac{1}{\frac{125}{64}}=\frac{64}{125}\rightarrow\frac{V_2}{V_1}=\frac{64}{125}=0{,}512=51{,}2\%$$

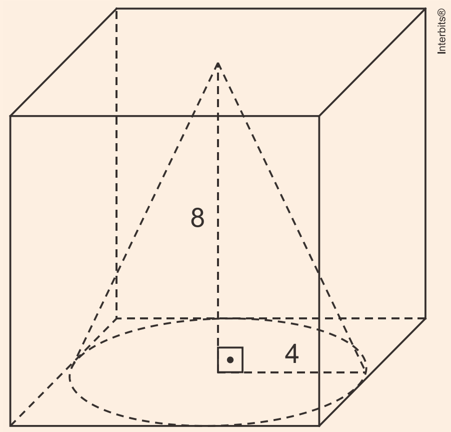
$$V_2=51{,}2\%\ V_1\Rightarrow \text{redução de } 48{,}8\%$$

22| C

Sejam r e h, respectivamente, o raio da base e a altura do cilindro. Logo, sabendo que os dois sólidos possuem o mesmo raio da base e a mesma altura, tem-se que a resposta é dada por

$$\frac{\eth r^2 h}{\frac{1}{3}\eth r^2 h} = 3.$$

23| C

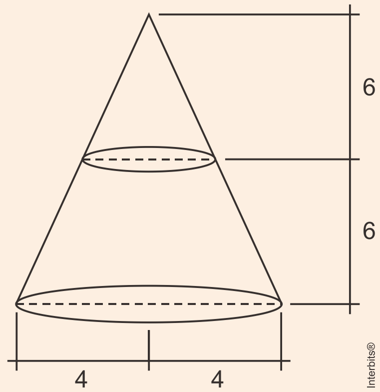


A diferença entre os volumes será dada por:

$$V_{cubo} - V_{cone} = 8^3 - \frac{1}{3}\cdot \eth \cdot 4^2 \cdot 8 = 512 - \frac{1}{3}\cdot 3 \cdot 128 = 384 \text{ cm}^3$$

24| C

De acordo com o enunciado:



Considerando:

V = volume total do cone
v' = volume cheio (tronco)
v'' = volume vazio (topo)
$H = 12$ = altura total
$h = 6$ = altura topo / altura tronco

Pode-se calcular:

$$\frac{V}{v''} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^3 = \frac{V}{v''} \rightarrow V = 8v''$$

$$v' + v'' = V \rightarrow v' + \frac{V}{8} = V \rightarrow v' = \frac{7}{8}V$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \eth \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3}\cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12 \rightarrow V = 200{,}96$$

$$v' = \frac{7}{8}V = \frac{7}{8}\cdot 200{,}96 \rightarrow v' = 175{,}85 \text{ m}^3$$

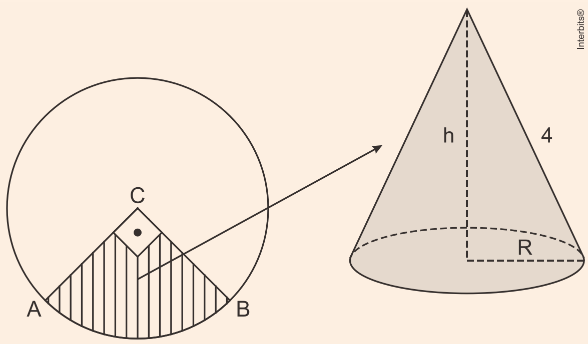
$$\text{Tempo}: 500 \text{ L / min} = 0{,}5 \text{ m}^3 \text{ / min}$$

$$1 \text{ min} \text{ ——— } 0{,}5 \text{ m}^3$$

$$t \text{ ——— } 175{,}85 \text{ m}^3$$

$$t = 351{,}7 \text{ min} \approx 5\text{h e } 50 \text{ min}$$

25| C



desenho ilustrativo – fora de escala

Comprimento do arco AB (circunferência da base do cone de raio R).

$$2 \cdot \eth \cdot R = \frac{2 \cdot \eth \cdot 4}{4} \Rightarrow R = 1 \text{ cm}$$

Calculando, agora, a altura do cone, temos:

$$h^2 + 1^2 = 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{15} \text{ cm}$$

Logo, o volume do cone será:

$$V = \frac{1}{3}\cdot \eth \cdot 1^2 \cdot \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}\cdot \eth}{3} \text{ cm}^3$$

26| C

O gasto em litros é dado por

$$\frac{4\eth \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2}{3} \cong 36.$$

27| C

Como o volume de uma esfera é diretamente proporcional ao cubo de seu raio, segue que o volume da terça parte da nova esfera corresponde a $\frac{1}{3}\cdot 3^3 = 9$ vezes o volume da esfera inicial.

28| A

Cada face lateral de cada tronco de pirâmide é um trapézio de base menor 1 e base maior 2. Sendo h a altura do trapézio, pela análise espacial do tronco e utilizando o Teorema de Pitágoras, pode-se escrever:

$$h^2 = 1^2 + \left(\frac{2-1}{2}\right)^2 \to h = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

A área de cada um dos trapézios será:

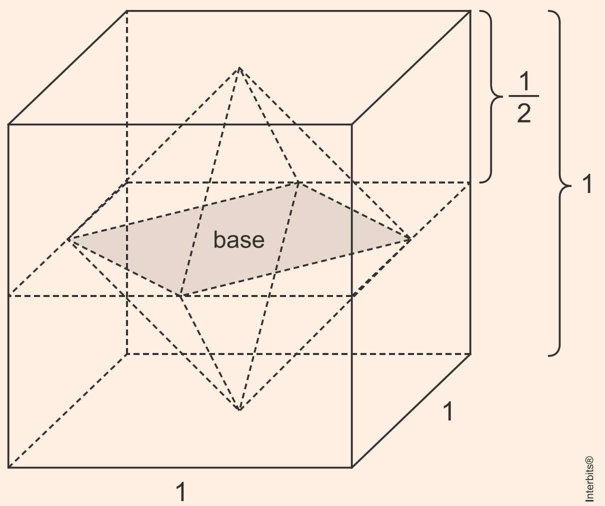
$$S_{facetrapez} = \frac{(2+1)\cdot \sqrt{5}/2}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

A área lateral de cada tronco de pirâmide será:

$$S_\ell = 4\cdot S_{facetrapez} = 4\cdot\frac{3\sqrt{5}}{4} \to S_\ell = 3\sqrt{5}$$

A área lateral dos dois troncos será igual a $6\sqrt{5}$ e a área da base maior exposta (topo do monumento) será igual a 4. Assim a área total exposta será igual a $4+6\sqrt{5}$.

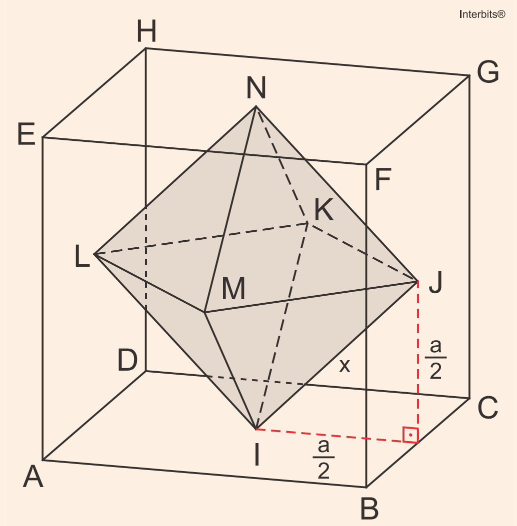
29| C



O poliedro considerado é um octaedro regular, seu volume será a soma dos volumes de duas pirâmides, representadas na figura acima.

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

30| E



Admitindo x a medida do lado do octaedro da figura podemos escrever que:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{2\cdot a^2}{4}$$

$$x = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$$

31| C

Sabendo que a medida do diâmetro da esfera é igual à medida da diagonal do cubo, temos

$$2R = 3\sqrt{3}\,\text{dm}.$$

32| C

Sabendo que a área lateral de um cilindro equilátero de raio r é dada por $4\text{ð}r^2$, temos

$$4\text{ð}r^2 = 16\text{ð} \Rightarrow r = 2\text{cm}.$$

Portanto, sendo o raio da esfera inscrita igual ao raio do cilindro, podemos concluir que o volume da esfera é

$$\frac{4\text{ð}}{3}\cdot r^3 = \frac{4\text{ð}}{3}\cdot 2^3 = \frac{32\text{ð}}{3}\text{cm}^3.$$