COMBINATÓRIA MATRIZES E DETERMINANTES

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE

COMBINATÓRIA MATRIZES E DETERMINANTES

Noções de Matemática

Capa:
Ricardo van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

C724 Combinatória, matrizes e determinantes : 2º grau / Aref Antar Neto . . . (et al.). — São Paulo : Ed. Moderna, 1979.
(Noções de matemática ; v.4)

1. Determinantes 2. Matemática (2º grau) 3. Matrizes I. Antar Neto, Aref, 1949–

17. CDD–512.896
18. –512.943
17. –512.83

79-1367

Índices para catálogo sistemático:

1. Determinantes : Álgebra 512.83 (17.) 512.943 (18.)
2. Matrizes : Álgebra 512.896 (17.) 512.943 (18.)

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tels.: 61-2235 - 240-2637 - 531-1730 - 531-3768
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1979

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Parte II

Parte III

Parte IV

OK

Parte V

OK

Parte VI

Parte VII

PARTE I

Capítulo

1 O conceito de matriz

1.1 – MATRIZ

A uma tabela de números, dispostos em *linhas* e *colunas*, colocados entre "colchetes", damos o nome de **matriz**. Os números que a constituem são seus elementos.

Exemplos

1º) $\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha} \\ \\ \end{array} \end{array}$

2º) $\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & \text{coluna} & \end{array} \end{array}$

3º) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \\ 10 & 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

4º) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \\ \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$

As linhas são numeradas de "cima para baixo" e as colunas, "da esquerda para a direita"; assim:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 6 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ \leftarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ \leftarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \\ \leftarrow 4^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} \\ \text{coluna} & \text{coluna} & \text{coluna} \end{array} & \end{array}$$

1.2 – ORDEM DE UMA MATRIZ

A **ordem de uma matriz** é dada pelo número de linhas e o número de colunas que a constituem.

Para indicá-la, escreve-se em primeiro lugar o número de linhas e, em seguida, o número de colunas, colocando-se entre esses dois números o sinal X.

No 1º exemplo, acima, a matriz é de **ordem** 2 X 2 (lê-se: *"dois por dois"*); no 2º exemplo, a matriz é de **ordem** 2 X 3 (lê-se: *"dois por três"*); no 3º exemplo, a matriz é de **ordem** 3 X 4, e, no 4º exemplo, a matriz é 4 X 2.

Podemos então dizer que uma **matriz de ordem m X n**, ou simplesmente **matriz m X n**, é uma tabela de números distribuídos em **m** linhas e **n** colunas. Observe, então, que o número de elementos que a constituem é **m · n**.

1.3 – MATRIZ QUADRADA

Matriz quadrada é uma matriz constituída pelo mesmo número de linhas e de colunas.

Se uma matriz quadrada é de ordem **n X n**, isto é, se possui **n** linhas e **n** colunas, diz-se que ela é uma **matriz quadrada de ordem n**.

Exemplos

1º) A matriz $A = [3]$ é quadrada de ordem 1.

2º) A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 2.

3º) A matriz $C = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 14 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 3.

1.4 – NOTAÇÃO GERAL

Para representarmos a matriz A, m X *n*, indicamos cada um de seus elementos com uma letra minúscula afetada de dois índices, que indicam a posição ocupada por esse elemento na matriz.

Assim, um *elemento genérico* da matriz A será representado por:

$$\boxed{a_{ij}}$$

O primeiro índice, **i**, indica a linha a que esse elemento pertence, e o segundo índice, **j**, a coluna a que esse elemento pertence:

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-ésima linha}$$

$$\uparrow \text{ j-ésima coluna}$$

Exemplos

1º) Na matriz de ordem 2 X 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

a_{11} (lê-se: *"a um um"*) é o elemento que ocupa a 1ª linha e a 1ª coluna; a_{12} (lê-se: *"a um dois"*) é o elemento que ocupa a 1ª linha e a segunda coluna; a_{23} (lê-se: *"a dois três"*) é o elemento que ocupa a segunda linha e a terceira coluna.

2º) Na matriz

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$a_{11} = 8$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$, $a_{31} = 3$ e $a_{32} = -2$.

Em geral, a matriz A, de ordem m X n, é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, com a ***notação abreviada***:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

1.5 – DIAGONAL PRINCIPAL – DIAGONAL SECUNDÁRIA

Em uma matriz quadrada:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

o conjunto de seus elementos a_{ij}, tais que $i = j$, chama-se **diagonal principal**; o conjunto de seus elementos tais que $i + j = n + 1$ chama-se **diagonal secundária**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{diagonal principal}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{diagonal secundária}$$

Exercícios Resolvidos

1.1) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 7 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a sua ordem?
b) Quantos elementos ela possui?
c) Complete: $a_{41} = \ldots$ $\quad a_{22} = \ldots$ $\quad a_{32} = \ldots$ $\quad a_{13} = \ldots$
d) Se $a_{ij} = 0$, então $i = \ldots$ e $j = \ldots$

Solução

a) A matriz é constituída por 4 linhas e por 3 colunas; sua ordem é 4×3.
b) Ela possui $4 \cdot 3 = 12$ elementos.
c) $a_{41} = 7$, $a_{22} = 4$, $a_{32} = 3$ e $a_{13} = 7$.
d) Na matriz, $a_{21} = 0$ e daí, $i = 2$ e $j = 1$.

1.2) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ para a qual $a_{ij} = i^2 - j$.

Solução

Observe que a *definição* dada:

$$a_{ij} = i^2 - j$$

indica como se obtém um elemento qualquer de A: *eleva-se o seu primeiro índice ao quadrado e desse quadrado subtraímos o seu segundo índice*; então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3 \\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3 \\ 3^2-1 & 3^2-2 & 3^2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ para a qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Solução

Observe que na matriz quadrada de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

os elementos para os quais $i = j$ pertencem à *diagonal principal*, e eles todos são iguais a 1; aqueles para os quais $i < j$ estão "acima da diagonal principal", e para calculá-los somamos os seus índices; e, aqueles para os quais $i > j$ estão "abaixo da diagonal principal", e eles todos são iguais a zero.

Então:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

1.4) Seja a matriz de ordem $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 600 & 621 & \dots & 517 \\ 407 & 440 & \dots & 330 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 706 & 850 & \dots & 1000 \end{bmatrix}$$

a) Quantos elementos ela possui?
b) Complete: $a_{21} = \dots$ $a_{m2} = \dots$ $a_{1n} = \dots$ $a_{mn} = \dots$

1.5) Uma matriz possui 6 elementos. Qual é a sua ordem?

1.6) Numa matriz quadrada de ordem n quantos elementos não pertencem à *diagonal principal*?

1.7) Numa matriz, chamam-se *elementos internos* aqueles que não pertencem à primeira ou à última linha ou coluna. Quantos elementos internos possui uma matriz 5×6?

1.8) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ para a qual $a_{ij} = 3i - j^2$.

1.9) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ para a qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i = j \\ j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

1.10) O símbolo **delta de Kronecker** é definido por:

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}}$$

Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ para a qual $a_{ij} = 3i + j^2 \cdot \delta_{ij}$.

1.11) Seja a *matriz quadrada* de ordem n: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Denomina-se **traço da matriz A** à soma $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$ dos elementos da diagonal principal de A; indica-se:

$$\boxed{tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ para a qual $a_{ij} = i \cdot j$; determine tr(A).

1.6 — ALGUMAS MATRIZES IMPORTANTES

1ª) Matriz linha

É a matriz constituída por uma única linha.

Exemplos

a) $A = [-1 \quad 3]$ b) $B = [4 \quad 4 \quad -5 \quad 2]$

2ª) Matriz coluna

É a matriz constituída por uma única coluna.

Exemplos

a) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3ª) Matriz diagonal

É a matriz *quadrada* na qual os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4ª) Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Será representada por **I**.

Por exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se quisermos colocar em evidência que a sua ordem é **n**, escrevemos I_n. Assim:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a matriz identidade $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ tem-se:

$$a_{ij} = \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{matrix} \right\} = \delta_{ij}$$

5ª) Matriz nula

É uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Será representada por **O**

Por exemplo:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se quisermos colocar em evidência a sua ordem, escrevemos $O_{m \times n}$. Assim:

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6ª) Matriz transposta

Seja a matriz A. Chama-se **matriz transposta** de A à matriz obtida de A, trocando-se, "ordenadamente" suas linhas por colunas (ou, o que conduz ao mesmo resultado: trocando-se suas colunas por linhas).

Indica-se a matriz transposta de A por A^t

Exemplo

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 4 \quad 6} \\ \boxed{-1 \quad 3 \quad 0} \end{bmatrix} \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ então $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ onde

$$b_{ij} = a_{ji} \begin{cases} \text{para todo } i, 1 \leq i \leq m \\ \text{para todo } j, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

1.7 – IGUALDADE DE MATRIZES

Elementos correspondentes

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem m × n. Um elemento **a** da matriz A e um elemento **b** da matriz **B** dizem-se **correspondentes** *se eles ocuparem a mesma posição nas respectivas matrizes.*

Exemplo

Nas matrizes de mesma ordem 2 × 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

os elementos

a_{11} e b_{11}
a_{12} e b_{12}
a_{21} e b_{21}
a_{22} e b_{22}

são **correspondentes.**

Observe que, na notação, elementos correspondentes têm índices iguais.

Definição

As matrizes A e B **são iguais**, se, e somente se, têm mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais; indica-se:

$$\boxed{A = B}$$

Então:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{p \times q}$$

$$A = B \iff \begin{cases} m = p \ \text{ e } \ n = q \\ \text{e} \\ a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} \text{para todo i, } 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo j, } 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \end{cases}$$

Exemplos

1º) As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1^2 \\ 2 & 2^2 \\ 3 & 3^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 1 \\ \frac{4}{2} & 4 \\ \frac{9}{3} & 9 \end{bmatrix}$ são iguais, isto é, $A = B$

2º) Se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, então: $a = 0, b = 2, c = -1$ e $d = \sqrt{2}$

No conjunto das matrizes de mesma ordem, a **igualdade de matrizes** define uma *relação de equivalência*; goza, então, das seguintes propriedades:

1ª) **reflexiva**: para toda matriz A, tem-se A = A.

2ª) **simétrica**: para as matrizes A e B, se A = B então B = A.

3ª) **transitiva**: para as matrizes A, B e C, se A = B e B = C, então A = C.

Exercícios Resolvidos

1.12) Se $\begin{bmatrix} x+y & a+b \\ x-y & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, determine x, y, a e b.

Solução

Da definição de igualdade de matrizes, os elementos correspondentes devem ser iguais; então:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo os dois sistemas acima (somando e subtraindo as respectivas equações) obtemos: $x = 3$, $y = 2$, $a = 1$ e $b = -2$.

1.13) Uma matriz *quadrada* $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ diz-se **simétrica** quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, e para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Observe que se A é simétrica então $A = A^t$, e inversamente.
Determine o número b, $b \in \mathbb{R}$, para que a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{bmatrix}$$

seja simétrica.

Solução

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{bmatrix}$ então $A^t = \begin{bmatrix} 3 & b^2 \\ 2b & b \end{bmatrix}$, e, se A é *simétrica*, tem-se $A = A^t$; daí:

$$\begin{matrix} 3 = 3 & \qquad & 2b = b^2 \\ b^2 = 2b & \qquad & b = b \end{matrix}$$

As condições acima ficam satisfeitas para as raízes da equação: $b^2 = 2b$ que são $b = 0$ e $b = 2$.
Note que há duas matrizes que satisfazem à condição imposta:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

1.14) Demonstre que para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ tem-se:

$$\boxed{(A^t)^t = A}$$

Solução

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ então $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ onde $b_{ij} = a_{ji}$.

A matriz $(A^t)^t$ é de ordem $m \times n$; seja então $(A^t)^t = [c_{ij}]_{m \times n}$ onde $c_{ij} = b_{ji}$.
Então, para todo i, $1 \leqslant i \leqslant m$, e para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tem-se:

$$(A^t)^t = [c_{ij}]_{m \times n} = [b_{ji}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A.$$

Exercícios Propostos

• 1.15) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ para a qual:

$$\begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} = i + j, \text{ se } 1 \leqslant i < j \leqslant 4 \end{cases}$$

Determine A e A^t. A é *simétrica*?

1.16) Se $\begin{bmatrix} \text{sen } 2\theta & (\text{sen } \theta + \cos \theta)^2 \\ \cos 4\theta & |\text{sen}^3\theta + \cos^3\theta| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & c \end{bmatrix}$, determine os números reais a, b e c.

1.17) Seja D uma matriz *diagonal* de ordem 3 × 3. D é *simétrica*?

1.18) Se $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ é *simétrica*, em A há, no máximo, quantos elementos distintos?

1.19) **Definição:** a **matriz J**, de ordem m × n, é uma matriz cujos elementos são todos iguais a 1. Construa, para matrizes 3 × 3:

a) I^t b) J^t c) O^t

1.20) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ para a qual $a_{ij} = f(i) + f(j)$, onde $f(x) = x + 1$. Construa A^t.

Capítulo 2

Operações com matrizes

2.1 – ADIÇÃO DE MATRIZES

Definição

Sejam as matrizes A e B, de *mesma ordem* m × n.

Denomina-se **soma** de A com B à matriz C, de ordem m × n, cujos elementos são obtidos somando-se os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indica-se:

$$\boxed{C = A + B}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+6 \\ -3+3 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$.
A matriz C = A + B é tal que:

$$C = [c_{ij}]_{m \times n} \quad \text{onde} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \begin{cases} \text{para todo i, } 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo j, } 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

Se as matrizes A e B têm mesma ordem, elas se dizem **conformáveis para a adição.**

Observe que existe A + B somente se A e B têm mesma ordem, isto é, se A e B são *conformáveis para a adição*.

As matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

não têm mesma ordem; a adição de A com B não pode ser efetuada.

Diz-se que matrizes de ordens diferentes *não são conformáveis para a adição.*

Propriedades da adição de matrizes

1ª) A adição de matrizes é *comutativa*: para as matrizes A e B, conformáveis para a adição:

$$\boxed{A + B = B + A}$$

Demonstração

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \overset{\text{I}}{=} [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = B + A$$

Observe que a adição entre números é comutativa, o que justifica a igualdade (I) acima.

2ª) A adição de matrizes é *associativa*: para as matrizes A, B e C, conformáveis para a adição:

$$\boxed{(A + B) + C = A + (B + C)}$$

Demonstração

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$(A + B) + C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} \overset{\text{I}}{=} [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} =$$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n} = A + (B + C).$$

Observe que a adição entre números é associativa, o que justifica a igualdade (I) acima.

3ª) *Existe o elemento neutro.*

Dada uma matriz A, existe uma matriz X, conformável com A para a adição, tal que:

$$\boxed{A + X = A}$$

Demonstração

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $X = [x_{ij}]_{m \times n}$, da condição $A + X = A$ obtemos:

$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij},$$

e daí, $x_{ij} = 0$.

Então, X é a *matriz nula* de ordem $m \times n$, $O_{m \times n}$:

$$\boxed{A + O = A}$$

4ª) *Existe a matriz oposta.*

Para toda matriz A, de ordem $m \times n$, existe uma matriz X, conformável com A para a adição, tal que:

$$\boxed{A + X = O_{m \times n}}$$

Demonstração

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $X = [x_{ij}]_{m \times n}$, da condição $A + X = O$ obtemos:

$$a_{ij} + x_{ij} = 0,$$

e daí, $x_{ij} = -a_{ij}$.

Então, X é a matriz cujos elementos são os *opostos* dos elementos correspondentes de A; a matriz X, então, denomina-se **oposta** da matriz A, e se indica com:

$$\boxed{-A}$$

Observe que se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, então $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$, e que:

$$\boxed{A + (-A) = O_{m \times n}}$$

Note também que $-(-A) = A$.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ então $-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

Definição

Sejam as matrizes A e B, *conformáveis para a adição.*
A **diferença** de matrizes A − B define-se por:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ então:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-2) & 3+3 \\ 5+(-4) & -2+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

> Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$
> A matriz D = A − B é tal que:
>
> $$D = [d_{ij}]_{m \times n} \text{ onde } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \begin{cases} \text{para todo } i, \ 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo } j, \ 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

A equação matricial X + A = B. Teorema

Sejam X, A e B matrizes conformáveis para a adição; então, vale a equivalência:

$$\boxed{X + A = B \iff X = B - A}$$

Demonstração

Na equação X + A = B, somando-se a matriz −A a ambos os membros, obtemos sucessivamente:

$$(X + A) + (-A) = B + (-A)$$
$$X + [A + (-A)] = B - A$$
$$X + O = B - A$$
$$X = B - A$$

Então, $X + A = B \Rightarrow X = B - A$ (I)

Inversamente, para X = B − A, a equação X + A = B fica satisfeita:

$$X + A = (B - A) + A = B + (-A + A) = B + O = B$$

Então, $X = B - A \Rightarrow X + A = B$ (II)

De (I) e (II) vem a tese: $X + A = B \iff X = B - A$.

Note então que, numa equação matricial, *uma matriz "pode passar" de um membro para o outro da equação, "mudando" o seu sinal.*

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determinemos a matriz X tal que X + A = B. Então, do teorema acima:

$$X = B - A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

2.2 – MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL

Definição

Dados uma matriz A, de ordem m × n, e um número real α, o **produto** de α por A é uma matriz B, de ordem m × n, obtida multiplicando-se cada elemento de A por α. Indica-se:

$$\boxed{B = \alpha \cdot A}$$

Exemplo

$$2\cdot\begin{bmatrix}4 & -3\\ 0 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 4 & 2\cdot(-3)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 2\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -6\\ 0 & 4\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

Formalmente:

Sejam a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e o número real α.
A matriz $B = \alpha\cdot A$ é tal que:

$$B = [b_{ij}]_{m\times n} \text{ onde } b_{ij} = \alpha\cdot a_{ij}\ \begin{cases}\text{para todo i, } 1\leqslant i\leqslant m\\ \text{para todo j, } 1\leqslant j\leqslant n\end{cases}$$

Propriedades

Sejam A e B matrizes de ordem m $\times$ n e os números reais α e β.
Valem as propriedades:

1ª) $1\cdot A = A$
2ª) $(-1)\cdot A = -A$
3ª) $\alpha\cdot O_{m\times n} = O_{m\times n}$
4ª) $0\cdot A = O_{m\times n}$
5ª) $\alpha\cdot(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$
6ª) $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$
7ª) $\alpha\cdot(\beta\cdot A) = (\alpha\beta)\cdot A$

Veja os exercícios 2.4 e 2.14.

Exercícios Resolvidos

2.1) Se $A = \begin{bmatrix}3 & 1 & -5\\ 2 & 1 & 6\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}5 & 2 & -4\\ 0 & 7 & 6\end{bmatrix}$, determine:

a) A + B b) A − B

Solução

a) $A + B = \begin{bmatrix}3 & 1 & -5\\ 2 & 1 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 2 & -4\\ 0 & 7 & 6\end{bmatrix} =$

$$=\begin{bmatrix}3+5 & 1+2 & -5+(-4)\\ 2+0 & 1+7 & 6+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3 & -9\\ 2 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

b) $A - B = \begin{bmatrix}3 & 1 & -5\\ 2 & 1 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 2 & -4\\ 0 & 7 & 6\end{bmatrix} =$

$$=\begin{bmatrix}3-5 & 1-2 & -5-(-4)\\ 2-0 & 1-7 & 6-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ 2 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

2.2) Se $A = \begin{bmatrix}4 & 2\\ 5 & 7\\ 3 & 10\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & -6\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, calcule A − B + C.

Solução

A adição de matrizes é *associativa*; não há, então, ambigüidade na notação A − B + C; ela pode ser escrita, por exemplo, (A − B) + C; então:

$$A - B + C = (A-B)+C = \left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ 5 & 7\\ 3 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & -6\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 13\\ 2 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 13\\ 3 & 9\end{bmatrix}$$

2.3) Determine os números reais x, y, z e μ sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix}x+1 & 3\\ 8 & z-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & y\\ \mu & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

Solução

$$\begin{bmatrix}x+3 & 3+y\\ 8+\mu & z-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

Então: $x + 3 = 2x$ $3 + y = 3$
$8 + \mu = 5$ $z - 1 = 1$

e daí: $x = 3$, $y = 0$, $\mu = -3$ e $z = 2$.

2.4) Se $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 7 & 11 & 0\\ 5 & -3 & 4\end{bmatrix}$, calcule:

a) 5A − B b) 2A + 3B

Solução

a) $5A - B = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 10 & 25 & -5 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 16 \\ 3 & 14 & -5 \\ 15 & 18 & 6 \end{bmatrix}$

b) $2A + 3B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 10 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 21 & 33 & 0 \\ 15 & -9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 25 & 43 & -2 \\ 23 & -3 & 16 \end{bmatrix}$

2.5) Sejam as matrizes A e B, conformáveis para a adição; se $\alpha \in \mathbb{R}$, demonstre que:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

Solução

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ tem-se $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$; então:

$\alpha \cdot (A + B) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [\alpha \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]_{m \times n} =$

$= [\alpha a_{ij}]_{m \times n} + [\alpha b_{ij}]_{m \times n} = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

2.6) Seja $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que: $-4(X - I_3) = X + J$

Solução

As propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de uma matriz por um número real, possibilitam escrever sucessivamente:

$$-4(X - I_3) = X + J$$
$$-4X + 4I_3 = X + J$$
$$-4X - X = J - 4I_3 \text{ (veja o Teorema da página 18)}$$
$$-5X = J - 4I_3$$
$$X = -\frac{1}{5} J + \frac{4}{5} I_3$$

Então:

$X = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

2.7) Determine as matrizes X e Y sabendo-se que:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X - Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Somando membro a membro as duas equações, resulta:

$$2X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e daí:

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Subtraindo membro a membro as duas equações, resulta:

$$2Y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí:

$$Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.8) Sejam as matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$. Demonstre que:

$$\boxed{(A + B)^t = A^t + B^t}$$

Solução

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$; então:

$$A^t = [\alpha_{ij}]_{n\times m} \quad \text{onde} \quad \alpha_{ij} = a_{ji}$$

$$B^t = [\beta_{ij}]_{n\times m} \quad \text{onde} \quad \beta_{ij} = b_{ji}$$

Seja $A + B = [c_{ij}]_{m\times n}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; então:

$$(A+B)^t = [\gamma_{ij}]_{n\times m} \quad \text{onde} \quad \gamma_{ij} = c_{ji}$$

Temos sucessivamente:

$$A^t + B^t = [\alpha_{ij}]_{n\times m} + [\beta_{ij}]_{n\times m} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{n\times m} = [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} =$$

$$= [c_{ji}]_{n\times m} = [\gamma_{ij}]_{n\times m} = (A + B)^t$$

2.9) Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A + A^t$ é *simétrica*.

Solução

Seja $B = A + A^t$ e demonstremos que B é simétrica, isto é, que $B = B^t$. (Veja exercício 1.13.)

De fato,

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$$

2.10) Uma matriz *quadrada* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ diz-se anti-simétrica quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$ e para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Observe que se A é anti-simétrica $A^t = -A$ e inversamente.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ é anti-simétrica.

Note que os elementos que pertencem à diagonal principal são todos iguais a zero, e que os elementos colocados simetricamente em relação à diagonal principal são opostos.

Determine os números reais a, b, c, x, y e z *para que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & -3 \\ x-1 & b & 2y-4 \\ z & 4 & c \end{bmatrix}$$

seja *anti-simétrica*.

Solução

Os elementos da diagonal principal devem ser iguais a zero:

$$a = b = c = 0$$

Os elementos colocados simetricamente em relação à diagonal principal são opostos:

$$x - 1 = -2$$
$$z = -(-3)$$
$$4 = -(2y - 4)$$

Então: $x = -1$, $z = 3$ e $y = 0$.

A matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

2.11) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) $A + B$ b) $B - A$

2.12) Determine os números reais x e y sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x \\ -y & 0 \end{bmatrix} = I_2$$

2.13) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a matriz $A - 6B - 2C$.

b) Resolva a equação matricial:

$$\frac{1}{2}(X + A) = 3[X + (2X + B)] + C$$

2.14) Seja A uma matriz e sejam α e β números reais. Demonstre que

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

2.15) Determine as matrizes X e Y sabendo-se que:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X - Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.16) X e Y são matrizes de ordem 3×3. Determine-as sabendo-se que:

$$\begin{aligned} X + 2Y &= I_3 \\ 2X - Y &= O_3 \end{aligned}$$

2.17) A e B são matrizes quadradas de mesma ordem. Demonstre que:

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \quad \text{(veja exercício 1.11)}$$

2.18) Sejam a matriz A e α um número real. Demonstre que:

$$(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$$

2.19) Sejam as matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$. Demonstre que:

$$(A - B)^t = A^t - B^t \quad \text{(use os exercícios 2.8 e 2.18)}$$

2.20) Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A - A^t$ é *anti-simétrica*. (Veja exercício 2.10.)

2.3 – MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Requisito para a existência do produto de matrizes

Para que o produto de duas matrizes exista, exige-se que os fatores que são multiplicados sejam **conformáveis para a multiplicação**; isto significa que o primeiro fator deve possuir tantas colunas quantas são as linhas do segundo fator.

Assim, se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz de ordem $p \times k$, o produto $A \cdot B$ só existe se $n = p$. Se $n \neq p$, a multiplicação de A *por* B não pode ser efetuada, isto é, o produto $A \cdot B$ não existe.

Definição

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, conformáveis para a multiplicação.

O **produto de A por B**, notado com $A \cdot B$, é a matriz de ordem $m \times p$, $C = [c_{ik}]_{m \times p}$, para a qual o elemento c_{ik}, que se encontra em sua i-ésima linha e em sua k-ésima coluna, é obtido multiplicando-se os elementos da i-ésima **linha** de A pelos "correspondentes" elementos da k-ésima **coluna** de B e somando-se os "produtos parciais" assim obtidos:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Exemplos

1º)

$$\underset{\text{matriz A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{matriz B}}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}} = \underset{\text{matriz A} \cdot \text{B}}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & c_{32} \end{bmatrix}}$$

3×4 são conformáveis 4×2 3×2

$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} + a_{34} \cdot b_{42} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j} b_{j2}$$

Observe que, para obtermos o elemento c_{32} da matriz produto, multiplicamos os elementos da 3ª linha de A pelos "correspondentes" elementos da 2ª coluna de B, somando-se, então, os produtos assim obtidos.

2º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}$$

$c_{11} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 25$ $\quad c_{12} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 10$ $\quad c_{13} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 34$

$c_{21} = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 42$ $\quad c_{12} = 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 15$ $\quad c_{23} = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 58$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 34 \\ 42 & 15 & 58 \end{bmatrix}$$

3º) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j2} \\ \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

4º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$, isto é, a multiplicação de matrizes *não é uma operação comutativa.*

5º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $C = [-2 \quad 1]$

Calculemos $(A \cdot B) \cdot C$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculemos $A \cdot (B \cdot C)$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-6) + 2 \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

6º) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e a **matriz identidade** $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

Observe que $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$

7º) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e a **matriz nula** $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot O_2 = O_2 \cdot A = O_2$$

Formalizando, então, a definição discutida acima:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$.
A matriz $C = A \cdot B$ é tal que:

$$C = [c_{ik}]_{m \times p} \text{ onde } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \begin{cases} \text{para todo } i, 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo } k, 1 \leqslant k \leqslant p \end{cases}$$

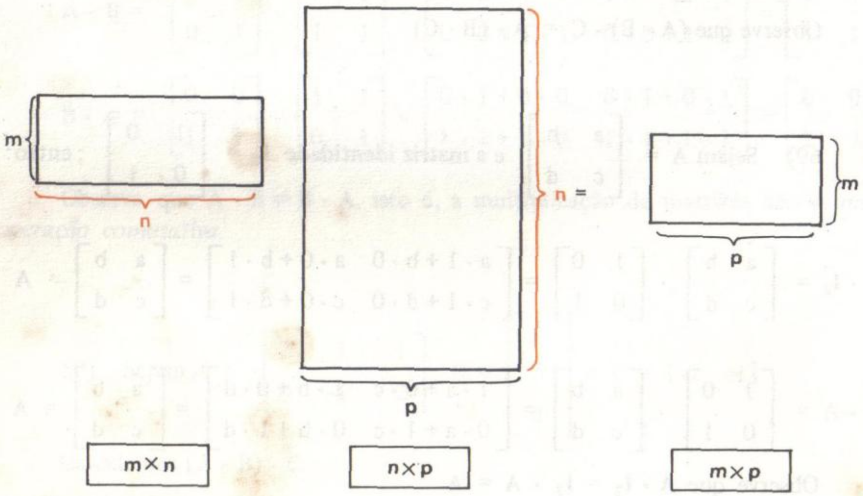
$$A \cdot B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

Um resumo para memorizar

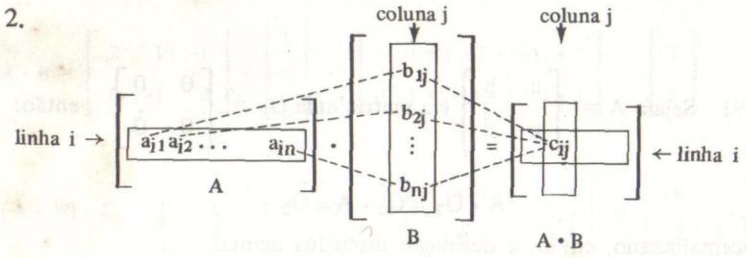
1.

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

conformáveis



2.



Exercícios Propostos

2.21) As matrizes A, B, C e D são de ordem 2×3, 3×4, 1×3 e 2×1, respectivamente. Dê a ordem de cada matriz abaixo:

a) $A \cdot B$ b) $C \cdot B$ c) $D \cdot (C \cdot B)$

2.22) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; determine $A \cdot B$.

2.23) Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$.

2.24) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ verifique que $A \cdot B = A \cdot C$.

2.25) a) Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

2.26) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que: $A \cdot X = I_2$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

1ª) A multiplicação de matrizes *não é comutativa*.

Sejam as matrizes A e B. Se o produto $A \cdot B$ existe, o produto $B \cdot A$ pode não existir. Por exemplo, se A é de ordem 5×2 e B é de ordem 2×3, existe $A \cdot B$, mas não existe $B \cdot A$ (por quê?).

Mas, atenção! mesmo que existam $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pode-se ter $A \cdot B \neq B \cdot A$ (veja o 4º exemplo, acima).

Então, para duas matrizes A e B quaisquer, é falso que necessariamente:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Quando as matrizes A e B são tais que $A \cdot B = B \cdot A$, diz-se que A e B **comutam**.

Observe que uma condição necessária para que as matrizes A e B comutem é que sejam *quadradas e de mesma ordem*. Por exemplo, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

comutam, pois $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A$ (veja o 6º exemplo, acima).

2ª) A multiplicação de matrizes é *associativa*.
Sejam as matrizes:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},\ B = [b_{jk}]_{n \times p} \text{ e } C = [c_{kr}]_{p \times q}$$

Então:

$$\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$$

Demonstração (opcional)

Da definição de multiplicação, temos:

$$A \cdot B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

Aplicando novamente a definição para as matrizes A · B e C:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) \cdot c_{kr} \right]_{m \times q}$$

Multiplicando o fator c_{kr} em cada parcela da soma entre parênteses:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kr} \right) \right]_{m \times q}$$

Analogamente:

$$B \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kr} \right]_{n \times q}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kr} \right) \right]_{m \times q}$$

e daí:

$$A \cdot (B \cdot C) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kr} \right) \right]_{m \times q}$$

A ordem segundo a qual desenvolvemos as *somatórias*, numa soma de um número finito de parcelas, é arbitrária; então:

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kr} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kr} \right),$$

e daí a tese: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3ª) A multiplicação de matrizes é *distributiva* em relação à adição.
Sejam as matrizes:

$$A = [a_{ik}]_{m \times n},\ B = [b_{kj}]_{n \times p} \text{ e } C = [c_{kj}]_{n \times p}$$

Então:

$$\boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$$

Demonstração

$$A \cdot (B + C) = [a_{ik}]_{m \times n} \cdot [b_{kj} + c_{kj}]_{n \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj}) + \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{bk}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times p} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right]_{m \times p} = A \cdot B + A \cdot C$$

A propriedade acima, desde que a conformabilidade esteja respeitada, também assume a forma:

$$\boxed{(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C}$$

A demonstração é análoga à anterior. (Veja exercício 2.45.)

4ª) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ e o número real α; então:

$$\boxed{(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)}$$

Demonstração

$$(\alpha \cdot A) \cdot B = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n} \cdot [b_{jk}]_{n \times p} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij}) \cdot b_{jk} \right]_{m \times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha \cdot (a_{ij} b_{jk}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p} = \alpha \cdot (A \cdot B)$$

5ª) Multiplicação pela *matriz identidade*.

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$\boxed{A \cdot I_n = I_m \cdot A = A}$$

Demonstração

Demonstremos que $A \cdot I_n = A$.

Sendo $I_n = [\delta_{jk}]_{n \times n}$, onde $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$ e $\delta_{jk} = 1$ se $j = k$ (veja pág. 8), temos:

$$A \cdot I_n = [a_{ij}]_{m \times n} \cdot [\delta_{jk}]_{n \times n} = \left[\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \delta_{jk}) \right]_{m \times p} =$$

$$= [(a_{i1}\delta_{1k} + a_{i2}\delta_{2k} + a_{i3}\delta_{3k} + \ldots + a_{ik}\delta_{kk} + \ldots + a_{in}\delta_{nk})]_{m \times n} =$$

$$= [(a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 + \ldots + a_{ik} \cdot 1 + \ldots + a_{in} \cdot 0]_{m \times n} =$$

$$= [a_{ik}]_{m \times n} = A$$

A demonstração da igualdade $I_m \cdot A = A$ é análoga.

6ª) Multiplicação pela *matriz nula*.

Seja a matriz A, de ordem $m \times n$; então:

$$\boxed{\begin{array}{l} O_{p \times m} \cdot A = O_{p \times n} \\ A \cdot O_{n \times p} = O_{m \times p} \end{array}}$$

A demonstração é imediata.

Observações muito importantes

1ª) Sejam A e B matrizes conformáveis para a multiplicação; da igualdade $A \cdot B = O$, *não podemos concluir* que $A = O$ ou $B = O$.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que o produto das matrizes acima é a matriz nula, mas nenhum dos fatores o é.

2ª) Sejam as matrizes A, B e C. Respeitadas as condições de conformabilidade, da igualdade $A \cdot B = A \cdot C$ ou da igualdade $B \cdot A = C \cdot A$, *não podemos concluir que* $B = C$, mesmo que $A \neq O$. **Para a multiplicação de matrizes não vale a lei do cancelamento.**

Por exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} = A \cdot C$$

Observe que se tem $A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$.

Exercícios Resolvidos

2.27) Mostre que para quaisquer **a, b, c** e **d**, reais, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

comutam.

Solução

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca-db & cb+da \\ -da-cb & -db+ca \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B = B \cdot A$, isto é, A e B *comutam.*

2.28) Se A é uma *matriz quadrada*, de ordem n. Define-se:

$$\boxed{\begin{aligned} A^0 &= I_n, \text{ se } A \neq O \\ A^1 &= A \\ A^{p+1} &= A^p \cdot A, \text{ para } p \in \mathbb{N}^* \end{aligned}}$$

Note que da definição tem-se, por exemplo:

$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = (A \cdot A) \cdot A$$

A multiplicação de matrizes é uma operação associativa, o que nos permite escrever:

$$A^3 = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A)$$

Na prática, é comum escrever-se:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

notação que não gera ambigüidade, pois a associatividade da multiplicação permite que se determine A^3 calculando $(A \cdot A) \cdot A$ ou $A \cdot (A \cdot A)$, alternativas que nos conduzem a um mesmo resultado.

Analogamente, a associatividade da multiplicação permite-nos escrever:

$$A^4 = A^3 \cdot A$$
$$A^4 = (A \cdot A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A \cdot A)$$

e, na prática, sem que se tenha qualquer ambigüidade, escreve-se:

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$$

As considerações anteriores permitem-nos concluir que para p, inteiro e $p \geqslant 2$, a notação A^p indica um produto de p fatores iguais a A:

$$\boxed{A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{\text{p fatores}}}$$

Para as definições acima, resolva os problemas:

a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule A^2, A^3 e A^4.

b) Dê todas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ que satisfazem $A^3 + A = O$.

Solução

a) $$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 1 + (-6) \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Calculemos inicialmente A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + a \cdot b & 0 \cdot a + a \cdot 0 \\ b \cdot 0 + 0 \cdot b & b \cdot a + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab \cdot 0 + 0 \cdot b & ab \cdot a + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + ab \cdot b & 0 \cdot a + ab \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^3 + A = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2b + a \\ ab^2 + b & 0 \end{bmatrix}$$

E, sendo $A^3 + A = O$, tem-se:

$$\begin{cases} a^2b + a = 0 & \text{(I)} \\ ab^2 + b = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A equação (I) pode ser escrita: $a(ab + 1) = 0$ e daí obtemos:

$$a = 0 \text{ ou } ab = -1$$

Para $a = 0$, em (II), tem-se $b = 0$, e então a solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

Agora, observe que a equação $ab = -1$ não é satisfeita para $a = 0$; então, supondo $a \neq 0$, tem-se $b = \frac{-1}{a}$. Substituindo em (II):

$$a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = 0,$$

equação que fica satisfeita para todo a, $a \neq 0$.

Então, a solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}^*$$

2.29) Uma matriz A, quadrada, diz-se **involutiva** quando $A^2 = I$. Uma matriz *diagonal*, de ordem 2, é *involutiva*; determine-a.

Solução

Se A é *diagonal* (veja a página 9) então $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$; e, se A é *involutiva* tem-se:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $a^2 = 1$ e $b^2 = 1$, e daí as soluções:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$. Demonstre que:

$$\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$$

Solução

Temos:

$$A^t = [\alpha_{ij}]_{n \times m} \text{ onde } \alpha_{ij} = a_{ji}$$
$$B^t = [\beta_{jk}]_{p \times n} \text{ onde } \beta_{jk} = b_{kj}$$

Seja $A \cdot B = [c_{ik}]_{m \times p}$ onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk})$

Então, a matriz $(A \cdot B)^t$ é de ordem $p \times m$, e, nela, o elemento c_{ik} ocupa a i-ésima coluna e a k-ésima linha.

Por outro lado, a matriz $B^t \cdot A^t$ também é de ordem $p \times m$, e o elemento que nela igualmente ocupa a i-ésima coluna e a k-ésima linha é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_{kj} \cdot \alpha_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} (b_{jk} \cdot a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk}) = c_{ik}$$

Fica então demonstrada a tese.

1) Use o **Método da Indução Matemática** para demonstrar que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

Solução

Teorema 1

Para $n = 1$ a propriedade é válida.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a propriedade é válida para $n = k$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = k + 1$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se, "à direita", ambos os membros da igualdade da hipótese pela *matriz*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ obtemos:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a definição dada no exercício 2.28 ao primeiro membro da igualdade acima e efetuando a multiplicação do segundo membro, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+k \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

que é a tese.

Note que na passagem acima, onde multiplicamos ambos os membros da igualdade pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o fizemos "à direita" no primeiro membro e também "à direita", no segundo membro. Poderíamos multiplicar ambos os membros "à esquerda". Mas, *não poderíamos* multiplicar um dos membros "à esquerda" e o outro "à direita", pois a multiplicação de matrizes não é comutativa.

2.32) Seja A uma matriz *quadrada*.
Uma **matriz polinomial**, na matriz A, é uma expressão da forma:

$$a_0 \cdot A^p + a_1 \cdot A^{p-1} + a_2 \cdot A^{p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot A + a_p \cdot I$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant p$.

Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a *matriz polinomial*:

$$2 \cdot A^2 + 3 \cdot A + 5 \cdot I$$

Solução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Então:

$$2 \cdot A^2 + 3 \cdot A + 5 \cdot I = \begin{bmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{bmatrix}$$

2.33) Respeitada a conformabilidade para as operações, se as matrizes A e B *comutam*, demonstre que:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

Solução

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B)$$

A *distributividade* da multiplicação permite-nos escrever sucessivamente:

$$(A + B)^2 = A \cdot (A + B) + B \cdot (A + B)$$
$$(A + B)^2 = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$
$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$$

Como, por hipótese, A e B *comutam*, tem-se $A \cdot B = B \cdot A$, e daí a tese:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

Observe que se A e B *não comutam*: $(A + B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

2.34) As matrizes A e B são quadradas e de mesma ordem n. Demonstre que:

$$[A^t \cdot (B + I_n)]^t = B^t \cdot A + A$$

Solução

$$[A^t \cdot (B + I_n)]^t = (B + I_n)^t \cdot (A^t)^t = (B^t + I_n^t) \cdot A = (B^t + I_n) \cdot A =$$
$$= B^t \cdot A + I_n \cdot A = B^t \cdot A + A$$

Note que para a *matriz identidade* tem-se $I^t = I$.

2.35) a) Respeitada a conformabilidade para as matrizes A, B e C, demonstre que:

$$(A \cdot B \cdot C)^t = C^t \cdot B^t \cdot A^t$$

b) A, matriz quadrada de ordem n, é *simétrica*; P é uma matriz de ordem m×n. Demonstre que a matriz $B = P^t \cdot A \cdot P$ é *simétrica*.

Solução

a) A propriedade associativa permite-nos escrever: $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$.
Então, aplicando o resultado do exercício 2.30 obtemos:
$$(A \cdot B \cdot C)^t = [(A \cdot B) \cdot C]^t = C^t \cdot (A \cdot B)^t = C^t \cdot (B^t \cdot A^t) = C^t \cdot B^t \cdot A^t$$

b) Devemos demonstrar que $B^t = B$; de fato, o ítem anterior permite-nos escrever:
$$B^t = (P^t \cdot A \cdot P)^t = P^t \cdot \underbrace{A^t \cdot (P^t)^t = P^t \cdot A}_{A \text{ é simétrica}} \cdot P = B$$

2.36) Seja a matriz $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcule J^2, J^3, J^4 e J^p, para $p \geqslant 2$, $p \in \mathbb{Z}$.

b) Toma-se $\urcorner = \{M | M = x \cdot I_2 + y \cdot J;\ (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$; demonstre que $\urcorner$ é **estável para a multiplicação**, isto é, que o produto de dois elementos (matrizes) de $\urcorner$ também é elemento de $\urcorner$.

c) A multiplicação é comutativa em $\urcorner$?

Solução

a) $J^2 = J \cdot J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot J$

$$J^3 = J^2 \cdot J = (2 \cdot J) \cdot J = 2 \cdot J^2 = 2 \cdot (2 \cdot J) = 2^2 \cdot J$$
$$J^4 = J^3 \cdot J = (2^2 \cdot J) \cdot J = 2^2 \cdot J^2 = 2^2 \cdot (2 \cdot J) = 2^3 \cdot J$$

As igualdades acima "sugerem" que $J^p = 2^{p-1} \cdot J$; vamos provar esse resultado usando o **Método da Indução Matemática.**

Teorema 1

O resultado vale para $p = 2$ (veja acima).

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que o resultado é válido para $p = k$, isto é:
$$J^k = 2^{k-1} \cdot J$$

Tese: demonstremos que o resultado é válido para $p = k + 1$, isto é:
$$J^{k+1} = 2^k \cdot J$$

Multiplicando-se, à direita, ambos os membros da hipótese, pela matriz J:
$$J^k \cdot J = (2^{k-1} \cdot J) \cdot J$$
$$J^{k+1} = 2^{k-1} \cdot J^2$$
$$J^{k+1} = 2^{k-1} \cdot (2 \cdot J)$$
$$J^{k+1} = (2^{k-1} \cdot 2) \cdot J$$
$$J^{k+1} = 2^k \cdot J, \text{ que é a tese.}$$

b) Consideremos as matrizes M_1 e M_2 de $\urcorner$; demonstremos que $M_1 \cdot M_2 \in \urcorner$. Sejam:
$$M_1 = x_1 \cdot I_2 + y_1 \cdot J, \quad (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$$
$$M_2 = x_2 \cdot I_2 + y_2 \cdot J, \quad (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Então:
$$M_1 \cdot M_2 = (x_1 \cdot I_2 + y_1 \cdot J) \cdot (x_2 \cdot I_2 + y_2 \cdot J) = (x_1 \cdot I_2) \cdot (x_2 \cdot I_2) +$$
$$+ (x_1 \cdot I_2) \cdot (y_2 \cdot J) + (y_1 \cdot J) \cdot (x_2 \cdot I_2) + (y_1 \cdot J) \cdot (y_2 \cdot J) \overset{1}{=} x_1x_2 \cdot I_2^2 +$$
$$+ x_1y_2 \cdot I_2 \cdot J + y_1x_2 \cdot J \cdot I_2 + y_1y_2 \cdot J^2 = x_1x_2 \cdot I_2 + x_1y_2 \cdot J + y_1x_2 \cdot J + y_1y_2 \cdot 2J =$$
$$= \underbrace{x_1x_2}_{\bar{x}} \cdot I_2 + \underbrace{(x_1y_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2)}_{\bar{y}} J$$
$$= \bar{x} \cdot I_2 + \bar{y} \cdot J, \quad (\bar{x}; \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$$

Daí, $M_1 \cdot M_2 \in \urcorner$

c) Calculando $M_2 \cdot M_1$, obtemos analogamente:
$$M_2 \cdot M_1 = \bar{x} \cdot I_2 + \bar{y} \cdot J$$

isto é, $M_2 \cdot M_1 = M_1 \cdot M_2$, e a multiplicação é comutativa em $\urcorner$.

Observação: em 1 nós nos utilizamos da seguinte propriedade:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ e os números reais α e β; então:

$$\boxed{(\alpha \cdot A) \cdot (\beta \cdot B) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (A \cdot B)}$$

De fato,
$$(\alpha \cdot A) \cdot (\beta \cdot B) = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n} \cdot [\beta \cdot b_{jk}]_{n \times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij} \cdot \beta \cdot b_{jk})\right]_{m \times p} =$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha\beta \cdot (a_{ij} \cdot b_{jk})\right]_{m \times p} = (\alpha\beta) \cdot (A \cdot B)$$

Exercícios Propostos

2.37) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ tais que $a_{ij} = i - j + 2$ e $b_{ij} = 2i + j - i$. Seja $A \cdot B = [c_{ij}]_{3 \times 2}$; determine c_{32} e c_{13}.

2.38) Resolva a equação matricial:
$$3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.39) Determine x, $x \in \mathbb{R}$, sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x & -14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 4x & -2x \end{bmatrix} = I$$

2.40) Se as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *comutam*, qual a relação que "liga" a, b, c e d?

2.41) Mostre que:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I$$

2.42) Demonstre que uma matriz A, quadrada, é *involutiva* se, e somente se, $(I - A) \cdot (I + A) = O$ (Veja o exercício 2.29.)

2.43) Use o **Método da Indução Matemática** para demonstrar que:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & \operatorname{sen}(n\theta) \\ -\operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

2.44) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ verifique que: $A^2 - 4 \cdot A - 5 \cdot I_3 = O_3$.

2.45) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{n \times p}$. Demonstre que:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

2.46) A e B são matrizes quadradas de ordem n. Demonstre que:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$$

2.47) Use o **Método da Indução Matemática** para demonstrar que, respeitada a conformabilidade:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^t = A_n^t \cdot A_{n-1}^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \geqslant 2.$$

2.48) Utilize a definição dada no exercício 2.28 e demonstre, usando o **Método da Indução Matemática**, que, para a matriz quadrada A:

$$\boxed{A^{p+q} = A^p \cdot A^q} \qquad (p \in \mathbb{N}^* \text{ e } q \in \mathbb{N}^*)$$

(Use o Método para o inteiro p.)

2.49) A e B *comutam*. Demonstre que:

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

2.50) As matrizes A e B são *simétricas*. Mostre que:

a) A^t é *simétrica*.
b) A^2 é *simétrica*.
c) Se A e B *comutam*, então $A \cdot B$ é *simétrica*.

2.51) Se A e B são matrizes quadradas tais que $A \cdot B = -B \cdot A$ dizemos que A e B são **anticomutativas.**

Mostre que as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ são *anticomutativas* e que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

2.52) A, B e C são matrizes quadradas de ordem n. Se a matriz C é *anti-simétrica*, demonstre que:

$$(A^t \cdot B^t + 3 \cdot C)^t = B \cdot A - 3 \cdot C$$

2.53) Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Designa-se com $\urcorner$ o conjunto das matrizes do tipo $a \cdot A + b \cdot B$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Verifique que $A^2 = A$ e $B^2 = B$.
b) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.
c) Mostre que se $M_1 \in \urcorner$ e $M_2 \in \urcorner$ então $M_1 \cdot M_2 \in \urcorner$.

2.4 – A MATRIZ INVERSA

Completaremos, agora, o estudo das operações entre matrizes, apresentando a *inversão de uma matriz quadrada*.

Definições

No conjunto dos números reais, para todo $a \neq 0$ existe o número b, denominado *inverso de a*, que satisfaz a condição:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

É usual indicarmos o inverso de a por a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; então:

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{ou} \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Analogamente, coloca-se o problema seguinte: dada uma *matriz quadrada* **A**, existe uma outra matriz **B**, conformável com **A** para a multiplicação, que satisfaz a condição:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

onde I é a *matriz identidade* de ordem apropriada?

Se essa matriz existe, diremos que é uma matriz inversa de A, e será representada com A^{-1}.

Então, a definição

> Seja **A** uma matriz *quadrada* de ordem **n**. A matriz *quadrada* **B**, de ordem **n**, diz-se **uma inversa da matriz A**, se e somente se:
>
> $$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

A matriz quadrada **A** denomina-se **não singular** se e somente se **A** possui uma inversa. Se **A** não possui uma inversa, **A** denomina-se **singular**. Diz-se também que, se a matriz quadrada **A** possui uma inversa, **A** é **invertível**; se A não possui uma inversa, **A** é **não invertível.**

Exemplo

Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Observe que $A \cdot B = B \cdot A = I_2$; então, **B** *é uma inversa de* **A**, ou **A** é *invertível*, ou A *é não singular.*

Teorema

"Se a matriz **A** é invertível, então é única a matriz **B** tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

isto é, se A possui uma inversa, essa inversa é única."

Demonstração

Admitamos que exista uma matriz **H** tal que:

$$A \cdot H = H \cdot A = I$$

Então:

$$H = I \cdot H = (B \cdot A) \cdot H = B \cdot (A \cdot H) = B \cdot I = B,$$

o que demonstra nossa tese.

Observações

Dada uma matriz quadrada **A**, invertível, de ordem **n**; a **única** matriz, A^{-1}, quadrada de ordem **n**, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

é a matriz inversa de A.

Note que A e A^{-1} *comutam* e que:

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

Exercícios Resolvidos

2.54) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

Solução

Suponhamos que exista A^{-1}; sua ordem é 2 × 2. Então: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a + 1 \cdot c & 2 \cdot b + 1 \cdot d \\ 1 \cdot a + 1 \cdot c & 1 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\left.\begin{matrix} 2a + c = 1 & 2b + d = 0 \\ a + c = 0 & b + d = 1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} a = 1, & b = -1 \\ c = -1, & d = 2 \end{matrix}\right.$$

Devemos verificar a condição: $A^{-1} \cdot A = I_2$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Então, definitivamente, a inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.55) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

Solução

Suponhamos que exista A^{-1}; $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot a + 1 \cdot c & 1 \cdot b + 1 \cdot d \\ 0 \cdot a + 0 \cdot c & 0 \cdot b + 0 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

impossível

Não existe A^{-1}; então a matriz A é singular, ou, ainda, é não invertível.

2.56) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

Solução

Suponhamos que exista A^{-1}; sua ordem é 3×3. Então:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a + 2d + g & -b + 2e + h & -c + 2f + i \\ 0 + d - 2g & 0 + e - 2h & 0 + f - 2i \\ a + 4d - g & b + 4e - h & c + 4f - i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\left.\begin{aligned} -a + 2d + g &= 1 \\ d - 2g &= 0 \\ a + 4d - g &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{7}{12} \\ d &= \frac{1}{6} \\ g &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} -b + 2e + h &= 0 \\ e - 2h &= 1 \\ b + 4e - h &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} b &= -\frac{1}{2} \\ e &= 0 \\ h &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} -c + 2f + i &= 0 \\ f - 2i &= 0 \\ c + 4f - i &= 1 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} c &= \frac{5}{12} \\ f &= \frac{1}{6} \\ i &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right.$$

Então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix},$$

pois também $A^{-1} \cdot A = I_3$ (o que deve ser verificado!).

Observe que para invertermos uma matriz A, de ordem n, pelo processo exposto acima, devemos resolver n sistemas, cada um deles com n equações e n incógnitas. É exaustivo!

Há outros métodos para a inversão de matrizes, cada um deles com suas vantagens e desvantagens. No capítulo 5 posterior apresentaremos um dos métodos mais conhecidos.

Exercícios Propostos

2.57) Para cada matriz abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \sec\theta & \text{tg}\,\theta \\ \text{tg}\,\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2.58) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^{-1} = \frac{1}{9}A$.

2.59) Se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, determine A.

2.60) Para cada matriz abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.61) Determine a matriz inversa da matriz quadrada de ordem n:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A equação matricial A · X = B. Teorema

Seja **A** uma matriz *invertível*; respeitada a conformabilidade, vale a equivalência:

$$\boxed{A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B}$$

Demonstração

Se A é invertível, existe A^{-1}; então, multiplicando-se por A^{-1}, "à esquerda", ambos os membros da equação $A \cdot X = B$, obtemos sucessivamente:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$
$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Então, $A \cdot X = B \implies X = A^{-1} \cdot B$ (I)

Inversamente, para $X = A^{-1} \cdot B$, a equação $A \cdot X = B$ fica satisfeita:

$$A \cdot X = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B$$

Então, $X = A^{-1} \cdot B \implies A \cdot X = B$ (II)

De (I) e (II) vem a tese: $A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B$

Exercício Resolvido

2.62) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Resolva a *equação matricial*: $A \cdot X = B$.

Solução

A matriz A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, (veja o exercício 2.54).

Então:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

2.63) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial: $A \cdot X = B$.

2.64) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} \cos a & \text{sen}\, a \\ -\text{sen}\, a & \cos a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \text{sen}\, 2a \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$.

2.65) Seja **A** uma matriz *invertível*; suponha respeitada a conformabilidade, e demonstre que:

$$X \cdot A = B \iff X = B \cdot A^{-1}$$

2.66) A, B e C são matrizes quadradas de ordem n, *invertíveis*. Resolva as equações matriciais:

a) $A \cdot X \cdot B = C$

b) $A \cdot X + B = C$

c) $(A \cdot X)^t = B$

d) $(A + X)^t = B$

e) $(A \cdot X)^{-1} = B$

Teorema

Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem **n**, *invertíveis*; então **A · B é invertível e:**

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

Demonstração

Temos:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

Das duas igualdades acima concluímos que **A · B** é invertível e sua inversa é $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Teorema

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, *invertível*; então

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

Demonstração

Temos:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Então, tomando as transpostas das matrizes iguais acima:

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n^t$$

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n$$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$$

A definição de inversa de uma matriz possibilita escrever, da equação acima, que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Teorema

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, *invertível* e α um número real não nulo; então:

$$\boxed{(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}}$$

Demonstração

Temos:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Daí: $$(\alpha \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) \cdot (\alpha \cdot A) = I$$

A definição de inversa de uma matriz possibilita escrever, da equação acima, que $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$.

Exercícios Resolvidos

2.67) **Definição**

Uma matriz quadrada, *não singular*, diz-se **ortogonal** quando $A^{-1} = A^t$.

a) Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é *ortogonal*.

b) Se as matrizes, não singulares, **A** e **B**, são *ortogonais* então **A · B** é matriz *ortogonal*.

c) Se a matriz, invertível, **A** é *ortogonal*, então a matriz A^{-1} é *ortogonal*.

Solução

a) Se $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e

$A^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, e então $A^{-1} = A^t$ e A é uma matriz *ortogonal*.

b) Se **A** e **B** são ortogonais: $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$. Devemos verificar que $(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^t$, isto é, que A · B é *ortogonal*; de fato:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$$

c) Temos $A^{-1} = A^t$; seja $A^{-1} = M$. Devemos verificar que $M^{-1} = M^t$; de fato:

$$M^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = (A^t)^t = (A^{-1})^t = M^t$$

A é ortogonal

2.68) As matrizes quadradas **A, B** e **C** são *invertíveis*. Respeitada a conformabilidade, demonstre que:

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Solução

A propriedade associativa permite-nos escrever: $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$.
Então, aplicando o Teorema da página 52, obtemos:

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = [(A \cdot B) \cdot C]^{-1} = C^{-1} \cdot (A \cdot B)^{-1} =$$

$$= C^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2.69) Para as matrizes **A, B** e **C**, simplifique:

$$C \cdot B^{-1} \cdot A \cdot (C^{-1} \cdot B \cdot A)^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B$$

Solução

Temos sucessivamente:

$$C \cdot B^{-1} \cdot A \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C) \cdot (C^{-1} \cdot B) \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot B^{-1} \cdot (C \cdot C^{-1}) \cdot B \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot B) \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B$$

$$C \cdot (B^{-1} \cdot B)$$

$$C \cdot I$$

$$C$$

2.70) **A** e **B** são matrizes tais que $A \cdot B = A$ e $B \cdot A = B$. Verifique que:

a) $B^t \cdot A^t = A^t$.

b) $A^t \cdot B^t = B^t$

c) $A = B = I$, se **A** é *não singular*.

Solução

a) $B^t \cdot A^t = \underbrace{(A \cdot B)^t = A^t}_{\text{hipótese}}$

b) $A^t \cdot B^t = (B \cdot A)^t = B^t$

c) Multiplicando por A^{-1}, "à esquerda", ambos os membros da igualdade $A \cdot B = A$, tem-se:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot A$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = I$$

$$I \cdot B = I$$

$$B = I$$

Se $B = I$, na igualdade $B \cdot A = B$, obtemos $A = I$.

) **A** e **B** são *invertíveis* e *comutam*. Verifique que A^{-1} e B^{-1} também *comutam*.

Solução

Se **A** e **B** *comutam*, tem-se $A \cdot B = B \cdot A$.
Devemos demonstrar que A^{-1} e B^{-1} *comutam*, isto é, que $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
De fato:

$$A^{-1} \cdot B^{-1} = \underbrace{(B \cdot A)^{-1} = (A \cdot B)^{-1}}_{\text{A e B comutam}} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

!) Se **A** é *não singular* e $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$.

Solução

Se **A** é não singular, existe A^{-1}. Multiplicando-se por A^{-1} ambos os membros da equação $A \cdot B = A \cdot C$, obtemos sucessivamente:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$$

$$I \cdot B = I \cdot C$$

$$B = C$$

3) Se **A** é *invertível* e $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I = 0$, verifique que:

$$A^{-1} = \frac{3}{2} \cdot I - \frac{1}{2} \cdot A$$

Solução

"Isolando" a matriz **I** no primeiro membro da equação matricial acima:

$$2 \cdot I = -A^2 + 3 \cdot A$$

$$I = -\frac{1}{2} \cdot A^2 + \frac{3}{2} \cdot A$$

Multiplicando-se, agora, ambos os membros da equação por A^{-1}, obtemos:

$$I \cdot A^{-1} = \left(-\frac{1}{2} \cdot A^2 + \frac{3}{2} \cdot A\right) \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{2} \cdot A^2\right) \cdot A^{-1} + \left(\frac{3}{2} \cdot A\right) \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot A \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot I\right) + \frac{3}{2} \cdot I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot A + \frac{3}{2} \cdot I$$

2.74) As matrizes I + A e I − A são *invertíveis*. Verifique que se $B = (I + A) \cdot (I - A)^{-1}$, então $B^t = (I - A^t)^{-1} \cdot (I + A^t)$.

Solução

$$B^t = [(I + A) \cdot (I - A)^{-1}]^t = [(I - A)^{-1}]^t \cdot (I + A)^t = [(I - A)^t]^{-1} \cdot (I + A)^t =$$

$$= (I^t - A^t)^{-1} \cdot (I^t + A^t) = (I - A^t)^{-1} \cdot (I + A^t).$$

2.75) A matriz quadrada A é *invertível*. Para $p \in \mathbb{N}^*$, demonstre que:

$$\boxed{(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p}$$

Solução

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática**.

Teorema 1

Para p = 1 a propriedade é válida.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a propriedade é válida para p = k, isto é:

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para p = k + 1, isto é:

$$(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$$

Multiplicando-se, "à direita", ambos os membros da igualdade da hipótese pela matriz A^{-1}:

$$(A^k)^{-1} \cdot A^{-1} = (A^{-1})^k \cdot A^{-1}$$
$$(A \cdot A^k)^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$$
$$(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$$

2.76) Suponha que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Mostre que $B^m = P^{-1} \cdot A^m \cdot P$, para $m \in \mathbb{N}^*$.

Solução

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática**.

Teorema 1

Para m = 1 a propriedade é válida: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a propriedade é válida para m = k, isto é:

$$B^k = P^{-1} \cdot A^k \cdot P$$

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para m = k + 1, isto é:

$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^{k+1} \cdot P$$

Multiplicando-se, "à direita", ambos os membros da igualdade da hipótese pela matriz B:

$$B^k \cdot B = (P^{-1} \cdot A^k \cdot P) \cdot B$$
$$B^{k+1} = (P^{-1} \cdot A^k \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \quad \text{dado}$$
$$B^{k+1} = (P^{-1} \cdot A^k) \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot A \cdot P$$
$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^k \cdot I \cdot A \cdot P$$
$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^k \cdot A \cdot P$$
$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^{k+1} \cdot P$$

Exercícios Propostos

2.77) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, verifique que $A^{-1} = \frac{-1}{3} \cdot (A^2 - 2 \cdot A - 4 \cdot I)$.

2.78) **A** é uma matriz não singular. Se **A** é *simétrica* então A^{-1} é *simétrica*. Demonstre!

2.79) Para as matrizes **A, B** e **Q**, tem-se: $B = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$; verifique que: $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$.

2.80) **A** e **B** são matrizes invertíveis, dadas. Determine a matriz X:

$$X = B + (I - B \cdot A) \cdot X$$

2.81) Para as matrizes **P** e **Q** verifique que se $P^{-1} + Q^{-1} = I$ então $P + Q = P \cdot Q$.

2.82) **Teorema**: Mostre que uma matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é *invertível* se e somente se $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Se $\Delta \neq 0$, verifique que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observe que o **Teorema** acima dá um método simples que permite inverter, de forma rápida, qualquer matriz de ordem 2×2, **A**, *não singular*.

Para se obter a sua inversa A^{-1}, procede-se da seguinte forma:

i) *trocam-se os sinais dos elementos* **b** e **c**

ii) *trocam-se as posições dos elementos* **a** e **d**

iii) *multiplica-se a matriz resultante por* $\frac{1}{\Delta}$, *onde* $\Delta = ad - bc$

2.83) Se **A**, **B** e A + B são *inversíveis*, assuma que $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ é *inversível*. Então, verifique que:

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B$$

2.84) A matriz quadrada **K** é *anti-simétrica*. Se as matrizes I + K e I – K são *inversíveis*, a matriz **B**, definida por:

$$B = (I+K) \cdot (I-K)^{-1}$$

é *ortogonal*.

2.85) No conjunto das matrizes de ordem 2 × 2, sejam as matrizes do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ com } a + d = -1 \text{ e } ad - bc = -2$$

Considere o conjunto:

$$\neg = \{M \mid M = \alpha \cdot A + \beta \cdot I, \ (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

a) Verifique que $A^2 = -A + 2 \cdot I$ e deduza que $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot I$. A^{-1} é elemento de $\neg$?

b) Demonstre que o produto de dois elementos de $\neg$ é também elemento de $\neg$.

Exercícios Suplementares

I.1) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+y & 4 & -2 \\ 3 & 2z & 3 \\ 0 & 4 & x-y \\ -6 & z-t & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Se $A^t = B^t$, determine x, y, z e t.

I.2) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X, sabendo-se que:

$$2 \cdot X^t - 3 \cdot A + I_2 = O_2.$$

I.3) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Determine as matrizes **X** e **Y**, de ordem 2 × 3, tais que:

$$2 \cdot X - Y = A$$
$$X + 3 \cdot Y = B$$

I.4) Se $A = \begin{bmatrix} bc & -b^2 \\ c^2 & -bc \end{bmatrix}$, então $A^2 = O$. Verifique!

I.5) Determine todas as matrizes que comutam com a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

I.6) Para cada número real α associa-se a matriz:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Verifique que $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ e que $T_{-\alpha} = T_\alpha^t$.

I.7) As matrizes quadradas de ordem n, **A** e **B**, *comutam*. Demonstre que:

a) $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$

b) $(A - B) \cdot (A^2 + A \cdot B + B^2) = A^3 - B^3$

I.8) **A** é uma matriz quadrada. Verifique que:

a) a matriz $S = \frac{1}{2} \cdot (A + A^t)$ é *simétrica.*

b) a matriz $K = \frac{1}{2} \cdot (A - A^t)$ é *anti-simétrica.*

c) Deduza então que toda matriz quadrada pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

I.9) Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem **n**, não nulas, tais que $A \cdot B = O$; dizemos então que **A** e **B** são **divisores de zero.**
Mostre que as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

são *divisores de zero.*

I.10) Seja **A** uma matriz quadrada. Se $A^2 = A$, então dizemos que **A** é **idempotente.**
Mostre que as matrizes **A** e **B** do exercício anterior são *idempotentes.*

I.11) A matriz quadrada **C** é *idempotente* e não nula. Verifique que as matrizes C e C – I são *divisores de zero.*

I.12) Se a matriz **A** é *involutiva* mostre que $S = \frac{1}{2} \cdot (I + A)$ e $T = \frac{1}{2} \cdot (I - A)$ são matrizes *idempotentes.* Verifique então que $S \cdot T = O$.

I.13) **A, B** e **C** são matrizes de ordem $n \times n$ tais que: $A = B + C$, $C^2 = O$ e $B \cdot C = C \cdot B$.
Mostre que para p, $p \in \mathbb{N}^*$, tem-se:

$$A^{p+1} = B^p \cdot [B + (p + 1) \cdot C]$$

I.14) Determine os reais x, y, z para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

seja *ortogonal.*

I.15) Existe alguma matriz *invertível* **A**, tal que $A^2 = 0$?

I.16) **A, B** e **C** são matrizes de ordem $n \times n$, *invertíveis.* Determine a matriz X:

$$A \cdot (B^{-1} \cdot X) = C^{-1} \cdot A$$

I.17) **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem **n** e A é *invertível.* Verifique que:

$$(A + B) \cdot A^{-1} \cdot (A - B) = (A - B) \cdot A^{-1} \cdot (A + B)$$

I.18) Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ matrizes de ordem $n \times n$, invertíveis. **Utilize o Método da Indução Matemática** para demonstrar que:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

I.19) X_1 e X_2 são matrizes de ordem 2×2. Determine-as:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_1 + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X_1 + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

I.20) Considere o conjunto $\urcorner$ de todas as matrizes quadradas de ordem 2 da forma:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

a) Mostre que dois elementos de $\urcorner$, A_α e A_β, comutam se e somente se $\alpha = \beta$.

b) Verifique que $A_\alpha \cdot A_\beta + A_\beta \cdot A_\alpha = (2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}) \cdot I_2$.

c) Calcule A_α^2.

d) Verifique que $(A_\alpha + A_\beta)^2 = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} \cdot I_2$.

e) Mostre que para $n \in \mathbb{N}^*$: $(A_\alpha + A_\beta)^{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha - \beta)^{2n}}{\alpha^n \cdot \beta^n} \cdot I_2$.

f) Verifique que $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = -\frac{1}{2} I_2$.

PARTE II

Capítulo

3

Cálculo de determinantes

3.1 – DEFINIÇÕES

Aqui, vamos descrever como se associa a uma matriz quadrada de ordem n, $A = [a_{ij}]$, um número que se denomina *determinante* de A.

Historicamente, os determinantes surgiram no século XVII, com os estudos sobre a resolução de um sistema de equações lineares.

Para uma matriz quadrada A, há um caminho preciso para se calcular o seu determinante:

1º) Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 1:

$$A = [a_{11}]$$

o seu determinante é a_1.

O determinante de A é notado com det A; então:

$$\boxed{\det A = \det [a_{11}] = a_{11}}$$

Exemplo: $\det [4] = 4$

2º) Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

o seu determinante é $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Para substituir a notação $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ usa-se a notação $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, na qual se utilizam barras verticais "cercando" os elementos de A.

Então:

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Observe então que det A é o produto dos elementos da diagonal principal de A *menos* o produto dos elementos da diagonal secundária de A.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$\ominus \quad \oplus$

3º) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

o seu determinante é:

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Então:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}}$$

A igualdade acima pode ser memorizada com auxílio de uma regra bastante prática, denominada **Regra de Sarrus**; os produtos são obtidos conforme indica o esquema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \end{matrix}\right\} \oplus$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \ominus \left\{\begin{matrix} a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{matrix}\right.$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 4 = 18$$

$$\ominus \left\{\begin{matrix} 2 \cdot 0 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 \cdot 1 \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} (-1) \cdot 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 \cdot 1 \end{matrix}\right\} \oplus$$

Exercícios Resolvidos

3.1) Se $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8$, calcule $D = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

Solução

Da igualdade $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8$ obtemos $2x - 12 = 8$ e daí $x = 10$.

Então, $D = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 66 - (-5) = 71$

3.2) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Determine x, $x \in \mathbb{R}$, para que: $\det(A - x \cdot I) = 0$.

Solução

Temos: $A - x \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{bmatrix}$

Então, $\det(A - x \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(1-4) = 0$. Daí, $x = 1$ ou $x = 4$.

3.3) Resolva a equação: $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Solução

Temos:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot x \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot x \cdot 0 - x \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

Daí: $x^2 + 2x - 4 = 0$ e, então, $V = \{-1 + \sqrt{5}\ ; -1 - \sqrt{5}\}$

Exercícios Propostos

3.4) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \\ \text{sen}\,\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \text{tg}\,\alpha & 1 \\ -1 & \text{tg}\,\alpha \end{vmatrix}$

3.5) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$ b) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,x & \cos x \\ \cos x & \text{sen}\,x \end{vmatrix} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2\,\text{sen}\,x \\ 2\,\text{sen}^2 x & \text{sen}\,x \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 4\,\text{sen}\,x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$

3.6) Determine θ, $\theta \in \mathbb{R}$, para que a equação em x:

$$\begin{vmatrix} x - \cos\theta & \cos^2\theta - 1 \\ 1 & x - \cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

admita raízes reais.

3.7) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3.8) Calcule:

a) $\det I_3$ b) $\det O_{3\times 3}$ c) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

3.9) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\det A = 3$, calcule:

a) $\det(2A)$ b) $\det(A^t)$ c) $\det(A^{-1})$

3.10) Verifique que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ para as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3.11) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

3.12) Resolva as inequações:

a) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$ b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

3.2 – MENOR E COFATOR

Definição

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n, $n \geqslant 2$, e seja a_{ij} um elemento qualquer de A. O *determinante* da matriz de ordem n - 1, obtida de A suprimindo-se sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna chama-se menor do elemento a_{ij}, e indica-se-o com M_{ij}.

Exemplos

1º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

2º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = |3| = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad M_{21} = |2| = 2$$

Definição

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, e seja a_{ij} um elemento qualquer de **A**. O *número*:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

chama-se cofator do elemento a_{ij}.

Exemplos

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-7) = 7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3$$

3.3 – DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE

Vimos até aqui a definição de determinante para matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3.

Agora, a partir do conceito de *cofator*, definiremos determinante para uma matriz de ordem **n**, qualquer.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. Define-se:

Para n = 1: $A = [a_{11}]$ e $\det A = |a_{11}| = a_{11}$

Para n ⩾ 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}$$

Então, o determinante de uma matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, *é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha da matriz pelos respectivos cofatores.*

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} =$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot |a_{22}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |a_{21}| =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2º) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22}.$$

Note que o resultado acima coincide com aquele da definição dada anteriormente (**Regra de Sarrus**).

3º)
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + (-3) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 5 \cdot A_{14} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-14) + 3 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) - 5 \cdot (-18) = 1$$

4º)
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 0 & 3 \\ 30 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}}_{\text{zero}} =$$

$$= 2 \cdot A_{11} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Exercícios Propostos

3.13) Usando a definição dada acima, calcule os determinantes das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

3.14) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ b) det I_5

3.15) Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Use a **definição** e calcule det A.
b) Calcule: $a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}$
c) Calcule: $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} + a_{14} \cdot A_{24}$

3.4 – TEOREMA DE LAPLACE

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$. O seu determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos cofatores.

A demonstração é mais complexa que instrutiva; não a faremos.

Observações

1ª) Para a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ podemos escrever:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} \cdot A_{pj} = \sum_{i=1}^{n} a_{iq} \cdot A_{iq}$$

para todo p, $1 \leq p \leq n$ e para todo q, $1 \leq q \leq n$

2ª) A escolha da linha (ou coluna) para o cálculo de um determinante deve ser adequada: *a fila escolhida deve ser aquela que possua mais zeros.* Para cada zero da fila escolhida corresponde um cofator que não precisa ser calculado.

Exemplos

1º) Consideremos a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Utilizando a 2ª linha para a aplicação do **Teorema de Laplace:**

$\det A = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}$

$\det A = \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{\text{zero}} + 3 \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{23}}_{\text{zero}} + a_{24} \cdot A_{24}$

Note que a escolha feita leva-nos ao cálculo de apenas 2 cofatores; se utilizássemos a 1ª linha, deveríamos calcular 4 cofatores.

2º) Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Escolhas apropriadas para o desenvolvimento são a 3ª linha ou a 2ª coluna. Utilizando, então, a 3ª linha:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = a_{31} \cdot A_{31} + \underbrace{a_{32} \cdot A_{32}}_{\text{zero}} + \underbrace{a_{33} \cdot A_{33}}_{\text{zero}} + a_{34} \cdot A_{34} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Agora, utilizamos a 1ª coluna para desenvolver o determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) = 20$$

Analogamente, utilizando a 3ª linha, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-2) \cdot 10 = -4$$

Então $D = 1 \cdot 3 \cdot 20 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-4) = 48$

Uma aplicação do Teorema de Laplace – Matriz triangular

Seja a matriz *quadrada* de ordem **n**: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

Se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, **A** denomina-se **matriz triangular superior.**

Então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos de **A** que estão "abaixo" da diagonal principal são iguais a zero.

Analogamente, se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, **A** denomina-se **matriz triangular inferior:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se **A** é uma matriz triangular, o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal; isto se verifica desenvolvendo o determinante de A através da 1ª linha, se ela for triangular superior, e, através da 1ª coluna, se ela for triangular inferior:

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Note que a *matriz diagonal* de ordem n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é *triangular* (veja item 1.6).

Em particular, a *matriz identidade* de ordem n, I_n, que é uma matriz diagonal, é também triangular. Tem-se:

$$\det I_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1}_{\text{n fatores}} = 1$$

Então, para a matriz identidade de ordem n:

$$\boxed{\det I_n = 1}$$

Exercícios Propostos

3.16) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -2 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3.17) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 & 1 \\ 2 & c & 0 & -1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$

3.18) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3.19) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.20) Dê uma matriz quadrada de ordem 3 cujo determinante é igual a:

$$x \cdot \begin{vmatrix} x & c \\ c & x \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & x \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & c \end{vmatrix}$$

3.21) Seja A uma matriz *triangular superior*; A^t é uma matriz *triangular*?

3.22) A e B, de mesma ordem, são matrizes *triangulares superiores*. Verifique que $A \cdot B$ é matriz *triangular superior*.

3.23) Calcule o determinante da matriz de ordem n:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

3.24) Seja a matriz quadrada de ordem n:

$$A = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{bmatrix}$$

Verifique que $\det A = (-1)^n \cdot (t^n - a_1 a_2 a_3 \dots a_n)$.

Capítulo 4

Propriedades dos determinantes

4.1 – DETERMINANTE DA MATRIZ TRANSPOSTA

Propriedade P1

Seja a matriz quadrada A, de ordem n; então:

$$\boxed{\det A^t = \det A}$$

Demonstração

Vamos nos utilizar do Método da Indução Matemática sobre n:

Teorema 1

Para n = 1 a propriedade é imediata.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que para matrizes de ordem $n = p - 1$ a propriedade é válida.

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = p$.

Sejam então as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pp} \end{bmatrix}$$

onde $b_{ij} = a_{ji} \begin{cases} \text{para todo } i, \ 1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{para todo } j, \ 1 \leqslant j \leqslant p \end{cases}$

Desenvolvendo det A e det A^t através da 1ª linha:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots + a_{1p} \cdot A_{1p}$$

$$\det A^t = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} + b_{13} \cdot B_{13} + \dots + b_{1p} \cdot B_{1p} \qquad \text{(I)}$$

Da definição de matriz transposta:

$$b_{11} = a_{11}, b_{12} = a_{21}, b_{13} = a_{31}, \dots, b_{1p} = a_{p1},$$

e, pela hipótese do **Teorema 2**,

$B_{11} = A_{11}, B_{12} = A_{21}, B_{13} = A_{31}, \dots, B_{1p} = A_{p1}$ (observe que são determinantes de matrizes de ordem $p - 1$).

Agora, substituindo em (I):

$$\det A^t = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \dots + a_{p1} \cdot A_{p1} = \det A$$

(desenvolvimento através da 1ª coluna).

Observações

1ª) A importância da propriedade acima reside no fato de que as propriedades dos determinantes que são válidas para as linhas de uma matriz, também o são para as suas colunas. Então, se uma propriedade é demonstrada para as linhas, poderemos poupar a demonstração para as colunas, e reciprocamente.

2ª) Atenção: Por comodidade de linguagem diremos, às vezes, "a linha, a coluna, ... do determinante D". Quando isto se der, fica estabelecido que se fixou uma matriz quadrada cujo determinante é D; e a linha, a coluna, ... a que nos referimos, são da matriz fixada.

Exemplos

1º) $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

2º) $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -11$

4.2 – TROCA DE FILAS

▶ Propriedade P2

Seja a matriz quadrada **A**, de ordem **n**, $n \geq 2$.

Se uma matriz **B** é obtida de **A**, "trocando-se" nesta as posições de duas *quaisquer* linhas (ou colunas), tem-se:

$$\det B = -\det A$$

Demonstração

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática** sobre **n**, fazendo a "troca" de duas *linhas*:

Teorema 1

Demonstremos a propriedade para $n = 2$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

"Trocando-se" as posições das linhas:

$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$, e daí $\det B = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -\det A$

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que para matrizes de ordem $n = p - 1$ a propriedade é válida, isto é, numa matriz A, de ordem $p - 1$, trocam-se as posições de duas *linhas* obtendo-se a matriz B e, então, $\det B = -\det A$.

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = p$, isto é, numa matriz A, de ordem p, trocam-se as posições de duas *linhas* obtendo-se a matriz B, e então, $\det B = -\det A$.

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e B, que se obtém de **A** "trocando-se" nesta as posições de duas linhas.

Em **A** e em **B** seja **i** a ordem de uma linha *diferente das duas que foram trocadas*; então:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{e} \quad \det B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot B_{ij}$$

Cada cofator B_{ij}, associado a uma matriz de ordem $p - 1$, é obtido do cofator A_{ij}, "trocando-se" neste as posições de duas linhas; por hipótese do Teorema 2:

$$B_{ij} = -A_{ij}$$

Então,

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-A_{ij}) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = -\det A$$

A demonstração é análoga se em **A** fizéssemos a troca de duas colunas.

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ z & y & x \\ r & q & p \end{vmatrix}$

2º) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$

4.3 – FILAS IGUAIS

Elementos correspondentes

Seja a matriz A, de ordem m × n. Dadas duas de suas *linhas*, um elemento de uma delas e um elemento da outra dizem-se correspondentes se pertencem à mesma coluna.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 4 & -1 & a \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

os elementos 0, 4, - 1 e a da 2ª linha são os respectivos correspondentes dos elementos 5, 7, 9 e 0 da 3ª linha.

Diremos que numa matriz A linhas, de ordens diferentes, são iguais se os elementos correspondentes nessas linhas são iguais.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & x & b & c \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & x & b & c \end{bmatrix}$$

as 1ª e 3ª linhas são iguais.

Analogamente definimos *elementos correspondentes em colunas e colunas iguais* para uma matriz; por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

os elementos 1, 5 e 3 da 1ª coluna são os respectivos correspondentes dos elementos 3, 4 e 7 da 2ª coluna; observe que as 1ª e 3ª colunas são iguais.

Propriedade P3

> Seja a matriz quadrada A, de ordem n, n ⩾ 2.
> Se A possui duas linhas (ou colunas) iguais tem-se:
>
> $$\det A = 0$$

Demonstração

Em $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, suponhamos que a i-ésima e k-ésima *linhas* sejam iguais, isto é:

$$a_{ij} = a_{kj}, \text{ para todo } j,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

"Trocando-se", então, as posições dessas duas linhas, obtém-se a matriz **B**, tal que:

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A} \quad \text{(I)}$$

Mas, como as duas linhas "trocadas" são iguais, tem-se:

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) conclui-se que:

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$$

e daí det **A** = 0.

A demonstração é análoga se em **A** tivermos duas *colunas* iguais.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ x & 7 & x \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1 & 3 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

4.4 – FILA NULA

Definição

Seja a matriz **A** de ordem m × n.

Uma **fila** de **A** (linha ou coluna) diz-se **nula** quando os elementos que a constituem são todos iguais a zero.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & c & d \end{bmatrix}$$

a 2ª linha é **nula**.

Propriedade P4

> Seja a matriz quadrada **A**, de ordem **n**.
> Se **A** possui uma **fila** (linha ou coluna) **nula**, então:
>
> $$\det A = 0$$

Demonstração

Desenvolvendo o determinante de **A** através da fila nula, tem-se a tese.

Exemplos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & x & 0 & 100 \\ 3 & 7 & 0 & 101 \\ 4 & y & 0 & 200 \end{vmatrix} = 0$$

4.5 – MULTIPLICAÇÃO DE UMA FILA POR UMA CONSTANTE

Definição

Seja a matriz **A** de ordem m × n.

"Multiplicar uma fila (linha ou coluna) por um número k" é multiplicar todos os elementos que a constituem por **k**.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

se multiplicarmos a 3ª linha por 5, obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 1 & 3 & 7 \\ 20 & 25 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedade P5

> Seja a matriz quadrada **A**, de ordem **n**.
> Seja **B** a matriz obtida de **A** multiplicando-se nesta uma linha (ou coluna) pelo número **k**; então:
>
> $$\det B = k \cdot \det A$$

Demonstração

Sejam, então, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz **B** foi obtida da matriz **A** multiplicando-se nesta a **i-ésima** linha ($1 \leqslant i \leqslant n$) pelo número **k**.

Note também que os cofatores dos elementos da **i-ésima** linha de **B** são iguais aos cofatores dos elementos correspondentes da **i-ésima** linha de **A**. Então, desenvolvendo o determinante de **B** através de sua i-ésima linha:

$$\det B = k \cdot a_{i1} \cdot A_{i1} + k \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + k \cdot a_{i3} \cdot A_{i3} + \ldots + k \cdot a_{in} \cdot A_{in} =$$
$$= k[a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}] = k \cdot \det A$$

Para a multiplicação de uma coluna de A por um número, a demonstração é análoga.

Exemplos

1º) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -9 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

2 "em evidência"

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

3 "em evidência"

2º) $$k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k} \begin{vmatrix} a & kb & c \\ kd & k^2e & kf \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & kb & c \\ \frac{d}{k} & e & \frac{f}{k} \\ g & kh & i \end{vmatrix} = \ldots$$

3º) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ e } B = k \cdot A, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\det B = \det(k \cdot A) = \det \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot k \cdot k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k^3 \cdot \det A$$

4.6 – FILAS PROPORCIONAIS

Definição

Seja a matriz A de ordem $m \times n$.

Diremos que duas linhas (ou duas colunas) de A são proporcionais quando os elementos de uma delas são ordenadamente iguais aos produtos dos elementos correspondentes da outra por mesmo número k.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

a 1ª linha e a 3ª linha *são proporcionais*. Note que os elementos da 3ª linha são ordenadamente iguais aos elementos correspondentes da 1ª linha multiplicados por 2.

Propriedade P6

> Seja a matriz quadrada A, de ordem n.
> Se A possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, então:
>
> $$\det A = 0$$

Demonstração

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e suponhamos que, nela, as i-ésima e r-ésima linhas são proporcionais.

$$a_{ij} = k \cdot a_{rj}, \text{ para todo } j, \; 1 \leqslant j \leqslant n$$

Então:

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ \text{linha } i \to \\ \\ \text{linha } r \to \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{r1} & ka_{r2} & ka_{r3} & \cdots & ka_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$\overset{(P5)}{=} k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P3)}{=} k \cdot 0 = 0$$

A demonstração quando em A duas colunas são proporcionais é análoga.

Exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \\ 3 & 6 & c \end{bmatrix} = 0,$$ pois as 1ª e 2ª colunas são proporcionais.

Exercícios Resolvidos

4.1)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, com $\det A = -4$

Determine:

a) $\det A^t$

b) $D_1 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$

c) $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$

Solução

a) A propriedade (P1) dá-nos: $\det A^t = \det A = -4$.

b) $$D_1 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\det A = -(-4) = 4.$$

trocam-se as posições

c) $$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det A = 2 \cdot (-4) = -8.$$

4.2) a) Seja a matriz quadrada A, de ordem n; k é um número real. Então:

$$\boxed{\det (k \cdot A) = k^n \cdot \det A}$$

b) Seja a matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Calcule: $\det (5 \cdot A)$ e $5 \cdot \det A$.

Solução

a) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando a propriedade (P5) "n vezes", *nas n linhas da matriz* $k \cdot A$:

$$\det(k \cdot A) = \underbrace{k \cdot k \cdot k \ldots k \cdot k \cdot}_{\text{"n vezes"}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n \cdot \det A$$

b) Temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 98$$

Então:

$\det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det A = 125 \cdot 98 = 12250$

$5 \cdot \det A = 5 \cdot 98 = 490$

4.3) Prove que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Solução

Na matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{bmatrix}$, multiplicando-se a 1ª coluna por a, a 2ª coluna por b e a 3ª coluna por c, o seu determinante fica multiplicado por abc; então

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(P1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

trocam-se as posições   trocam-se as posições

4.4) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$; a matriz B é obtida de A, multiplicando-se, nesta, cada elemento a_{ij} por α^{i-j}, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Demonstre que det B = det A.

Solução

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ então:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha^{1-1} \cdot a_{11} & \alpha^{1-2} \cdot a_{12} & \alpha^{1-3} \cdot a_{13} & \dots & \alpha^{1-n} \cdot a_{1n} \\ \alpha^{2-1} \cdot a_{21} & \alpha^{2-2} \cdot a_{22} & \alpha^{2-3} \cdot a_{23} & \dots & \alpha^{2-n} \cdot a_{2n} \\ \alpha^{3-1} \cdot a_{31} & \alpha^{3-2} \cdot a_{32} & \alpha^{3-3} \cdot a_{33} & \dots & \alpha^{3-n} \cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1} \cdot a_{n1} & \alpha^{n-2} \cdot a_{n2} & \alpha^{n-3} \cdot a_{n3} & \dots & \alpha^{n-n} \cdot a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & \alpha^{-1} \cdot a_{12} & \alpha^{-2} \cdot a_{13} & \dots & \alpha^{1-n} \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} & \alpha^{-1} \cdot a_{23} & \dots & \alpha^{2-n} \cdot a_{2n} \\ \alpha^2 \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{32} & 1 \cdot a_{33} & \dots & \alpha^{3-n} \cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1} \cdot a_{n1} & \alpha^{n-2} \cdot a_{n2} & \alpha^{n-3} \cdot a_{n3} & \dots & 1 \cdot a_{nn} \end{bmatrix}$$

Em B, multiplicando-se a 2ª coluna por α, a 3ª coluna por α^2, ..., a *n*-ésima coluna por α^{n-1}, tem-se:

$$\det B = \frac{1}{\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \dots \cdot \alpha^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \alpha^2 \cdot a_{31} & \alpha^2 \cdot a_{32} & \alpha^2 \cdot a_{33} & \dots & \alpha^2 \cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1} \cdot a_{n1} & \alpha^{n-1} \cdot a_{n2} & \alpha^{n-1} \cdot a_{n3} & \dots & \alpha^{n-1} \cdot a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$= \frac{\alpha \cdot \alpha^2 \dots \alpha^{n-1}}{\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \dots \cdot \alpha^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

4.5) A matriz quadrada A, de ordem n, é *anti-simétrica*. Se n é ímpar, calcule det A.

Solução

Se A é uma matriz *anti-simétrica*:

$A^t = -A$

Então, $\det A^t = \det(-A)$.

Usando a propriedade (P1) e o exercício 4.2a, podemos escrever:

$\det A = (-1)^n \cdot \det A$

Se n é ímpar:

$\det A = -\det A$

$2 \cdot \det A = 0$

$\det A = 0$

Exercícios Propostos

4.6) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcule: $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

4.7) Determine o valor de **m** sabendo-se que:

$$\begin{vmatrix} a^2d & 3abc & 3ac \\ -2abd & b^2c & 6bc \\ -acd & 4bc^2 & -9c^2 \end{vmatrix} = m \cdot a^2b^2c^3d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

4.8) Mostre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1a_2a_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2a_3b_1 & a_1a_3b_2 & a_1a_2b_3 \\ a_2a_3c_1 & a_1a_3c_2 & a_1a_2c_3 \end{vmatrix}$$

4.9) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

4.10) Verifique:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4.11) Se **A** é uma matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, determine **det A** sabendo-se que $2 \cdot \det A = \det (2 \cdot A)$.

4.12) Calcule, sem desenvolver, o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} x^2 - y^2 & x + y & x \\ x - y & 1 & 1 \\ x - y & 1 & y \end{bmatrix}$$

4.13) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & x & 1 \\ x^2 - x & x^2 - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

4.7 – ADIÇÃO DE DETERMINANTES

▶ Propriedade P7

Sejam as matrizes quadradas de ordem n:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha i}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha i}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & b_{i3} + c_{i3} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha i}$$

Observe que as matrizes **B** e **C** são idênticas **exceto** na i-ésima linha; a matriz **A** é idêntica a **B** e **C** exceto na sua i-ésima linha, que é obtida somando-se as i-ésimas linhas de **B** e **C**, isto é, somando-se os elementos correspondentes nas i-ésimas linhas de **B** e de **C**. Então:

$$\boxed{\det A = \det B + \det C}$$

Demonstração

Os cofatores dos elementos a_{ij} da i-ésima linha da matriz **A** são os mesmos cofatores dos correspondentes elementos, b_{ij} e c_{ij}, das i-ésimas linhas das matrizes **B** e **C**; isto é:

$$A_{ij} = B_{ij} = C_{ij}\,, \ (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Desenvolvendo o determinante da matriz **A** através de sua i-ésima linha:

$$\det \mathbf{A} = (b_{i1}+c_{i1})\cdot A_{i1} + (b_{i2}+c_{i2})\cdot A_{i2} + (b_{i3}+c_{i3})\cdot A_{i3} + \ldots + (b_{in}+c_{in})\cdot A_{in} =$$
$$= (b_{i1}\cdot A_{i1} + b_{i2}\cdot A_{i2} + b_{i3}\cdot A_{i3} + \ldots + b_{in}\cdot A_{in}) + (c_{i1}\cdot A_{i1} + c_{i2}\cdot A_{i2} + c_{i3}\cdot A_{i3} + \ldots +$$
$$+ c_{in}\cdot A_{in}) = (b_{i1}\cdot B_{i1} + b_{i2}\cdot B_{i2} + b_{i3}\cdot B_{i3} + \ldots + b_{in}\cdot B_{in}) + (c_{i1}\cdot C_{i1} + c_{i2}\cdot C_{i2} +$$
$$+ c_{i3}\cdot C_{i3} + \ldots + c_{in}\cdot C_{in}) = \det \mathbf{B} + \det \mathbf{C}$$

A propriedade também é válida para *colunas*:

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_{1j}+c_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_{2j}+c_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_{3j}+c_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_{nj}+c_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \text{ coluna } j \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \text{ coluna } j \end{array} + \begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & c_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & c_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & c_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & c_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \text{ coluna } j \end{array}$$

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & y & z \\ a_2+x_2 & t & m \\ a_3+x_3 & n & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & y & z \\ a_2 & t & m \\ a_3 & n & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & z \\ x_2 & t & m \\ x_3 & n & o \end{vmatrix}$

2º) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ t & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ t & m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ t & m & n \end{vmatrix}$

Exercícios Resolvidos

4.14) Calcule: $\begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix}$

Solução

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a & 1 & 3a \\ b & 2 & 3b \\ c & 3 & 3c \end{vmatrix}}_{\text{“proporcionais”}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 4 \\ c & 3 & 6 \end{vmatrix}}_{\text{“proporcionais”}} \overset{P6}{=} 0 + 0 = 0$$

4.15) Calcule, sem desenvolver os determinantes, a soma:

$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Solução

$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ d & e & f \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix}\right\} \overset{P7}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1+1 & 3+(-3) & 5+(-5) \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{P4}{=} 2\cdot 0 = 0$$

4.16) Calcule, sem desenvolver os determinantes, a soma:

$$S = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Solução

$$S = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{P7}{=}$$

$$\overset{(P7)}{=}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7+5 & -1+1 & 3-3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 12 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P1)}{=}$$

$$\overset{(P1)}{=}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 12 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P7)}{=}$$

$$\overset{(P7)}{=}\begin{vmatrix} 4+5 & 3 & 4 \\ 12-12 & 0 & 0 \\ 2+3 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P4)}{=} 0$$

Exercícios Propostos

4.17) Verifique que $\begin{vmatrix} x & 1 & 2x+3 \\ y & 3 & 2y+9 \\ z & 5 & 2z+15 \end{vmatrix} = 0$

4.18) Verifique que $\begin{vmatrix} a & -1 & d \\ b & 2 & e \\ c & -3 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & b & a \\ 3 & 6 & 1 \\ f & e & d \end{vmatrix} = 0$

4.19) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcule: $\begin{vmatrix} a & b+2c & 3c \\ d & e+2f & 3f \\ g & h+2i & 3i \end{vmatrix}$

4.20) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 5 & 7 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$, calcule: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 4 & g \\ b & 6 & h \\ c & 8 & i \end{vmatrix}$

4.21) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ x^2 & x^3+x & x^4+2x & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ x^2 & x^3 & x^4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4.22) a) Verifique que: $\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$

b) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0$

4.23) Seja o conjunto de matrizes do tipo:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_j & d & g \\ b_j & e & h \\ c_j & f & i \end{bmatrix}, \ 1 \leqslant j \leqslant p$$

Demonstre que:

$$\det\left(\sum_{j=1}^{p} A_j\right) = p^2 \cdot \sum_{j=1}^{p} (\det A_j)$$

4.24) Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem **n.** Verifique com um exemplo que $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

4.25) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Se $\det(A+B) = \det A + \det B$, demonstre que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

4.8 – TEOREMA DE CAUCHY

▶ **Propriedade P8**

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, $n \geqslant 2$.

A soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna), ordenadamente, pelos cofatores dos elementos correspondentes de qualquer **outra** linha (ou coluna), é igual a **zero.**

Demonstração

Seja, então, a matriz:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha } p \\ \\ \leftarrow \text{linha } q \\ \\ \\ \end{array}$$

Em A, substituindo a q-ésima linha pela p-ésima linha obtemos a matriz:

$$B = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \leftarrow \text{linha } p \\ \leftarrow \text{linha } q \end{array}\right\} b_{qk} = a_{pk},\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ \\ \end{array}$$

Observe que os cofatores dos elementos da q-ésima linha de **B** são ordenadamente iguais aos cofatores dos correspondentes elementos da q-ésima linha de **A**:

$$B_{q1} = A_{q1},\ B_{q2} = A_{q2},\ B_{q3} = A_{q3}, \dots,\ B_{qn} = A_{qn}$$

Desenvolvendo o determinante da matriz **B** através dos elementos da q-ésima linha:

$$\det B = b_{q1} \cdot B_{q1} + b_{q2} \cdot B_{q2} + b_{q3} \cdot B_{q3} + \dots + b_{qn} \cdot B_{qn}$$

$$\det B = a_{p1} \cdot A_{q1} + a_{p2} \cdot A_{q2} + a_{p3} \cdot A_{q3} + \dots + a_{pn} \cdot A_{qn}$$

Note que det **B** = 0, pois duas de suas linhas são iguais (P3). Então:

$$a_{p1} \cdot A_{q1} + a_{p2} \cdot A_{q2} + a_{p3} \cdot A_{q3} + \dots + a_{pn} \cdot A_{qn} = 0$$

A demonstração é análoga se considerássemos as colunas de **A**.

Exemplo

Seja a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Vamos somar os produtos dos elementos da 1ª coluna pelos cofatores dos correspondentes elementos da 2ª coluna:

$$s = a_{11} \cdot A_{12} + a_{21} \cdot A_{22} + a_{31} \cdot A_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$s = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-19) + 3 \cdot (13) = 0$$

Observação

Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n. Tem-se, então:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj} \cdot A_{qj} = \begin{cases} \det A, \text{ se } p = q \\ 0, \text{ se } p \neq q \end{cases}$$

Ou, tem-se ainda:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot A_{iq} = \begin{cases} \det A, \text{ se } p = q \\ 0, \text{ se } p \neq q \end{cases}$$

Observe, então, que se em **A** *escolhermos uma linha* (*ou coluna*) e somarmos os produtos de seus elementos pelos respectivos cofatores (p = q) obteremos det **A** – é o **Teorema de Laplace**; se somarmos os produtos de seus elementos, ordenadamente, pelos cofatores dos correspondentes elementos de *outra linha* (*ou outra coluna*) obteremos **zero** – é o **Teorema de Cauchy**.

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Os cofatores dos elementos da 3ª coluna são:

$$A_{13} = -5,\ A_{23} = 13,\ A_{33} = -1,\ A_{43} = 0$$

Somando-se os produtos dos elementos da 3ª coluna pelos respectivos cofatores:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i3} \cdot A_{i3} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (13) + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (0) = 1 = \det A$$

Somando-se os produtos dos elementos da 1ª coluna pelos cofatores dos correspondentes elementos da 3ª coluna:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i1} \cdot A_{i3} = a_{11} \cdot A_{13} + a_{21} \cdot A_{23} + a_{31} \cdot A_{33} + a_{41} \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (13) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (0) = 0$$

4.9 – ADIÇÃO DE FILAS

Definição

"Adicionar (ou somar) uma linha a outra (ou uma coluna a outra)" em uma matriz **A**, significa adicionar os elementos de uma delas ordenadamente aos elementos correspondentes da outra.

Por exemplo, na matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

adicionando-se a 2ª coluna à 4ª coluna, obtemos a matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5+3 \\ 0 & 4 & 7 & 2+4 \\ 3 & 1 & 7 & 2+1 \end{bmatrix}$$

Combinação linear de filas

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$$

Nela, consideremos **k** quaisquer de suas linhas (ou colunas), e designemos com $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_k$ as ordens dessas linhas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\ell_1 1} & a_{\ell_1 2} & a_{\ell_1 3} & \cdots & a_{\ell_1 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\ell_2 1} & a_{\ell_2 2} & a_{\ell_2 3} & \cdots & a_{\ell_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\ell_3 1} & a_{\ell_3 2} & a_{\ell_3 3} & \cdots & a_{\ell_3 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\ell_k 1} & a_{\ell_k 2} & a_{\ell_k 3} & \cdots & a_{\ell_k n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_1 \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_2 \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_3 \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_k \\ \\ \\ \end{array}$$

O *conjunto de números* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ é uma **combinação linear** das **k** linhas consideradas quando:

$$x_1 = c_1 \cdot a_{\ell_1 1} + c_2 \cdot a_{\ell_2 1} + c_3 \cdot a_{\ell_3 1} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k 1}$$
$$x_2 = c_1 \cdot a_{\ell_1 2} + c_2 \cdot a_{\ell_2 2} + c_3 \cdot a_{\ell_3 2} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k 2}$$
$$x_3 = c_1 \cdot a_{\ell_1 3} + c_2 \cdot a_{\ell_2 3} + c_3 \cdot a_{\ell_3 3} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k 3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = c_1 \cdot a_{\ell_1 n} + c_2 \cdot a_{\ell_2 n} + c_3 \cdot a_{\ell_3 n} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k n}$$

Exemplo

Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, de ordem 3×3.

Nela, consideremos as 1ª e 3ª linhas; o conjunto de números:

$$x_1 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$$
$$x_2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 23$$
$$x_3 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"multiplicador"} \\ \text{da 1ª linha}}}{2} \cdot 3 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"multiplicador"} \\ \text{da 3ª linha}}}{3} \cdot 2 = 12$$

é uma *combinação linear* das 1ª e 3ª linhas.

De forma análoga podemos tratar combinação linear para k colunas de uma matriz; assim, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

consideremos as 2ª e 3ª colunas; o conjunto de números:

$$y_1 = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8$$
$$y_2 = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 25$$
$$y_3 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 2 = 37$$

"multiplicador" da 2ª coluna — "multiplicador" da 3ª coluna

é uma *combinação linear* das 2ª e 3ª colunas.

Definição

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

Consideremos uma *combinação linear* de **k** linhas de **A**:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Se substituirmos a i-ésima linha de **A** (distinta das **k** consideradas na combinação linear):

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$$

ordenadamente, pelas somas

$$a_{i1} + x_1, a_{i2} + x_2, a_{i3} + x_3, \ldots, a_{in} + x_n$$

diremos que "se adicionou à i-ésima linha uma combinação linear das outras linhas".

De forma análoga definiremos "adição à j-ésima coluna de **A** de uma combinação linear das outras colunas".

Exemplos

1º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

O conjunto de números:

$$x_1 = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 8$$
$$x_2 = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 11$$
$$x_3 = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$$

é uma combinação linear das 2ª e 3ª linhas. Vamos "somar essa combinação linear à 1ª linha"; obtemos a matriz:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} + a_1 & a_{12} + x_2 & a_{13} + x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 + 8 & 2 + 11 & 1 + 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

O conjunto de números:

$$y_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$
$$y_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26$$
$$y_3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 = 21$$

é uma combinação linear das 1ª e 3ª colunas. Vamos "somar essa combinação linear à 2ª coluna"; obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 3 \\ 4 & 31 & 6 \\ 0 & 23 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedade P9

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

Adicionando-se a uma linha (ou coluna) de **A** uma combinação linear das outras n - 1 linhas (ou n - 1 colunas) obtém-se a matriz **B**, tal que:

det **B** = det **A**

Demonstração

Seja, então, a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

coluna k

Vamos somar à k-ésima coluna de A uma combinação linear das demais n - 1 colunas; obtemos:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}+c_1 \cdot a_{11}+c_2 \cdot a_{12}+\ldots+c_{k-1} \cdot a_{1,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{1,k+1}+\ldots+c_n \cdot a_{1n} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k}+c_1 \cdot a_{21}+c_2 \cdot a_{22}+\ldots+c_{k-1} \cdot a_{2,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{2,k+1}+\ldots+c_n \cdot a_{2n} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k}+c_1 \cdot a_{31}+c_2 \cdot a_{32}+\ldots+c_{k-1} \cdot a_{3,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{3,k+1}+\ldots+c_n \cdot a_{3n} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk}+c_1 \cdot a_{n1}+c_2 \cdot a_{n2}+\ldots+c_{k-1} \cdot a_{n,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{n,k+1}+\ldots+c_n \cdot a_{nn} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A propriedade (P7) permite-nos escrever:

$$\det B = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det A} +$$

(P6)

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_1 \cdot a_{11} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_1 \cdot a_{21} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & c_1 \cdot a_{31} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_1 \cdot a_{n1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{zero}} +$$

(P6)

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_2 \cdot a_{12} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_2 \cdot a_{22} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & c_2 \cdot a_{32} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_2 \cdot a_{n2} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{zero}} + \ldots +$$

(P6)

$$+ \ldots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_n \cdot a_{1n} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_n \cdot a_{2n} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & c_n \cdot a_{3n} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_n \cdot a_{nn} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{zero}}$$

Então: $\det B = \det A$.

A demonstração é análoga se considerarmos as linhas de A.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = -55$

À 1ª linha vamos somar uma combinação linear das 2ª e 3ª linhas:

$$B = \begin{bmatrix} (1+2 \cdot 2+3 \cdot 4) & (3+2 \cdot 3+3 \cdot 1) & (6+2 \cdot 1+3 \cdot 2) \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Então: $\det B = \begin{vmatrix} 17 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -55$

▶ Propriedade P10 – Teorema de Jacobi

> Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.
> Se em **A** adicionamos a uma linha (ou a uma coluna) uma outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número, obtemos uma matriz **B**, tal que:
>
> $$\det B = \det A$$

Demonstração

Para demonstrarmos este Teorema, basta que na demonstração do Teorema anterior façamos $n-2$ das constantes c_1, c_2, c_3, ... iguais a zero.

Exemplos

1º)

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c+kb \\ d & e & f+ke \\ g & h & i+kh \end{bmatrix}$$

Observe que multiplicamos a 2ª coluna por **k** e somamos à 3ª coluna.

2º) A utilidade do **Teorema de Jacobi** reside no fato de que podemos "fazer aparecer" **zeros** em uma fila de uma matriz, o que facilita o cálculo do seu determinante. Por exemplo, vamos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Inicialmente, vamos multiplicar a 1ª coluna por -2 e somá-la à 3ª coluna e, ainda, multiplicar a 1ª coluna por -3 e somá-la à 4ª coluna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -9 & -16 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -9 & -16 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 19 & -2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 19 & -2 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 191$$

▶ Propriedade P11

> Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.
> Em **A** uma linha (ou coluna) é combinação linear das demais linhas (ou colunas); então:
>
> $$\det A = 0$$

Demonstração

Suponhamos, então, que na matriz **A** a i-ésima linha é uma combinação linear de **k** outras linhas; sejam ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ... , ℓ_k as ordens dessas linhas. Desenvolvendo o determinante de **A** através da i-ésima linha obtemos:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \{(c_1 \cdot a_{\ell_1 j} + c_2 \cdot a_{\ell_2 j} + c_3 \cdot a_{\ell_3 j} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k j}) \cdot A_{ij}\} \overset{(P7)}{=}$$

$$= c_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_1 j} \cdot A_{ij} + c_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_2 j} \cdot A_{ij} + c_3 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_3 j} \cdot A_{ij} + \ldots + c_k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_k j} \cdot A_{ij} \overset{(P8)}{=}$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + \ldots + c_k \cdot 0 = 0$$

Exemplo

O determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ **é nulo,** pois a 3ª coluna é uma combinação linear das outras (1ª coluna multiplicada por 2 somada com a 2ª coluna multiplicada por 3).

4.26) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{P3}{=} 0$$

4.27) Verifique que: $\begin{vmatrix} bc & k^2 & bc(b+c) \\ ca & k^2 & ca(c+a) \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix} bc & k^2 & bc(b+c) \\ ca & k^2 & ca(c+a) \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix} \overset{P5}{=} \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & ak^2 & abc(b+c) \\ abc & bk^2 & abc(c+a) \\ abc & ck^2 & abc(a+b) \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= \frac{k^2(abc)^2}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = k^2abc \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= k^2abc \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} \overset{P5}{=} k^2abc(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \overset{P3}{=}$$

$$= k^2abc(a+b+c) \cdot 0 = 0$$

4.28) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^3-b^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^3-b^3 \\ 0 & b-c & b^3-c^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 1 & b^2+bc+c^2 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2) = (a-b)(b-c)(c^2-a^2+bc-ab) =$$

$$= (a-b)(b-c)[(c-a)(c+a)+b(c-a)] = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

4.29) Se $ax + by = c$, calcule: $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ x^2 & x & 0 \\ -c & -a & -b \end{vmatrix}$

Solução

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ x^2 & x & 0 \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2-x^2-y^2 & x & y \\ x^2-x^2 & x & 0 \\ -c+\underbrace{ax+ay}_{c} & -a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & -a & b \end{vmatrix} \overset{P4}{=} 0$$

4.30) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 1 \cdot x \cdot y \cdot z = xyz$$

4.31) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\beta-\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma-\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

Solução

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma\\ \cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha\\ \cos\alpha & \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\\ \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha\end{vmatrix} =$$

$$= (\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha)-(\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha) =$$

$$= (\operatorname{sen}\beta\cos\gamma-\operatorname{sen}\gamma\cos\beta)+(\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma)+(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha) =$$

$$= \operatorname{sen}(\beta-\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

4.32) Resolva a equação: $\begin{vmatrix}1+x&2&3\\1&2+x&3\\1&2&x+3\end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix}1+x&2&3\\1&2+x&3\\1&2&x+3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6+x&2&3\\6+x&2+x&3\\6+x&2&x+3\end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= (6+x)\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2+x&3\\1&2&x+3\end{vmatrix} = (6+x)\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix} = (6+x)\cdot x^2$$

A equação escreve-se:

$$(6+x)\cdot x^2 = 0$$

e daí, $V = \{-6;\ 0\}$.

4.33) Resolva a equação: $\begin{vmatrix}x-a-b&2x&2x\\2a&a-b-x&2a\\2b&2b&b-a-x\end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix}x-a-b&2x&2x\\2a&a-b-x&2a\\2b&2b&b-a-x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x+a+b&x+a+b&x+a+b\\2a&a-b-x&2a\\2b&2b&b-a-x\end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= (x+a+b)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2a&a-b-x&2a\\2b&2b&b-a-x\end{vmatrix} = (x+a+b)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\2a&-a-b-x&0\\2b&0&-b-a-x\end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b)^3$$

A equação escreve-se:

$$(x+a+b)^3 = 0$$

e daí, $V = \{-a-b\}$.

4.34) Verifique que: $\begin{vmatrix}a^3&3a^2&3a&1\\a^2&a^2+2a&2a+1&1\\a&2a+1&a+2&1\\1&3&3&1\end{vmatrix} = (a-1)^6$

Solução

$$\begin{vmatrix}a^3&3a^2&3a&1\\a^2&a^2+2a&2a+1&1\\a&2a+1&a+2&1\\1&3&3&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(a-1)^3&3a^2&3a&1\\0&a^2+2a&2a+1&1\\0&2a+1&a+2&1\\0&3&3&1\end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)^3\cdot\begin{vmatrix}a^2+2a&2a+1&1\\2a+1&a+2&1\\3&3&1\end{vmatrix} = (a-1)^3\cdot\begin{vmatrix}a^2-1&a-1&0\\2a+1&a+2&1\\3&3&1\end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)^3\cdot\begin{vmatrix}a^2-1&a-1&0\\2a-2&a-1&0\\3&3&1\end{vmatrix} \overset{P5}{=} (a-1)^3\cdot(a-1)^2\cdot\begin{vmatrix}a+1&1&0\\2&1&0\\3&3&1\end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)^5\cdot\begin{vmatrix}a+1&1\\2&1\end{vmatrix} = (a-1)^5\cdot(a-1) = (a-1)^6$$

4.35) Verifique que: $\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1+b&1&1\\1&1&1+c&1\\1&1&1&1+d\end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -d \\ 0 & b & 0 & -d \\ 0 & 0 & c & -d \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= abcd \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix} = abcd \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1 \end{vmatrix} =$$

$$= abcd \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1\right)$$

4.36) Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{se } i = j \\ b, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Determine det A.

Solução

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= [a+(n-1)b] \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= [a + (n-1)b] \cdot (a-b)^{n-1}$$

Exercícios Propostos

4.37) Verifique que: a) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d+e \\ a & c & d & e+b \\ a & d & e & b+c \\ a & e & b & c+d \end{vmatrix} = 0$

4.38) Verifique que: $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

4.39) Verifique que: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \operatorname{sen}^2\frac{A}{2} & \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} & \operatorname{sen}^2\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^2\beta & \operatorname{tg}^2\gamma \\ \sec^2\alpha & \sec^2\beta & \sec^2\gamma \end{vmatrix} = 0$

4.40) Verifique que: $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

4.41) a) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ca)$

b) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

4.42) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = (b-d)(a-c)(b+d-a-c)$

4.43) Verifique que: $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4 \cdot a^2b^2c^2$

4.44) Se a, b e c são números reais positivos, calcule:

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

4.45) Se $x + y = 2a$, $x - y = 2b$ e $x + z = -a$, calcule:

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2a & y \\ 1 & 2b & -y \\ 1 & -a & z \end{vmatrix}$$

4.46) "Fazendo aparecer" zeros em uma fila conveniente, por aplicação do **Teorema de Jacobi**, verifique que:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -8 \\ 2 & 5 & -8 & 3 \\ 5 & -8 & 3 & 2 \\ -8 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2912$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 3 & -2 & 18 \\ 14 & 4 & 9 & 22 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -8$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -595$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 69$

4.47) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{sen } 20^\circ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{sen } 40^\circ & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\text{sen } 80^\circ \end{vmatrix}$$

(Veja o exercício 4.31.)

4.48) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2x+1 & x \\ 1 & x+1 & 2x+3 & x \\ 1 & x+2 & 2x+5 & x \end{vmatrix} = 0$$

4.49) Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} > 0$$

4.50) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

4.51) Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^4 x & \text{sen}^4 x \\ 1 & (1+\text{sen}^2 x)^2 & \text{sen}^4 x \\ 1 & \cos^4 x & (1+\cos^2 x)^2 \end{vmatrix} \geqslant 1$$

4.52) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

4.53) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & 1 & -1 \\ -b & -1 & 0 & 1 \\ -c & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

4.54) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

4.55) Seja a *matriz quadrada de ordem n*:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Deduza que $\det A_n = 1$.

4.56) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$$

(Veja o exercício 4.30)

4.57) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

(Veja o exercício 4.35)

4.10 – ABAIXAMENTO DA ORDEM DE UM DETERMINANTE

Deduziremos agora um mecanismo que permite reduzir o cálculo de um determinante de uma matriz de ordem **n** a outro, de uma matriz de ordem n - 1; é a:

Regra de Chiò

Seja, então, a matriz de ordem **n**, $n \geqslant 2$, na qual $a_{11} = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicamos o **Teorema de Jacobi** sucessivamente:

1) adicionando à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$
2) adicionando à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$

. . . .

j - 1) adicionando à j-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1j}$

. . . .

n - 1) adicionando à n-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$

Então:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-a_{21}\cdot a_{12} & a_{23}-a_{21}\cdot a_{13} & \dots & a_{2j}-a_{21}\cdot a_{1j} & \dots & a_{2n}-a_{21}\cdot a_{1n} \\ a_{31} & a_{32}-a_{31}\cdot a_{12} & a_{33}-a_{31}\cdot a_{13} & \dots & a_{3j}-a_{31}\cdot a_{1j} & \dots & a_{3n}-a_{31}\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}-a_{n1}\cdot a_{12} & a_{n3}-a_{n1}\cdot a_{13} & \dots & a_{nj}-a_{n1}\cdot a_{1j} & \dots & a_{nn}-a_{n1}\cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

Daí, pelo **Teorema de Laplace:**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{22}-a_{21}\cdot a_{12} & a_{23}-a_{21}\cdot a_{13} & \dots & a_{2j}-a_{21}\cdot a_{1j} & \dots & a_{2n}-a_{21}\cdot a_{1n} \\ a_{32}-a_{31}\cdot a_{12} & a_{33}-a_{31}\cdot a_{13} & \dots & a_{3j}-a_{31}\cdot a_{1j} & \dots & a_{3n}-a_{31}\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}-a_{n1}\cdot a_{12} & a_{n3}-a_{n1}\cdot a_{13} & \dots & a_{nj}-a_{n1}\cdot a_{1j} & \dots & a_{nn}-a_{n1}\cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

Então, a **regra:**

1º) Deve-se ter $a_{11} = 1$; suprime-se a 1ª linha e a 1ª coluna.

2º) De cada elemento restante em **A**, subtraímos o produto daqueles elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares" traçadas, do elemento considerado, sobre a 1ª linha e sobre a 1ª coluna.

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\cdot 2 & 2-2\cdot 4 & 1-2\cdot 3 \\ 3-(-3)\cdot 2 & -3-(-3)\cdot 4 & 2-(-3)\cdot 3 \\ 5-2\cdot 2 & -2-2\cdot 4 & 4-2\cdot 3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -6 & -5 \\ 9 & 9 & 11 \\ 1 & -10 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercícios Propostos

4.61) Use a **Regra de Chiò** para verificar que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 20 & 9 & 5 \\ 7 & 35 & 2 & -6 \\ 10 & 51 & 51 & 0 \end{vmatrix} = 23$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 270$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -595$

4.62) Use a **Regra de Chiò** para calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}$$

4.63) Use a **Regra de Chiò** para verificar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

4.64) Use a **Regra de Chiò** para verificar que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot (b-a)(c-b)(d-c)$$

4.11 – A MATRIZ DE VANDERMONDE

Definição

Toda matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_j^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_j^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

denomina-se **matriz de Vandermonde.**

Observe que, por exemplo, a j-ésima coluna é formada pelas potências de mesma base x_j, com os expoentes variando de **0** a **n – 1**; os elementos dessa coluna formam uma *progressão geométrica* de **n** termos, cujo 1º elemento é 1 e cuja razão é x_j.

Os elementos da 2ª linha são chamados **elementos de base da matriz.**

Indica-se o **determinante** de uma matriz de Vandermonde cujos elementos de base são $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ por:

$$\boxed{V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

Propriedade

O determinante $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é o produto de **todas** as diferenças $x_i - x_j$, para $i > j$:

$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) =$
$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1) \cdot (x_3-x_2)(x_4-x_2)\dots(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})$, isto é:

$$\boxed{V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)}$$

Demonstração

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática** sobre **n**:

Teorema 1

Para $n = 2$ a propriedade é válida:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que para matrizes de ordem $n = p - 1$ a propriedade é válida $(p - 1 \geqslant 2)$.

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = p$.
Na matriz de ordem p:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_p \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{p-2} & x_2^{p-2} & x_3^{p-2} & \dots & x_p^{p-2} \\ x_1^{p-1} & x_2^{p-1} & x_3^{p-1} & \dots & x_p^{p-1} \end{bmatrix}$$

aplicamos o **Teorema de Jacobi** sucessivamente:

1) adicionando à linha de ordem p, a de ordem p - 1 multiplicada por $-x_1$

2) adicionando à linha de ordem p - 1, a de ordem p - 2 multiplicada por $-x_1$

. . . .

p-2) adicionando à linha de ordem 3, a de ordem 2 multiplicada por $-x_1$

p-1) adicionando à linha de ordem 2, a de ordem 1 multiplicada por $-x_1$

obtendo:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_p-x_1 \\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & \dots & x_p^2-x_1x_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{p-1}-x_1x_2^{p-2} & x_3^{p-1}-x_1x_3^{p-2} & \dots & x_p^{p-1}-x_1x_p^{p-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_p-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \dots & x_p(x_p-x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{p-2}(x_2-x_1) & x_3^{p-2}(x_3-x_1) & \dots & x_p^{p-2}(x_p-x_1) \end{vmatrix}$$

Aplicando o **Teorema de Laplace**, desenvolvendo o determinante através dos elementos da 1ª coluna, e também a propriedade P5:

$$\det V = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_p-x_1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_p \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_p^2 \\ x_2^{p-2} & x_3^{p-2} & \dots & x_p^{p-2} \end{vmatrix}}_{\text{determinante, D, de uma matriz de Vandermonde de ordem } p-1} \quad \text{(I)}$$

Pela hipótese do Teorema 2 o determinante D escreve-se:

$$D = (x_3-x_2)(x_4-x_2)\dots(x_p-x_2)\dots(x_p-x_{p-1})$$

Portanto, substituindo em (I):

$$\det V = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_p-x_1)\cdot\underbrace{(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_p-x_2)\cdots(x_p-x_{p-1})}_{D},$$

que é a tese.

Exercícios Resolvidos

4.65) Calcule o determinante V(2, 3, 5).

Solução

$$V(2, 3, 5) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix} = (3-2)\cdot(5-2)\cdot(5-3) = 6$$

Observe a seqüência das diferenças feitas: 2 3 5

3−2

5−3

5−2

4.66) Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{vmatrix}$

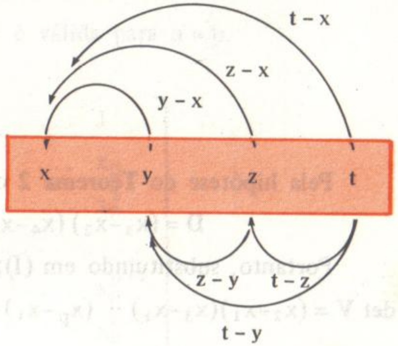
Solução

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

x y z t

$$= xyzt \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = xyzt\,(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

Observe a seqüência das diferenças feitas:



4.67) Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 \\ ad & be & cf \end{vmatrix}$

Solução

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 \\ ad & be & cf \end{vmatrix} \overset{P5}{=} a^2b^2c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{d^2}{a^2} & \frac{e^2}{b^2} & \frac{f^2}{c^2} \\ \frac{d}{a} & \frac{e}{b} & \frac{f}{c} \end{vmatrix} \overset{P2}{=} -a^2b^2c^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{d}{a} & \frac{e}{b} & \frac{f}{c} \\ \left(\frac{d}{a}\right)^2 & \left(\frac{e}{b}\right)^2 & \left(\frac{f}{c}\right)^2 \end{vmatrix}}_{V\left(\frac{d}{a},\ \frac{e}{b},\ \frac{f}{c}\right)} =$$

a^2 b^2 c^2

$$= -a^2b^2c^2\left(\frac{e}{b}-\frac{d}{a}\right)\left(\frac{f}{c}-\frac{d}{a}\right)\left(\frac{f}{c}-\frac{e}{b}\right)$$

4.68) Calcule o determinante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix}$

Solução

Lembre-se que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; então:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 2\cos^2 a - 1 & 2\cos^2 b - 1 & 2\cos^2 c - 1 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 2\cos^2 a & 2\cos^2 b & 2\cos^2 c \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \end{vmatrix}}_{V(\cos a,\ \cos b,\ \cos c)} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$$

Exercícios Propostos

4.69) Calcule o determinante $V(2, 3, 1, 5)$.

4.70) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix}$$

4.71) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

4.72) O determinante $V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ se anula quando e somente quando os x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ não são dois a dois distintos. Demonstre!

4.73) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 5 & -4 \\ x^2 & 4 & 25 & 16 \\ x^3 & -8 & 125 & -64 \end{vmatrix} = 0$$

4.74) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

Capítulo

5

Outros temas importantes

5.1 – DETERMINANTE DO PRODUTO DE MATRIZES

Teorema de Binet

> Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem; então:
> $$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Aceitaremos o teorema sem demonstração.

Exemplo

Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\det A = -2$

$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; $\det B = -34$

$\left.\right\}$ $\det A \cdot \det B = 68$

Temos: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+6 & 2-8 \\ 21+12 & 6-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 33 & -10 \end{bmatrix}$; $\det(A \cdot B) = 68$

5.2 – COMATRIZ

Definição

Seja a matriz quadrada de ordem **n**:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

Seja **N** a matriz definida por:

$$N = [A_{ij}]_{n \times n}$$

onde A_{ij} é, em **A**, o cofator do elemento a_{ij}.

Chama-se **comatriz** de **A**, e se indica com A^*, a matriz transposta de **N**:

$$\boxed{A^* = N^t}$$

Exemplo

Seja a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Note que a matriz **N** é obtida substituindo, em **A**, cada elemento a_{ij} pelo seu cofator A_{ij}:

$$N = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por definição:

$$A^* = N^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedade

> Seja a matriz quadrada de ordem **n**: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.
> Então:
> $$A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Demonstração

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{j3} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O elemento b_{ij}, qualquer, da matriz $A \cdot A^*$ é:

$$b_{ij} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = \begin{cases} \det A, \text{ se } i = j \text{ (Laplace)} \\ 0, \text{ se } i \neq j \text{ (Cauchy)} \end{cases}$$

Então:

$$A \cdot A^* = [b_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I_n$$

Analogamente demonstramos que $A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$

Exemplo

Vimos no exemplo anterior que se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então:

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

A **Regra de Sarrus** dá-nos $\det A = -1$.

Verifica-se facilmente que $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det A \cdot I_3$$

5.3 – MATRIZES INVERTÍVEIS

Teorema

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

Para que **A** seja invertível é necessário e suficiente que $\det A \neq 0$.

Tem-se ainda:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Demonstração

1ª parte: *necessidade*

Hipótese: **A** é invertível

Tese: $\det A \neq 0$

Se **A** é invertível existe, então, a matriz A^{-1} tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

Então:

$$\det (A \cdot A^{-1}) = \det I_n$$

O **Teorema de Binet** dá-nos:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \quad \text{(I)}$$

Então, o produto $\det A \cdot \det A^{-1}$ é diferente de zero (é igual a 1); e daí $\det A \neq 0$. É a tese.

Observe que se **A** é invertível, de (I):

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

2ª parte: *suficiência*

Hipótese: det A $\neq 0$
Tese: A é invertível

A propriedade em 5.2 dá-nos:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Sendo det A $\neq 0$:

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) = \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) \cdot A = I_n$$

A definição dada para matriz inversa permite-nos concluir da igualdade acima que A é invertível (é a tese), e que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$$

Exemplo

Retomando o exemplo anterior, concluímos que a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível, pois det A $= -1 \neq 0$. Além disso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Resolvidos

5.1) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$.

Use o **Teorema de Binet** para verificar que:

$$(a^2+b^2) \cdot (c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$$

Solução

Temos: $\det A = a^2+b^2$ e $\det B = c^2+d^2$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{bmatrix}$$

Então, $\det(A \cdot B) = (ac-bd)^2 - (bc+ad) \cdot (-bc-ad) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$

O **Teorema de Binet**, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, permite-nos escrever:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$$

5.2) Se $\det A = -4$, determine $\det A^2$.

Solução

$\det A^2 = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (-4) \cdot (-4) = 16$

5.3) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Determine: a) A^* b) det A c) A^{-1}

Solução

Os cofatores dos elementos de A são:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

a) $A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{vmatrix}$

b) $\det A = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} = 1 \cdot (-10) + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 28 = -94$

c) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$

5.4) **A é uma matriz não singular, ortogonal. Calcule det A.**

Solução

Se A é ortogonal: $A^{-1} = A^t$ (veja exercício 2.66)

Então: $\det A^{-1} = \det A^t$

$$\frac{1}{\det A} = \det A$$

$$(\det A)^2 = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

5.5) **A, de ordem n, é uma matriz não singular. Verifique que:**

$$\det A^* = (\det A)^{n-1}$$

Solução

A propriedade do item 5.2 dá-nos:

$$A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Então:

$$\det(A^* \cdot A) = \det[(\det A) \cdot I_n]$$

$$\underbrace{\det A^* \cdot \det A}_{\text{teorema de Binet}} = \underbrace{(\det A)^n \cdot \det I_n}_{\text{exercício 4.2}}$$

A é não singular: $\det A \neq 0$ e $\det I_n = 1$; então:

$$\det A^* = (\det A)^{n-1}$$

5.6) **Condição para que a matriz** $A = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$ **seja invertível.**

Solução

Deve-se ter $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ 2a+1 & 1 & a \\ 2a+1 & a & a \end{vmatrix} \overset{P5}{=} (2a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-1)^2$$

Então, para que A seja invertível deve-se ter $a \neq -\frac{1}{2}$ e $a \neq 1$.

Exercícios Propostos

5.7) **A e B são matrizes quadradas de ordem n.**

a) É $A \cdot B = B \cdot A$?

b) É $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?

5.8) **Se A é não singular e $A^2 = A$, determine det A.**

5.9) **A e B são matrizes quadradas de mesma ordem. Verifique que:**

$$\det(A^t \cdot B^t) = \det(A \cdot B^t) = \det(A^t \cdot B)$$

5.10) **Para as matrizes abaixo, determine A^{-1}, se existir:**

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

5.11) **Para as matrizes abaixo, determine A^{-1}, se existir:**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$

5.12) **Para as matrizes abaixo, determine A^{-1}, se existir:**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

5.13) **Se A é invertível e $A = A^{-1}$, calcule det A.**

5.14) **Sejam as matrizes A e B quadradas de mesma ordem.**

a) A e A^* *comutam*?

b) Verifique que $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Exercícios Suplementares

II.1) Se as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ *comutam*, então: $\begin{vmatrix} b & a-c \\ \beta & \alpha-\gamma \end{vmatrix} = 0$

II.2) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & e \\ 0 & 0 & c & f \\ d & e & f & x \end{bmatrix}$$

na qual os elementos são números reais e $a > b > c$, com d, e, f não nulos.

Verifique que as raízes da equação em x:

$$\det(A - xI) = 0$$

são reais.

II.3) Se α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo, verifique que:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ 1 & 1 & \operatorname{tg}\gamma \end{vmatrix} = 2$$

II.4) Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} \log x^2 & \log x^2 & 1 \\ \log x^2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

II.5) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

II.6) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ y & 2 & 3 & 5 \\ z & 4 & 5 & 7 \\ t & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

II.7) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

II.8) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$$

II.9) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}^3 a & \operatorname{sen} 3a \\ \operatorname{sen} b & \operatorname{sen}^3 b & \operatorname{sen} 3b \\ \operatorname{sen} c & \operatorname{sen}^3 c & \operatorname{sen} 3c \end{vmatrix} = 0$$

II.10) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

II.11) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

II.12) Os números 546, 273 e 169 são divisíveis por 13; verifique que o determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

é divisível por 13, sem desenvolvê-lo.

II.13) Dada a matriz $n \times n$

$$A = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

calcule det A.

II.14) **Um texto para interpretação**

Associada a toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, de ordem **n**, encontra-se a função:

$$f(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

que se denomina **função característica de A.**

A equação:

$$f(x) = \det(A - xI) = 0$$

que pode expressar-se na forma:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

chama-se **equação característica** de A.

Ache a equação característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

As n raízes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ da equação característica de uma matriz A recebem o nome de **valores próprios** de A.

Determine os valores próprios da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique para uma matriz A, de ordem 2×2, que a soma dos valores próprios é igual ao **traço** da matriz.

Teorema de Cayley: "Toda matriz quadrada A satisfaz sua própria equação característica: $\det(A - xI) = 0$".

Mais exatamente: se na equação característica de A, de ordem **n**, substituímos x por A e cada número a_i por $a_i \cdot I$, ela se transforma na equação matricial:

$$a_0 \cdot A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot A + a_n \cdot I = 0$$

também válida.

Verifique o Teorema de Cayley para uma matriz A, de ordem 2×2.

Podemos utilizar o Teorema de Cayley para determinar a **inversa** de uma matriz A, não singular. Por exemplo, a matriz invertível:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\det A \neq 0)$$

tem para equação característica:

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

Então: $A^2 - 3 \cdot A - 2 \cdot I = 0$

Daí $I = \frac{1}{2} \cdot A^2 - \frac{3}{2} \cdot A$

Multiplicando-se "à direita" por A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} A - \frac{3}{2} I$$

Substituindo **A** e **I** vem A^{-1}.

Use o processo descrito para determinar a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

PARTE III

Capítulo 6

Generalidades

6.1 – EQUAÇÕES LINEARES

Definições

A equação:

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

onde x_1 e x_2 são *incógnitas*, é um exemplo de *equação linear a duas incógnitas.*

Note que os expoentes das incógnitas são iguais a 1.

A equação:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 10$$

é *linear, a três incógnitas.*

Numa equação linear não aparecem termos da forma $2x_1^2$ ou $3x_1x_2$ ou $-4x_2^2x_3^3$; os expoentes das incógnitas são iguais a 1, e em cada termo da equação aparece no máximo uma incógnita. Uma equação como:

$$2x_1^2 + 3x_2^{-1} + x_1^2x_2 - x_4 = 6$$

não é linear.

De um modo geral, uma equação da forma:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b}$$

na qual $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são incógnitas e $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e b são *números conhecidos*, denomina-se **equação linear a n incógnitas**.

Os números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ denominam-se **coeficientes da equação** e b é o seu **termo constante**.

Seja a equação linear:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \quad \text{(I)}$$

Se em (I) fizermos a substituição:

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$$

a sentença:

$$1 + 2 \cdot (-2) - 3 = -6$$

é *verdadeira*.

Então, diremos que o conjunto de valores: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 3$ é uma **solução da equação.**

O conjunto de valores:

$$x_1 = 2, \ x_2 = 1, \ x_3 = 3$$

não é solução da equação (I) pois a sentença:

$$2 + 2 \cdot 1 - 3 = -6$$

é *falsa*.

De um modo geral, o conjunto de valores:

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \ x_3 = \alpha_3, \ \ldots, \ x_n = \alpha_n$$

é uma **solução da equação linear:**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

se a sentença:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

é *verdadeira*.

Se não houver dúvidas quanto à posição da incógnita na equação, essa solução pode ser representada por:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

Situações particulares

Seja a equação linear a n incógnitas:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

1º) Se $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b = 0$, a equação escreve-se:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0$$

Então, qualquer conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação.

2º) Se $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, a equação não admite soluções, pois para qualquer conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ a sentença:

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + \ldots + 0\alpha_n = b$$

é *falsa*.

Por exemplo, a equação $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6$ não admite soluções.

Exercícios Propostos

6.1) Das equações abaixo, diga qual é *linear*:

a) $x_1 + x_2 - 3 = x_3$ **b)** $x_1 + \dfrac{1}{x_2} + x_3 = 8$ **c)** $-\dfrac{1}{7}x_1x_2 + x_3 = 8$

6.2) Seja a equação linear:

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3$$

a) Verifique se (3, 2, 1, 0) é solução da equação.

b) Verifique se (4, –2, 1, 3) é solução da equação.

c) Determine k para que (4, –2, 1, k) seja solução da equação.

6.2 – SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Definições

Um par de equações como:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

denomina-se *sistema de 2 equações lineares a 2 incógnitas.*

Note que o par de valores:

$$x_1 = 2 \ \text{ e } \ x_2 = 1$$

satisfaz cada uma das equações do sistema; diz-se então, que o conjunto de valores $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ é *solução do sistema*; o par $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$ satisfaz a primeira equação do sistema, mas não satisfaz a segunda; esse par não é solução do sistema.

Generalizando, **um sistema de m equações lineares a n incógnitas** pode ser escrito assim:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas.**

Os números a_{ij} e b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, são conhecidos.

O par de índices (i; j) indica que a_{ij} é o coeficiente da incógnita x_j na i-ésima equação; assim, a_{32} é o coeficiente de x_2 na 3ª equação.

O conjunto de valores:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ ...,\ x_n = \alpha_n$$

é uma **solução do sistema** (S) se for solução das **m** equações de (S), isto é, satisfaz as **m** equações do sistema.

Quando não houver possibilidade de confusão, essa solução pode ser representada com:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$$

Observações

1ª) É comum substituir-se a denominação **sistema de equações lineares**, simplesmente por **sistema linear**.

2ª) *Resolver um sistema linear é determinar todas as suas soluções.*

Exemplos

O sistema:

$$(S)\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 14 \\ 3x + 4y + 5z = 26 \\ 5x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

admite o conjunto de valores $x = 1, y = 2, z = 3$ como solução pois as sentenças:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$$
$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 26$$
$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 10$$

são *verdadeiras*.

O conjunto de valores $x = 22, y = -10, z = 0$ **não é solução de (S):**

$2 \cdot 22 + 3 \cdot (-10) + 2 \cdot 0 = 14$ (sentença *verdadeira*)
$3 \cdot 22 + 4 \cdot (-10) + 5 \cdot 0 = 26$ (sentença *verdadeira*)
$5 \cdot 22 - 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 0 = 10$ (sentença *falsa!*)

Sistemas lineares homogêneos e não homogêneos

Se num sistema de equações lineares os termos constantes das equações **não** são todos nulos, ele é chamado **não homogêneo**.

Por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 10x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

não são todos nulos

é linear, **não homogêneo.**

Se num sistema de equações lineares os termos constantes das equações são todos nulos, ele é chamado **homogêneo.**

Então, um sistema de equações lineares **homogêneo** pode ser expresso na forma:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$$

Uma solução evidente do sistema linear homogêneo é:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ ...,\ x_n = 0$$

que se denomina **solução trivial.** Excluindo essa solução, e supondo que o sistema homogêneo admita uma outra solução:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$$

onde os α_i não são todos nulos, tal solução denomina-se **não-trivial.**

Exercícios Propostos

6.3) Seja o sistema linear:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 15 \\ 4x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases}$$

Verifique se (3; 2; 1) é solução de (S).

6.4) Seja o sistema de equações lineares:

$$(S)\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 13 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

a) Verifique se o conjunto de valores (3; –1; 1) é solução de (S).
b) Verifique se o conjunto de valores (3; 1; 2) é solução de (S).

6.5) a) Sabendo-se que (6; m; 1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = n \\ 2x_1 + 3x_2 - px_3 = 2 \end{cases}$$

determine m, n e p.

b) Seja o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 = k^2 - 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = k - 1 \end{cases}$$

Determine k para que ele seja homogêneo.

6.3 – EXPRESSÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA LINEAR

Matrizes associadas a um sistema linear

Dado um sistema (S) de m equações lineares a n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos associar-lhe as seguintes matrizes:

a) matriz completa

É a matriz cujos elementos são os coeficientes das incógnitas mais a coluna dos termos constantes:

$$[A \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

b) matriz incompleta ou matriz dos coeficientes

É a matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

c) matriz das incógnitas

É a matriz constituída por uma única coluna, cujos elementos são as incógnitas do sistema:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

d) matriz dos termos constantes

É a matriz constituída por uma única coluna, cujos elementos são os termos constantes do sistema:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja o sistema linear:

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + x_3 = 8 \\ \ \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Estão associadas ao sistema (S) as seguintes matrizes:

a) **completa:** $[A \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$

b) **incompleta:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) **das incógnitas:** $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

d) **dos termos constantes:** $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

A expressão matricial

Seja o sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se **A**, **X** e **B** são, respectivamente, as matrizes *incompletas, das incógnitas* e *dos termos constantes* de (S), o sistema pode ser escrito na **forma matricial:**

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

Com efeito:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Da igualdade acima obtém-se o sistema (S) na sua formulação usual.

Exemplo

A formulação matricial do sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Exercícios Propostos

6.6) Seja o sistema:

$$(S)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Dê as matrizes associadas ao sistema.

6.7) Formule os sistemas na notação matricial:

a) $\begin{cases} 4x - 4y = 48 \\ 2x + y = 38 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 18 \\ 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 13x_3 - 7x_2 = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 + x_3 = 7 \\ x_3 + x_1 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$

6.8) Um sistema linear (S) tem a seguinte formulação matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quais são as equações que o constituem?

6.4 – CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

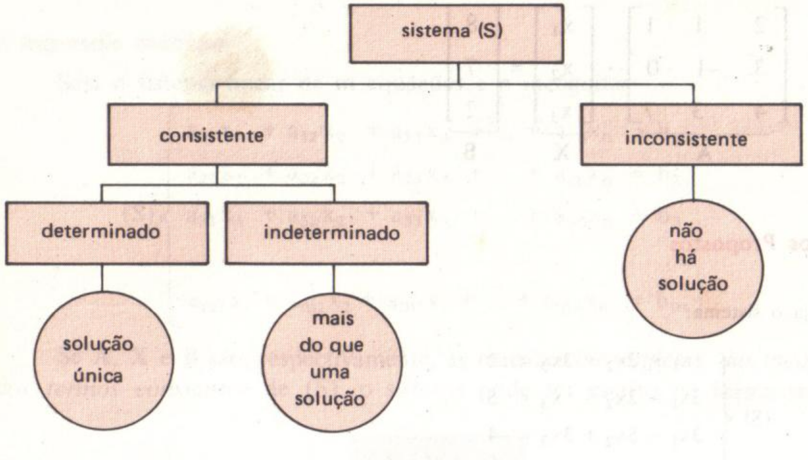
Seja (S) um sistema linear.

Segundo o número de soluções podemos classificá-lo como segue:

(S) **consistente** se possui pelo menos uma solução.

(S) **inconsistente** se não possui soluções.

Se (S) é consistente e admite uma e uma só solução ele é **determinado**; se (S) é consistente e admite mais do que uma solução ele é **indeterminado**.



6.5 – SISTEMAS DE CRAMER

Definição

Seja (S) um sistema linear de **n** equações a **n** incógnitas:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se em (S) a *matriz incompleta* **A**, quadrada, é tal que det **A** $\neq 0$, (S) diz-se **Sistema de Cramer**.

Observe então que se (S) é um sistema de Cramer, o número de equações é igual ao número de incógnitas e, além disso, o determinante da matriz incompleta é diferente de zero.

Exemplo

O sistema:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

é de Cramer. O número de equações é igual ao número de incógnitas: três; e além disso, o determinante da matriz incompleta:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

é diferente de zero.

Propriedade

Um Sistema de Cramer é consistente e determinado.

Demonstração

Seja o Sistema de Cramer:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que na formulação matricial escreve-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

com det **A** $\neq 0$.

Vamos verificar, então, que a equação matricial

$$A \cdot X = B \qquad (I)$$

admite solução única, o que equivale a demonstrar que (S) admite solução única.

1º) **(I) admite solução.**
Por hipótese, $\det A \neq 0$ e então existe A^{-1}.
A matriz $\overline{X} = A^{-1} \cdot B$ é solução de (I):

$$A \cdot \overline{X} = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B$$

2º) **A solução $\overline{X}$ é única.**
Suponhamos que (S) admita uma outra solução $\overline{\overline{X}}$; então:

$$A \cdot \overline{\overline{X}} = B$$

$$\overline{\overline{X}} = I \cdot \overline{\overline{X}} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \overline{\overline{X}} = A^{-1} \cdot (A \cdot \overline{\overline{X}}) = A^{-1} \cdot B = \overline{X}$$

Regra de Cramer

Para o sistema (S), de Cramer, tem-se então:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Daí:

$$x_i = \frac{A_{1i}}{\det A} b_1 + \frac{A_{2i}}{\det A} b_2 + \dots + \frac{A_{ni}}{\det A} b_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Seja agora a matriz:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtida de **A** substituindo-se a sua i-ésima coluna pela coluna dos termos constantes de (S).

Se desenvolvermos $\det A_i$ através da i-ésima coluna:

$$\det A_i = A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \dots + A_{ni} \cdot b_n$$

Então: $$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplo

Retomemos o Sistema de Cramer, do exemplo anterior:

$$(S) \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

no qual $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det A = -2$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

A **única** solução do sistema é (2; 3; 4).

Exercícios Propostos

6.9) Utilize a **Regra de Cramer** para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 4y = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \end{cases}$

6.10) Utilize a **Regra de Cramer** para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y - z = -6 \\ x + 4y + 7z = 17 \\ -x + 6y + 6z = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = 2 \\ 3x + 8y - 2z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y + 5z = -2 \\ 2x + y - 5z = 3 \\ 2x + 5y + z = 3 \end{cases}$

6.11) Resolva os sistemas abaixo pela **Regra de Cramer**:

a) $\begin{cases} 2x + y + 2z - 3t = 0 \\ 4x + y + z + t = 15 \\ 6x - y - z - t = 5 \\ 4x - 2y + 3z - t = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$

6.12) Seja o sistema (S):

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ -x + ay + 3z = 0 \\ -2x + y + az = 0 \end{cases}$$

Determine a para que (S) seja um **Sistema de Cramer**. Resolva-o em seguida.

6.13) Use a **Regra de Cramer** para resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - my = 7 \\ mx + y = 3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

6.14) Determine **m** para que o sistema

$$\begin{cases} (m-1)x_1 + 4x_2 = 2m \\ (m+1)x_1 - 2x_2 = 1 + 3m \end{cases}$$

seja **de Cramer**. Em seguida, resolva-o.

6.15) Use a **Regra de Cramer** para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{y} = 3 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{9}{y} = \dfrac{6}{7} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{z} = 28 \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{6}{z} = -1 \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{9}{y} - \dfrac{9}{z} = 5 \end{cases}$

(Sugestão: $\dfrac{1}{x} = X$, $\dfrac{1}{y} = Y$, $\dfrac{1}{z} = Z$.)

6.16) Use a **Regra de Cramer** para resolver o sistema:

$$\begin{cases} x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \\ -x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

6.17) Use a **Regra de Cramer** para determinar os reais **a, b** e **c** de tal forma que a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

satisfaça às condições: $f(1) = 5$, $f(3) = 13$ e $f(-5) = 5$.

6.18) **M** é a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine M^{-1} e use o resultado para resolver o sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = -7 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases}$$

6.19) Determine a matriz inversa da matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilize o resultado para resolver o sistema:

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x - 9y + 5z = 6 \\ x - 3y + 3z = 13 \end{cases}$$

Capítulo 7

Resolução de sistemas lineares: o escalonamento

Na resolução de sistemas lineares, a **Regra de Cramer** apresenta sérias limitações: é aplicável somente quando o sistema é constituído por igual número de equações e de incógnitas, e também exige que o determinante da matriz incompleta seja diferente de zero.

Além disso, a **Regra de Cramer** torna-se computacionalmente ineficiente quando o número de equações é maior do que 3; por exemplo, na resolução de um sistema linear de 5 equações e 5 incógnitas precisamos calcular 6 determinantes de ordem 5 (!).

Vamos então examinar um outro método para a resolução e discussão de um sistema de equações lineares.

7.1 – SISTEMAS EQUIVALENTES

Definição

Dizemos que os sistemas lineares (S_1) e (S_2) são **equivalentes** quando:

1º) (S_1) e (S_2) são *consistentes* e toda solução de (S_1) é solução de (S_2) e, também, toda solução de (S_2) é solução de (S_1); ou quando:

2º) (S_1) e (S_2) são *inconsistentes*.

Se os sistemas lineares (S_1) e (S_2) são equivalentes, escreve-se:

$$\boxed{(S_1) \sim (S_2)}$$

Observe que:

a) $(S) \sim (S)$, para todo (S)

b) se $(S_1) \sim (S_2)$ então $(S_2) \sim (S_1)$

c) se $(S_1) \sim (S_2)$ e $(S_2) \sim (S_3)$ então $(S_1) \sim (S_3)$

Exemplo

Os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ \qquad\ 2x_2 = 4 \end{cases}$$

são *equivalentes*: são consistentes, determinados, e apresentam a mesma solução (3; 2).

As transformações elementares

Dado um sistema linear (S_1), obter-se-á um sistema linear (S_2), *equivalente* a (S_1), se em (S_1) fizermos as seguintes **transformações elementares** (**te**):

te 1:	trocarmos as posições de duas equações quaisquer;
te 2:	multiplicarmos todos os termos de uma equação por um número **k**, $k \neq 0$;
te 3:	somarmos, membro a membro, a uma equação uma outra, esta previamente multiplicada por um número.

Exemplos

Seja o sistema linear:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

São **equivalentes** ao sistema (S) os seguintes sistemas:

a) $$(S_1)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

Observe que em (S) trocamos as posições das duas equações obtendo (S_1); $(S_1) \sim (S)$ pela **te 1**.

Para indicarmos a transformação feita (**te 1**) em (S), usamos a notação:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

b) $$(S_2)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 15x_1 + 20x_2 = 25 \end{cases}$$

Observe que em (S) multiplicamos a 2ª equação por 5 obtendo (S_2); $(S_2) \sim (S)$ pela te 2.

Para indicarmos a transformação feita (te 2) em (S), usamos a notação:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \quad 5 \end{cases}$$

c) $$(S_3)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 11x_1 + 0 \cdot x_2 = 13 \end{cases}$$

Observe que em (S) multiplicamos a 1ª equação por 4 e somamos, membro a membro, à 2ª equação obtendo (S_3); $(S_3) \sim (S)$ pela te 3.

Para indicarmos a transformação feita (te 3) em (S), usamos a notação:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \quad 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \leftarrow \end{cases}$$

Demonstração

1º) A te 1 é imediata.

2º) Para a demonstração da te 2 consideremos o sistema:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \leftarrow \text{i-ésima equação} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e o sistema:

$$(S_1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \dots + ka_{in}x_n = k \cdot b_i \leftarrow \text{i-ésima equação} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

obtido de (S) multiplicando-se neste a i-ésima equação pelo número **k**, $k \neq 0$.

Observe que (S) e (S_1) diferem apenas nas suas i-ésimas equações; portanto é para elas que a nossa demonstração deve se voltar.

1ª parte) Suponhamos que o conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de (S); demonstremos que também o é de (S_1).

Então, por hipótese a i-ésima equação de (S) dá-nos:

$$a_{i1} \cdot \alpha_1 + a_{i2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{in} \cdot \alpha_n = b_i$$

Na i-ésima equação de (S_1) fazendo a substituição: x_1 por α_1, x_2 por α_2, ..., x_n por α_n obtemos:

$$(1^{\text{o}} \text{ membro}) = k \cdot a_{i1} \cdot \alpha_1 + k \cdot a_{i2} \cdot \alpha_2 + \dots + k \cdot a_{in} \cdot \alpha_n =$$

$$= k \cdot \underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ (hipótese)}} = k \cdot b_i = (2^{\text{o}} \text{ membro})$$

o que prova que a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz à i-ésima equação de (S_1) e portanto é solução de (S_1).

2ª parte) Suponhamos que o conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de (S_1); demonstremos que também o é de (S).

Então, por hipótese a i-ésima equação de (S_1) dá-nos:

$$ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \dots + ka_{in}x_n = k \cdot b_i$$

Na i-ésima equação de (S) fazendo a substituição: x_1 por α_1, x_2 por α_2, ..., x_n por α_n obtemos:

$$(1^{\text{o}} \text{ membro}) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \overset{(k \neq 0)}{=} \frac{k}{k} a_{i1}\alpha_1 + \frac{k}{k} a_{i2}\alpha_2 + \dots +$$

$$+ \frac{k}{k} a_{in}\alpha_n = \frac{1}{k} \underbrace{(ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \dots + ka_{in}\alpha_n)}_{k \cdot b_i \text{ (hipótese)}} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot b_i = b_i =$$

$$= (2^{\text{o}} \text{ membro})$$

o que prova que a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz à i-ésima equação de (S) e portanto é solução de (S).

Fica então completada a demonstração: $(S_1) \sim (S)$.

3º) A demonstração da te 3 será feita no exercício 7.3.

Exercício Resolvido

7.1) Sejam os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} ax + by = 2 \\ bx + 2ay = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2)\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$$

Determine **a** e **b** sabendo-se que $(S_1) \sim (S_2)$.

Solução

No sistema (S_2) a *matriz incompleta*:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero: det A = 5; (S_2) é *Sistema de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Então, (0; 2) é solução de (S_2); se (S_1) ~ (S_2), (0; 2) também é solução de (S_1). Substituindo em (S_1) x por 0 e y = 2, obtemos o sistema em a e b:

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 2b = 2 \\ 0 \cdot b + 4a = 4 \end{cases}$$

e, daí, a = 1 e b = 1.

Exercícios Propostos

7.2) Os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} 2x - y + 3z = 10 \\ 3x - 2y - z = 22 \\ 4x + 3y - 2z = 13 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by + cz = -4 \\ x - 2by + 3cz = 8 \\ -ax + by + 4cz = -23 \end{cases}$$

são equivalentes. Determine a, b e c.

7.3) Demonstre a te 3.

7.2 – SISTEMAS ESCALONADOS

Definição

Seja (S) um sistema de equações lineares.

Diz-se que (S) é um **sistema escalonado**, ou ainda, que está na **forma escalonada** quando:

1º) em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo

2º) o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, cresce "da esquerda para a direita, de equação para equação".

Exemplos

São escalonados, os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} x + y + 2z = 13 \\ \quad\; 2y + z = 4 \\ \qquad\; 3z = 6 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ \quad\; x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad\qquad 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x + y + 2z - t = 4 \\ \qquad\quad z - t = 5 \end{cases}$$

Resolução

Seja (S) um sistema na **forma escalonada**; para a sua resolução, há dois tipos a serem considerados:

1º tipo: em (S) há tantas equações quanto incógnitas

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\quad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Observe que em (S) $a_{ii} \neq 0$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Além disso, se A é a *matriz incompleta* de (S) podemos escrever:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \neq 0$$

Então (S) é um *Sistema de Cramer*; (S) é consistente e determinado.

Para obter-se a solução (única) de (S) parte-se da n-ésima equação, que nos dá o valor de x_n; por substituição nas equações anteriores obtemos sucessivamente os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_3, x_2, x_1$.

Exemplo

Seja o *sistema escalonado*:

$$(S)\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 & (1)\\ y + 2z - t = -1 & (2)\\ 4z + 3t = 7 & (3)\\ 2t = 2 & (4)\end{cases}$$

A equação (4) dá-nos $t = 1$

Em (3): $4z + 3 \cdot 1 = 7$ e daí $z = 1$

Em (2): $y + 2 \cdot 1 - 1 = -1$ e daí $y = -2$

Em (1): $2x - 2 - 1 + 1 = 0$ e daí $x = 1$

A solução do sistema (S) é (1; –2; 1; 1).

2º tipo: em (S) há menos equações do que incógnitas

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{mj_m}x_{j_m} + a_{m,j_m+1}x_{j_m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m\end{cases}$$

Observe que em (S) $1 < j_1 < \dots < j_m$ e que os "coeficientes iniciais" a_{11}, a_{2j_2}, ..., a_{mj_m} não são nulos.

Para a resolução de (S), neste caso, devemos fazê-lo recair no caso anterior.

Inicialmente, as incógnitas que não aparecem "no começo" de nenhuma das equações de (S) – chamadas *variáveis livres* – devem ser "passadas" para os segundos membros das equações.

O "novo" sistema assim obtido, (S'), deve ser considerado como um sistema contendo apenas as incógnitas que "sobraram" nos primeiros membros das equações.

Assim, atribuindo-se à cada *variável livre* dos segundos membros das equações, um determinado valor, teremos um sistema (S') do caso anterior: consistente e determinado. Resolvendo-o obtemos uma solução de (S). Em seguida, atribuindo-se às variáveis livres um outro conjunto de valores obteremos outra solução de (S). O processo estende-se indefinidamente, e para (S) encontraremos infinitas soluções: (S) é **consistente e indeterminado**.

Por definição, neste segundo caso, o número de variáveis livres, n-m, chama-se grau de indeterminação.

Exemplos

1º) Seja o *sistema escalonado*:

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 2 & (1)\\ y + z = 3 & (2)\end{cases}$$

A única incógnita que não aparece "no começo" de nenhuma das equações de (S) é z: é a única *variável livre* (observe que o grau de indeterminação do sistema é 1).

"Passando" z para os segundos membros das equações:

$$\begin{cases} x + y = 2 - 2z\\ y = 3 - z\end{cases}$$

Atribuindo-se a z o valor de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 - 2\alpha & (1)\\ y = 3 - \alpha & (2)\end{cases}$$

consistente e determinado para cada valor particular de α.

Substituindo (2) em (1):

$$x + 3 - \alpha = 2 - 2\alpha$$
$$x = -1 - \alpha$$

Então, as soluções de (S) são os *infinitos* conjuntos de valores do tipo: $(-1 - \alpha;\ 3 - \alpha;\ \alpha)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$; (S) é **consistente e indeterminado.**

Alguns exemplos de solução:

$\alpha = 0$: (–1; 3; 0)
$\alpha = 1$: (–2; 2; 1)
$\alpha = 2$: (–3; 1; 2)

2º) Seja o *sistema escalonado*:

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 2 & (1)\\ z - 2t = 1 & (2)\end{cases}$$

Há duas *variáveis livres*: y e t (não aparecem "no começo" de nenhuma equação). O grau de indeterminação de (S) é 2.

"Passando" y e t para os segundos membros das equações:

$$\begin{cases} x - 2z = 2 - 2y - 3t\\ z = 1 + 2t\end{cases}$$

Atribuindo-se a y e t, respectivamente, os valores α e β, reais, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x - 2z = 2 - 2\alpha - 3\beta & (1) \\ z = 1 + 2\beta & (2) \end{cases}$$

consistente e determinado para cada par $(\alpha; \beta)$.

Substituindo (2) em (1):

$$x - 2(1 + 2\beta) = 2 - 2\alpha - 3\beta$$

$$x = 4 - 2\alpha + \beta$$

Então, as soluções de (S) são os infinitos conjuntos de valores do tipo: $(4 - 2\alpha + \beta; \alpha; 1 + 2\beta; \beta)$, onde $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; (S) é **consistente e indeterminado.**

Alguns exemplos de solução:

$(\alpha; \beta) = (-2; 1)$: $(9; -2; 3; 1)$
$(\alpha; \beta) = (0; 0)$: $(4; 0; 1; 0)$

Exercícios Propostos

7.4) Resolva os *sistemas escalonados*:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$

7.5) Resolva os *sistemas escalonados*:

a) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ y + z - t = 2 \\ 3z + t = 1 \\ 2t = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + z + 2t = 4 \\ y - 2z + 5t = 2 \\ z - t = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1 \\ z - t = 2 \end{cases}$

7.6) Seja o sistema:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ ay + z &= 2 \\ az &= b \end{aligned}$$

a) Resolva-o para $a \neq 0$.
b) Resolva-o para $a = b = 0$.

7.3 – MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Para resolvermos um sistema qualquer de equações lineares, utilizaremos um método denominado **método de eliminação de Gauss.**

Esse método consiste em transformar um dado sistema linear (S) em um outro (S_1), **equivalente** a (S), sendo (S_1) um **sistema escalonado**, que é de fácil solução.

A transformação de (S) em (S_1) faz-se com auxílio das *transformações elementares*, descritas em 7.1.

Como escalonar um sistema

Para transformarmos um sistema linear (S) em um outro, *equivalente e escalonado*, seguimos os seguintes passos:

a) Inicialmente, usamos as *transformações elementares* de modo que a 1ª incógnita, x_1, tenha coeficiente $a_{11} = 1$ na 1ª equação.

b) Depois, para $i > 1$, substituímos a i-ésima equação pela soma da mesma com a primeira equação multiplicada por um número conveniente: o número "conveniente" deve ser tal que se anulem os coeficientes da 1ª incógnita, em todas as equações (exceto a primeira). Observe que para anularmos o coeficiente da 1ª incógnita na i-ésima equação, a esta somamos a 1ª equação previamente multiplicada por $-a_{i1}$.

c) Em seguida, "abandonamos" a 1ª equação e repetimos o processo acima para as equações restantes.

Os exercícios que seguem ilustram o procedimento.

Exercícios Resolvidos

7.7) Resolva o sistema:

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \quad -4 \quad -2 \quad \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -7x_2 - 2x_3 = 26 \\ -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 = 0 \\ -7x_2 - 2x_3 = 26 \end{cases} \quad -1 \quad \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ -7x_2 - 2x_3 = 26 \end{cases} \quad 7 \quad \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ 26x_3 = 26 \end{cases}$$

O sistema foi colocado na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado.** A sua única solução é $(4; -4; 1)$; podemos dizer que o **conjunto-solução** de (S) é:

$$V = \{(4; -4; 1)\}$$

7.8) Resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ 2x + y - z + t = 5 \\ -x + y - z - t = -2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x + y + z + t = 6 \quad (-2)\ (1) \\ 2x + y - z + t = 5 \\ -x + y - z - t = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ -y - 3z - t = -7 \quad (-1) \\ 2y \qquad\quad = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ y + 3z + t = 7 \quad (-2) \\ 2y \qquad\quad = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ y + 3z + t = 7 \\ -6z - 2t = -10 \end{cases}$$

O sistema foi colocado na forma escalonada; é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.** Há uma só variável livre: **t** (não aparece no começo de nenhuma equação). Então:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 - t \\ y + 3z = 7 - t \\ -6z = -10 + 2t \end{cases}$$

Atribuindo-se a **t** o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 - \alpha & (1) \\ y + 3z = 7 - \alpha & (2) \\ -6z = -10 + 2\alpha & (3) \end{cases}$$

Em (3): $z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha$; substituindo em (2) obtemos $y = 2$ e em (1) $x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\alpha$.

Então, as soluções de (S) são os infinitos conjuntos de valores do tipo: $\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\alpha;\ 2;\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha;\ \alpha\right)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$V = \left\{\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\alpha;\ 2;\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha;\ \alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

7.9) Resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x - y + z = 2 \quad (-2)\ (-1) \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - 3z = 3 \quad \left(\frac{1}{3}\right) \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = 1 \quad (-3) \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = 1 \\ 0y + 0z = 0 \ (*) \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Observe que a equação (*) foi abandonada; ela é satisfeita para todo par ordenado (y; z) $\in \mathbb{R}^2$: *é dispensável para a resolução do sistema.*

Note também que o sistema está na forma escalonada; é do 2º tipo: consistente e indeterminado. Há uma só variável livre: z. Então:

$$\begin{cases} x - y = 2 - z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Atribuindo-se a z o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 - \alpha & (1) \\ y = 1 + \alpha & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1): $x = 3$

Então:

$$V = \{(3;\ 1 + \alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

7.10) Resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \quad (-1)\ (-2) \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \quad (-1)\ (-2) \\ y + 2z = 5 \\ 2y + 8z = 14 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \end{cases}$$

O sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado.** Resolvendo-o:

$$V = \{(1;\ 3;\ 1)\}$$

7.11) Resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4t = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11t = 12 \end{cases}$$

7.15) Discuta e resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = a \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 4 \quad (-2)\ (-3) \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - z = -3 \quad (-1) \\ -y - z = a - 12 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 3 \quad (1) \\ -y - z = a - 12 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 3 \\ \boxed{0y + 0z = a - 9} \quad (*) \end{cases}$$

Se $a = 9$, a equação (*) é dispensável para a resolução do sistema. Então:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

que é um sistema escalonado do 2º tipo; é **consistente** e **indeterminado**. Há uma única variável livre: z. Então:

$$\begin{cases} x + y = 4 - z \\ y = 3 - z \end{cases}$$

Atribuindo-se a z o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 4 - \alpha \quad (1) \\ y = 3 - \alpha \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo-se (2) em (1): $x = 1$. Então, as soluções de (S) são os infinitos conjuntos de valores do tipo: $(1; 3 - \alpha; \alpha)$.

Se $a \neq 9$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é **inconsistente**.

Resumo

$$\begin{cases} a = 9: \text{(S) é consistente e indeterminado,} \quad V = \{(1;\ 3 - \alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\} \\ a \neq 9: \text{(S) é inconsistente} \end{cases}$$

7.16) Discuta e resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x + y = 1 \quad (-1) \\ x + ay = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \quad (1) \\ \boxed{(a - 1)y = 1} \quad (2) \end{cases}$$

Se $a \neq 1$, o sistema está na forma escalonada, é do 1º tipo: **consistente** e **determinado**.

Em (2): $y = \dfrac{1}{a - 1}$, e substituindo em (1): $x = \dfrac{a - 2}{a - 1}$.

Se $a = 1$, a equação (2) não possui soluções; o sistema é **inconsistente**.

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 1: \text{(S) é consistente e determinado,} \quad V = \left\{\left(\dfrac{a-2}{a-1};\ \dfrac{1}{a-1}\right)\right\} \\ a = 1: \text{(S) é inconsistente,} \quad V = \varnothing \end{cases}$$

Uma solução alternativa

Observe que a *matriz incompleta* **A**, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$$

Se $a \neq 1$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix}}{a - 1} = \frac{a - 2}{a - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{a - 1} = \frac{1}{a - 1}$$

Se $a = 1$, o sistema (S) fica:

$$(S)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Então, escalonando o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y = 1 \quad (-1) \\ x + y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ \boxed{0x + 0y = 1} \quad (*) \end{cases}$$

A equação (*) não possui soluções; o sistema é *inconsistente*.

7.17) Discuta o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases} \begin{matrix} -2 & -1 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (a-1)y + 4z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ -(a-1) \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (-a^2 - a + 6)z = 2 - a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ \boxed{-(a+3)(a-2)z = 2 - a} \quad (*) \end{cases}$$

Observe a equação (*).

Se $a \neq -3$ e $a \neq 2$ o sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado.**

Se $a = 2$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

Está na forma escalonada e é do 2º tipo: *consistente e indeterminado.*

Se $a = -3$, a equação (*) escreve-se:

$$0z = 5$$

e não possui soluções: o sistema é **inconsistente.**

Resumo

$$\begin{cases} a \neq -3 \ \text{ e } \ a \neq 2\text{: (S) é consistente e determinado} \\ a = \ \ 2\text{: (S) é consistente e indeterminado} \\ a = -3\text{: (S) é inconsistente} \end{cases}$$

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta **A**, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = -(a+3)(a-2)$$

Se $a \neq -3$ e $a \neq 2$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado.**

Se $a = -3$ temos:

$$(S)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \begin{matrix} -2 & -1 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ 4 \\ \end{matrix} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ \boxed{0y + 0z = 5} \quad (*) \end{cases}$$

A equação (*) não possui soluções: o sistema é **inconsistente.**

Se $a = 2$ temos:

$$(S)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \begin{matrix} -2 & -1 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ -1 \\ \end{matrix} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ \boxed{0y + 0z = 0} \quad (*) \end{cases}$$

Para efeito de resolução do sistema a equação (*) pode ser abandonada; então, o sistema está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.**

7.18) Discuta o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b^2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + ay = b^2 \\ ax + y = b \end{cases} \begin{matrix} -a \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{cases} x + ay = b^2 \\ \boxed{(1 - a^2)y = b - ab^2} \quad (*) \end{cases}$$

Fixe sua atenção na equação (*).

Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$ o sistema está na forma escalonada, é do 1º tipo: **consistente e determinado.**

Se $a = 1$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x + y = b^2 \\ \boxed{0y = b - b^2} \quad (*) \end{cases}$$

Se, então, $b = 0$ ou $b = 1$, a equação (*) escreve-se:

$$0y = 0$$

dispensável para a resolução do sistema, que é então **consistente e indeterminado.**

Se, entretanto, $b \neq 0$ e $b \neq 1$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é **inconsistente.**

Se $a = -1$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x - y = b^2 \\ \boxed{0y = b + b^2} \quad (*) \end{cases}$$

Se, então, $b = 0$ ou $b = -1$, a equação (*) escreve-se:

$$0y = 0$$

dispensável para a resolução do sistema, que é então **consistente e indeterminado.**

Se, entretanto, $b \neq 0$ e $b \neq -1$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é **inconsistente.**

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 1 \ \text{ e } \ a \neq -1: \text{(S) é consistente e determinado} \\ a = 1 \begin{cases} b = 0 \ \text{ ou } \ b = 1: \text{(S) é consistente e indeterminado} \\ b \neq 0 \ \text{ e } \ b \neq 1: \text{(S) é inconsistente} \end{cases} \\ a = -1 \begin{cases} b = 0 \ \text{ ou } \ b = -1: \text{(S) é consistente e indeterminado} \\ b \neq 0 \ \text{ e } \ b \neq -1: \text{(S) é inconsistente} \end{cases} \end{cases}$$

Resolva agora o mesmo problema utilizando-se da *Regra de Cramer*.

7.19) Discuta o sistema:

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + ay + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + ay + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \quad -5 \quad -3 \\ 5x + ay + 5z = b \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ (5 + a)y - 5z = b - 10 \\ 5y - 5z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 5y - 5z = -2 \quad \frac{1}{5} \\ (5 + a)y - 5z = b - 10 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{-2}{5} \quad -(5 + a) \\ (5 + a)y - 5z = b - 10 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{-2}{5} \\ \boxed{az = \frac{2}{5}(5 + a) + b - 10} \quad (*) \end{cases}$$

Observe a equação (*).

Se $a \neq 0$, o sistema está na forma escalonada, é do 1º tipo: **consistente e determinado.**

Se $a = 0$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -\frac{2}{5} \\ \boxed{0z = b - 8} \quad (*) \end{cases}$$

Se $b = 8$, a equação (*) é:

$$0z = 0$$

dispensável para a resolução do sistema, que é então **consistente e indeterminado.** Se, entretanto, $b \neq 8$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é **inconsistente.**

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 0: \quad \text{(S) é consistente e determinado} \\ a = 0 \begin{cases} b = 8: \quad \text{(S) é consistente e indeterminado} \\ b \neq 8: \quad \text{(S) é inconsistente} \end{cases} \end{cases}$$

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta A, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & a & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5a$$

Se $a \neq 0$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado.**

Se $a = 0$, o sistema escreve-se:

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x \qquad + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + \qquad 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \quad -5 \quad -3 \\ 5x + \qquad 5z = b \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 5y - 5z = b - 10 \quad \frac{1}{5} \\ 5y - 5z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{b - 10}{5} \quad -5 \\ 5y - 5z = -2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{b - 10}{5} \\ \boxed{0y + 0z = -b + 8} \quad (*) \end{cases}$$

Se $b = 8$, a equação (*) é dispensável para a resolução do sistema que, então, está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.**

Se $b \neq 8$, a equação (*) não possui soluções: o sistema é **inconsistente.**

7.4 — SISTEMAS HOMOGÊNEOS DE EQUAÇÕES LINEARES

Vimos em 6.2 que um **sistema linear homogêneo** é aquele em que os *termos constantes são todos iguais a zero*:

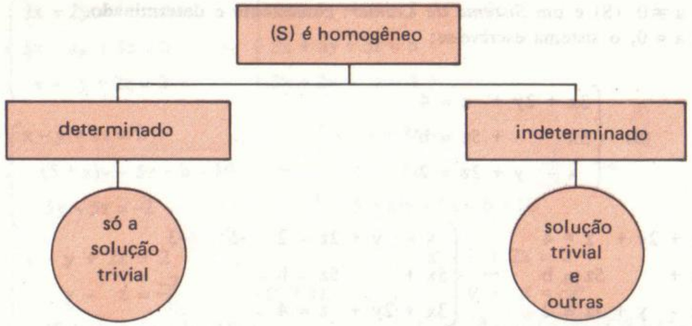
$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Vimos também que uma solução evidente do sistema é a **solução trivial**:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \dots, x_n = 0$$

Então, **um sistema linear homogêneo é sempre consistente.**

Se o sistema linear homogêneo for determinado possuirá uma única solução: a trivial; se for indeterminado, possuirá infinitas soluções: a trivial e outras, distintas da trivial.



Exercícios Resolvidos

7.20) Resolva o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 0 \quad (-2)\ (-3) \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 0 \quad (-1) \\ -y - 3z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \quad (1) \\ -y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 0y + 0z = 0 \quad (*) \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

Observe que a equação (*) foi abandonada; ela é satisfeita para todo par ordenado $(y; z) \in \mathbb{R}^2$; *é dispensável para a resolução do sistema.*

Note também que o sistema está na forma escalonada; é do 2º tipo: **consistente** e **indeterminado.** Há uma só variável livre: z. Então:

$$\begin{cases} x + y = -z \\ y = -3z \end{cases}$$

Atribuindo-se a z o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y = -\alpha & (1) \\ y = -3\alpha & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1): $x = 2\alpha$.

Então:

$$V = \{(2\alpha; -3\alpha; \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Exemplos de soluções:

$\alpha = 0$: (0; 0; 0), a trivial
$\alpha = 1$: (2; -3; 1), não-trivial
$\alpha = 2$: (4; -6; 2), não-trivial

7.21) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = 0 \quad (-4)\ (-3) \\ 4x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3y + 7z = 0 \quad \left(\frac{1}{3}\right) \\ 5y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + \frac{7}{3}z = 0 \quad (-5) \\ 5y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + \frac{7}{3}z = 0 \\ -\frac{29}{3}z = 0 \end{cases}$$

O sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente** e **determinado;** possui somente a solução trivial:

$$V = \{(0; 0; 0)\}$$

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta A, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 29$$

Então, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado**; e como é homogêneo, sua única solução é a trivial.

7.22) Discuta o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ -mx + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ -mx + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \quad m \quad -m \\ -mx + 2y + 3z = 0 \\ mx + y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \quad (^{**}) \\ (m+2)y + 3z = 0 \quad \dfrac{1}{m+2} \\ (-m+1)y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \dfrac{3}{m+2}z = 0 \\ (-m+1)y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$m \neq -2$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \dfrac{3}{m+2}z = 0 \\ \boxed{\dfrac{5m+1}{m+2}z = 0} \quad (^*) \end{cases}$$

Observe que estamos supondo $m \neq -2$.

Se $m \neq -\frac{1}{5}$, o sistema está na forma escalonada e é do 1º tipo: **consistente e determinado** (somente a solução trivial).

Se $m = -\frac{1}{5}$, a equação (*) pode ser abandonada; o sistema está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado** (infinitas soluções: a trivial e outras).

Mas, o que acontece com o sistema se $m = -2$? Veja-o em (**) "antes" da multiplicação por $\frac{1}{m+2}$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado** (somente a solução trivial).

Resumo

$b = -\frac{1}{5}$: (S) é consistente e indeterminado; possui somente a solução trivial.

$b \neq -\frac{1}{5}$: **(S) é consistente e determinado; possui infinitas soluções: a trivial e outras, distintas da trivial.**

Uma solução alternativa

Observe que a *matriz incompleta* A, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ -m & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5m - 1$$

Se $m \neq -\frac{1}{5}$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado**; e como é homogêneo, *sua única solução é a trivial.*

Se $m = -\frac{1}{5}$ o sistema escreve-se:

$$(S)\ \begin{cases} -\frac{1}{5}x + y + 2z = 0 \\ \frac{1}{5}x + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}x + y + 2z = 0 \\ \frac{1}{5}x + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}x + 2y + 3z = 0 \\ \frac{-1}{5}x + y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{9}{5}y + 3z = 0 \quad \frac{5}{9} \\ \frac{6}{5}y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 0 \quad \frac{-6}{5} \\ \frac{6}{5}y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 0 \\ \boxed{0y + 0z = 0} \quad (*) \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$

E, o sistema na forma escalonada é do 2º tipo: **consistente e indeterminado**; além da trivial, possui infinitas soluções não-triviais.

7.23) Determine o número real a para que o sistema:

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + ay - 4z = 0 \end{cases}$$

admita soluções distintas da trivial.

Solução

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 0 \quad (-2)\ (-1) \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + ay - 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \quad \left(\frac{1}{3}\right) \\ (a+1)y - 5z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - \frac{5}{3}z = 0 \quad -(a+1) \\ (a+1)y - 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - \frac{5}{3}z = 0 \\ \boxed{\frac{5a - 10}{3}z = 0} \quad (*) \end{cases}$$

Para que o sistema (S) admita soluções distintas da trivial, ele deve ser indeterminado. Para que isto se dê, em sua forma escalonada o sistema deve apresentar menos equações do que incógnitas, isto é, deve ser do 2º tipo, (veja página 174). Então, em (*) fazemos $\frac{5a - 10}{3} = 0$, isto é, $a = 2$. Observe que para $a = 2$ a equação (*) pode ser abandonada para a resolução do sistema. (Veja o problema 7.24.)

7.24) Demonstre o seguinte teorema:

> Seja (S) um sistema linear homogêneo, de n equações e n incógnitas. A condição necessária e suficiente para que (S) admita solução não-trivial é que a matriz incompleta de (S) seja singular.

Solução

Em sua formulação matricial seja (S):

$$A \cdot X = 0$$

1ª parte

Hipótese: (S) admite solução não-trivial, isto é, (S) é indeterminado.
Tese: A é singular, isto é, $\det A = 0$.

De fato, devemos ter $\det A = 0$, pois se $\det A \neq 0$ o sistema seria de Cramer: determinado, contra a hipótese.

2ª parte

Hipótese: A é singular, isto é, $\det A = 0$.
Tese: (S) admite solução não-trivial, isto é, (S) é indeterminado.

(S) é consistente, e pode ser colocado na forma escalonada; **não pode ser um sistema escalonado do 1º tipo**:

$$A'X = 0$$

pois este é de Cramer, e $\det A' \neq 0$; como A' se obtém de A através das transformações elementares também $\det A \neq 0$, contra a hipótese. Então o sistema escalonado é do 2º tipo: **indeterminado**.

Observe que este resultado facilita a solução de um problema como o 7.23.

Exercícios Propostos

7.25) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 6x + 3y = 7 \end{cases}$

7.26) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 3y + 3z = 0 \\ 6x + y - 9z = 9 \\ 2x - 5y - 6z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$

7.27) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \\ 4x + y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

7.28) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$

7.29) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 7x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 0 \\ 4x - 7y + z - 6t = 0 \end{cases}$

7.30) Discuta e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - my = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = m \end{cases}$

7.31) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ y + kz = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ x - my = 3 \end{cases}$

7.32) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$

7.33) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$

7.34) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + kz = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = kx \\ 2x + 3y + z = ky \\ 3x + y + 2z = kz \end{cases}$

7.35) Determine o número real a para que o sistema:

$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$

admita soluções distintas da trivial.

7.36) Verifique que se a, b e c não são nulos, o sistema:

$\begin{cases} (b + c)x + (c - a)y + (b - a)z = 0 \\ (c - b)x + (c + a)y + (a - b)z = 0 \\ (b - c)x + (a - c)y + (a + b)z = 0 \end{cases}$

admite somente a solução trivial.

7.37) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 5 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 5x - 10y - 7z = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 7x + y - 3z = 10 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$

7.38) Para $ab \neq 0$, discuta o sistema:

$\begin{cases} a^2x + ay + z = 1 \\ ax + y + bz = 1 \\ x + by + b^2z = 1 \end{cases}$

7.39) Discuta o sistema:

$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

7.40) Resolva o sistema:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$

sabendo-se que a, b e c são distintos dois a dois.

7.41) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = ab \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ ax - y = 0 \\ ax - 2y = \dfrac{3}{8} \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2my = m \\ mx + 2y = p \end{cases}$

7.42) Discuta o sistema:

$$\begin{cases} x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha - z = 0 \\ x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha = 1 \\ x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha - z\cos 2\alpha = 0 \end{cases}$$

7.43) Para que valores de k o sistema:

$$\begin{cases} x + y = k \\ x + y = \text{sen}\,k \end{cases}$$

é indeterminado? é inconsistente?

7.44) a) Determine os valores de k para que tenha solução a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 15 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ k \end{bmatrix}$$

b) Resolva a equação na condição do item anterior.

7.45) Para que valores de a e de b o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 44 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 = 134 \\ -x_1 - 6x_2 - 15x_3 = a \\ x_1 - 2x_2 - 15x_3 = b \end{cases}$$

é consistente?

7.46) Para que valores de a e de b o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = a + b \end{cases}$$

é consistente e indeterminado?

Capítulo 8

Outros temas importantes

8.1 – OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

Chamam-se operações elementares sobre linhas (oe) quaisquer das seguintes transformações feitas sobre as linhas de A:

oe 1: trocarmos as posições de duas linhas quaisquer;
oe 2: multiplicarmos todos os elementos de uma linha por um número k, $k \neq 0$;
oe 3: somarmos a uma linha uma outra, esta previamente multiplicada por um número.

8.2 – MATRIZES EQUIVALENTES POR LINHAS

Definição

Uma matriz B, de ordem $m \times n$, é **equivalente por linha** à matriz A, de ordem $m \times n$, se B for obtida de A através de uma seqüência *finita* de operações elementares, feitas sobre as linhas de A. Se B é equivalente por linha à A, indica-se:

$$B \sim A$$

Observe que:

a) $A \sim A$, para qualquer A
b) se $A \sim B$ então $B \sim A$
c) se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$

Exemplos

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

São equivalentes por linha à matriz A, as seguintes matrizes:

a) $B = \begin{bmatrix} x & y & z & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$

Observe que em A trocamos as posições de duas linhas obtendo B; B ~ A pela oe 1.

Para indicarmos a transformação feita (oe 1) em A, usamos a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

b) $C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 3x & 3y & 3z & 3t \end{bmatrix}$

Observe que em A multiplicamos a 2^a linha por 3 obtendo C; C ~ A pela oe 2.

Para indicarmos a transformação feita (oe 2) em A, usamos a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \end{matrix}$$

c) $D = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x+2a & y+2b & z+2c & t+2d \end{bmatrix}$

Observe que em A multiplicamos os elementos da 1^a linha por 2 e somamos, ordenadamente, aos elementos da 2^a linha obtendo D; D ~ A pela oe 3.

Para indicarmos a transformação (oe 3) em A, usamos a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

8.3 – MATRIZ ESCALONADA

Definição

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Diz-se que A é uma **matriz escalonada**, ou ainda, que está na **forma escalonada** quando:

1º) em cada uma das k primeiras linhas ($1 \leqslant k \leqslant m$) há pelo menos um elemento não nulo; e se $k < m$ as linhas de ordem $k+1, k+2, \ldots, m$ são constituídas inteiramente por zeros, (se $k = m$ não há linha cujos elementos são todos iguais a zero).

2º) o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo nas k primeiras linhas cresce "da esquerda para a direita, de linha para linha".

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ k primeiras linhas (k = m)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{k primeiras linhas (k < m)} \\ \\ \leftarrow \text{linha nula} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{k primeiras linhas (k < m)} \\ \\ \leftarrow \text{linha nula} \end{matrix}$$

As operações elementares sobre linhas permitem transformar qualquer matriz A, não nula, em uma outra B, escalonada, e tal que:

$$A \sim B$$

Exemplo

Observe no exemplo abaixo, que os passos executados para a transformação de uma matriz A em uma outra B, escalonada, guardam uma semelhança com os passos descritos para a transformação de um sistema (S) em um outro (S'), escalonado.

Seja então a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

A matriz acima está na forma escalonada; compare as transformações feitas, com aquelas executadas no escalonamento do sistema do exercício 7.8; note que são análogas.

Esta analogia permite-nos enunciar o seguinte:

Teorema

> Sejam $A \cdot X = B$ e $C \cdot X = D$ sistemas lineares com m equações e n incógnitas. Se as respectivas matrizes completas: $[A \mid B]$ e $[C \mid D]$ são *equivalentes por linhas* então os sistemas são *equivalentes*.

8.4 – CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ

Definição

Seja A uma matriz não nula.

Seja A′ a matriz escalonada, equivalente por linha à matriz A.

O número de linhas não nulas da matriz A′ é, por definição, a **característica** da matriz A; indica-se com:

$$p(A)$$

Se $A = 0$ define-se $p(A) = 0$.

Exemplos

1º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; escalonando-a obtemos:

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e, portanto $p(A) = 2$.

2º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$; escalonando-a obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto $p(A) = 2$.

3º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; escalonando-a obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto $p(A) = 1$.

Exercícios Resolvidos

8.1) **Determine a característica da matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Devemos colocar a matriz na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O número de linhas não nulas na matriz escalonada é 3; então $p(A) = 3$.

8.2) **Discuta, segundo os valores de a, a característica da matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a^2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

Escalonando a matriz obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a^2 & 4 \end{bmatrix} -1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{a-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & a^2-1 & 3 \end{bmatrix} -(a^2-1) \sim$$

(**)

$a \neq 1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & -a+2 \end{bmatrix}$$

(*)

Observe que admitimos $a \neq 1$.

Se, além disso, $a \neq 2$: $p(A) = 3$.

Se $a = 2$, a matriz (*) escreve-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, $p(A) = 2$.

E qual a característica, se $a = 1$?

Retomando a matriz (**); "antes" da multiplicação por $\frac{1}{a-1}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} -3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, $p(A) = 2$.

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 1 \text{ e } a \neq 2 & p(A) = 3 \\ a = 2: & p(A) = 2 \\ a = 1: & p(A) = 2 \end{cases}$$

8.3) Determine a para que a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & a \end{bmatrix}$$

seja igual a 2.

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & a \end{bmatrix} -2 \; -3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & a-12 \end{bmatrix} -1 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a-12 \end{bmatrix} 1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix}$$

Para que $p(A)$ seja 2, deve-se ter $a = 9$.

Exercícios Propostos

8.4) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 5 & 1 & 23 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -9 & 9 \\ 2 & -5 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

8.5) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

8.6) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

8.7) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

8.8) Discuta, segundo os valores de a, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ a & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

8.9) Discuta, segundos os valores de **k**, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & k & 3 \end{bmatrix}$$

8.10) Discuta, segundo os valores de **k**, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 1 & 3 & 0 \\ 1 & k & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

8.11) Discuta, segundo os valores de **m** e de **n**, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & n \end{bmatrix}$$

8.12) Determine α para que a característica da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

seja igual a 2.

8.5 – TEOREMA DE ROUCHÉ-CAPELLI

Teorema

Seja um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Consideremos as matrizes incompleta e completa de (S):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

e sejam $p(A)$ e $p([A \mid B])$, respectivamente, as suas características.

Então:

(S) é consistente se e somente se $p(A) = p([A \mid B])$.

Demonstração

Seja (S′) o sistema escalonado equivalente a (S) e sejam A′ e [A′ ¦ B′] as matrizes incompleta e completa de (S′); então:

$$A' \sim A$$

$$[A' \mid B'] \sim [A \mid B]$$

Suponhamos que (S) é consistente; (S′) pode ser de dois tipos:

$$1^{\circ}\ \text{tipo}\ \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{onde} \begin{cases} a_{ii} \neq 0 \text{ para todo } i \\ 1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

$$2^{\circ}\ \text{tipo}\ \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 \quad + a'_{13}x_3 \quad + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + a'_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{mj_m}x_{j_m} + a'_{m,j_m+1}x_{j_m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \text{onde} \begin{cases} 1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_m \\ \text{e “os coeficientes iniciais não nulos”} \\ m < n \end{cases}$$

Se (S′) é do 1º ou do 2º tipo o número de linhas nulas em A′ e em [A′ ¦ B′] é o mesmo, isto é:

$$p(A) = p([A \mid B])$$

Inversamente, se $p(A) = p([A \mid B]) = n$, (S′) será do **1º tipo** e (S) será consistente e determinado; se $p(A) = p([A \mid B]) < n$, (S′) será do **2º tipo** e (S) será consistente e indeterminado.

Resumo

Considere o sistema linear (S), de **m** equações e **n** incógnitas, que na notação matricial escreve-se:

$$A \cdot X = B$$

Então:

$p(A) = p([A \mid B]) = n$: S é consistente e determinado
$p(A) = p([A \mid B]) < n$: S é consistente e indeterminado
$p(A) < p([A \mid B])$: S é inconsistente

8.13) Classifique, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 3y + 2z = 30 \end{cases}$$

Solução

Devemos escalonar a matriz completa de (S) (estaremos escalonando também a matriz incompleta):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 30 \end{array}\right] -2 \;\; -4 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 26 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 26 \end{array}\right] 7 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{array}\right]$$

Usando a notação do teorema acima, observe que:

1º) O número de linhas não nulas em A' é 3; daí $p(A) = 3$.

2º) *O número de linhas não nulas em* $[A' \mid B']$ *é 3; daí* $p([A \mid B]) = 3$.

Então, como $p(A) = p([A \mid B]) = n = 3$, **(S) é consistente e determinado.**

8.14) Classifique, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

O número de linhas não nulas em A' é 2; daí $p(A) = 2$.

O número de linhas não nulas em $[A' \mid B']$ é 3; daí $p([A \mid B]) = 3$.

Como $p(A) < p([A \mid B])$, **(S) é *inconsistente*.**

8.15) Classifique, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right] -2 \;\; -4 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] -1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O número de linhas não nulas em A' é 2; daí $p(A) = 2$.

O número de linhas não nulas em $[A' \mid B']$ é 2; daí $p([A \mid B]) = 2$.

Então $p(A) = p([A \mid B]) < n = 3$: **(S) é consistente e determinado.**

8.16) Discuta, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} 3z - 4y = 1 \\ 4x - 2z = 2 \\ 2y - 3x = 3 - k \end{cases}$$

segundo os valores de k.

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 3-k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3-k \end{array}\right] \frac{1}{4} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3-k \end{array}\right] 3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{2}-k \end{array}\right] -\frac{1}{4} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2}-k \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 5-k \end{array}\right]$$

Observe que se $k \neq 5$ o número de linhas não nulas em A' é 2 e daí $p(A) = 2$, e *o número de linhas não nulas em* $[A' \mid B']$ é 3 e daí $p([A \mid B]) = 3$: **(S) é inconsistente.**

Se $k = 5$, em A' e em $[A' \mid B']$ o número de linhas não nulas é $2 < n = 3$: **(S) é consistente e indeterminado.**

Resumo

$$\begin{cases} k \neq 5: \text{(S) é inconsistente.} \\ k = 5: \text{(S) é consistente e indeterminado} \end{cases}$$

Exercícios Propostos

8.17) Use o Teorema de Rouché-Capelli para classificar os sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$$

8.18) Use o Teorema de Rouché-Capelli para classificar os sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

8.19) Use o Teorema de Rouché-Capelli para classificar os sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

8.20) Discuta, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, os sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + ay = 4 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x + ay = 2a \end{cases}$$

segundo os valores de a.

8.21) Discuta, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = -2 \end{cases}$$

segundo os valores de m.

Exercícios Suplementares

III.1) Para quais valores de λ o sistema:

$$\begin{cases} x - \lambda y = 1 \\ 4x + \lambda y = 0 \\ 2x + 3y = -2\lambda \end{cases}$$

admite soluções? Resolvê-lo em seguida para os valores encontrados de λ.

III.2) Discuta, segundo os valores de λ, o sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ 2y + \lambda z = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

III.3) Determine m para que as duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & m & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tenham a mesma característica.

III.4) Determine m para que as duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tenham a mesma característica.

III.5) Seja (S) um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas. Demonstre que se $m < n$, isto é, o número de incógnitas excede o número de equações, (S) admite solução não-trivial.

III.6) Mostre que se $ad - bc \neq 0$ a matriz I_2 é equivalente por linha à matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

III.7) Reduza a matriz

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right]$$

à forma escalonada.

Suponha que M é a matriz completa de um sistema linear $A \cdot X = B$ de 3 equações e 3 incógnitas. Discuta-o.

Capítulo

9 Processos básicos de contagem

9.1 – INTRODUÇÃO

A *Análise Combinatória* tem por finalidade determinar o **número de possibilidades** de ocorrer um dado evento, **a quantidade de maneiras** de se realizar uma certa experiência, sem, necessariamente, *descrever* cada uma das possibilidades, cada uma das maneiras. É, em síntese, um estudo de regras de contagem.

Uma grande variedade de problemas puramente matemáticos, ou que surgem em diversos setores profissionais, em atividades esportivas ou de lazer, pode ser resolvida sem que sejam *formalizados* conceitos algébricos para sua solução, *bastando uma* **contagem direta** ou uma simples operação aritmética. É muito comum aparecer esse tipo de problema durante a resolução de exercícios mais complicados; isso mostra a necessidade de estarmos familiarizados com os raciocínios (elementares) exigidos para a sua solução. Vamos, então, a um treino através de exercícios.

Exercícios Resolvidos

9.1) Quantos anos governou um ditador que tomou o poder em dezembro de 1 936 e foi deposto em dezembro de 1 949?

Solução

1º) podemos fazer uma *contagem direta*: os anos de governo foram
1 937, 1 938, 1 939, . . . , 1 949
Temos, então, 13 anos de governo

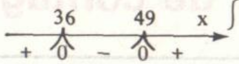
2º) observando que 1 936 *não* se inclui nos anos de governo, podemos entender o problema sob o seguinte enunciado: "quantos números inteiros há no intervalo $]1936; 1949]$?"
A resposta é dada pela diferença:
$1\,949 - 1\,936 = 13$ (anos)

9.2) Determine o número de soluções inteiras da inequação $(x - 36)(x - 49) \leqslant 0$.

Solução

Resolvemos, inicialmente, a inequação:

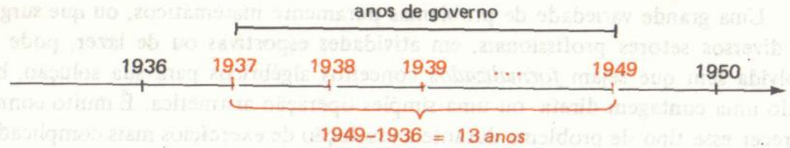
$$\left.\begin{array}{l}(x-36)(x-49) \leqslant 0\end{array}\right\} \quad V = \{x \in \mathbb{Z} \mid 36 \leqslant x \leqslant 49\}$$

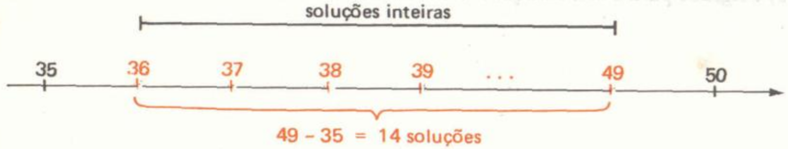


A exemplo do que fizemos no exercício anterior, o número de soluções inteiras pode ser obtido por contagem direta (36, 37, 38, . . . , 49 → 14 soluções) ou determinando, por diferença, quantos números inteiros há no intervalo [36; 49]; nesse caso, no entanto, devemos notar que apenas a diferença 49 − 36 **não** fornece o total correto pois, ao contrário do exercício anterior, o extremo inferior do intervalo (36) *está incluído* entre as soluções, devendo, por isso, ser acrescentado como um elemento a mais. Portanto, o número de soluções é dado por

$$49 - 36 + 1 = 14 \text{ ou ainda: } 49 - 35 = 14$$

Os diagramas abaixo ilustram as soluções dos dois exercícios:





9.3) Quantos anos bissextos houve entre 1839 e 1978?

Solução

Lembremos que um ano bissexto é representado por um múltiplo de 4, ou seja, é da forma $4k$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Devemos, então, determinar quantos valores pode k assumir, de modo que

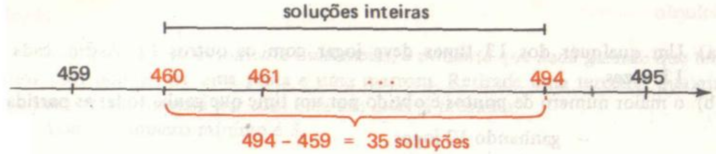
$$1839 < 4k < 1978$$

(note que isso nos leva de volta ao exercício anterior: "quantas soluções inteiras tem a inequação acima?")

Temos, então:

$$\frac{1839}{4} < k < \frac{1978}{4}$$

$$459{,}75 < k < 494{,}50$$



Assim, obtemos $k = 35$, ou seja, houve 35 anos bissextos entre 1839 e 1978.

9.4) Determine a quantidade de múltiplos de 7 existentes entre os 450 primeiros números naturais.

Solução

O problema fica resolvido com a seguinte interpretação: "quantas vezes 7 'cabe' em 450?". Uma simples divisão nos fornece a resposta:

$$\begin{array}{r|l} 450 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 64 \\ 2 & \end{array}$$

Logo, temos 64 múltiplos de 7 entre os 450 primeiros naturais.

Observação − Para um leitor (matematicamente) bem informado, os quatro exercícios acima poderiam ser resolvidos com os conceitos de **progressão aritmética** pois, em todos eles, as seqüências de números que constituem as soluções são progressões aritméticas. Por exemplo, no exercício 3, os anos bissextos (múltiplos de 4) entre 1 839 e 1978 *constituem uma PA de razão 4*:

$$1839 < 1840;\ 1844;\ 1848;\ \dots;\ 1976 < 1978$$

onde $a_1 = 1840$ *é o múltiplo de 4 imediatamente superior a 1839, e* $a_n = 1976$ *é o* múltiplo de 4 imediatamente inferior a 1978.

Então, o número de termos **n** da progressão pode ser determinado pela expressão do termo geral de uma progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Assim:

$$1976 = 1840 + (n - 1) \cdot 4,$$

e daí:

$$n = 35$$

9.5) Treze times disputam um campeonato de futebol em um único turno (isto é, dois times se defrontam uma única vez). Ao vencer uma partida, um time ganha 2 pontos; ao empatar, ganha 1 ponto. Pergunta-se:

a) quantas vezes cada time deve jogar?
b) qual o máximo número de pontos que um time pode obter?
c) qual o maior valor possível para a soma dos pontos de dois times?

Exercícios Propostos

9.9) Quantos anos viveu uma pessoa que:

a) nasceu em dezembro de 1910 e morreu em dezembro de 1977?
b) nasceu em janeiro de 1893 e morreu em dezembro de 1949?
c) nasceu em dezembro de 1898 e morreu em janeiro de 1979?

9.10) Sendo a e b números inteiros e a $<$ b, determine a quantidade de elementos inteiros que há em cada um dos intervalos seguintes:

a) $]a; b]$
b) $[a; b[$
c) $[a; b]$
d) $]a; b[$

9.11) Determine o número de soluções inteiras de cada uma das seguintes inequações:

a) $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 11$
b) $4 < \sqrt[3]{x+3} < 7$

9.12) Quantos anos bissextos houve entre 1589 e 1725?

9.13) Quantas semanas completas há em:

a) 1 ano?
b) 1000 dias?

9.14) Numa urna há 500 bolas numeradas de 1 a 500. De quantos modos é possível retirar uma bola que tenha um:

a) múltiplo de 2?
b) múltiplo de 3?
c) múltiplo de 11?

9.15) Suponha que, no início de um jogo de azar, você tenha Cr\$ 15,00. A cada jogada, se você vencer, ganha Cr\$ 1,00 e, se perder, paga Cr\$ 2,00. Ao final de cinco jogadas, quais os possíveis valores máximo e mínimo do dinheiro que você pode ter?

9.16) No exercício anterior, suponha que você tenha direito a, *no máximo*, dez jogadas. Se você nunca vencer, em quantas das dez você não pode participar?

9.17) Ainda no exercício 9.15, admita que após três jogadas você esteja com os mesmos Cr\$ 15,00 do início. Chamando de V e P as jogadas vencida e perdida, respectivamente, descreva as possíveis ordens em que ocorreram os resultados dessas três jogadas.

9.18) Numa gaveta há 5 pares de abotoaduras. Não existem dois pares iguais, mas as peças não são diferenciáveis pelo tato. Operando no escuro, quantas abotoaduras deve uma pessoa retirar, *no mínimo*, para ter a certeza de formar:

a) um par?
b) dois pares?

9.19) Uma caixa contém n etiquetas, numeradas de 1 a n. De quantos modos é possível retirar três etiquetas que possuam números consecutivos?

9.20) Nas junções dos elos de uma corrente foram fixadas n etiquetas, numeradas de 1 a n (uma etiqueta em cada intersecção). Quantos elos tem essa corrente?

9.2 — DIAGRAMAS DE ÁRVORE

Um dispositivo muito útil na determinação do número de possibilidades de um evento é o **diagrama de árvore**, que consiste na construção de uma *figura* na qual cada possibilidade é descrita, obtendo-se, ao final, o total de possibilidades de ocorrência do evento.

Vejamos alguns exemplos.

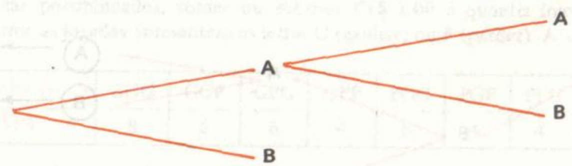
Exercícios Resolvidos

9.21) Dois indivíduos A e B vão disputar um torneio de tênis. O primeiro a vencer dois jogos vencerá o torneio. De quantos modos diferentes poderá desenrolar-se o torneio? Qual o número máximo de partidas que podem ser realizadas?

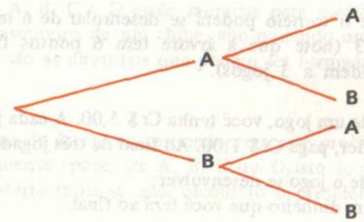
Solução

Ao final de cada jogo, as possibilidades são apenas: vencer A ou vencer B; o diagrama de árvore representa essas hipóteses da seguinte maneira:

onde o *vértice* do ângulo representa o *início* de um jogo e as *extremidades* dos segmentos representam o *final* com o respectivo vencedor. Se a figura acima for o diagrama correspondente ao 1º jogo, continuaríamos assim: se A venceu o 1º, o 2º jogo pode ser vencido por A ou por B; temos, então:



mas, devemos pensar na hipótese de B ter vencido o 1º jogo; então desenhamos:



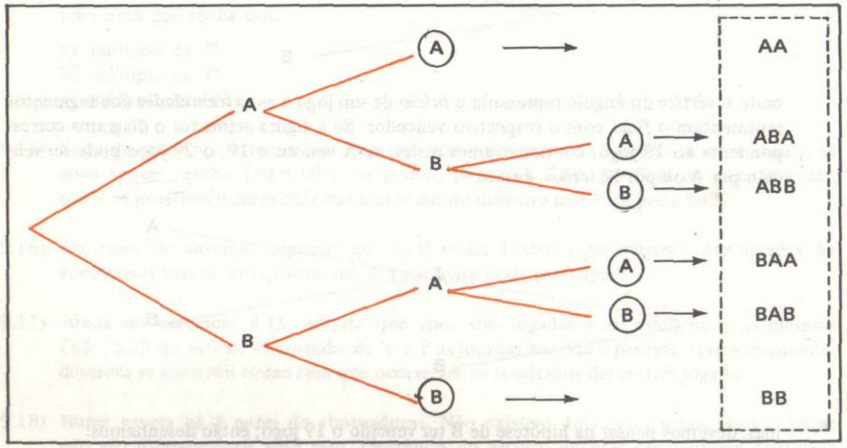
Assim, vamos *ramificando* a árvore com as hipóteses de vencedor para cada novo jogo.

Quando parar – O final de um ramo é determinado pelo enunciado do exercício; nesse exemplo, o torneio se encerra no momento em que um dos jogadores ganhou a partida pela *segunda* vez. Na última figura, o diagrama nos mostra as seguintes situações:

1º JOGO	2º JOGO
A	A
A	B
B	A
B	B

onde vemos que, na primeira hipótese, A venceu os dois jogos e, na quarta hipótese, B venceu os dois jogos. Em ambos os casos o torneio se encerra. Para a visualização desse fato no diagrama, colocaremos uma "moldura" em torno do elemento final.

Com essas considerações, podemos agora construir o diagrama de árvore completo, acrescentando ao término de cada ramo a leitura daquela possibilidade:



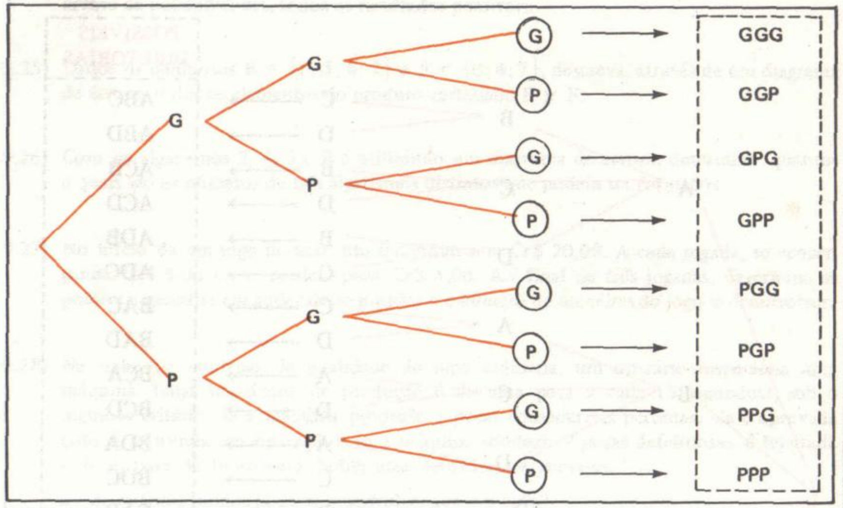
Temos, então, que o torneio poderá se desenrolar de 6 modos e que o número máximo de partidas é 3 (note que a árvore tem 6 pontos finais e que os ramos "mais longos" correspondem a 3 jogos).

9.22) Suponha que, no início de um jogo, você tenha Cr$ 5,00. A cada jogada, se você ganhar, recebe Cr$ 1,00 e, se perder, paga Cr$ 1,00. Ao final de três jogadas, determine:

a) de quantos modos pode o jogo se desenvolver;
b) as possíveis quantias em dinheiro que você terá ao final.

Solução

a) Para construirmos o diagrama de árvore correspondente aos resultados do jogo, vamos adotar as letras G e P para representar, respectivamente, as hipóteses: *ganhar* e *perder*. (Notemos que o ponto final de cada ramo deve ocorrer após a *terceira* jogada.)



Como o diagrama apresenta 8 pontos finais, existem 8 maneiras diferentes do jogo se desenvolver. (Deve ser observado que o que diferencia, *por exemplo*, a ocorrência GGP da ocorrência GPG é a **ordem** dos resultados, já que, em ambas, o jogador ganhou duas vezes e perdeu uma.)

b) Para a determinação das possíveis quantias finais em dinheiro devemos, para cada uma das possibilidades, somar ou subtrair Cr$ 1,00 à quantia inicial (Cr$ 5,00), conforme as jogadas apresentem as letras G (ganhar) ou P (perder). Assim, temos:

OCORRÊNCIA	GGG	GGP	GPG	GPP	PGG	PGP	PPG	PPP
Cr$	8	6	6	4	6	4	4	2

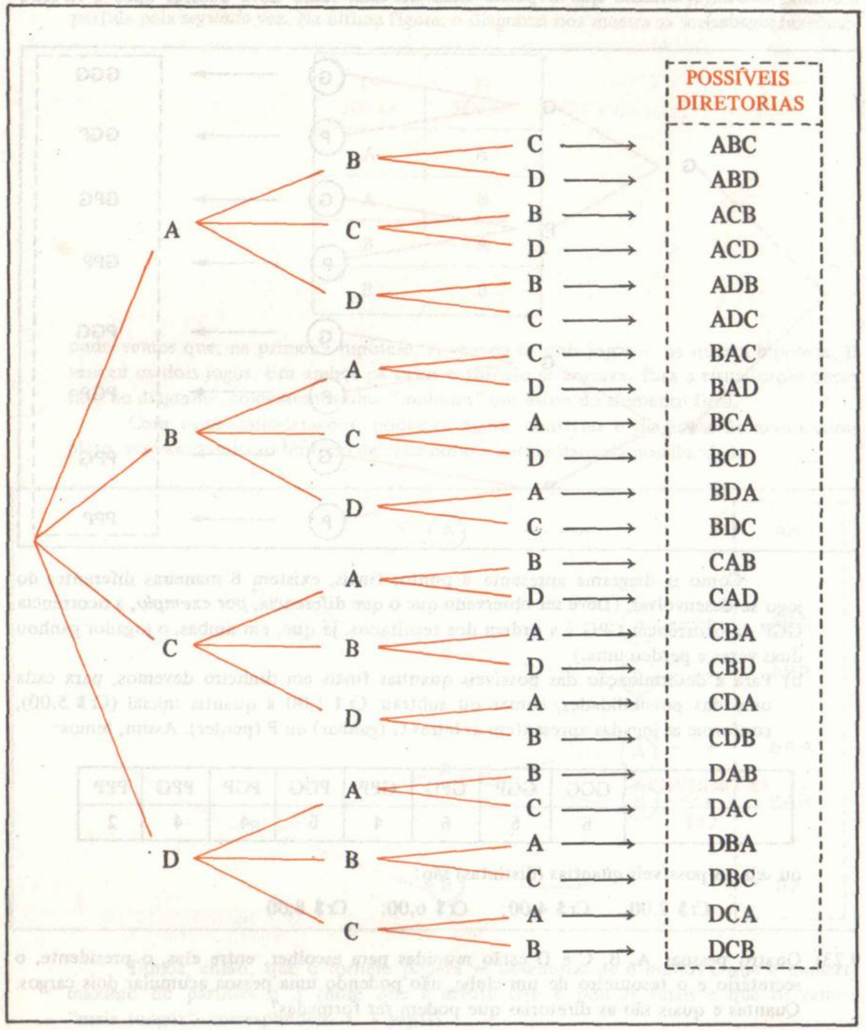
ou seja, as possíveis quantias (distintas) são:

Cr$ 2,00; Cr$ 4,00; Cr$ 6,00; Cr$ 8,00

9.23) Quatro pessoas A, B, C e D estão reunidas para escolher, entre elas, o presidente, o secretário e o tesoureiro de um clube, não podendo uma pessoa acumular dois cargos. Quantas e quais são as diretorias que podem ser formadas?

Solução

O diagrama de árvore correspondente a esse problema tem três fases: primeiro, a escolha do presidente (pode ser A, B, C ou D, isto é, 4 possibilidades); em seguida, a escolha do secretário (note-se que, escolhido o presidente, há apenas 3 possibilidades para a escolha do secretário); finalmente a escolha do tesoureiro (para esse, restarão apenas 2 possíveis, já que os outros dois já foram escolhidos). Assim, temos:



Há, portanto, 24 possibilidades de compor a chapa de diretores. (Note-se que a diretoria ABC, por exemplo, é *diferente* de BAC, apesar de participarem delas os *mesmos* elementos: a ordem designa: 1º – Presidente, 2º – Secretário e 3º – Tesoureiro.

Exercícios Propostos

9.24) Um jogo é realizado lançando-se inicialmente um dado (seis faces, numeradas de 1 a 6) e, em seguida, uma moeda, sendo cada resultado desse jogo formado, portanto, por um par ordenado (resultado no dado; resultado na moeda). Descreva, através de uma **árvore de possibilidades**, todos os resultados possíveis.

9.25) Dados os conjuntos $E = \{1; 5; 6; 7\}$ e $F = \{0; 4; 7\}$, descreva, através de um diagrama de árvore, todos os elementos do produto cartesiano $E \times F$.

9.26) Com os algarismos 2, 4, 5 e 8 e utilizando um diagrama de árvore, determine quantos e quais são os números de três algarismos distintos que podem ser formados.

9.27) No início de um jogo de azar, um indivíduo tem Cr$ 20,00. A cada jogada, se vencer, ganha Cr$ 3,00 e, se perder, paga Cr$ 4,00. Ao final de três jogadas, determine as possíveis quantias em poder desse jogador e o número de maneiras do jogo se desenvolver.

9.28) Na linha de controle de qualidade de uma indústria, um operário inspeciona uma máquina (cuja velocidade de produção é de uma peça a cada 15 segundos), sob o seguinte critério: se a máquina produzir 3 peças consecutivas perfeitas, ela é aprovada (isto é, continua em operação); se a máquina produzir 2 peças defeituosas, é rejeitada (isto é, pára de funcionar). Sobre essa máquina, pergunta-se:

a) de quantos modos pode se desenvolver sua inspeção?
b) em quantos desses modos ela é aprovada? e rejeitada?
c) qual o número máximo de peças que devem ser observadas?
d) qual o tempo máximo de duração da inspeção?

9.29) Um indivíduo tem oportunidade, num jogo, de lançar um dado no máximo cinco vezes. Em cada lançamento, ele ganha ou perde Cr$ 20,00. Começará com Cr$ 20,00 e parará de jogar antes de completar cinco vezes se ficar sem dinheiro ou se quadruplicar seu capital inicial (isto é, quando tiver Cr$ 80,00). Determine de quantos modos pode o jogo se desenvolver.

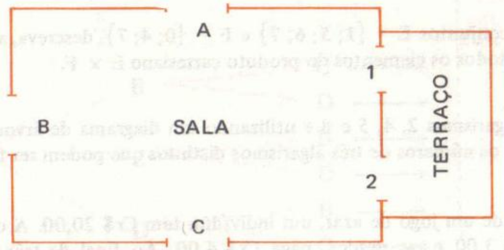
9.3 – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (REGRA DO PRODUTO)

Neste item vamos formalizar um dos principais conceitos da **Análise Combinatória**: a **Regra do Produto**. Afirmamos, sem exagero, que o entendimento dessa *Regra* é fundamental para a resolução da maioria dos problemas que enfrentaremos nos próximos capítulos.

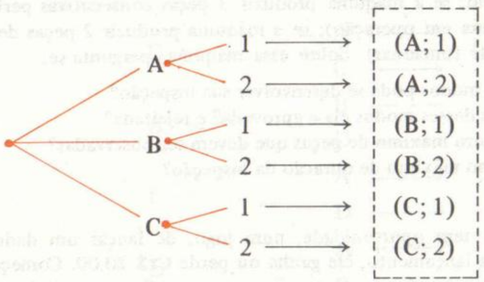
Consideremos, inicialmente, os seguintes exemplos.

Exemplos

a) Uma sala tem 3 portas de entrada e, nessa sala, há outras duas portas que dão para um terraço. De quantos modos uma pessoa pode atingir o terraço passando pela sala?



É evidente que podemos resolver o problema construindo um diagrama de árvore:

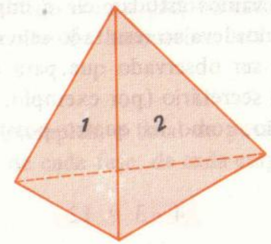


Temos, então, 6 possibilidades. No entanto, podemos chegar a esse resultado bem mais rapidamente (e com pouco trabalho) se observarmos que, para *cada* porta escolhida para se entrar na sala há duas possibilidades de se chegar ao terraço; assim, como podemos escolher qualquer das três portas para iniciarmos o percurso, temos

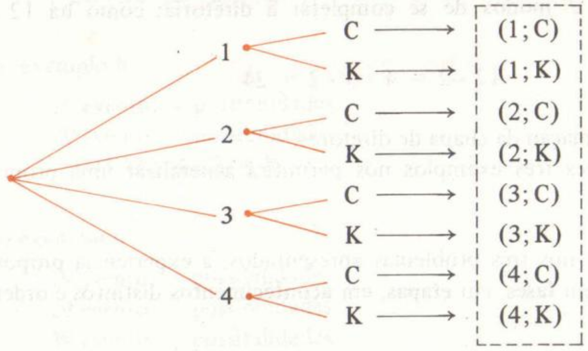
$$3 \cdot 2 = 6$$

possibilidades de completá-lo.

b) Um jogo é realizado lançando-se um dado de quatro faces e, em seguida, uma moeda (um dado de quatro faces é um tetraedro, com as faces numeradas de 1 a 4 — veja a figura). Cada resultado, portanto, é um par ordenado onde o primeiro elemento é o número obtido no dado e o segundo elemento é a face obtida na moeda (cara ou coroa). Quantos resultados são possíveis?



Também aqui é possível construir um diagrama de árvore; representando as faces da moeda por C (cara) e K (coroa), temos:



Existem, portanto, 8 resultados possíveis.

Mas, sem o auxílio da árvore, podemos chegar ao mesmo número: notemos que, para **cada** número obtido no dado é possível formar dois resultados finais (por exemplo, ocorrendo o número 3, os resultados podem ser (3; C) ou (3; K)); como há 4 possibilidades para o número, então há

$$4 \cdot 2 = 8$$

possibilidades finais.

c) Quatro pessoas A, B, C e D estão reunidas para escolher, entre elas, o presidente, o secretário e o tesoureiro de um clube, não podendo uma pessoa acumular dois cargos. Quantas diretorias diferentes podem ser formadas?

No exercício 9.23, já construímos o diagrama de árvore correspondente a esse problema, dando-nos as **24** possibilidades existentes. Esse é um bom exemplo para percebermos que, à medida que os números e as condições do problema aumentam de dificuldade, o diagrama de árvore se torna trabalhoso em demasia e, na maioria dos casos que vamos estudar, ele é impraticável. Devemos, por isso, aprimorar o raciocínio que nos leva ao resultado sem utilizarmos tal diagrama.

Nesse exemplo, deve ser observado que, para *cada* presidente escolhido, há três maneiras de escolher o secretário (por exemplo, se A é presidente, o secretário pode ser B, C ou D; então, como há quatro possibilidades de escolher o presidente, há

$$4 \cdot 3 = 12$$

modos de escolher presidente e secretário.

Escolhidos o presidente e o secretário, restam apenas duas possibilidades de escolha do tesoureiro (por exemplo, se A é presidente e C é secretário, o tesoureiro pode ser B ou D). Isto quer dizer que, para *cada* dupla presidente – secretário escolhida, há 2 modos de se completar a diretoria; como há 12 dessas duplas, há

$$12 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

possibilidades de formação da chapa de diretores.

A análise desses três exemplos nos permitirá generalizar uma propriedade que lhes é comum.

1ª observação: nos três problemas apresentados, a experiência proposta em cada um é dividida em **fases**, em **etapas**, em **acontecimentos** distintos e ordenados; veja:

No **exemplo a**, a experiência *ir até o terraço passando pela sala* se subdivide em

1ª fase: entrar na sala
2ª fase: passar da sala ao terraço

no **exemplo b**, a experiência *lançar um dado e uma moeda* se subdivide em

1ª etapa: lançar o dado
2ª etapa: lançar a moeda

no **exemplo c**, a experiência *escolher uma diretoria* se subdivide em

1º acontecimento: escolher o presidente
2º acontecimento: escolher o secretário
3º acontecimento: escolher o tesoureiro

Cada fase, etapa, acontecimento em que se divide uma experiência pode ser chamado de **evento**. Note que um certo evento pode ou não depender do evento que o precedeu: a escolha da porta para se entrar no terraço *não depende* da porta utilizada para se entrar na sala; a face obtida no lançamento da moeda *não depende* do eventual número obtido com o dado; a escolha do secretário *depende* do presidente escolhido; a escolha do tesoureiro *está condicionada* às escolhas anteriores.

2ª observação: nos três exemplos, o total de possibilidades, o número final, é o **produto das possibilidades** de cada fase, de cada etapa, de cada acontecimento, **de cada evento**; enfim:

no exemplo a

1º evento: 3 possibilidades
2º evento: 2 possibilidades
TOTAL: $3 \cdot 2 = 6$

no exemplo b

1º evento: 4 possibilidades
2º evento: 2 possibilidades
TOTAL: $4 \cdot 2 = 8$

no exemplo c

1º evento: 4 possibilidades
2º evento: 3 possibilidades
3º evento: 2 possibilidades
TOTAL: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Podemos, agora, enunciar a **Regra do Produto** ou o **Princípio Fundamental da Contagem**.

Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento A_1 pode ocorrer de n_1 modos diferentes e se para cada um desses n_1 modos um segundo evento A_2 pode ocorrer de n_2 modos diferentes, então o número de modos em que esses eventos podem ocorrer na ordem indicada é:

$$n_1 \cdot n_2$$

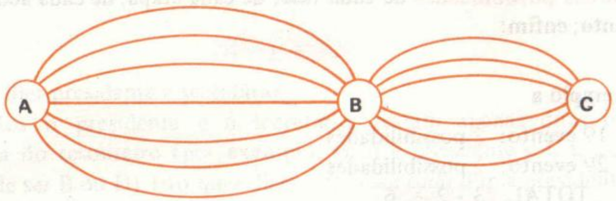
Exercícios Resolvidos

9.30) Ligando as cidades A e B, há 7 linhas de ônibus e, ligando as cidades B e C há 6 linhas. Não há ligação direta entre A e C. Determine o número de modos de se ir de ônibus:

a) de A para C
b) de A a C e, em seguida, voltar para A

Solução

a) para se ir de A para C, deve-se, obrigatoriamente, passar por B.



Temos, então, dois eventos distintos:

1º evento: ir de A a B → 7 possibilidades
2º evento: ir de B a C → 6 possibilidades

Logo, pela **Regra do Produto**, temos um total de:

$$7 \cdot 6 = 42$$

modos de se ir de A para C.

b) para se ir de A para C e voltar para A, passa-se por B na ida e na volta; há, portanto, quatro fases distintas no percurso:

1º evento: ir de A a B → 7 possibilidades
2º evento: ir de B a C → 6 possibilidades
3º evento: ir de C a B → 6 possibilidades
4º evento: ir de B a A → 7 possibilidades

Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, temos um total de

$$7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 1764$$

modos diferentes de realizar o percurso.

9.31) No exercício anterior, de quantos modos pode-se ir de A a C e voltar para A utilizando, na volta, linhas de ônibus diferentes das utilizadas na ida?

Solução

Temos, ainda, 4 fases de percurso; as duas primeiras não sofreram alteração:

1º) ir de A a B → 7 possibilidades
2º) ir de B a C → 6 possibilidades

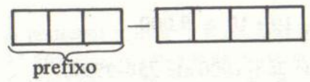
As duas últimas, no entanto, sofrem a restrição de não utilizar as linhas de ônibus escolhidas na ida; assim, para se ir de C a B, temos apenas 5 possibilidades pois a 6ª corresponde à linha utilizada na ida, e, para se ir de B a A, temos 6 possibilidades, pois a 7ª corresponde à linha usada no percurso de A para B.

3º) ir de C a B → 5 possibilidades
4º) ir de B a A → 6 possibilidades

Logo, o total de modos é

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 = 1260$$

9.32) Numa cidade, os números de telefones são formados de 7 algarismos sendo os 3 primeiros correspondentes ao prefixo de uma estação telefônica:

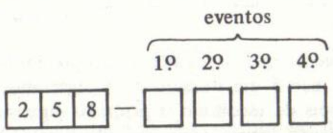


Pergunta-se:

a) Quantos telefones existem com o prefixo 258?
b) Em quantos números de telefone com prefixo 258 o primeiro dos quatro últimos algarismos não é zero?

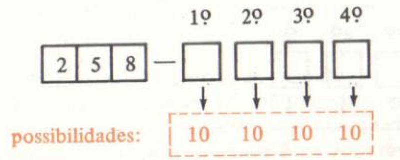
Solução

Estando determinado o prefixo (258), devemos notar que a formação de um número completo de telefone se desenvolve em 4 etapas sucessivas: a colocação do primeiro, do segundo, do terceiro e do quarto algarismos restantes:



Temos, para a formação, um "estoque" de 10 algarismos (de 0 a 9).

a) Como um número de telefone pode ter algarismos repetidos (por exemplo 258–4334), para o 1º temos 10 possibilidades; para o 2º, temos novamente 10 possibilidades – pois pode haver repetição do algarismo usado na primeira posição –, e assim por diante:



Assim, temos um total de

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$$

telefones (desde 258–0000 até 258–9999).

b) Como o 1º dos quatro algarismos finais não pode ser zero, temos, para esse algarismo, 9 possibilidades (de 1 a 9); já para o 2º, voltamos a ter 10 possibilidades (pois o zero já pode ser usado); assim:

	1º	2º	3º	4º
2 5 8 —	☐	☐	☐	☐
	↓	↓	↓	↓
possibilidades:	9	10	10	10

Logo, temos um total de

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$$

números desses telefones (desde 258-1000 até 258-9999).

9.33) Quantos números de 5 algarismos distintos há em nosso sistema de numeração?

Solução

Temos 5 eventos que completam a experiência: escolha do 1º algarismo, escolha do 2º, do 3º, do 4º e do 5º:

1º	2º	3º	4º	5º
☐	☐	☐	☐	☐

Não podemos esquecer que os números não podem começar por zero pois, por exemplo, 05487 = 5487 não é um número de 5 algarismos. Portanto, temos 9 possibilidades para o 1º. Depois de escolhido o primeiro algarismo, já podemos utilizar o zero para o 2º; no entanto, como queremos algarismos distintos (não pode haver repetição), não podemos contar com o algarismo escolhido para a 1ª posição; assim, temos novamente 9 possibilidades, agora para o 2º evento.

Para o 3º evento, temos 8 possibilidades (os 10 algarismos do sistema menos o algarismo usado no primeiro e menos o algarismo usado no segundo). Finalmente, para o 4º e o 5º eventos, temos, respectivamente, 7 e 6 possibilidades.

	1º	2º	3º	4º	5º
	☐	☐	☐	☐	☐
	↓	↓	↓	↓	↓
possibilidades:	9	9	8	7	6

Logo, o total de números é

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$$

9.34) Quantos números ímpares, de 5 algarismos distintos, há em nosso sistema de numeração?

Solução

1º	2º	3º	4º	5º
☐	☐	☐	☐	☐

Para que o número formado seja ímpar, devemos iniciar o problema satisfazendo essa exigência: o algarismo final deve ser ímpar, podendo, portanto, ser o 1, o 3, o 5, o 7 ou o 9, o que nos dá 5 possibilidades para a escolha do algarismo que pode ocupar a 5ª posição.

Já para a 1ª casa, temos 8 possibilidades, pois dos 10 algarismos de que dispomos, não podemos utilizar o zero (veja o exercício anterior) nem o algarismo escolhido para a 5ª casa.

Para a 2ª, já podemos utilizar o zero; mas não podemos usar os algarismos escolhidos para a 5ª e 1ª posições, o que nos dá, novamente, 8 possibilidades.

Da mesma forma, para a 3ª posição temos 7 possibilidades e, para a 4ª, 6 possibilidades.

	1º	2º	3º	4º	5º
	☐	☐	☐	☐	ÍMPAR
	↓	↓	↓	↓	↓
possibilidades:	8	8	7	6	5

Assim, temos um total de

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 13\,440$$

números

9.35) Num país, as placas dos automóveis são constituídas de duas letras, seguidas de três algarismos. Zeros podem aparecer em qualquer posição, mas placas com três zeros são excluídas. Se é usado um alfabeto de 26 letras, quantas placas diferentes podem ser formadas?

Solução

$$\overbrace{\square\,\square}^{\text{letras}} - \overbrace{\square\,\square\,\square}^{\text{algarismos}}$$

Resolvemos esse problema da seguinte maneira: primeiro calculamos o total de placas, *sem considerar a restrição dos três zeros*; em seguida, calculamos o número de placas que *têm três zeros*; evidentemente, essa quantidade representa as placas que não devem ser contadas. Assim, a *diferença* entre esses totais nos dará o resultado final.

1º) *cálculo do total de placas (sem a restrição)*

Como o enunciado não exige que letras e algarismos sejam distintos, supomos que pode haver repetição (por exemplo, KK-288)

Assim, para a primeira letra, há 26 possibilidades; *depois* de escolhida a primeira letra, temos novamente 26 possibilidades para a segunda (pois pode haver repetição); escolhida a segunda letra, temos 10 possibilidades para o primeiro algarismo, 10 para o segundo e 10 para o terceiro; assim:

	1ª	2ª	–	1º	2º	3º
possibilidades:	26	26		10	10	10

Isso nos dá $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676\,000$ placas

2º) *cálculo do número de placas com três zeros*

Notando que, se as placas devem ter três zeros, ***não haverá variação de algarismos***, devemos apenas calcular as possibilidades de variação das letras (por exemplo, AA–000, AB–000 etc.). Para a primeira, temos 26 possibilidades; para a segunda, também temos 26 possibilidades:

	1ª	2ª	–	fixos		
	☐	☐	–	0	0	0
possibilidades:	26	26				

Temos, então, $26 \cdot 26 = 676$ placas com três zeros.

Finalmente, o número de placas que podem ser formadas é

$$676\,000 - 676 = 675\,324$$

9.36) Um salão de baile tem 6 portas. De quantos modos esse salão pode estar aberto?

Solução

Para cada porta, há apenas duas possibilidades: ou está aberta ou está fechada.

	portas					
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
possibilidades:	2	2	2	2	2	2

Então, o total de possibilidades para a situação das portas é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

(note que essas 64 possibilidades descrevem as situações: todas abertas, ou todas fechadas, ou uma aberta e as outras fechadas, e assim por diante)

Para que o salão esteja aberto, é necessário que haja pelo menos uma porta aberta. Como *uma* das 64 possibilidades corresponde a *todas as portas fechadas*, a resposta correta é

$$64 - 1 = 63$$

modos do salão estar aberto.

9.37) De quantos modos podemos pintar 7 casas enfileiradas, dispondo de 4 cores, sendo que cada casa é pintada de uma só cor e duas casas vizinhas não são pintadas com a mesma cor?

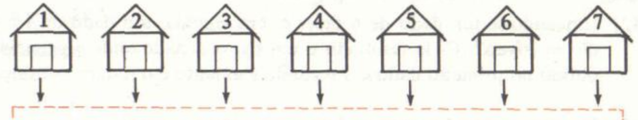
Solução

Para a pintura da primeira casa, podemos escolher qualquer uma das cores disponíveis; temos, então, 4 possibilidades.

Para a segunda, temos 3 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor da primeira.

Já para a terceira casa, também temos 3 possibilidades, pois só não podemos utilizar a cor da **segunda** casa, podendo novamente usar a cor da primeira, já que primeira e terceira *não são vizinhas*.

Assim, para cada uma das outras quatro casas, temos 3 possibilidades



	1	2	3	4	5	6	7
possibilidades:	4	3	3	3	3	3	3

Logo, o número total de modos de se pintar as casas é

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2916$$

9.38) Dispõe-se de 3 livros, 5 cadernos e 8 canetas para se distribuir entre dois estudantes. Todos os objetos devem ser distribuídos, mas não há necessidade de uma divisão equânime. De quantos modos isso pode ser feito?

Solução

Na distribuição dos livros, o primeiro estudante pode receber *nenhum, um, dois* ou *três* livros (note que, fixada a quantidade que o primeiro recebe, automaticamente fica fixada a quantidade que o segundo recebe (por exemplo se o primeiro não recebe nenhum, o segundo recebe três, se o primeiro recebe um, o segundo recebe dois). Temos, então, 4 possibilidades para os livros (0; 1; 2; 3).

Da mesma forma, dos 5 cadernos o primeiro pode receber as quantidades 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, dando, portanto, 6 possibilidades.

Analogamente, temos 9 possibilidades para distribuir as 8 canetas.

Logo, pela regra do produto, o total de modos de efetuarmos a distribuição é

$$4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$$

9.39) Dispondo-se de 10 bolas, 7 apitos e 12 camisas, de quantos modos estes objetos podem ser distribuídos entre duas pessoas, de modo que cada uma receba, ao menos, 3 bolas, 2 apitos e 4 camisas?

9.56) De quantos modos podemos preencher um volante de loteria esportiva, se em cada jogo fazemos um palpite simples? (Um volante de loteria esportiva é uma matriz de 13 linhas e 3 colunas onde cada linha representa um jogo entre dois times e a primeira coluna representa a vitória do primeiro time desse jogo, a segunda coluna representa o empate e a terceira representa a vitória do segundo time.)

9.57) Num quadro de controle eletrônico há 5 dispositivos de segurança enfileirados. Cada um deles pode estar apagado, estar emitindo luz amarela ou estar emitindo luz vermelha. Quantos sinais diferentes podem ser emitidos pelo *conjunto* de dispositivos se pelo menos um deles estiver aceso?

9.58) Dispõe-se de 7 cores para pintar uma bandeira de 7 faixas. Cada faixa deve ser pintada com uma só cor e, na bandeira, não deve haver duas faixas da mesma cor. Quantos modos há de se realizar a pintura?

9.59) Dispõe-se de 6 cores para pintar uma bandeira de 4 faixas. Cada faixa deve ser pintada de uma só cor e duas faixas consecutivas não podem ter a mesma cor. De quantos modos pode ser feita a pintura?

9.60) Um cubo de papelão é desdobrado em torno de uma face, obtendo-se uma cruz formada por 6 quadrados. Quer-se pintar a frente dessa cruz, cada quadrado de uma cor. Pintado um quadrado, **não** se pode pintar, *em seguida*, um quadrado que não tenha ao menos um ponto em comum com o que se acabou de pintar (isto é, dois quadrados pintados um após o outro devem ter, obrigatoriamente, um vértice ou um lado em comum).

Dispondo-se de 5 cores, de quantos modos pode ser pintada a cruz se dois quadrados ligados por um vértice ou por um lado não podem ter a mesma cor e a pintura é iniciada pela *cabeça* da cruz?

9.61) Temos 4 carrinhos, 6 bolas e 2 bonés para distribuir entre duas crianças. Todos os objetos vão ser distribuídos, mas não há necessidade de uma distribuição equânime. Quantas são as maneiras de se fazer a divisão?

9.62) De quantos modos podemos distribuir 10 cigarros, 8 charutos e 6 cachimbos entre duas pessoas, se cada uma deve receber no mínimo três objetos de cada tipo?

9.63) Dispõe-se de n_1 objetos A_1, n_2 objetos A_2 e n_3 objetos A_3 para distribuir entre duas pessoas. Todos os objetos devem ser distribuídos, sem necessidade de uma distribuição igual entre as pessoas. De quantos modos isso pode ser feito?

9.64) Dispõe-se de n objetos A e m objetos B para se colocar em duas caixas, de modo que em cada caixa haja, no mínimo, p objetos A e q objetos B ($2p \leqslant n$ e $2q \leqslant m$). Determine o número de possibilidades de se fazer a colocação.

9.4 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE SUBCONJUNTOS

Já é certamente do conhecimento do leitor que, se um conjunto E tem n elementos, então existem 2^n subconjuntos de E.

Por exemplo, se $E = \{a; b; c\}$, há $2^3 = 8$ subconjuntos:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}, \emptyset$

O **Princípio Fundamental da Contagem** permite-nos agora provar esse resultado.

Verifiquemos, inicialmente, para o caso do exemplo acima, onde $E = \{a; b; c\}$: seja F um subconjunto qualquer de E; é fácil notar que *para cada elemento* de E temos apenas *duas possibilidades* em relação ao subconjunto F: ou pertence a F ou não pertence a F; assim

elemento:	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
possibilidades:	2	2	2

Então pela **regra do produto**, temos

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

possibilidades.

Note que essas 8 possibilidades descrevem aquelas em que:

- ou os três elementos pertencem a F, isto é $F = \{a; b; c\}$
- ou nenhum elemento pertence a F, isto é, $F = \emptyset$.
- ou um dos elementos pertence a F e os outros não, isto é, $F = \{a\}$ ou $F = \{b\}$ ou $F = \{c\}$
- ou dois dos elementos pertencem a F e o outro não, isto é, $F = \{a; b\}$ ou $F = \{a; c\}$ ou $F = \{b; c\}$

Logo, essas 8 possibilidades correspondem aos 8 subconjuntos que E possui.

(O leitor notou que esse problema é idêntico ao exercício do *salão de baile* (36). O que lá era a possibilidade *todas as portas fechadas* – que não queríamos – aqui corresponde ao *conjunto vazio* – que é subconjunto de E.)

Podemos agora generalizar. Se o conjunto E tem n elementos

$$E = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}$$

e F é um subconjunto de E, para *cada* elemento de E temos *duas* possibilidades: pertencer ou não a F.

elementos:	$\boxed{a_1}$	$\boxed{a_2}$	$\boxed{a_3}$	$\cdots$	$\boxed{a_n}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
possibilidades:	2	2	2	$\cdots$	2

E, pelo **princípio fundamental**, temos:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ \cdots \ \cdot 2}_{\text{n fatores}} = 2^n$$

possibilidades, que correspondem aos subconjuntos de E.

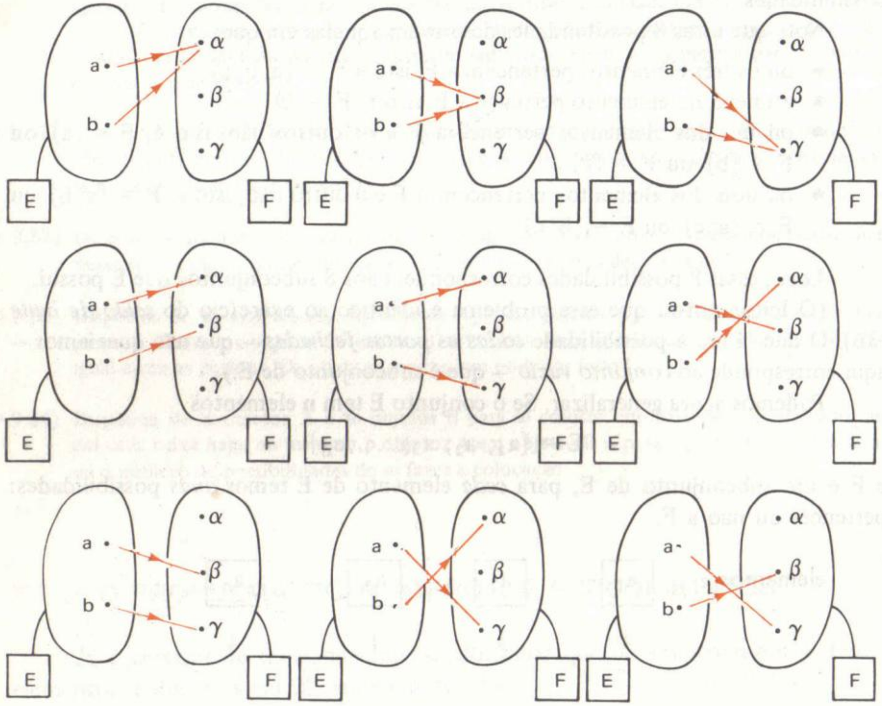
9.5 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE FUNÇÕES

Consideremos, de início, um problema como exemplo.

Um conjunto E possui dois elementos: E = $\{a; b\}$; e um conjunto F possui 3 elementos: F = $\{\alpha; \beta; \gamma\}$. Quantas **funções** de E em F podem ser construídas?

Devemos nos lembrar do conceito de função: *é uma correspondência que associa, a cada elemento de E, um único elemento de F.* Os elementos de F que estão associados a algum elemento de E são chamados *imagens* da função. **E** é o domínio da função. **F** é o contradomínio.

Nesse nosso exemplo, dado o pequeno número de elementos em E e F, podemos construir todas as funções de E em F através de *diagramas de flechas*:



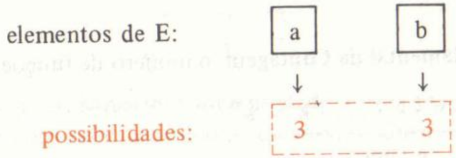
Temos, assim, 9 funções.

Podemos, no entanto, chegar a esse resultado sem a construção dos diagramas.

Como se forma uma função?

Note que uma função é formada tomando *cada* elemento de E e associando a ele um elemento de F, isto é, escolhendo, entre os elementos de F, uma imagem para aquele elemento de E.

Então, para o elemento **a**, temos 3 possibilidades de escolha da imagem: ou α, ou β, ou γ; para o elemento **b**, também temos 3 possibilidades, pois nada impede que **b** tenha a mesma imagem de **a**.



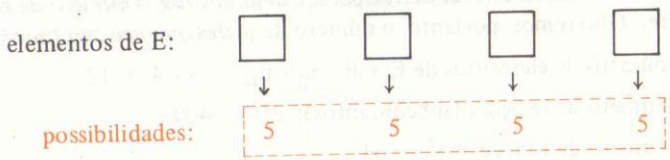
Logo, pela regra do produto, o número de possibilidades de **a** e **b** escolherem suas imagens (o que corresponde ao número de funções) é

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

Tomemos outro exemplo.

Quantas funções de E em F podem ser construídas, se E tem 4 elementos e F tem 5 elementos?

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior, temos para o primeiro elemento de E 5 possibilidades de escolha da sua imagem (qualquer um dos elementos de F); como pode haver repetição da imagem, para o segundo elemento de E, também temos 5 possibilidades, o mesmo ocorrendo para o terceiro e o quarto elementos.



Logo, o total de funções é

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$$

Podemos, agora, resolver o problema no caso geral:

E e F são conjuntos finitos, o primeiro com n *elementos e o segundo com* **k** *elementos. Quantas funções de E em F podem ser construídas?*

Uma função está construída quando todos os elementos de E têm sua imagem escolhida.

Para *cada* elemento de E escolhemos *um* elemento qualquer de F como sua imagem.

Então, se $E = \{a_1; a_2; a_3; \ldots ; a_n\}$ temos:

elementos de E:	$\boxed{a_1}$	$\boxed{a_2}$	$\boxed{a_3}$	...	$\boxed{a_n}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
possibilidades de escolha da imagem:	k	k	k	...	k

Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, o número de funções é

$$\underbrace{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{\text{n fatores}} = k^n$$

isto é, é o número de elementos do contradomínio elevado ao número de elementos do domínio.

Exemplos

a) Se E tem 10 elementos e F tem 2 elementos, o número de funções de E em F é $2^{10} = 1024$.

b) Os conjuntos E e F têm, respectivamente, 3 e 4 elementos. Quantas das **relações** de E em F não são funções?

Lembremos que uma relação é qualquer **subconjunto** do E × F. *Devemos então calcular o número total de relações, e dele subtrair o número de relações que são funções*. Obteremos, portanto, o número daquelas que *não são funções*:

- número de elementos de E × F: $n_E \cdot n_F = 3 \cdot 4 = 12$
- número de relações (subconjuntos): $2^{12} = 4096$
- número de funções: $4^3 = 64$

Logo, temos $4096 - 64 = 4032$ relações que não são funções.

9.6 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE DIVISORES

Um problema importante na **Teoria dos Números** é o da determinação da quantidade de *divisores naturais* de um número natural **a**.

Consideremos o exemplo: quantos divisores naturais tem o número a = 144?

Nesse caso, não é difícil fazer a relação: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 36; 48; 72; 144.

Isso nos dá os 15 divisores naturais de 144.

Como chegar a esse resultado sem fazer a lista de divisores?

Observemos que decompondo 144 em fatores primos:

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$

se, em seguida, **somarmos uma unidade a cada expoente da decomposição** (4 e 2), o **produto** dos resultados dessas somas dá o número de divisores procurados:

$$(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$$

Mágica? Casualidade? Não. Mostraremos em mais dois exemplos que essa é a regra prática.

Exemplos

a) Consideremos o número $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Notemos, inicialmente, que 360 é constituído pelo produto dos fatores primos 2, 3 e 5, sendo que, na decomposição, o 2 comparece três vezes, o 3 comparece duas vezes e o 5 uma só vez:

$$360 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (5)$$

Também devemos notar que qualquer divisor de 360 é um produto formado por alguns desses fatores; por exemplo, os números 1, 2, 3, 10, 36 e 120 são divisores de 360 e podem ser escritos:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ 2 &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ 3 &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \\ 10 &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \\ 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \\ 120 &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \end{aligned}$$

Sendo assim, os divisores de 360 podem ser representados pela expressão

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

onde:

x pode assumir um dos 4 valores: 0, 1, 2 ou 3

y pode assumir um dos 3 valores: 0, 1 ou 2
e z pode assumir um dos 2 valores: 0 ou 1

Com isso, podemos determinar a quantidade de números $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ ou seja, o total de divisores naturais de 360. Temos:

$$\text{divisor: } \boxed{2^x} \cdot \boxed{3^y} \cdot \boxed{5^z}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{possibilidades: } 4 \quad 3 \quad 2$$

o que nos dá

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ divisores}$$

Confirmando a regra sugerida anteriormente:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \rightarrow (3+1)(2+1)(1+1) = 24 \text{ divisores}$$

b) Consideremos o número natural:

$$a = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 11^\gamma$$

Qualquer divisor de a pode ser obtido pela expressão

$$2^x \cdot 5^y \cdot 11^z$$

onde **x**, **y** e **z** são expoentes naturais tais que

$0 \leqslant x \leqslant \alpha$ (isto é, x pode assumir $\alpha + 1$ valores)
$0 \leqslant y \leqslant \beta$ (isto é, y pode assumir $\beta + 1$ valores)
$0 \leqslant z \leqslant \gamma$ (isto é, z pode assumir $\gamma + 1$ valores)

e, sendo assim, o total de números $2^x \cdot 5^y \cdot 11^z$ que podem ser formados representa o total de divisores naturais de a. Temos:

$$\text{divisor: } \boxed{2^x} \quad \boxed{5^y} \quad \boxed{11^z}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{possibilidades: } \alpha+1 \quad \beta+1 \quad \gamma+1$$

e, portanto, o número de divisores de $a = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 11^\gamma$ é igual a

$$\boxed{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$$

De modo análogo, poderíamos mostrar a validade da regra para o caso geral, que enunciamos a seguir:

Seja a um número natural ($a \neq 0$) cuja decomposição em fatores primos distintos é:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

O número de divisores **naturais** de **a** é dado pelo produto

$$(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot (\alpha_3+1) \ldots (\alpha_n+1)$$

Exemplos

c) O número de **divisores naturais** de 12 600 é obtido fatorando-se esse número

$$12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

e efetuando-se o produto

$$(3+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$$

Assim, 12 600 tem 72 divisores naturais.

d) O número de **divisores inteiros** de $20\,000 = 2^5 \cdot 5^4$ é obtido multiplicando-se a quantidade de divisores naturais por 2 (pois, para cada divisor natural há o seu oposto que também é divisor: 2 e −2, 1 000 e −1 000).

$$2 \cdot (5+1)(4+1) = 60 \text{ divisores inteiros.}$$

Capítulo

10

Fatorial

10.1 – DEFINIÇÃO

Em muitos dos problemas estudados no capítulo anterior, surgiram, nos cálculos, produtos de números naturais consecutivos, tais como

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Sendo muito comuns no cálculo combinatório expressões desse tipo, torna-se conveniente adotar uma *notação* que simplifique sua representação; surge, então, a *notação fatorial*.

Definimos **fatorial de um número natural** $n \geqslant 2$ como sendo o produto de todos os números naturais de **n** até **1**; representamo-lo com a notação **n**!. Assim:

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} \qquad \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant 2 \end{matrix}$$

Também definimos, para os casos $n = 0$ e $n = 1$, os valores

$$\boxed{1! = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{0! = 1}$$

Exemplos

a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
c) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$
d) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$
e) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$
f) $6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{6!}{3!}$

g) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1} = \dfrac{10!}{6!}$
h) $(3!)^2 = (3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (6)^2 = 36$
i) $(3^2)! = (9)! = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

Observações

1ª) Consideremos, por exemplo, o número 6!

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Como $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$, podemos escrever

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot (5!)$$

Da mesma forma, também podemos escrever

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 6 \cdot 5 \cdot 4!$$

Isso nos mostra que, sendo necessário, podemos "interromper" o desenvolvimento de um fatorial antes de atingirmos o número **1**. Para tanto, basta colocarmos o símbolo de fatorial no número "escrito por último":

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1)! = n(n-1) \cdot (n-2)!} \qquad \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant 2 \end{matrix}$$

Exemplos

j) $10! = 10 \cdot 9!$
k) $15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!$
l) $(n+2)! = (n+2)(n+1)(n) \cdot (n-1)!\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1)$
m) $(k-1)! = (k-1) \cdot (k-2)!\ (k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2)$
n) $\dfrac{12!}{9!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

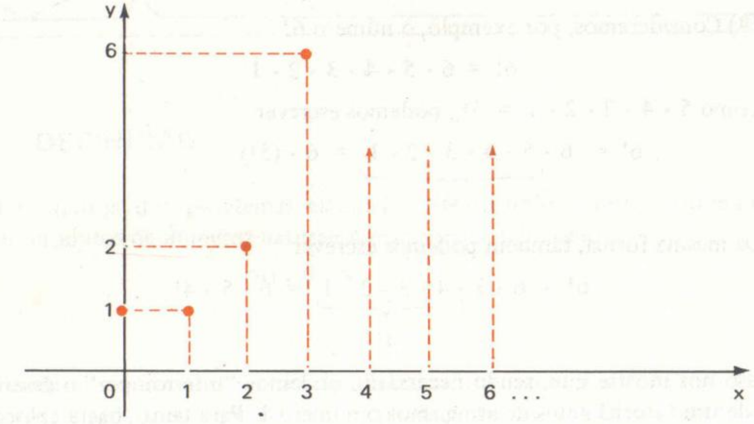
10.2 – FUNÇÃO FATORIAL

Da definição de fatorial é imediato que, dado um número natural **n**, existe e é único o número n!

Podemos, então, definir uma função f, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{f(x) = x!}$$

Essa função é chamada **função fatorial**. Seu domínio é $\mathbb{N}$. Seu gráfico é



Analisando alguns valores (e levando em conta a 1ª observação):

$$\begin{aligned} f(0) &= 0! = 1 \\ f(1) &= 1! = 1 = 1 \cdot f(0) \\ f(2) &= 2! = 2 = 2 \cdot f(1) \\ f(3) &= 3! = 6 = 3 \cdot f(2) \\ f(4) &= 4! = 24 = 4 \cdot f(3) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

vemos que, para todo número natural $x \geqslant 1$, tem-se:

$$\boxed{f(x) = x \cdot f(x-1)}$$

Exercícios Resolvidos

10.1) Determine o domínio da função definida por $f(x) = (x - 3)!$

Solução

Da definição, sabemos que só existe fatorial de um número inteiro e não negativo. Assim, devemos ter

$$x - 3 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x - 3 \geqslant 0$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 3\}$

10.2) Determine o domínio da função definida por $f(x) = (x + 4)!$

Solução

Devemos ter

$$x + 4 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x + 4 \geqslant 0$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -4\}$

10.3) Resolva a equação $x! = 24$

Solução

Uma equação do tipo $x! = a$ só pode ser resolvida "por tentativas", isto é, *descobrindo* qual é o número cujo fatorial vale a. É evidente que, mesmo sendo a um número natural, em muitos casos o conjunto-solução da equação será vazio pois, por exemplo, como sabemos que $24 = 4!$ e $6 = 3!$, todos os inteiros entre 24 e 6 não são valores de nenhum fatorial. Assim, equações como $x! = 23$, $x! = 9$ ou $x! = 13$ têm conjunto-solução $V = \phi$.

No nosso caso, fazemos

$$x! = 4!$$

Logo, $x = 4$ e $V = \{4\}$

10.4) Resolva a equação $(2x + 5)! = 720$

Solução

Temos que $720 = 6!$

Escrevemos, então

$$(2x + 5)! = 6!$$

e daí, $2x + 5 = 6$, donde $x = \frac{1}{2}$ e $V = \{\frac{1}{2}\}$

(Note que não importa o fato de termos encontrado uma raiz não natural, pois o que deve ser natural é a expressão $2x + 5$.)

10.5) Simplifique a expressão $\dfrac{(k+1)!}{(k-1)!}$.

Solução

Para simplificarmos expressões desse tipo, devemos, sempre, *reduzir a ordem* do fatorial maior até o outro fatorial. Assim:

$$\frac{(k+1)!}{(k-1)!} = \frac{(k+1)(k)(k-1)!}{(k-1)!} = (k+1)k = k^2 + k$$

10.6) Simplifique a expressão $\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!}$

Solução

Como $(n - 2)!$ é o maior dos dois fatoriais da expressão, fazemos:

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = (n-2)(n-3)$$

10.7) Simplifique a expressão

$$\frac{(n+1)! - (n+2)!}{(n+1)!}$$

Solução

$$\frac{(n+1)! - (n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - (n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!\,[1-(n+2)]}{(n+1)!} = 1 - n - 2 = -(n+1)$$

10.8) Resolva a equação

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 17n$$

Solução

Inicialmente, simplificamos a expressão do primeiro membro:

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,(n)\,(n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,[n(n+1)-(n)]}{(n-1)!} = n^2 + n - n = n^2$$

Resolvemos, então, a equação

$$n^2 = 17n:$$

$$n^2 = 17n \Longrightarrow n^2 - 17n = 0 \Longrightarrow n(n-17) = 0$$

obtendo $n = 0$ ou $n = 17$

A solução $n = 0$, evidentemente, não convém (note que para $n = 0$, surge, no denominador, o fatorial de um número negativo). Logo, $V = \{17\}$.

10.9) Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} = (1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)$$

Solução

Temos, no primeiro membro, um determinante de Vandermonde, cujos *elementos de base* são 1, 2, 3, 4 e 5. Então:

$$\boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-1)\,(3-1)\,(4-1)\,(5-1)\,(3-2)\,(4-2)\,(5-2)\,(4-3)\,(5-3)\,(5-4) =$$

$$= \underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4}_{4!}\cdot\underbrace{1\cdot2\cdot3}_{3!}\cdot\underbrace{1\cdot2}_{2!}\cdot\underbrace{1}_{1!} = (4!)\,(3!)\,(2!)\,(1!) = \boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

10.10) Mostre que $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Em seguida, calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k-1}{k!}$$

Solução

1ª parte: ***prova da identidade***

$$\boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{n}{n(n-1)!} - \frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

2ª parte: ***cálculo da soma S***

Notemos, inicialmente, que qualquer parcela da soma é uma fração da forma

$$\frac{n-1}{n!}$$

que é o primeiro membro da nossa identidade. Por exemplo, a parcela

$$\frac{3}{4!}$$

é da forma $\frac{n-1}{n!}$, onde $n = 4$

Como mostramos na 1ª parte que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a fração $\frac{n-1}{n!}$ é igual à diferença $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$, apliquemos essa decomposição em todas as parcelas da soma desejada:

$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$ (usamos $n = 2$)

$\frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$ (usamos $n = 3$)

$\frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$ (usamos $n = 4$)

. . . .

$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$ (usamos $n = k$)

Vamos agora somar membro a membro todas essas igualdades. Resulta, no primeiro membro, a soma S desejada. No segundo membro, é fácil observar que quase todos os termos são *cancelados*, restando somente a primeira parcela da 1ª igualdade e a segunda parcela da última igualdade. Assim:

$$\underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k-1}{k!}}_{S} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{k!}$$

Logo, encontramos $S = 1 - \frac{1}{k!}$

Exercícios Propostos

• 10.11) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x-1)!$

b) $f(x) = (x+5)!$

c) $f(x) = \frac{(x+3)!}{(x+4)!}$

d) $f(x) = (-x^2+1)!$

• 10.12) Resolva as seguintes equações ($n \in \mathbb{R}$):

a) $(n+6)! = 120$

b) $(3n-2)! = 720$

c) $(n^2-n)! = 720$

d) $(n^2 - \frac{3}{2}n)! = 1$

e) $(2n^2+7)! = 100$

• 10.13) Escreva os produtos a seguir utilizando a notação fatorial:

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

c) $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

d) $(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$

e) $(k-3)(k-4)(k-5)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, $k \in \mathbb{N}$ e $k > 5$

• 10.14) Escreva os produtos a seguir utilizando a notação fatorial:

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

c) $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18$

d) $100 \cdot 99 \cdot 98 \ldots 51$

e) $n(n-1)(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

f) $(n+1)(n)(n-1)(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

g) $k(k-1)(k-2)\ldots(k-8)$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geqslant 9$

• 10.15) Escreva, em uma só expressão fatorial, os produtos:

a) $10 \cdot 9!$

b) $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!$

c) $6! 7 \cdot 8 \cdot 9$

d) $(n+1) \cdot n!$, $n \in \mathbb{N}$

e) $(k+3)(k+2)(k+1)k!$, $k \in \mathbb{N}$

f) $(n-1)(n-2)(n-3)!$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

g) $(n-p)(n-p-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p+1$

h) $(n-p+1)(n-p)!$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$

• 10.16) Simplifique e calcule:

a) $\frac{8!}{6!}$

b) $\frac{12!}{9!}$

c) $\frac{11!}{3!8!}$

d) $\frac{21!}{3!18!}$

• 10.17) Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$

b) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

c) $\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$

d) $\frac{(k-1)!}{(k-2)!}$

e) $\frac{(k-4)!}{(k-2)!}$

f) $\frac{(n-p)!}{(n-p-1)!}$

• 10.18) Simplifique as expressões:

a) $\frac{(n-3)!\,(n+3)}{(n-5)!\,(n-4)}$

b) $\frac{4n! - 3n(n-1)!}{n!}$

c) $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)n! - n!}$

d) $\frac{(n+1)! - (n+1) \cdot (n-1)!}{n! + (n-1)!}$

• 10.19) Resolva as equações:

a) $(n+2)! + (n+1)! = 15n!$

b) $(n-2)! - 3(n-3)! - 8(n-4)! = 0$

c) $\frac{(2n)!\,(2n+1)! + (2n+1)\,(2n)!\,(2n-1)!}{(2n+1)!\,(2n-1)\,(2n-2)!} = n^2 - 14$

• 10.20) Mostre que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 6!$$

• 10.21) Mostre que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 10 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & 10^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & \ldots & 10^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^9 & 3^9 & 4^9 & \ldots & 10^9 \end{vmatrix} = \prod_{n=1}^{9} (n!)$$

10.22) Mostre que $n \cdot n! = (n+1)! - n!$, com $n \in \mathbb{N}$.
Em seguida, calcule o valor da soma

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k!$$

10.23) Mostre que $(n+2)n! = (n+1)! + n!$, com $n \in \mathbb{N}$.
Em seguida calcule o valor de:

$$S = 3 \cdot 1! - 4 \cdot 2! + 5 \cdot 3! - \ldots + (k+2)k! \quad \text{onde } k \text{ é ímpar.}$$

10.24) Suponha que se defina **fatorial** da seguinte maneira:

Fatorial de um número natural n é o número f(n) definido por

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Utilizando essa definição, calcule fatorial de 1, fatorial de 2, fatorial de 3, fatorial de 4 e fatorial de 5.
b) Utilizando essa definição, mostre que

$$(\text{fatorial de } n) = f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$$

10.25) Ainda utilizando a definição do exercício anterior, mostre que, com $a \in \mathbb{N}$,

a) $f(a+2) - f(a+1) = (a+1) \cdot f(a+1) = (a+1)^2 \cdot f(a)$
b) $2f(a) - (a-1) \cdot f(a-1) = f(a-1) + f(a), \ a > 1$

Capítulo 11

Combinações simples e arranjos simples

11.1 – INTRODUÇÃO E CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo faremos o estudo de dois tipos de *agrupamentos* que podem ser formados dispondo-se de um certo número de elementos: as combinações simples e os arranjos simples.

A palavra **simples** significa que trabalharemos com **elementos distintos**, isto é, em cada agrupamento formado não haverá repetição de elementos. Posteriormente estudaremos os agrupamentos com repetição.

Os conceitos de combinação e arranjo são muito fáceis. O fundamental – e cuidaremos disso ainda nesta introdução – é saber distinguir um do outro. Analisemos um exemplo esclarecedor:

Com os elementos do conjunto E = {a; b; c}, pede-se formar
1º) todos os subconjuntos com dois elementos
2º) todos os pares ordenados, de elementos distintos

Temos, então:

1º) subconjuntos com dois elementos:

$$\{a; b\};\ \{a; c\};\ \{b; c\}$$

2º) pares ordenados (com elementos distintos):

$$(a; b);\ (a; c);\ (b; c);$$
$$(b; a);\ (c; a);\ (c; b)$$

Formamos, assim, com os três elementos de E, dois tipos de agrupamentos: *subconjuntos* e *pares ordenados*, sendo que estes podem ser considerados *subconjuntos ordenados* de E.

Vamos, agora, responder às seguintes perguntas:

Em que diferem entre si os agrupamentos do primeiro tipo?
Em que diferem entre si os agrupamentos do segundo tipo?

Vemos, então, que é possível formar uma combinação *que não tem elemento* (existe **um** só subconjunto de E que não tem elemento algum: o conjunto vazio). Podemos escrever, portanto:

$$C_{4,0} = \binom{4}{0} = 1$$

Nota. O número $C_{4,0} = 1$ pode aqui ser interpretado como a resposta à seguinte pergunta:

"De quantos modos podemos, de um conjunto E de 4 elementos, não escolher nenhum elemento?"

É claro que existe **um só modo**: não escolher!

Arranjos – Seja E um conjunto com **n** elementos; imaginemos que são formados todos os seus **subconjuntos ordenados**, incluindo o próprio E, o conjunto ∅ e os subconjuntos com um só elemento.

Um **arranjo** dos **n** elementos de E, tomados **p** a **p** (de classe p) é qualquer **subconjunto ordenado** de E que tenha **p** elementos ($0 \leqslant p \leqslant n$).

O número de arranjos, dos n elementos, de classe p é indicado por:

$$A_{n,p}$$

Exemplos

Consideremos o conjunto $E = \{6; 7; 8; 9\}$. Com os elementos de E, vamos formar *números de algarismos distintos* (note que, quando formamos um número, por exemplo 68, estamos tomando um subconjunto *ordenado* pois, trocada a ordem, 86, *o número se modifica*). Estaremos, assim, fazendo **arranjos** com os 4 elementos de E. Então:

f) os números de 1 algarismo são:

6; 7; 8; 9

Temos, então, 4 **arranjos** de classe 1, e podemos escrever:

$$A_{4,1} = 4$$

g) os números de 2 algarismos são:

67, 68, 69, 78, 79, 89
76, 86, 96, 87, 97, 98

Temos, então, 12 **arranjos** de classe 2, e podemos escrever:

$$A_{4,2} = 12$$

h) os números de 3 algarismos são:

678	768	867	967
679	769	869	968
687	786	876	976
689	789	879	978
697	796	896	986
698	798	897	987

Temos, então, 24 **arranjos** de classe 3, e podemos escrever:

$$A_{4,3} = 24$$

i) os números de 4 algarismos são:

6789	7689	8679	9678
6798	7698	8697	9687
6879	7869	8769	9768
6897	7896	8796	9786
6978	7968	8967	9867
6987	7986	8976	9876

Temos, então, 24 **arranjos** de classe 4, e podemos escrever:

$$A_{4,4} = 24$$

Observação: evidentemente, não tem significado formar um número com "zero algarismo". No entanto, para estender a noção de arranjo a todos os casos, devemos incluir o do subconjunto de zero elemento. Então, se considerarmos o conjunto vazio como um *subconjunto ordenado que não tem elementos*, temos um único arranjo de classe zero dos 4 elementos de E: ∅. Portanto, podemos escrever:

$$A_{4,0} = 1$$

11.3 – ARRANJO OU COMBINAÇÃO?

Através de uma série de exemplos, faremos um treino que nos levará a sedimentar os conceitos de combinação e arranjo, bem como o critério para diferenciá-los.

Não é ainda nossa preocupação o cálculo do número de combinações ou de arranjos; portanto, deixaremos indicadas essas quantidades através das notações $C_{n,p}$ e $A_{n,p}$.

Exemplos

1º) Consideremos 5 pontos distintos, A, B, C, D e E, dos quais três quaisquer nunca estão alinhados. Com esses pontos, devemos formar

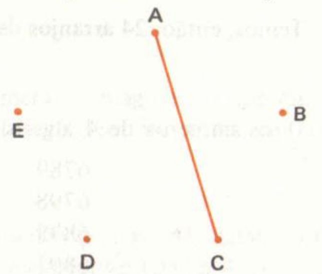
a) segmentos
b) segmentos orientados.

Vejamos de quantos modos isso pode ser feito.

Para a construção de um segmento (orientado ou não), devemos tomar dois dos pontos dados; estamos, então, em ambos os casos, fazendo *agrupamentos* de classe 2.

Vamos verificar, em cada caso, se se trata de arranjos ou de combinações.

No **caso a**, escolhendo 2 pontos, por exemplo A e C, formamos um segmento $(\overline{AC})$. Trocando a **ordem** dos pontos, o segmento *não se modifica*:



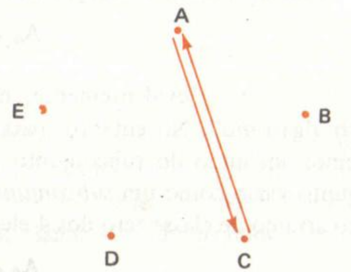
$$\overline{AC} = \overline{CA}$$

Assim, os *agrupamentos*

$$\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\ \text{etc.}$$

são as **combinações** de classe 2 dos 5 pontos, e o número de segmentos que podem ser formados é o total dessas combinações, que representamos por $C_{5,2}$.

No **caso b**, escolhendo, por exemplo, os pontos A e C e formando o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$, é evidente que, ao trocarmos a **ordem** dos pontos, temos um *novo* segmento orientado $\overrightarrow{CA}$, pois uma das características de um segmento orientado é o seu *sentido*; por isso, como



$$\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{CA}$$

é um fato típico dos subconjuntos *ordenados*, os *agrupamentos*

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CA}\ \text{etc.}$$

são os **arranjos** de classe 2 dos 5 pontos, e o número de segmentos orientados que podem ser formados é o total desses arranjos, que representamos por $A_{5,2}$.

2º) Numa sala estão reunidas 8 pessoas.

Determinemos de quantos modos pode ser escolhida:

a) uma comissão de 3 representantes com poderes iguais;
b) uma diretoria com um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro.

Evidentemente, nos dois casos, estamos trabalhando com agrupamentos de classe 3.

No **caso a**, se formarmos uma comissão com as pessoas A, B e C, a troca da ordem dos elementos não modifica a comissão, pois os 3 elementos tem os mesmos poderes:

$$\underbrace{\{A; B; C\} = \{A; C; B\} = \{B; A; C\} = \{B; C; A\} = \{C; A; B\} = \{C; B; A\}}_{\text{uma só comissão}}$$

Estamos, então, compondo subconjuntos de 3 elementos, isto é, **combinações** de classe 3. Assim, o número de comissões possíveis é dado por $C_{8,3}$.

No **caso b**, formada uma diretoria em que A é o presidente, B é o vice-presidente e C é o tesoureiro, é claro que uma troca na posição de apenas dois desses elementos acarreta modificação no grupo, já que os cargos ocupados têm atribuições diferentes; logo,

ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA

representam 6 diretorias diferentes.

Uma diretoria é, por isso, um subconjunto *ordenado*, tratando-se de **arranjos** de classe 3. O número de diretorias possíveis é, então, dado por $A_{8,3}$.

De modo geral, os problemas que encontraremos podem ser resumidos no seguinte enunciado:

Dispondo de um conjunto com **n** *elementos, de quantos modos podemos escolher* **p** *elementos distintos desse conjunto?*

Os exemplos acima nos mostraram como proceder para identificar o tipo de agrupamento envolvido nesse problema: arranjo ou combinação? Retiramos, como exemplo, **p** elementos do conjunto dado, formando um agrupamento.

– se, modificando a ordem dos elementos escolhidos, o agrupamento não se modificar, trata-se de um problema de **combinações**, *e responderemos* $C_{n,p}$

– se, modificando a ordem dos elementos escolhidos, criamos um novo agrupamento, diferente do inicial, trata-se de um problema de **arranjos**, *e responderemos* $A_{n,p}$.

Exercícios Propostos

Utilizando, para as respostas, as notações $C_{n,p}$ ou $A_{n,p}$, resolva as seguintes questões:

11.1) Dispondo de 5 pontos distintos, dos quais três quaisquer nunca estão alinhados, quantos triângulos podem ser formados?

11.2) Dez clubes participam de um campeonato de futebol em um só turno, isto é, dois times jogam entre si uma única vez. Quantos jogos terá esse campeonato?

11.3) Dez atletas disputam uma prova olímpica. De quantos modos diferentes o *podium* (lugares diferentes para o 1º, 2º e 3º colocados) pode ser ocupado?

11.4) Com um baralho de 52 cartas (4 naipes de 13 cartas cada) quantos jogos de 3 cartas quaisquer podem ser feitos? E de 3 cartas de copas?

11.5) Quantos números de 5 algarismos podem ser formados com os algarismos de 1 a 8?

11.6) Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. De quantos modos podem ser retiradas duas bolas, sorteando-se uma primeira e em seguida uma segunda dentre as 9 restantes?

11.7) Em uma sala há 6 cadeiras e 4 pessoas. De quantos modos distintos as pessoas podem ocupar as cadeiras?

11.8) Em uma estante, há 9 lugares vagos. De quantos modos podem 5 livros diferentes ser colocados na estante?

11.9) Uma caixa contém n etiquetas numeradas de 1 a n. De quantos modos podem ser retiradas 5 etiquetas, não importando a sua ordem?

11.10) Vinte tenistas disputam um torneio regional para se escolher os 5 que participarão de um torneio internacional. De quantos modos pode ocorrer essa escolha?

Capítulo 12

Cálculo do número de arranjos e de combinações

12.1 – INTRODUÇÃO

Entendidos os conceitos, podemos agora nos interessar pelo cálculo das quantidades de arranjos e de combinações. Em outras palavras, estudaremos as regras e fórmulas para $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$.

12.2 – CÁLCULO DO NÚMERO DE ARRANJOS

Consideremos, inicialmente, alguns exemplos.

Exemplos

a) Vamos determinar quantos arranjos de classe 3 podem ser feitos com os 5 elementos do conjunto E = {a; b; c; d; e}, isto é, vamos calcular $A_{5,3}$.

Sabemos que um arranjo de classe 3 é um subconjunto *ordenado* de 3 elementos:

1º	2º	3º

O número de possibilidades de escolher esses três elementos é o número de arranjos $A_{5,3}$, e a escolha se desenvolve em 3 etapas sucessivas.

Para a escolha do 1º elemento, temos 5 possibilidades: ou a, ou b, ou c, ou d, ou e.

Como, nos arranjos simples, não podemos repetir elementos, para as escolhas do 2º e 3º temos, respectivamente, 4 e 3 possibilidades.

	1º	2º	3º
	↓	↓	↓
possibilidades:	5	4	3

Então, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, o total de arranjos é

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

(Observe que $A_{5,3}$ é igual ao produto de 3 fatores, consecutivos e decrescentes, iniciados por 5.)

b) Vamos determinar quantos números de telefones podem ser formados (prefixo de 3 algarismos seguido de outros 4 algarismos) com o prefixo 721, sendo os algarismos seguintes distintos entre si.

$$\boxed{7}\boxed{2}\boxed{1} - \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{4 algarismos distintos}}$$

É evidente que, ao escolhermos 4 entre os 10 algarismos do nosso sistema de numeração estamos fazendo um **arranjo**, pois, modificada a ordem dos algarismos, o número de telefone se modifica. Por exemplo, $\boxed{721\text{-}2584} \neq \boxed{721\text{-}2548}$

Assim, o total de telefones é dado por $A_{10,4}$.

Por outro lado, esse tipo de problema já é nosso conhecido, do estudo do **Princípio Fundamental da Contagem**:

$$\boxed{7}\boxed{2}\boxed{1} \quad \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

possibilidades: $\quad 10 \quad 9 \quad 8 \quad 7$

Temos, portanto:

$$A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

(Observe que $A_{10,4}$ é igual ao produto de 4 fatores, consecutivos e decrescentes, iniciados por 10.)

Esses dois exemplos nos mostram que a formação de um arranjo, isto é, de um subconjunto **ordenado**, segue exatamente o Princípio Fundamental da Contagem: a ocorrência de eventos sucessivos e ordenados.

1º evento: escolha do 1º elemento do subconjunto
2º evento: escolha do 2º elemento
3º evento: escolha do 3º elemento

e assim por diante.

Podemos, então, resolver o caso geral, ou seja, calcular $A_{n,p}$:

Dispondo de um conjunto E com **n** *elementos, quantos arranjos simples de* **p** *elementos podem ser formados?* **($0 \leqslant p \leqslant n$).**

1º caso: p = 0

Sabemos que existe **um** único arranjo de classe zero: o conjunto $\emptyset$ (veja a observação que precede o item 3.3).

Então, temos:

$$\boxed{A_{n,0} = 1}$$

2º caso: p = 1

Se dos **n** elementos de E devemos escolher 1, temos **n** possibilidades, pois *cada elemento de E é um arranjo de classe 1* (veja o exemplo f, no capítulo 3).

Então, temos:

$$\boxed{A_{n,1} = n}$$

3º caso: p ⩾ 2

Devemos escolher **p** dos **n** elementos:

– para a escolha do 1º, temos **n** possibilidades
– para a escolha do 2º, temos **n – 1** possibilidades (pois não podemos repetir elementos)
– para a escolha do 3º, temos n – 2 possibilidades
. . . .
– para a escolha do pº, temos n – (p – 1) possibilidades

$$\boxed{1º}\ \boxed{2º}\ \boxed{3º}\ \boxed{4º} \cdots \boxed{pº}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

possibilidades: $\quad n \quad n-1 \quad n-2 \quad n-3 \quad n-(p-1)$

Portanto, o **Princípio Fundamental da Contagem** dá-nos:

$$\boxed{A_{n,p} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)}$$

Observe que *$A_{n,p}$ é igual a um produto de* **p** *fatores, consecutivos e decrescentes, iniciados por* **n**.

Exemplos

$$A_{6,3} = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{3 fatores}} = 120$$

$$A_{10,2} = \underbrace{10 \cdot 9}_{\text{2 fatores}} = 90$$

$$A_{8,5} = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{5 fatores}} = 6720$$

$$A_{n,2} = \underbrace{n(n-1)}_{\text{2 fatores}}$$

$$A_{n+2,3} = \underbrace{(n+2)(n+1)n}_{\text{3 fatores}}$$

$$A_{7,0} = 1$$

$$A_{13,1} = 13$$

Em certas situações, é conveniente escrever a expressão do número de arranjos utilizando a *notação fatorial*. Por exemplo:

$$A_{6,2} = 6 \cdot 5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

$$A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{3!} = \frac{8!}{(8-5)!}$$

Assim, no caso geral, temos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\ldots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Podemos, então, utilizar a *fórmula*

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Observação: devemos notar que a expressão acima é válida para os casos $p = 0$ e $p = 1$:

$$A_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Exercícios Resolvidos

12.1) Resolva a equação $A_{n,2} = 56$:

Solução

Como $A_{n,2} = n(n-1)$, temos:

$n(n-1) = 56$ que é o mesmo que $n^2 - n - 56 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$n = 8 \quad \text{ou} \quad n = -7$$

Como n deve ser um número natural (representa o número de elementos de um conjunto), $n = -7$ não convém. Assim, $S = \{8\}$.

12.2) Resolva a equação $A_{n-1,6} = 30\, A_{n-3,4}$

Solução

É conveniente, nesse caso, usarmos a expressão $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ para não escrever produtos extensos. Assim, temos:

$$\begin{cases} A_{n-1,6} = \dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-6]!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-7)!} \\[2ex] A_{n-3,4} = \dfrac{(n-3)!}{[(n-3)-4]!} = \dfrac{(n-3)!}{(n-7)!} \end{cases}$$

A equação, então, fica:

$$\frac{(n-1)!}{(n-7)!} = 30\, \frac{(n-3)!}{(n-7)!}$$

e daí,

$$(n-1)! = 30 \cdot (n-3)!$$

$$(n-1)(n-2)(n-3)! = 30 \cdot (n-3)!$$

que é o mesmo que $n^2 - 3n - 28 = 0$ cujas raízes são $n = 7$ ou $n = -4$ (não convém). Logo, $S = \{7\}$.

12.3) Mostre que $A_{n,k} \cdot A_{n-k,\, p-k} = A_{n,p}$, com $k \leqslant p \leqslant n$.

Solução

Utilizando a expressão:

$A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, escrevemos:

$$\boxed{1^{\circ} \text{ membro}} = A_{n,k} \cdot A_{n-k,\, p-k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{[(n-k)-(p-k)]!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-p+k)!} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{n,p} = \boxed{2^{\circ} \text{ membro}}$$

Exercícios Propostos

12.4) Calcule:

a) $A_{10,4}$ b) $A_{6,3}$ c) $A_{6,6}$ d) $A_{n,3}$

e) $A_{n+2,2}$ f) $A_{10,0}$ g) $A_{7,1}$ h) $A_{15,1}$

12.5) Determine as condições de existência de cada expressão dada, onde $n \in \mathbb{Z}$.

a) $A_{n,3}$ b) $A_{3,n}$ c) $A_{n+2,4}$

d) $A_{n+8,3}$ e) $A_{2n+10,\, n+5}$ f) $A_{n-3,\, 3-n}$

12.6) Resolva as equações:

a) $A_{n+1,2} = 90$ b) $A_{n-1,2} = 110$

12.7) Resolva as equações:

a) $A_{n,3} = 14\, A_{n,2}$

b) $A_{n+3,7} = 63\, A_{n+1,5}$

c) $A_{n+1,6} - 55\, A_{n-1,4} = 7\, A_{n,5}$

12.8) Determine n nas equações abaixo. Em seguida, para esses valores de n, determine os possíveis valores de p.

a) $A_{n,p} = 3\, A_{n-1,\, p-1}$

b) $A_{n+2,\, p} + 20\, A_{n,\, p-2} = 10\, A_{n+1,\, p-1}$

12.9) Mostre que:

$$(n+1)\, A_{n,\, p-1} + \frac{A_{n+1,\, p+1}}{n-p+1} = 2\, A_{n+1,\, p}$$

12.3 – CÁLCULO DO NÚMERO DE COMBINAÇÕES

Consideremos, inicialmente, os exemplos.

Exemplos

c) Vamos determinar quantas combinações de classe 3 podem ser feitas com 5 elementos do conjunto $E = \{a; b; c; d; e\}$.

Sabemos que existem $C_{5,3}$ dessas combinações. Tomando, por exemplo, uma delas:

$$\{a; c; d\}$$

vamos verificar quantos **arranjos** de classe 3 podem ser **formados a partir dela**; para isso, basta escrevermos os elementos **a, c e d** em todas as ordens possíveis:

Combinação	Arranjos *gerados* pela combinação
{a; c; d}	(a; c; d), (a; d; c), (c; a; d), (c; d; a), (d; a; c), (d; c; a)

Temos 6 *arranjos gerados pela combinação.*

Para concluir que a combinação {a; c; d} gera 6 arranjos de classe 3 sem formar todos eles, basta aplicar a fórmula correspondente ao número de arranjos de 3 elementos, tomados 3 a 3:

$$A_{3,3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Tomada outra combinação, evidentemente o resultado se repetirá.

Vemos, então, que *cada combinação de classe 3 gera 3! = 6 arranjos de classe 3.*

O **total** de combinações de classe 3 ($C_{5,3}$) gera o **total** de arranjos de classe 3 ($A_{5,3}$).

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ combinação} & \longrightarrow & 3! = 6 \text{ arranjos} \\ C_{5,3} \text{ combinações} & \longrightarrow & A_{5,3} \text{ arranjos} \end{array}$$

Dessa proporcionalidade tiramos o total de combinações:

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!}$$

Logo, $C_{5,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

De fato, existem 10 combinações dos 5 elementos de E, tomados 3 a 3:

$$\{a; b; c\},\ \{a; b; d\},\ \{a; b; e\},\ \{a; c; d\},\ \{a; c; e\}$$
$$\{a; d; e\},\ \{b; c; d\},\ \{b; c; e\},\ \{b; d; e\},\ \{c; d; e\}$$

d) Vamos determinar de quantos modos podemos escolher, entre 6 pessoas, uma comissão de 4 pessoas.

Evidentemente, trata-se de um problema de combinações pois, numa *comissão* podemos trocar a ordem de seus elementos que ela não se modifica.

Assim, o total de comissões é dado por $C_{6,4}$.

Vamos considerar uma dessas comissões, por exemplo aquela formada pelas pessoas

$$X, Y, W, Z$$

e calcular quantas **diretorias** com presidente, vice-presidente, secretário e tesoureiro podem ser formadas a partir *dessa* comissão.

Sabemos que a formação de uma diretoria corresponde a construir um **arranjo**, pois a ordem em que os cargos são ocupados é importante.

Assim, como dispomos de 4 elementos X, Y, W e Z, o número de arranjos que podem ser formados usando os 4 elementos é:

$$A_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

É claro que uma outra comissão também daria origem a outras 24 diretorias.

Vemos, então, que *cada* comissão gera $4! = 24$ diretorias.

Como existem $C_{6,4}$ comissões e o total de diretorias é $A_{6,4}$, temos a proporcionalidade:

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ comissão} & \longrightarrow & 4! = 24 \text{ diretorias} \\ C_{6,4} \text{ comissões} & \longrightarrow & A_{6,4} \text{ diretorias} \end{array}$$

donde tiramos $C_{6,4} = \dfrac{A_{6,4}}{4!}$

Logo, $C_{6,4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

Ora, o fato de nos exemplos **c** e **d** termos encontrado que

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} \quad \text{e} \quad C_{6,4} = \frac{A_{6,4}}{4!}$$

está nos sugerindo **que o número de combinações simples, de classe p, é igual ao número de arranjos simples, de classe p,** dividido pelo fatorial de p, ou, em outras palavras:

O número de combinações simples de **p** *elementos que podem ser formadas com os* **n** *elementos de um conjunto E* $(0 \leqslant p \leqslant n)$ *é dado por*

$$\boxed{C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{A_{n,p}}{p!}}$$

Demonstração

1º) para $p = 0$

Existe uma única combinação de classe zero: o conjunto $\varnothing$ (veja o exemplo e do capítulo anterior). Assim, $C_{n,0} = \binom{n}{0} = 1$.

Mas, para $p = 0$, temos $\dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{A_{n,0}}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$

Logo, $C_{n,0} = \binom{n}{0} = \dfrac{A_{n,0}}{0!}$

2º) para $p \geqslant 1$

Vamos supor que o conjunto

$$\{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_p\}$$

seja uma qualquer das $C_{n,p}$ **combinações dos n elementos de E,** *tomados* **p a p.**

A partir *dessa* combinação podemos formar um certo número de **arranjos** de **p** elementos; basta para isso escrever os elementos em todas as ordens possíveis.

Como temos **p** elementos e os arranjos devem usar todos eles, esse número é

$$A_{p,p} = \frac{p!}{(p-p)!} = \frac{p!}{0!} = p!$$

Temos, então, que cada combinação de classe **p** gera p! arranjos de classe p. O total de combinações ($C_{n,p}$) gera o total de arranjos ($A_{n,p}$).

$$\begin{array}{lcl} 1 & \text{combinação } \textit{gera} & p! \text{ arranjos} \\ C_{n,p} & \text{combinações } \textit{geram} & A_{n,p} \text{ arranjos} \end{array}$$

Portanto, $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!}$

Exemplos

$$C_{8,3} = \frac{A_{8,3}}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$C_{7,4} = \frac{A_{7,4}}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$C_{10,2} = \frac{A_{10,2}}{2!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

Lembrando que $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, a expressão de $C_{n,\,p}$ pode ser escrita:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Podemos, então, recorrer à fórmula:

$$\boxed{C_{n,\,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Observação: são bastante úteis os valores de $C_{n,\,p}$ nos casos particulares em que $p = 0$, $p = 1$ e $p = n$. Devemos, por isso, conhecê-los:

$$\boxed{C_{n,\,0} = \binom{n}{0} = 1}$$

$$C_{n,\,1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Assim, $\boxed{C_{n,\,1} = \binom{n}{1} = n}$

$$C_{n,\,n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Assim, $\boxed{C_{n,\,n} = \binom{n}{n} = 1}$

Exemplos

$C_{7,\,0} = 1$ $\qquad \binom{13}{13} = 1$

$\binom{8}{1} = 8$ $\qquad C_{25,\,1} = 25$

Exercícios Resolvidos

12.10) Resolva a equação $C_{n,\,5} = 4C_{n-1,\,4}$

Solução

Utilizando a fórmula

$C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, a equação se escreve:

$$\frac{n!}{5!(n-5)!} = 4\,\frac{(n-1)!}{4!(n-1-4)!}$$

$$\frac{n(n-1)!}{5 \cdot 4!(n-5)!} = 4\,\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}$$

donde $\dfrac{n}{5} = 4$, isto é, $n = 20$

Logo, $S = \{20\}$

12.11) Mostre que $\dfrac{p+1}{n-p}\,C_{n,\,p+1} = C_{n,\,p}$ onde $n > p$.

Solução

$$\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = \frac{p+1}{n-p}\,C_{n,\,p+1} = \frac{p+1}{n-p} \cdot \frac{n!}{(p+1)!\,[n-(p+1)]!} =$$

$$= \frac{p+1}{n-p} \cdot \frac{n!}{(p+1)\,p!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!\underbrace{(n-p)\,(n-p-1)!}_{(n-p)!}} =$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,\,p} = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$$

Exercícios Propostos

• 12.12) Calcule:

a) $C_{10,\,5}$ b) $\binom{11}{3}$ c) $C_{20,\,2}$ d) $\binom{12}{4}$

e) $C_{15,\,15}$ f) $\binom{17}{0}$ g) $\binom{17}{1}$ h) $\binom{100}{100}$

• 12.13) Resolva as equações:

a) $C_{n,\,2} + 2C_{n,\,1} = 9$

b) $11A_{n,\,2} = 3C_{n+1,\,4}$

13.2) Quantos subconjuntos de 4 elementos tem o conjunto $E = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}$?

Solução

Cada subconjunto de 4 elementos é uma combinação dos 6 elementos de E, tomados 4 a 4. Assim, o número desses subconjuntos é:

$$C_{6,4} = \frac{A_{6,4}}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

13.3) Quantos jogos foram realizados em um campeonato de futebol, disputado em um só turno (isto é, dois times se enfrentaram uma única vez), do qual participaram 16 times?

Solução

É claro que, por exemplo, o jogo Santos *versus* Corinthians é o mesmo que Corinthians *versus* Santos. Por isso, o número de jogos é o total de **combinações** das 16 equipes formadas duas a duas:

$$C_{16,2} = \frac{A_{16,2}}{2!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ jogos}$$

13.4) Dez equipes de basquete vão disputar um campeonato em três turnos (isto é, duas equipes vão jogar entre si três vezes). Supondo que um mesmo time ganhe os três turnos, não havendo, por isso, necessidade de nenhum outro jogo, quantas partidas serão disputadas?

Solução

A exemplo do exercício anterior, trata-se de um problema de **combinações**.

Em *cada turno*, o número de jogos é dado por $C_{10,2}$. Como teremos três turnos, o total de jogos será:

$$3 \cdot C_{10,2} = 3 \cdot \frac{A_{10,2}}{2!} = 3 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 135$$

13.5) Doze atletas (4 sul-americanos, 4 africanos e 4 asiáticos) disputam uma prova. Serão premiados, conforme a classificação, os cinco primeiros colocados. De quantas maneiras pode ser feita a premiação?

Solução

Se a premiação é feita conforme o atleta seja primeiro, segundo, . . . , ou quinto colocado, cada vez que se forma a lista dos 5 primeiros, tem-se um **subconjunto ordenado**.

Logo, o total de maneiras é:

$$A_{12,5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$$

13.6) No exercício anterior, qual o número de maneiras de se fazer a premiação, se o único sul-americano classificado é o primeiro colocado?

Solução

$$\underset{\boxed{\text{sul-americano}}}{1^{\circ}} \quad \underbrace{\underset{\boxed{}}{2^{\circ}} \quad \underset{\boxed{}}{3^{\circ}} \quad \underset{\boxed{}}{4^{\circ}} \quad \underset{\boxed{}}{5^{\circ}}}_{\text{atletas de outras origens}}$$

Solução

Temos, então, 4 possibilidades de escolher o 1º colocado (qualquer dos atletas sul-americanos). Restam-nos, portanto, 8 atletas para a escolha dos 4 outros premiados, já que não há outro sul-americano classificado. Assim, o total de maneiras é, pela Regra do Produto

$$4 \cdot A_{8,4} = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 6\,720$$

13.7) Uma equipe de inspeção tem um chefe, escolhido entre 4 engenheiros e 10 técnicos, escolhidos entre 15 outros profissionais. De quantas maneiras pode ser composta essa equipe?

Solução

Para a escolha do chefe, temos **4** possibilidades.

Para a escolha dos técnicos, dispomos de 15 elementos para escolher 10; como esses profissionais têm atribuições iguais, cada grupo de técnicos é uma **combinação**.

Logo, o número de modos de compor a equipe é:

$$4 \cdot C_{15,10} = 4 \cdot \frac{15!}{10!5!} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12\,012$$

13.8) Quantos números de 3 algarismos distintos, começando por algarismo ímpar, podem ser formados com os elementos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Solução

É um problema de **arranjos** pois, por exemplo, $345 \neq 534$.

$$\boxed{\text{ÍMPAR}} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

Para a escolha do primeiro algarismo, temos **3** possibilidades: os algarismos 3, 5, 7.

Escolhido o primeiro, restam-nos 6 elementos, dos quais devemos escolher 2.

Logo, a quantidade desses números é:

$$3 \cdot A_{6,2} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

13.9) Quantos números, entre 1 000 e 20 000, de algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos de 1 a 9?

Solução

Calculamos, primeiro, a quantidade de números entre 1000 e 10 000, isto é, números de 4 algarismos

$$1000 < \underbrace{\boxed{}\;\boxed{}\;\boxed{}\;\boxed{}}_{\text{número de 4 algarismos distintos}} < 10\,000$$

Como dispomos de 9 elementos para escolher 4, essa quantidade é dada por $A_{9,4}$.

Calculamos, agora, a quantidade de números entre 10 000 e 20 000. Devemos notar que são números de 5 algarismos que, para serem menores que 20 000, devem ter o 1 como primeiro algarismo:

$$10\,000 < \boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{} < 20\,000$$

Fixado, então, o número 1, restam-nos 8 algarismos para escolher os 4 que se seguirão ao 1. Temos, então, $A_{8,4}$ números.

Logo, o total de números é a soma das duas quantidades:

$$A_{9,4} + A_{8,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 4\,704$$

13.10) Qual o número de subconjuntos com 2, 3 ou 4 elementos que tem um conjunto de 9 elementos?

Solução

O número de subconjuntos de 2 elementos é dado por $C_{9,2}$.
O número de subconjuntos de 3 elementos é dado por $C_{9,3}$.
O número de subconjuntos de 4 elementos é dado por $C_{9,4}$.
Assim, o total de subconjuntos pedidos é:

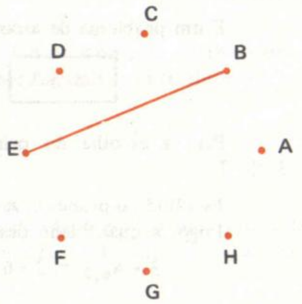
$$C_{9,2} + C_{9,3} + C_{9,4} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 246$$

13.11) Unindo-se os vértices de um octógono regular, formam-se quantos segmentos? Quantas diagonais tem o octógono?

Solução

Dispomos de 8 pontos para a escolha de 2. Como a ordem em que unimos os pontos não modifica o segmento formado, podemos construir

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ segmentos.}$$



$\overleftrightarrow{EB} = \overleftrightarrow{BE}$

Notemos, agora, que dos 28 segmentos que podem ser formados, alguns são lados do octógono e outros são diagonais. Logo, subtraindo o número de lados (que é 8), obtemos o número de diagonais:

$$C_{8,2} - 8 = 28 - 8 = 20 \text{ diagonais}$$

13.12) É dado um conjunto E, de 10 elementos. Quantos subconjuntos de E não são conjuntos de 4 elementos?

Solução

É evidente que a solução do problema pode ser feita calculando-se o número de subconjuntos de 0, 1, 2, 3, 5, . . . 10 elementos e somando-se todos esses resultados.

No entanto, é muito mais simples calcular o total de subconjuntos de E e dele subtrair o número de subconjuntos que têm 4 elementos. Teremos, assim, a quantidade de subconjuntos que não são de 4 elementos. Então:

– o número total de subconjuntos de E é 2^{10}
– o número de subconjuntos de 4 elementos é dado por $C_{10,4}$.

Portanto, a solução é:

$$2^{10} - C_{10,4} = 1024 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 814$$

13.13) Dez pessoas, entre elas José, estão reunidas para escolher a diretoria de um clube, formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Em quantas das diretorias que podem ser formadas José não é o presidente?

Solução

Calculando, primeiramente, o total de diretorias possíveis e, em seguida, o número de diretorias em que José é presidente, a diferença entre esses resultados nos dá o número de diretorias nas condições do problema.

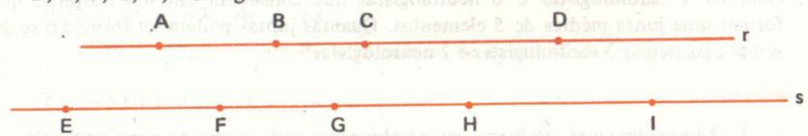
– O total de diretorias é dado por $A_{10,4}$.
– Fixado José na presidência, os três outros diretores devem ser escolhidos entre as 9 pessoas restantes.

P	V-P	S	T
JOSÉ			

O número dessas diretorias é, então, dado por $A_{9,3}$.
Portanto, o número de diretorias em que José não é presidente é:

$$A_{10,4} - A_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$$

13.14) Quantos triângulos podem ser construídos usando-se, como vértices, os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I da figura?



Solução

Para a construção de um triângulo, devemos escolher 3 pontos entre os 9 dados. Como, por exemplo, o triângulo ABF é o mesmo triângulo BFA, trata-se de um problema de combinações. Podemos resolvê-lo de dois modos:

1º modo:

O total de combinações dos 9 elementos, tomados 3 a 3, é dado por $C_{9,3}$.

Mas, por certo, estão incluídos nesse total, agrupamentos de 3 pontos que, absolutamente, ***não determinam triângulos*** por serem grupos de pontos que pertencem à mesma reta, como, por exemplo, ABC, ACD, FGH.

Devemos, então, subtrair desse total, o número de *falsos* triângulos. Para isso, basta calcularmos o número de combinações de classe 3 existentes com os 4 pontos da reta r e com os 5 pontos da reta s:

– número de *falsos* triângulos em r: $C_{4,3}$.
– número de *falsos* triângulos em s: $C_{5,3}$.

Portanto, o número de triângulos é:

$$C_{9,3} - C_{4,3} - C_{5,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

2º modo:

Os triângulos que podem ser construídos são de dois tipos: com um vértice em r e dois em s ou com um vértice em s e dois em r.

– *Número de triângulos com um vértice em r e dois em s:*

Para a escolha do vértice em r, temos 4 possibilidades (*A, B, C, D*). Para a escolha de dois vértices em s, temos $C_{5,2}$ possibilidades.

Assim, o número desses triângulos é:

$$4 \cdot C_{5,2} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 40$$

– *Número de triângulos com um vértice em s e dois em r:*

Para a escolha do ponto sobre s, temos 5 possibilidades. Para a escolha de dois pontos sobre r, temos $C_{4,2}$ possibilidades.

Assim, o número desses triângulos é:

$$5 \cdot C_{4,2} = 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 30$$

Logo, o total de triângulos é:

$$4 \cdot C_{5,2} + 5 \cdot C_{4,2} = 40 + 30 = 70$$

13.15) Com os 7 cardiologistas e 6 neurologistas que trabalham em um hospital, quer-se formar uma junta médica de 5 elementos. Quantas juntas podem ser formadas se devem sempre participar 3 cardiologistas e 2 neurologistas?

Solução

Temos aqui um problema de **combinações** pois, formada uma junta, ela não se modifica quando se altera a ordem de seus elementos.

É evidente que não podemos formar os 13 médicos e combiná-los 5 a 5: desta forma estaríamos formando muitas comissões que não satisfazem as condições do problema.

Devemos notar que, para termos certeza de formar juntas com 3 cardiologistas e 2 neurologistas, precisamos resolver o problema em duas fases: primeiro, escolher os 3 cardiologistas; **em seguida**, escolher os 2 neurologistas. São, portanto, dois eventos.

1º evento: *escolha dos cardiologistas*

Dispomos de 7 elementos para escolher 3. O número de possibilidades é, então, $C_{7,3}$.

2º evento: *escolha dos neurologistas*

Dispomos de 6 elementos para escolher 2. O número de possibilidades é, então, $C_{6,2}$.

	1º evento	2º evento
	C C C	N N
possibilidades:	$C_{7,3}$	$C_{6,2}$

Finalmente, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de juntas é:

$$C_{7,3} \cdot C_{6,2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 525$$

13.16) Dispondo de um baralho de 52 cartas (4 naipes com 13 cartas cada), determine quantos jogos de 5 cartas podem ser formados nas seguintes condições:

a) 5 cartas quaisquer;
b) jogos com 3 reis e 2 valetes;
c) jogos com 3 cartas de copas e 2 cartas de ouro;
d) jogos com exatamente 2 ases.

Solução

Escolhidas 5 cartas, o jogo formado não se modifica quando se altera a ordem dessas cartas; trata-se, então, de **combinações**.

a) O número de jogos com 5 cartas quaisquer é:

$$C_{52,5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

b) jogos com 3 reis e 2 valetes; resolvemos o problema em 2 fases:

1º evento: *escolha de 3 reis*

No baralho, existem 4 reis. O número de possibilidades é, então, $C_{4,3}$.

2º evento: *escolha de 2 valetes*

Também dispomos de 4 valetes. Assim, o número de possibilidades é $C_{4,2}$.

	1º evento	2º evento
	R R R	V V
possibilidades:	$C_{4,3}$	$C_{4,2}$

Logo, pelo **Princípio Fundamental**, o total de jogos é:

$$C_{4,3} \cdot C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 24$$

c) Jogos com 3 cartas de copas e 2 de ouro:

1º evento	2º evento
♥ ♥ ♥	♦ ♦

1º evento: *3 cartas de copas*

número de possibilidades: $C_{13,3}$

2º evento: *2 cartas de ouro*

número de possibilidades: $C_{13,2}$

Total de jogos desse tipo:

$$C_{13,3} \cdot C_{13,2} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 22\,308$$

d) Jogos com *exatamente* 2 ases

Iniciamos escolhendo 2 ases; para termos certeza de que não ocorrerá outro ás entre as 3 cartas seguintes, para a escolha destas 3 eliminamos os 4 ases do baralho, restando-nos 48 cartas:

1º evento	2º evento
A A	☐ ☐ ☐

1º evento: *escolha de 2 ases*

número de possibilidades: $C_{4,2}$

2º evento: *escolha de 3 outras cartas*

número de possibilidades: $C_{48,3}$

Total de jogos com exatamente 2 ases:

$$C_{4,2} \cdot C_{48,3} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 103\,776$$

13.17) Dez objetos diferentes devem ser guardados em 3 gavetas A, B e C, sendo 4 objetos em A, 3 em B e 3 em C. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução

Iniciamos pela escolha dos 4 objetos para a gaveta A; em seguida, dos 6 objetos restantes, escolhemos 3 para a gaveta B, ficando assim, automaticamente escolhidos os objetos para C: os últimos 3.

1º evento: *escolha para A*

número de possibilidades: $C_{10,4}$

2º evento: *escolha para B*

número de possibilidades: $C_{6,3}$

Total de maneiras:

$$C_{10,4} \cdot C_{6,3} = 210 \cdot 20 = 4200$$

13.18) Trabalham, em uma firma, 8 engenheiros e 6 economistas. Quantas comissões de 5 desses profissionais podem ser formadas de modo que em cada comissão haja, no mínimo, 3 engenheiros?

Solução

Ter no mínimo 3 engenheiros significa que as comissões podem ter *exatamente* 3 engenheiros, ou 4 engenheiros ou 5 engenheiros, isto é, podemos formar comissões de 3 tipos:

I. com 3 engenheiros e 2 economistas
II. com 4 engenheiros e 1 economista
III. com 5 engenheiros

A soma das quantidades de cada um dos tipos nos dará o total de comissões.

I. *comissões com 3 engenheiros e 2 economistas*

	1º evento	2º evento
	Eng Eng Eng	Eco Eco
possibilidades:	$C_{8,3}$	$C_{6,2}$

Total dessas comissões: $C_{8,3} \cdot C_{6,2} = 56 \cdot 15 = 840$

II. *comissões com 4 engenheiros e 1 economista*

	1º evento	2º evento
	Eng Eng Eng Eng	Eco
possibilidades:	$C_{8,4}$	6

Total dessas comissões: $C_{8,4} \cdot 6 = 70 \cdot 6 = 420$

III. *comissões com 5 engenheiros*

	Eng Eng Eng Eng Eng
possibilidades:	$C_{8,5}$

Total dessas comissões: $C_{8,5} = 56$

Assim, o número de comissões com, no mínimo, 3 engenheiros é:

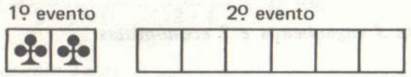
$$C_{8,3} \cdot C_{6,2} + 6 \cdot C_{8,4} + C_{8,5} = 840 + 420 + 56 = 1316$$

13.19) Considere um baralho de 28 cartas (os 4 naipes, com 7 cartas cada). Quantos jogos de 8 cartas, com, no mínimo, 3 cartas de paus, podem ser formados?

Solução

Como no exercício anterior, temos vários casos a considerar: são os jogos com exatamente 3 cartas de paus, com 4, 5, 6 ou 7. Podemos, entretanto, conduzir o problema por um outro caminho, calculando inicialmente o total de jogos possíveis e, depois, subtrair desse total as quantidades de jogos com duas cartas de paus, com uma e também com nenhuma carta de paus. Assim:

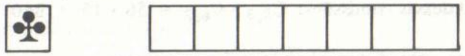
- *Total de jogos de 8 cartas:* $C_{28,8} = 3\,108\,105$
- *Jogos com duas cartas de paus:*



possibilidades: $C_{7,2}$ $C_{21,6}$

Total desses jogos: $C_{7,2} \cdot C_{21,6} = 1\,139\,544$

- *Jogos com uma só carta de paus:*



possibilidades: 7 $C_{21,7}$

Total desses jogos: $7 \cdot C_{21,7} = 813\,960$

- *Jogos sem nenhuma carta de paus:*

Retirando do baralho as 7 cartas de paus, restam-nos 21 cartas para escolher 8:

$$C_{21,8} = 203\,490 \text{ jogos}$$

Finalmente, o número de jogos com pelo menos 3 cartas de paus é:

$$C_{28,8} - C_{7,2} \cdot C_{21,6} - 7 \cdot C_{21,7} - C_{21,8} = 951\,111$$

Exercícios Propostos

13.20) Numa urna há 20 bolas, sendo 11 brancas, 5 azuis e 4 vermelhas. De quantos modos podemos retirar:

a) uma bola
b) duas bolas
c) duas bolas brancas
d) três bolas, sendo nenhuma branca

13.21) Dez estudantes prestam um exame. De quantas maneiras pode ser composta a lista dos 4 primeiros colocados?

13.22) Entre 10 condôminos presentes a uma reunião devem ser eleitos 1 síndico e 3 conselheiros. De quantos modos pode se dar a escolha?

13.23) Quantos números, de 3 algarismos distintos, maiores que 499, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

13.24) Uma confeitaria produz 8 tipos de doces e dispõe de embalagens para 3 quaisquer dos tipos. Se as embalagens podem ser apresentadas em 5 cores diferentes, quantas são as alternativas de escolha de um consumidor?

13.25) Participam de um torneio de xadrez 5 russos, 5 americanos e 4 cubanos. De quantos modos pode ser feita a premiação dos 3 primeiros colocados se o único americano classificado ficar em terceiro lugar?

13.26) Numa livraria há 15 coleções diferentes de livros, com 6 volumes em cada coleção. Um cidadão quer presentear um amigo com 3 volumes de uma mesma coleção. Quantas são as maneiras de escolha?

13.27) Dado o conjunto $E = \{a; b; c; d; e; f; g\}$, determine em quantos dos seus subconjuntos de 5 elementos comparecem **a** e **b**.

13.28) No exercício anterior, em quantos dos subconjuntos de 5 elementos não comparecem a nem b?

13.29) Sete pessoas, entre elas José e Eustáquio, estão reunidas para formar uma chapa com presidente, secretário, segundo-secretário e tesoureiro. Determine em quantas das possíveis chapas:

a) José é presidente e Eustáquio tesoureiro
b) José não é o presidente e Eustáquio não é o tesoureiro

13.30) No exercício anterior, em quantas das possíveis chapas pelo menos um deles (José ou Eustáquio) faz parte da diretoria?

13.31) Um deputado quer convocar 5 entre 8 políticos de seu grupo para uma reunião. No entanto, dois desses políticos têm forte rixa pessoal. De quantos modos pode ser feita a convocação de maneira que não compareçam simultaneamente os dois citados?

13.32) Considere um conjunto de 10 elementos e determine o número de seus subconjuntos com:

a) 6 elementos
b) 2, 3 ou 4 elementos
c) qualquer quantidade de elementos, com exceção daqueles de 2 ou 3 elementos.

13.33) Com os algarismos de 1 a 9, quantos números naturais x, de algarismos distintos, podem ser formados se:

a) $10\,000 < x < 100\,000$
b) $100 < x < 2\,000$
c) $1\,000 < x < 30\,000$
d) $1\,000 < x < 25\,000$

13.34) Considere os vértices de um hexágono regular.

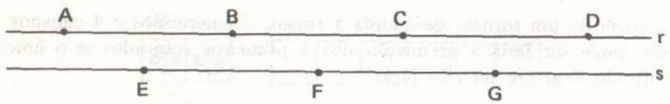
a) Quantas retas ficam por eles determinadas?
b) Quantos triângulos com vértices nesses 6 pontos podem ser construídos?

13.35) Considere os vértices de um decágono regular.

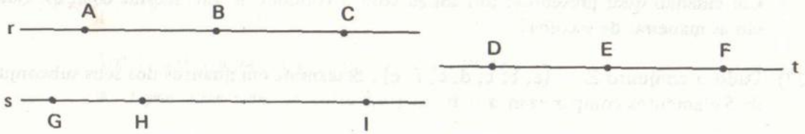
a) Quantos segmentos podem ser traçados unindo esses vértices?
b) Quantas diagonais tem o decágono?

13.36) Deduza, pelo processo combinatório, a expressão D_n do número de diagonais de um polígono regular de n lados.

13.37) Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos pontos da figura:



13.38) Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos pontos da figura:



13.39) Sobre os lados de um triângulo marcam-se 3, 4 e 5 pontos, respectivamente, distintos dos vértices. Determine o número de triângulos que podem ser construídos com vértices nos pontos marcados.

13.40) O corpo docente de uma escola é formado por 4 diretores e 6 livres-docentes. De quantas maneiras pode ser composta uma banca de exames com 2 diretores e 4 livres-docentes?

13.41) Trabalham em uma firma 6 engenheiros e 6 arquitetos. Quantas comissões com 4 engenheiros e 3 arquitetos podem ser formadas?

13.42) De quantas maneiras diferentes podemos vestir 2 meninos (de mesmo tamanho) dispondo de 5 camisas e 4 calças?

13.43) Doze pessoas dispõem, para viajar, de 3 carros: um de 6 lugares, um de 4 lugares e um de 2 lugares. Determine o número de maneiras de distribuir as pessoas nos carros.

13.44) De quantos modos podemos distribuir 10 brinquedos entre 4 crianças, de modo que a primeira receba 3, a segunda 3, a terceira 2 e a quarta 2?

13.45) Para um desfile em que 3 modelos se apresentam, um costureiro dispõe de 4 vestidos, 6 pares de sapatos e 5 bolsas, sendo esteticamente possível formar qualquer conjunto. De quantas maneiras diferentes pode o costureiro vestir os modelos?

13.46) Determine, dando a resposta na notação fatorial, de quantos modos uma classe de 25 alunos pode ser separada em 5 grupos de 5 alunos.

13.47) Determine de quantos modos podem n pessoas serem separadas em α grupos de p pessoas cada, sendo $n = \alpha p$.

13.48) Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, dispondo de 10 deputados e 6 senadores, de modo que, em cada comissão, haja pelo menos 3 deputados?

13.49) Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, dispondo de 10 deputados e 6 senadores, de modo que, em cada comissão, haja no mínimo 2 senadores?

13.50) De um baralho de 52 cartas são eliminadas as cartas de 2 a 9, dos 4 naipes. Com as cartas restantes, determine o número de jogos (que podem ser formados)

a) de 5 cartas quaisquer
b) de 5 cartas, com 3 ases e dois reis
c) de 5 cartas, com 3 iguais entre si e outras duas iguais entre si (por exemplo, 3 ases e dois reis ou 3 damas e 2 ases)

13.51) Ainda nas condições do exercício anterior, determine o número de jogos de 5 cartas com:

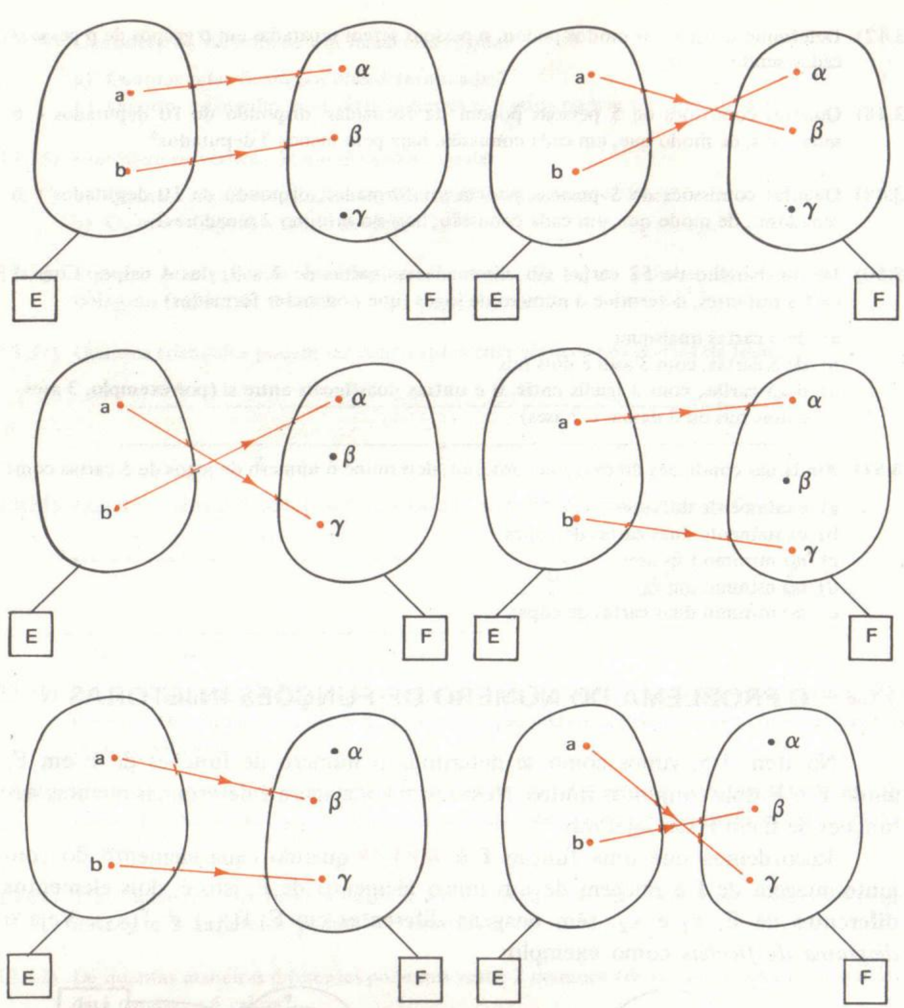
a) exatamente dois ases
b) exatamente duas cartas de copas
c) no mínimo três ases
d) no mínimo um ás
e) no mínimo duas cartas de copas

13.2 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE FUNÇÕES INJETORAS

No item 1.5, vimos como se determina o número de funções de E em F, sendo E e F dois conjuntos finitos. Nosso problema agora é determinar quantas das funções de E em F são **injetoras**.

Recordemos que uma função **f** é **injetora** quando cada elemento do conjunto-imagem de f é imagem de um único elemento de E, isto é, dois **elementos diferentes** de E, x_1 e x_2, **têm imagens diferentes** em F: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Veja o *diagrama de flechas* como exemplo:

Então, para compreendermos o cálculo do número de funções injetoras, comecemos com um exemplo: sejam $E = \{a; b\}$ e $F = \{\alpha; \beta; \gamma\}$; vamos construir todas as funções injetoras de E em F (lembrando que **a** e **b** não podem ter a mesma imagem):



Temos, então, 6 dessas funções.

Notemos, agora, que a formação dessas funções se deu pela escolha em F, de 2 de seus 3 elementos e, ainda mais, que a **ordem** dessa escolha foi importante pois, por exemplo, as duas primeiras funções *usam* os mesmos elementos α e β de F, mas em **ordens diferentes** sendo, por isso, funções diferentes.

Tudo isso nos diz que ao escolhermos (como imagens) **ordenadamente** 2 dos 3 elementos de F, estamos formando **arranjos**. Portanto, o número de funções injetoras é

$$A_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

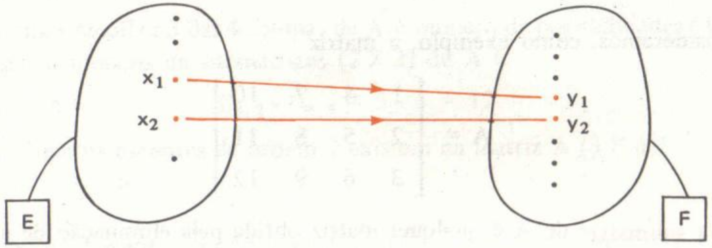
Vamos, então, ao caso geral:

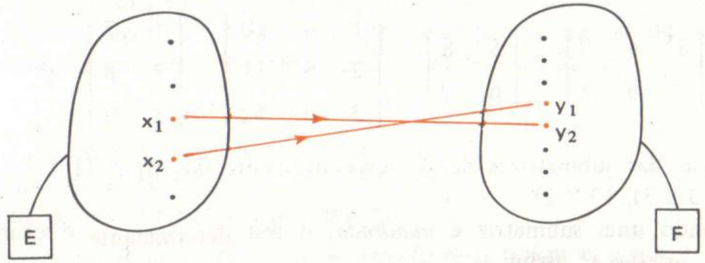
Sendo E e F dois conjuntos finitos, o primeiro com **n** elementos e, o segundo, com **k** elementos ($k \geqslant n$), quantas funções injetoras de E em F podem ser formadas?

Solução

Sabemos que a formação de uma função injetora se dá escolhendo, sem repetir, **n** dos **k** elementos de F para serem, cada um, imagem dos **n** elementos de E.

Também sabemos que essa escolha deve ser ordenada pois, se trocarmos a posição de duas imagens, modificamos a função:





Trata-se, então, de um problema de **arranjos** dos **k** elementos de F, tomados **n** a **n**.

Logo, o número de funções injetoras é:

$$\boxed{A_{k,n} = \frac{k!}{(k-n)!}}$$

Exemplos

a) O número de funções injetoras de E = {a; b; c; d; e} em F = {1; 2; 3; 4; 8; 12; 24; 36} é:

$$A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$$

b) Os conjuntos E e F têm, respectivamente, 4 e 10 elementos. Quantas funções de E em F não são injetoras?

O número de funções de E em F é $10^4 = 10\,000$

O número de funções injetoras de E em F é $A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$.

Logo, o número de funções não injetoras é:

$$10^4 - A_{10,4} = 4\,960$$

13.3 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE SUBMATRIZES E MENORES

Consideremos, como exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Uma **submatriz** de A é qualquer matriz obtida pela eliminação de linhas ou colunas de A; assim, as matrizes

$$[5 \quad 8], \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

são algumas das submatrizes de A, respectivamente dos tipos (1×2), (2×3), (2×2), (3×3), (3×2).

Quando uma submatriz é *quadrada*, o seu **determinante** é chamado de **menor da matriz A**; assim,

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

são dois dos menores de A.

Notemos que a formação de uma submatriz se faz escolhendo um certo número de linhas e, em seguida, um certo número de colunas da matriz dada, *mantendo* a posição relativa das filas escolhidas, pois se esta posição for trocada, a matriz formada não é submatriz de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \text{ é submatriz de A} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ não é submatriz de A}$$

Trata-se, então, de **combinar** as linhas e as colunas da matriz dada.

Podemos, por isso, resolver os problemas:

1º) Quantas **submatrizes** do tipo (2×3) tem a matriz $A\,(3 \times 4)$?

Solução

Temos dois *eventos:*

1º evento: *escolha das linhas*

Devemos escolher 2 das 3 linhas de A; o número de possibilidades é $C_{3,2} = 3$.

2º evento: *escolha das colunas*

Devemos escolher 3 das 4 colunas de A; o número de possibilidades é $C_{4,3} = 4$.

Logo, o número de submatrizes (2×3) de A é:

$$C_{3,2} \cdot C_{4,3} = 3 \cdot 4 = 12$$

2º) Quantos **menores** de ordem 2 existem na matriz $A\,(3 \times 4)$?

Solução

Como um **menor** é um determinante de uma submatriz quadrada, o número de menores de ordem 2 é o próprio número de submatrizes do tipo (2×2); isto nos diz que devemos repetir a solução do 1º problema para o caso em que o número de colunas que devem ser escolhidas é igual ao número de linhas:

$$C_{3,2} \cdot C_{4,2} = 3 \cdot 6 = 18$$

Logo, existem 18 menores de ordem 2 em A.

No caso geral, temos:

sendo A uma matriz do tipo $(m \times n)$,

– o número de suas submatrizes do tipo $(p \times q)$, $p \leqslant m$ e $q \leqslant n$, é:

$$\boxed{C_{m,p} \cdot C_{n,q}}$$

– o número de seus menores de ordem r, $r \leqslant m$ e $r \leqslant n$, é:

$$\boxed{C_{m,r} \cdot C_{n,r}}$$

Exemplos

a) Sendo $A(5 \times 7)$, o número de submatrizes (3×4) é:

$$C_{5,3} \cdot C_{7,4} = 10 \cdot 35 = 350$$

b) Sendo $A\,(4 \times 5)$ o *total* de menores de A é dado pela soma das quantidades de menores de ordem 1, de ordem 2, de ordem 3 e de ordem 4:

$$C_{4,1} \cdot C_{5,1} + C_{4,2} \cdot C_{5,2} + C_{4,3} \cdot C_{5,3} + C_{4,4} \cdot C_{5,4} =$$
$$= 4 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 125$$

Capítulo

14 Permutações simples

14.1 – DEFINIÇÃO

Consideremos, por exemplo, o conjunto $E = \{5; 7; 8\}$. Sabemos que é possível formar, com os elementos de E, **arranjos** de **classe** zero, de **classe** 1, de **classe** 2; mas, a **classe máxima** que podem ter esses arranjos é 3: são os subconjuntos ordenados que utilizam **todos** os 3 elementos de E.

Assim, se com esses elementos, quisermos formar *números de 3 algarismos distintos*, somos obrigados a usar, na composição de cada número, os **3** algarismos (5, 7 e 8):

578 587 758 785 857 875

Temos, então, 6 **arranjos de classe máxima** e esse número se confirma pelo cálculo:

$$A_{3,3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Este exemplo mostra-nos que, quando formamos arranjos de classe máxima com os elementos de um conjunto, nada mais estamos fazendo que tomar **todos** os elementos do conjunto e ir **permutando** suas posições. Podemos, por isso, chamar tais arranjos de **permutações**. Daí a **definição**:

Permutações são arranjos de classe máxima ou, com maior rigor:

Uma permutação dos **n** elementos de um conjunto E é qualquer arranjo de classe **n** desses elementos.

O **número** de permutações é indicado por:

$$P_n$$

Da definição, é imediato que $P_n = A_{n,n}$.

Utilizando a igualdade $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$,

vem
$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

Logo, o número de permutações é

$$\boxed{P_n = n!}$$

Assim, no caso do exemplo inicial, temos $P_3 = 3! = 6$.

Exemplos

a) O conjunto $E = \{6; 7; 8; 9\}$ tem 4 elementos. Para formarmos, com eles, números de 4 algarismos distintos, devemos utilizar todos. *Alguns* desses números são: 6 789, 8 679, 6 798, 9 768.

A quantidade deles é o total de permutações de 4 elementos

$$P_4 = 4! = 24$$

b) Vamos calcular o número de anagramas da palavra TRANCO (anagrama é qualquer palavra, com significado ou não, que pode ser formada com as letras da que foi dada). Alguns dos anagramas são TARONC, CNRTAO, CRATON, CONTRA, NRATOC.

Para esse cálculo, basta determinarmos o total de permutações das 6 letras T, R, A, N, C, O:

$$P_6 = 6! = 720$$

Exercícios Resolvidos

14.1) O horário de uma classe, num certo dia da semana, deve conter 8 aulas, sendo 2 de História, 2 de Matemática, 2 de Português e 2 de Física, todas de *assuntos* diferentes (por exemplo, das duas aulas de História, uma é de História Geral e outra de História do Brasil). Determine de quantas maneiras pode ser feito o horário desse dia em cada uma das seguintes condições:

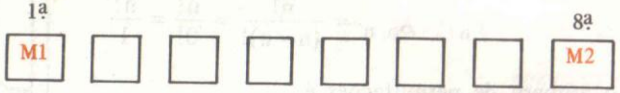
a) aulas em qualquer ordem;
b) a primeira e a última aula de Matemática;
c) a primeira e a última aula de matérias da área de exatas (Física ou Matemática).

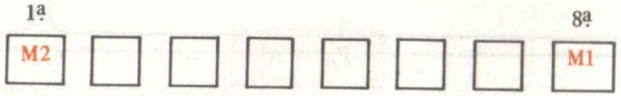
Solução

a) como as 8 aulas são diferentes, o total de maneiras de fazer o horário é o total de permutações das 8:

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

b) como as duas aulas de Matemática são diferentes, vamos chamá-las de M1 e M2; para serem a primeira e a última, temos duas possibilidades: M1 a primeira e M2 a última, ou o contrário:



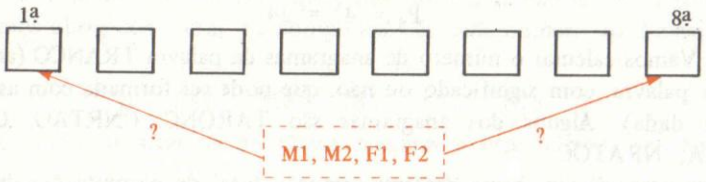


Para cada uma dessas 2 possibilidades, temos outras 6 aulas para distribuir: o número de modos possíveis é P_6.

Logo, o total é

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 1\,440$$

c) Em primeiro lugar, determinamos de quantos modos podemos escolher, entre as aulas M1, M2, F1 e F2, duas para serem a primeira e a última:



É claro que, por exemplo, F2 na 1ª e M1 na 8ª é diferente de M1 na 1ª e F2 na 8ª. Por isso, temos arranjos:

$$A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ possibilidades}$$

Para cada uma dessas possíveis escolhas, temos outras 6 aulas para distribuir. Isso nos dá:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ possibilidades}$$

Logo, o total de maneiras é:

$$A_{4,2} \cdot P_6 = 12 \cdot 720 = 8\,640$$

14.2) Considere a palavra VESTIBULAR:

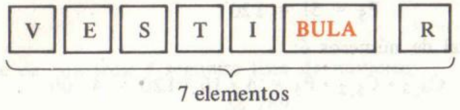
a) quantos são seus anagramas?
b) em quantos de seus anagramas as letras B, U, L e A aparecem juntas e nessa ordem?
c) em quantos de seus anagramas as letras B, U, L e A aparecem juntas?

Solução

a) o número de anagramas é:

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$$

b) para *obrigarmos* as letras B, U, L e A a estarem sempre juntas e nessa ordem, basta "prendermos as 4 numa caixa", considerando-as como **um só** elemento



Assim, toda vez que formarmos uma permutação desses 7 elementos (a "caixa" e as outras 6 letras), teremos, ao abrir a caixa, um anagrama da palavra VESTIBULAR em que B, U, L e A estão juntas e nessa ordem.

Logo, o total desses anagramas é:

$$P_7 = 7! = 5\,040$$

c) agora, B, U, L e A, estando juntas, podem estar em *qualquer* ordem.

Então, calculamos primeiro o número de anagramas em que elas estão juntas e *nessa ordem*, isto é, repetimos o item anterior:

$$P_7 = 7! = 5\,040$$

Em seguida, notamos que para **cada um** desses 5 040 anagramas podemos "abrir a caixa" e trocar a posição das 4 letras; o número de maneiras em que isso pode ser feito é:

$$P_4 = 4! = 24$$

Logo, o total de anagramas em que B, U, L e A estão juntas, mas em qualquer ordem, é:

$$P_7 \cdot P_4 = 5\,040 \cdot 24 = 120\,960$$

14.3) Com os algarismos de 1 a 9, sem repeti-los, quantos números de 3 algarismos pares e 2 algarismos ímpares podem ser formados?

Solução

Em primeiro lugar, escolhemos os cinco algarismos (3 pares e 2 ímpares) sem levarmos em consideração a ordem de escolha:

– *escolha dos pares*

Dispomos de 4 elementos (2; 4; 6; 8) para escolher 3. O número de maneiras é:

$$C_{4,3} = 4$$

– *escolha dos ímpares*

Dispomos de 5 elementos (1; 3; 5; 7; 9) para escolher 2. O número de maneiras é:

$$C_{5,2} = 10$$

Há, portanto, $C_{4,3} \cdot C_{5,2}$ modos de escolher.

Notamos, então, que, feitas essas escolhas, ainda não formamos os **números** pedidos, mas apenas **subconjuntos** com três pares e dois ímpares. Por exemplo:

$$\{2; 4; 6; 1; 3\}, \{2; 6; 8; 5; 9\}, \{4; 6; 8; 1; 7\}$$

Para que cada um desses **conjuntos** dê origem a **números** de 5 algarismos, devemos permutar os 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 120$$

Logo, o total de números é:

$$C_{4,3} \cdot C_{5,2} \cdot P_5 = 4 \cdot 10 \cdot 120 = 4\,800$$

14.4) Em quantos anagramas da palavra COLEGA as consoantes aparecem intercaladas com as vogais?

Solução

Devemos, de início, escolher com que tipo de letra começa o anagrama; temos 2 possibilidades: vogal ou consoante

vogal cons. **vogal** cons. **vogal** cons.

cons. **vogal** cons. **vogal** cons. **vogal**

Para cada uma dessas possibilidades, temos 3 lugares para distribuir as consoantes. O número de modos é:

$$P_3 = 3! = 6$$

Em seguida, distribuímos as 3 vogais nas 3 vagas restantes. Número de modos:

$$P_3 = 3! = 6$$

Logo, o total de anagramas é:

$$2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$$

14.5) Em quantos anagramas da palavra SIDERAL as consoantes estão em ordem alfabética?

Solução

A situação das consoantes nos anagramas deve ser: D à esquerda de L, L à esquerda de R e R à esquerda de S:

. . . , D, . . . L, . . . , R, S

Devemos, então, escolher 4 das 7 posições possíveis e colocar, nessas posições, as letras D, L, R, S sem modificar a sua ordem. Por isso o número de possibilidades dessa escolha é:

$$C_{7,4} = 35$$

Para cada uma dessas possibilidades, restam 3 vagas para as 3 vogais, e o número de modos de ocupá-las é:

$$P_3 = 3! = 6$$

Logo, o número desses anagramas é:

$$C_{7,4} \cdot P_3 = 35 \cdot 6 = 210$$

14.6) Escrevendo-se em ordem crescente a lista de todos os números de 5 algarismos distintos, formados com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9, que lugar ocupa o número 78 695?

Solução

Trata-se de construir a seguinte lista de números:

56 789
56 798
56 879
56 897
⋮
78 695
⋮
98 675
98 756
98 765

O nosso trabalho é calcular quantos são os números que *precedem* 78 695, isto é, todos aqueles que:

1º) começam com 5
2º) começam com 6
3º) começam com 75
4º) começam com 76
5º) têm 785 no início
6º) têm 7865 no início

1º) fixado o 5, temos 6, 7, 8 e 9 para as outras 4 vagas:

5				

total destes números: $P_4 = 4! = 24$

2º) fixado o 6 temos 5, 7, 8 e 9 para as outras 4 vagas:

6				

total destes números: $P_4 = 4! = 24$

3º) fixados o 7 e o 5, temos 6, 8 e 9 para as outras 3 vagas:

7	5			

total destes números: $P_3 = 3! = 6$

4º) fixados o 7 e o 6, temos 5, 8 e 9 para as outras 3 vagas:

7	6			

total destes números: $P_3 = 3! = 6$

5º) fixados o 7, o 8 e o 5, restam 6 e 9 para as outras 2 vagas:

7	8	5		

total destes números: $P_2 = 2! = 2$

6º) fixados o 7, o 8, o 6 e o 5, resta apenas o 9 para ocupar a última casa:

7	8	6	5	9

1 só número

Somando essas quantidades, vem o total de números que precedem 78 695:

$$P_4 + P_4 + P_3 + P_3 + P_2 + 1 = 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 63$$

Portanto, nosso número é o 64º da lista.

14.7) Com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 formam-se todos os números de 5 algarismos distintos. Determine a soma de todos eles.

Solução

Trata-se de formar $P_5 = 5! = 120$ números conforme a tabela:

23 456
23 465
23 546
23 564
.....
34 625
.....
45 362
.....
54 623
.....
65 423
65 432

e *somar* todas essas parcelas.

Observe que em cada uma das colunas (coluna das unidades, das dezenas, das centenas, ...) cada algarismo aparece tantas vezes quantas são as permutações dos demais algarismos restantes, isto é, $4! = 24$ vezes.

Nestas condições, a soma de todos os algarismos de cada coluna é:

$$\underbrace{(2+2+\ldots+2)}_{24\text{ vezes}} + \underbrace{(3+3+\ldots+3)}_{24\text{ vezes}} + \underbrace{(4+4+\ldots+4)}_{24\text{ vezes}} + \underbrace{(5+5+\ldots+5)}_{24\text{ vezes}} +$$

$$+ \underbrace{(6+6+\ldots+6)}_{24\text{ vezes}} = 24 \cdot (2+3+4+5+6) = 480$$

Então, somando-se as unidades da coluna das unidades, obtemos 480; somando-se as unidades da coluna das dezenas obtemos 4 800, e assim por diante, de acordo com o esquema:

coluna das unidades	480
coluna das dezenas	4 800
coluna das centenas	48 000
coluna das milhares	480 000
coluna das dezenas de milhares	4 800 000
	5 333 280

Observação

Para o problema resolvido acima há um *artifício* que nos fornece o resultado mais rapidamente. Tomemos o **primeiro** e o **último** números da lista e façamos a sua soma:

$$\begin{array}{r} 23\,456 \\ +\ 65\,432 \\ \hline 88\,888 \end{array}$$

Verifica-se que os demais números da lista também podem ser escolhidos aos pares, de modo que a soma seja sempre 88 888:

$$\begin{array}{r} 34\,265 \\ 54\,623 \\ \hline 88\,888 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52\,436 \\ 36\,452 \\ \hline 88\,888 \end{array}$$

Como os 120 números formam 60 desses pares, a soma total é $60 \cdot (88\,888) = 5\,333\,280$.

O aluno não deve se entusiasmar excessivamente com o *artifício*; ele só resolve o problema quando os algarismos dados são *consecutivos*.

Exercícios Propostos

14.8) Determine, para cada palavra a seguir, quantos de seus anagramas começam com a sílaba TO:

a) TEDIO
b) PACOTE
c) BUTANOL

14.9) Determine quantos anagramas da palavra PALMITO:

a) começam e terminam por vogal;
b) começam por vogal e terminam por consoante;
c) apresentam primeiro todas as vogais e, em seguida, as consoantes.

14.10) Numa repartição, a classificação de cada documento confidencial se faz com 8 dígitos: 4 letras (A, B, C, D) e 4 algarismos (1, 2, 3, 4), podendo, letras e algarismos serem misturados (por exemplo 1 • A • B • 4 • 2 • D • 3 • C). Pergunta-se:

a) quantos documentos podem ser classificados com esse código?
b) quantos documentos apresentam classificação começando com duas letras, podendo o dígito seguinte ser letra ou número?
c) quantos documentos apresentam classificação começando com exatamente duas letras?
d) quantos documentos apresentam classificação começando exatamente com duas letras e terminando com exatamente dois números?

14.11) O horário de uma classe, num certo dia da semana, deve conter 10 aulas, sendo 3 de Matemática, (1 de álgebra, 1 de trigonometria e 1 de geometria), 2 de Física (1 de mecânica e 1 de termologia), 3 de Português (1 de gramática, 1 de literatura, 1 de redação) e 2 de História (geral e do Brasil). Determine o número de maneiras de se formar esse horario com:

a) as 3 aulas de Matemática consecutivas e na ordem descrita acima;
b) as 3 aulas de Matemática consecutivas e em qualquer ordem;
c) as aulas de Matemática não surgindo consecutivamente.

14.12) No exercício anterior, quantos modos há de se fazer o horário, de maneira que as aulas da área de exatas (Física e Matemática) estejam intercaladas com as da área de humanas (História e Português)?

14.13) Ainda no exercício 14.11, de quantos modos as aulas de Português surgem, não necessariamente consecutivas, mas na ordem: gramática antes de literatura e esta antes de redação?

14.14) Num sistema de códigos em que são usados 5 sinais (+, –, •, ÷, *) misturados as 7 letras (α, β, γ, δ, ϵ, λ, μ), quantos símbolos diferentes podem ser formados com 3 sinais e 4 letras?

14.15) Em quantos dos anagramas da palavra PASTICHO

a) as letras P, A e S aparecem juntas e nessa ordem?
b) as consoantes vêm em ordem alfabética?

14.16) De quantos modos podem ser colocados em fila 6 homens e 6 mulheres de forma que nunca fiquem juntas pessoas de mesmo sexo?

14.17) Em quantos dos anagramas da palavra SABUGOL as vogais e as consoantes estão intercaladas?

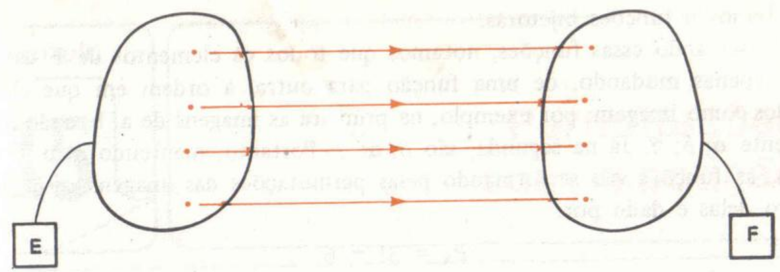
14.18) Relacionando em ordem crescente todos os números obtidos com as permutações simples dos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que lugar ocupa 687945?

14.19) Determine a soma de todos os números de 5 algarismos distintos formados com 1, 2, 3, 4, 5.

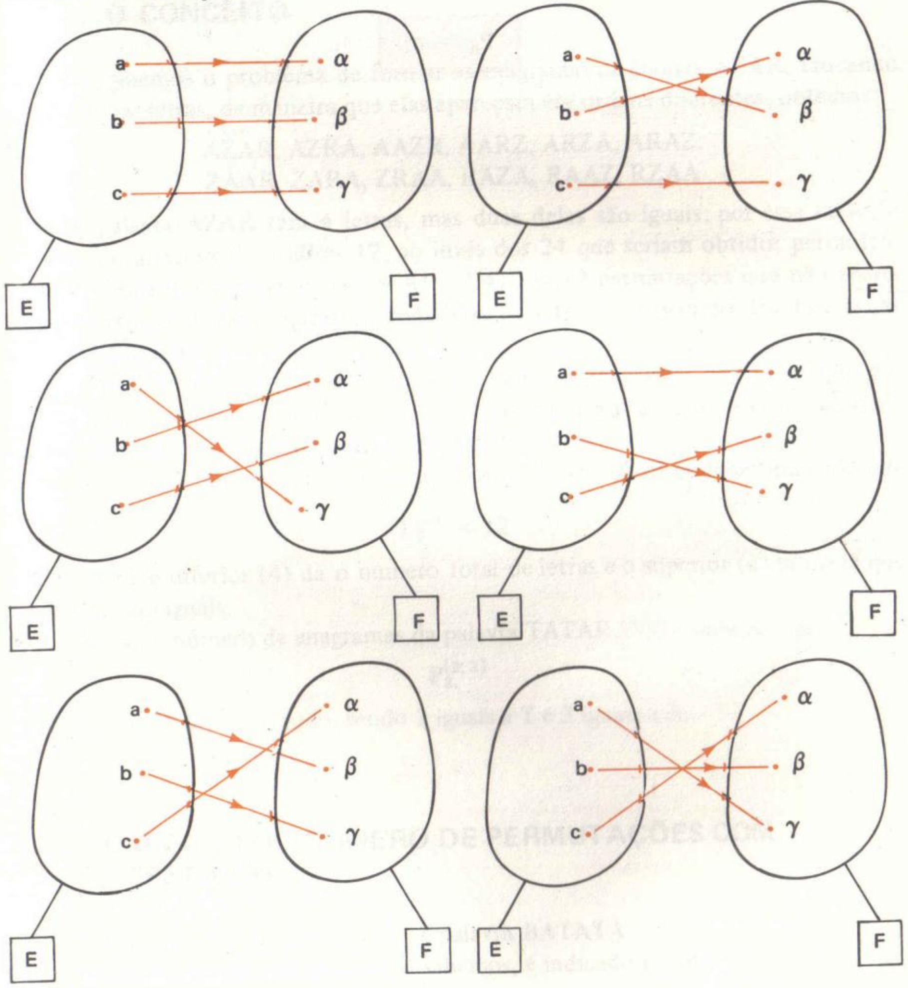
14.20) Determine a soma de todos os números de 4 algarismos distintos formados com 2, 3, 7, 9.

14.2 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE FUNÇÕES BIJETORAS

Vamos, primeiramente, recordar: uma função é **bijetora** quando é, simultaneamente, sobrejetora e injetora. Em termos mais simples, sendo E e F dois conjuntos finitos, uma função de E em F é bijetora quando, além de a cada elemento de E corresponder um único elemento de F (requisito para ser função), a cada elemento de F corresponde um único elemento de E, isto é, todos elementos de F são imagens cada um uma única vez. Isso exige que E e F tenham o mesmo número de elementos. Veja o diagrama:



Tomemos, então, como exemplo, E = {a; b; c} e F = {α; β; γ} e vamos formar todas as bijeções de E em F:



Temos 6 funções bijetoras.

Observando essas funções, notamos que todos os elementos de F são utilizados, apenas mudando, de uma função para outra, a ordem em que eles são tomados como imagem; por exemplo, na primeira as imagens de a; b; c são respectivamente α; β; γ. Já na segunda, são β; α; γ. Portanto, mantendo a; b; c nessa ordem, as funções vão se formando pelas permutações das imagens α; β; γ, e o número delas é dado por:

$$P_3 = 3! = 6$$

É imediata a confirmação para o caso geral. Assim, sendo E e F conjuntos de n elementos cada, o **número de funções bijetoras de E em F é:**

$$\boxed{P_n = n!}$$

Capítulo

15

Permutações com repetição

15.1 – O CONCEITO

Imaginemos o problema de formar os anagramas da palavra AZAR. Trocando a posição das letras, de maneira que elas apareçam em ordens diferentes, obtemos:

AZAR, AZRA, AAZR, AARZ, ARZA, ARAZ,
ZAAR, ZARA, ZRAA, RAZA, RAAZ, RZAA

A palavra AZAR tem 4 letras, mas duas delas são iguais; por essa razão, o número de anagramas resultou 12, ao invés dos 24 que seriam obtidos permutando-se 4 elementos *diferentes* ($P_4 = 4! = 24$). As 12 permutações que não apareceram corresponderiam àquelas encontradas pela troca da posição das duas letras iguais, o que é inútil.

O tipo de permutação que vimos ao fazer os anagramas deste exemplo é o que se chama **permutação com repetição:** permutação de um certo número de elementos entre os quais há alguns repetidos.

O **número de permutações** obtidas com a palavra AZAR pode ser indicado por

$$P_4^{(2)} = 12$$

onde o índice inferior (4) dá o número total de letras e o superior (2) informa que duas delas são iguais.

Assim, o número de anagramas da palavra TATARAVÔ é indicado por

$$P_8^{(2;\,3)}$$

porque temos 8 letras ao todo, sendo 2 iguais a T e 3 iguais a A.

15.2 – CÁLCULO DO NÚMERO DE PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Consideremos, como exemplo, a palavra BATATA.

O número de seus anagramas, já sabemos, é indicado por $P_6^{(3;2)}$.

Para o cálculo desse número podemos seguir o raciocínio:

Nas 6 vagas de que dispomos

___ ___ ___ ___ ___ ___

devemos distribuir as 3 letras A, as 2 letras T e a letra B em todas as posições possíveis.

Como *não podemos trocar* a posição de *letras iguais*, o número de maneiras das letras A ocuparem 3 **quaisquer** das 6 posições é dado por: $C_{6,3}$.

Para cada uma dessas escolhas, restam 3 vagas para as duas letras T. O número de modos delas ocuparem essas vagas é $C_{3,2}$. Automaticamente, a vaga restante é para a letra B.

O total de maneiras de ser feita a distribuição é

$$C_{6,3} \cdot C_{3,2} = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = \frac{6!}{3!2!}$$

Podemos, então, escrever que

$$P_6^{(3;2)} = \frac{6!}{3!2!}$$

o que nos dá 60 anagramas.

Vamos, agora, enfrentar o caso geral. Seja um grupo de **n** elementos

$$(\underbrace{A_1, A_1, \ldots, A_1}_{n_1}, \underbrace{A_2, A_2, \ldots, A_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{A_k, A_k, \ldots, A_k}_{n_k})$$

contendo n_1 elementos são iguais a A_1
n_2 elementos são iguais a A_2
n_3 elementos são iguais a A_3
. . . .
n_k elementos são iguais a A_k

(portanto, $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$).

O número de permutações desses elementos é indicado por

$$P_n^{(n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k)}$$

e, para calculá-lo, seguimos o raciocínio:

Dispomos de **n** vagas para distribuir os elementos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ em todas as posições possíveis.

Para A_1, devemos escolher n_1 das **n** vagas: temos C_{n, n_1} possibilidades.

Restam então $n - n_1$ vagas para os n_2 elementos iguais a A_2: C_{n-n_1, n_2} possibilidades.

Restam, então, $n - n_1 - n_2$ vagas para os n_3 elementos A_3: $C_{n-n_1-n_2, n_3}$ possibilidades.

E assim sucessivamente, até que restam n_k vagas para os n_k elementos A_k: $C_{n_k, n_k} = 1$ possibilidade.

Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, o total de modos de se fazer a distribuição é:

$$P_n^{(n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k)} = C_{n, n_1} \cdot C_{n-n_1, n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2, n_3} \ldots 1 =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \ldots 1 =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Temos, assim, a expressão do número de permutações com repetição:

$$\boxed{P_n^{(n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}}$$

Exercícios Resolvidos

15.1) Quantos anagramas tem a palavra BARBARIDADE?

Solução

Temos 11 elementos, entre os quais 2 iguais a B, 3 iguais a A, 2 iguais a R e 2 iguais a D. O número de anagramas é:

$$P_{11}^{(2;3;2;2)} = \frac{11!}{2!3!2!2!} = 831\,600$$

15.2) Um grupo em que **n** elementos são iguais a A e 2 elementos são iguais a B tem 21 permutações. Determine **n**.

Solução

Se temos **n** elementos A e 2 elementos B, temos um total de n + 2 elementos. Portanto,

$$P_{n+2}^{(n;2)} = 21$$

donde

$$\frac{(n+2)!}{n!2!} = 21 \qquad \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!2} = 21$$

obtemos, então, a equação $n^2 + 3n - 40 = 0$, cujas raízes são $n = -8$ ou $n = 5$. Como $n = -8$ não convém, nossa resposta é $n = 5$.

15.3) Em quantos anagramas da palavra BRASILIA as letras iguais a I:

a) aparecem juntas?
b) não aparecem juntas?

Solução

a) Para mantermos as letras I juntas, devemos considerá-las como um só elemento (prendê-las numa caixa)

$$\underbrace{\boxed{B}\ \boxed{R}\ \boxed{A}\ \boxed{S}\ \boxed{L}\ \boxed{II}\ \boxed{A}}_{7 \text{ elementos}}$$

O número desses anagramas é, então, o total de permutações desses 7 elementos, entre os quais dois são iguais a A:

$$P_7^{(2)} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$$

b) O número de anagramas em que II não estão juntas é o total de anagramas de BRASILIA menos o número de anagramas em que II estão juntas.

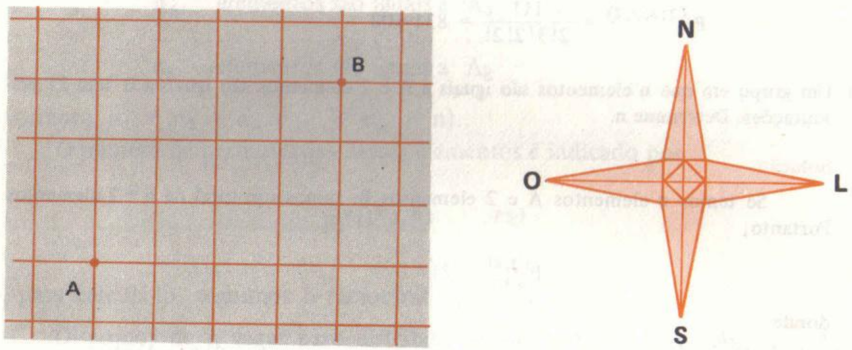
Como BRASÍLIA tem 8 letras, 2 iguais a A e 2 iguais a I, temos:

$$P_8^{(2;2)} = \frac{8!}{2!2!} = 10\,080$$

e assim,

$$P_8^{(2;2)} - P_7^{(2)} = 10\,080 - 2\,520 = 7\,560$$

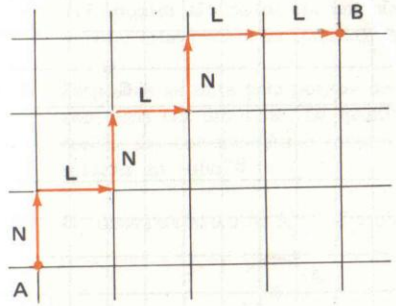
15.4) O diagrama abaixo representa algumas ruas de uma cidade. De quantos modos uma pessoa pode dirigir-se do ponto A ao ponto B utilizando-se, sempre, dos caminhos mais curtos?



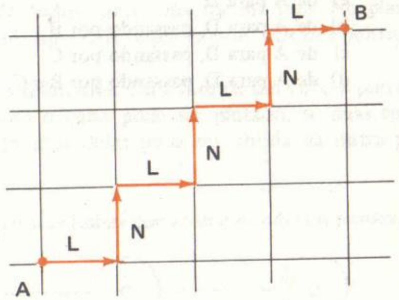
Solução

Primeiro, observamos que o cidadão não pode tomar os sentidos oeste e sul, pois assim aumentaria seu percurso; portanto seu caminho deve se restringir aos percursos possíveis determinados pelo retângulo de que A e B são vértices.

Notamos, agora, que qualquer que seja o itinerário, ele deverá percorrer 4 quarteirões no sentido leste e 3 no sentido norte, dando um total de 7 quarteirões. Vamos, como exemplo, descrever 2 percursos possíveis.



percurso: NLNLNLL



percurso: LNLNLNL

Percebemos que um percurso difere de outro pela posição em que as *atitudes* N (norte) e L (leste) são tomadas.

É fácil, então, verificar que cada percurso é uma permutação de 7 elementos, sendo 4 iguais a L e 3 iguais a N. Logo, o total de trajetos possíveis é:

$$P_7^{(4;3)} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

Exercícios Propostos

15.5) Determine o número de anagramas de:

a) CARNAVAL
b) COCORECO
c) REPRESENTANTE

15.6) Numa livraria, devem ser colocados numa prateleira 3 exemplares de *Dom Casmurro*, 2 de *O Guarani* e 4 de *O Crime do Padre Amaro*. De quantos modos podem ser dispostos esses 9 livros? De quantos modos essa disposição apresenta todos os exemplares iguais juntos?

15.7) Um grupo de **n** elementos iguais a A, 1 elemento B e 1 elemento C dá origem a um total de 72 permutações. Determine **n**.

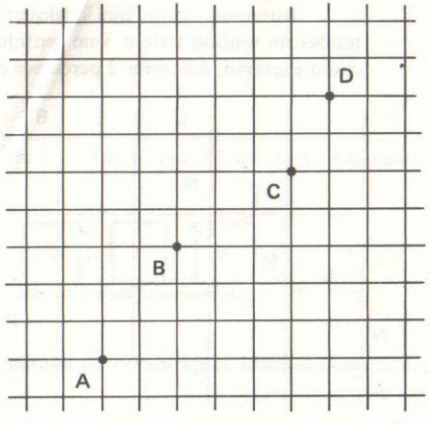
15.8) Com **n** elementos iguais a A e 3 iguais a B forma-se um total de $7n + 7$ permutações. Determine **n**.

15.9) Em quantos anagramas da palavra COMPETENTE as letras T:

a) estão juntas?
b) não estão juntas?

15.10) Seguindo as linhas do diagrama ao lado, sempre pelos caminhos mais curtos, determine de quantos modos pode-se ir:

a) de A para D
b) de A para D, passando por B
c) de A para D, passando por C
d) de A para D, passando por B e C.

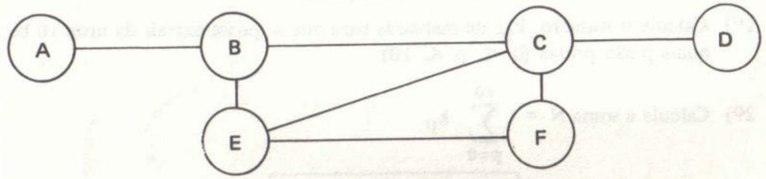


Exercícios Suplementares

IV.1) Três pontos são dados em um plano, não todos sobre uma mesma reta. No plano, quantas retas podem ser traçadas, sendo cada uma delas eqüidistante dos três pontos?

IV.2) Dispomos de tinta para pintura de 6 cores diferentes. Cada face de um cubo é pintada com uma cor diferente. De quantas formas o cubo pode ser pintado, se duas colorações são consideradas a mesma quando uma delas pode ser obtida da outra por rotação do cubo?

IV.3) No diagrama baixo A, B, . . . F indicam ilhas e as linhas que as unem indicam pontes:



Um homem, começando em A, vai de ilha em ilha. Ele pára para almoçar quando não é possível continuar a viajar sem cruzar a mesma ponte duas vezes. Determinar o número de maneiras que ele pode fazer a sua viagem antes de almoçar.

IV.4) Uma camioneta possui nove assentos. De quantas formas podem sentar-se cinco pessoas?

IV.5) Resolva a equação:

$$\frac{(x+4)! + (x+2)!}{3 \cdot [(x+3)!]} = \frac{7}{6}$$

IV.6) Determine os números **a**, **b** e **c** tais que se tenha:

$$(n+3)! - n! = n!(n^3 + an^2 + bn + c)$$

para $n \in \dot{\mathbb{N}}$.

IV.7) Demonstre que o produto:

$$\mathbf{P} = (n+1)(n+2)\ldots(2n)$$

de n números inteiros consecutivos é divisível pelo produto dos n primeiros números ímpares. Qual é o quociente?

IV.8) Com n letras distintas a, b, . . . , k, ℓ, quantos monômios do tipo $a^4b^2c^5$ podem ser formados?

IV.9) Considere o conjunto dos números de três algarismos, formados com três algarismos diferentes.

1º) Qual é o número, N, desses números?
2º) Qual é a soma, S, desses números?

IV.10) Em $\mathbb{N}$, quantos números existem?
Em $\mathbb{N}$, existem quantos números menores do que 10^p e cuja soma dos algarismos é 3?

IV.11) Dão-se n números distintos:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Designa-se por E_p o conjunto das combinações p a p desses n números.
Quantos elementos de E_p possuem um número determinado a_i?

IV.12) Um destacamento de 12 soldados tem de dar cada noite uma guarda de 4 homens. Durante quantas noites podem formar guardas que difiram pelo menos num soldado?

IV.13) Numa urna há 10 bolas brancas e 10 bolas pretas.

1º) Calcule o número, k_p, de maneiras para que se possa extrair da urna 10 bolas, das quais p são pretas $(0 \leqslant p \leqslant 10)$

2º) Calcule a soma $N = \sum_{p=0}^{10} k_p$

IV.14) Quantos números de 6 algarismos podem ser formados usando-se duas vezes o algarismo 1, três vezes o algarismo 2 e uma vez o algarismo 3?

IV.15) Seja P_n o número de permutações com n elementos distintos. Demonstre que:

$$P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$$

Deduza a igualdade:

$$P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + \ldots + (n-1)P_{n-1}$$

IV.16) De todas as permutações das 9 letras:

xxx yyy zzz

quantas não possuem duas letras x, duas letras y e duas letras z juntas?

PARTE V

Capítulo

16

Números binomiais

16.1 – INTRODUÇÃO

Quando, no capítulo 12, fizemos a determinação do **número** de combinações simples de **n** elementos classe **p** (o $\leqslant$ p $\leqslant$ n), tendo chegado à expressão

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}$$

só tínhamos a intenção de obter as respostas numéricas dos problemas que envolvessem combinações.

No entanto, esse **número** apresenta propriedades e aplicações importantíssimas, merecendo um estudo especial – objeto deste capítulo – onde ele é denominado **número binomial.**

A notação comumente usada é $\binom{n}{p}$, mas é evidente que podemos utilizar, também, $C_{n,p}$.

Devemos observar que sendo $\binom{n}{p}$ um número **natural** (pois representa número de combinações), *ele possui todas as propriedades dos números naturais.*

16.2 – DEFINIÇÃO DE NÚMERO BINOMIAL

Sejam **n** e **p** dois números inteiros tais que $0 \leqslant p \leqslant n$. Chama-se **número binomial**, de **numerador n** e **classe p**, todo número dado pela expressão:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}}$$

Casos particulares – São imediatos os seguintes valores:

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1} \quad \boxed{\binom{n}{1} = n} \quad \boxed{\binom{n}{n} = 1}$$

Exemplos

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \qquad \binom{12}{0} = 1$$

$$\binom{12}{1} = 12 \qquad \binom{12}{12} = 1$$

16.3 – SOMA DOS NÚMEROS BINOMIAIS DE MESMO NUMERADOR

Um primeiro problema interessante é o do cálculo da soma de todos os números binomiais de mesmo numerador.

Determinemos, como exemplo, o valor de $\sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p}$.

É um caso bastante simples, pois

$$\sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

onde temos

$$\binom{3}{0} = 1;\ \binom{3}{1} = 3;\ \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3;\ \binom{3}{3} = 1$$

Portanto,

$$\sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$$

É evidente, no entanto, que o cálculo de cada número binomial, no caso em que o numerador seja maior que 3, é por demais trabalhoso. Por isso, vamos determinar o resultado através de uma simples interpretação da notação $\binom{3}{p}$.

Sabemos que $\binom{3}{p}$ é o mesmo que $C_{3,p}$, ou seja, representa o número de combinações de 3 elementos tomados **p** a **p**. Como combinação é **subconjunto**, $\binom{3}{p}$ é o número de subconjuntos de **p** elementos que tem um conjunto de 3 elementos.

Por isso,

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

nada mais é do que o total de subconjuntos de um conjunto de 3 elementos, isto é, $2^3 = 8$.

Assim, para o caso geral:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

damos a mesma interpretação: é o total de subconjuntos de um conjunto com **n** elementos. Logo:

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

Exemplos

a) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$

b) $\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} = 2^8 = 256$

Exercícios Propostos

• 16.1) Determine **n** para que exista:

a) $\binom{n-1}{n-3}$ b) $\binom{n+2}{n-2}$

• 16.2) Determine o domínio da função definida por $f(x) = \binom{x+4}{4-x}$

16.3) Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, calcule

$$D = \begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ \binom{6}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{1} \\ \binom{16}{16} & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} \end{vmatrix}$$

16.4) Calcule:

a) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

b) $\sum_{p=0}^{12} \binom{12}{p}$

c) $\sum_{p=0}^{7} \binom{7}{p} + \sum_{p=0}^{11} \binom{11}{p}$

16.5) Calcule:

a) $\sum_{p=1}^{10} \binom{10}{p}$ b) $\sum_{p=2}^{9} \binom{10}{p}$

16.4 – NÚMEROS BINOMIAIS COMPLEMENTARES

Consideremos, por exemplo, os binomiais $\binom{18}{13}$ e $\binom{18}{5}$. Eles apresentam as seguintes particularidades:

1º) têm o mesmo numerador (18)
2º) a soma das classes é igual ao numerador (13 + 5 = 18)

Por isso, $\binom{18}{13}$ e $\binom{18}{5}$ são chamados **binomiais complementares**. Temos, então, a definição:

> Dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares se $p + q = n$

Assim, são complementares os seguintes números:

$$\binom{12}{7} \text{ e } \binom{12}{5};\ \binom{n}{0} \text{ e } \binom{n}{n};\ \binom{n}{3} \text{ e } \binom{n}{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$\binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{n-p} \quad (n \geq p),\ \binom{2k+1}{k-1} \text{ e } \binom{2k+1}{k+2} \quad (k \geq 1)$$

Propriedade – Consideremos novamente os binomiais $\binom{18}{13}$ e $\binom{18}{5}$

Da definição, vem:

$$\binom{18}{13} = \frac{18!}{13!\,(18-13)!} = \frac{18!}{13!\,5!}$$

$$\binom{18}{5} = \frac{18!}{5!\,(18-5)!} = \frac{18!}{5!\,13!}$$

É evidente que $\binom{18}{13} = \binom{18}{5}$. Então, enunciamos a seguinte propriedade:

> Dois números binomiais complementares são iguais.

De fato, se $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares, tem-se $p + q = n$, donde $p = n - q$. Então:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)!\,[n-(n-q)]!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-q)!\,q!} = \binom{n}{q}$$

Exemplos

a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!}$; $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!}$

Logo, $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$

b) $\binom{2k}{k-1} = \binom{2k}{k+1}$, pois $(k-1) + (k+1) = 2k$. Temos

$$\binom{2k}{k-1} = \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} \quad \text{e} \quad \binom{2k}{k+1} = \frac{(2k)!}{(k+1)!(k-1)!}$$

Agora, se consideramos como ponto de partida uma igualdade do tipo

$$\binom{18}{x} = \binom{18}{5}$$

como exemplo, percebemos que ela é verdadeira não apenas para o valor $x = 13$ correspondente ao complementar de $\binom{18}{5}$, mas também para $x = 5$:

$$\binom{18}{x} = \binom{18}{5}$$

$$\binom{18}{5} = \binom{18}{5} \qquad\qquad \binom{18}{13} = \binom{18}{5}$$

Pode-se, então, notar que:

se dois números binomiais de mesmo numerador são iguais, então ou eles têm classes iguais, ou são complementares, e reciprocamente

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \iff p = q \text{ ou } p + q = n}$$

Exemplos

c) $\binom{25}{p} = \binom{25}{q} \iff p = 9$ ou $p = 16$

d) $\binom{20}{x+1} = \binom{20}{12} \iff \begin{cases} x + 1 = 12 \Rightarrow x = 11 \\ \text{ou} \\ x + 1 + 12 = 20 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$

Exercícios Resolvidos

16.6) Resolva a equação $\binom{18}{x^2-1} = \binom{18}{3}$.

Solução

Da igualdade de números binomiais de mesmo numerador vem

$x^2 - 1 = 3$ ou $x^2 - 1 + 3 = 18$

Da primeira equação: $x = 2$ ou $x = -2$

Da segunda, $x = 4$ ou $x = -4$

Como, para esses quatro valores encontrados, o binomial $\binom{18}{x^2-1}$ está definido,

temos: $V = \{-4; -2; 2; 4\}$

16.7) Resolva a equação $\binom{16x-2}{6x-1} = \binom{16x-2}{2x+1}$

Solução

Da igualdade de números binomiais de mesmo numerador vem:

$6x - 1 = 2x + 1$ ou $6x - 1 + 2x + 1 = 16x - 2$

donde obtemos $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{4}$

Observando que para $x = \frac{1}{4}$ os binomiais não estão definidos, temos $V = \{\frac{1}{2}\}$

16.8) Sendo $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, onde $n \geqslant k \geqslant 0$, mostre que n é *par*.

Solução

Da igualdade dada, vem:

$k = k + 1$ (impossível) ou $k + k + 1 = n + 1$

Logo, temos $n = 2k$ ou seja, n é par.

Exercícios Propostos

• 16.9) **Dê os números binomiais complementares de:**

a) $\binom{0}{0}$ b) $\binom{10}{10}$ c) $\binom{100}{39}$ d) $\binom{n}{1}$

e) $\binom{n}{n-3}$ f) $\binom{n+1}{n-1}$ g) $\binom{2n-2}{n+3}$

• 16.10) O determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{12}{3} & \binom{12}{9} & 6! \\ \binom{13}{6} & \binom{13}{7} & 1! \\ \binom{14}{9} & \binom{14}{5} & 4! \end{vmatrix}$$

vale zero. Justifique.

• 16.11) Resolva as equações

a) $\binom{15}{x^2-2} = \binom{15}{7}$ b) $\binom{26}{2x-4} = \binom{26}{3x-5}$

c) $\binom{x^2}{x+3} = \binom{x^2}{x+5}$ d) $\binom{90x^2+3}{3x+7} = \binom{90x^2+3}{9x+5}$

e) $\binom{10}{x+1} = \binom{10}{2x-11}$

• 16.12) Resolva os sistemas

a) $\begin{cases} \binom{x}{y} = \binom{x}{3} \\ \binom{78}{x+y} = \binom{78}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \binom{x+y}{5} = \binom{x+y}{7} \\ \binom{16}{2x-y} = \binom{16}{2x+y} \end{cases}$

• 16.13) Sendo $\binom{n+2}{k} = \binom{n+2}{k+1}$, mostre que n é ímpar.

• 16.14) Considere os números binomiais

$$\binom{n}{p+q} \text{ e } \binom{n}{p-q}$$

onde, n, p e q são números naturais e $q \neq 0$.

a) Determine as condições para que esses binomiais estejam simultaneamente definidos.

b) Mostre que, se esses binomiais são iguais, então n é par.

• 16.15) Sendo $\binom{n}{3k-1} = \binom{n}{2k+1}$, mostre que n é múltiplo de 5, sendo $k \neq 2$ (k inteiro).

16.5 – NÚMEROS BINOMIAIS CONSECUTIVOS

Consideremos, por exemplo, os números $\binom{23}{13}$ e $\binom{23}{14}$. Eles apresentam as seguintes particularidades:

1º) têm o mesmo numerador (23);

2º) suas classes são números consecutivos (13 e 14).

Por isso, $\binom{23}{13}$ e $\binom{23}{14}$ são chamados **binomiais consecutivos**. Temos, então, que:

dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são consecutivos se p e q são números consecutivos.

Assim, são consecutivos os seguintes binomiais:

$$\binom{18}{7} \text{ e } \binom{18}{8};\ \binom{26}{16} \text{ e } \binom{26}{15};\ \binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{p+1};\ \binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{p-1}$$

Propriedade 2 – (RELAÇÃO DE FERMAT)

Para dois *números binomiais consecutivos* $\binom{n}{p+1}$ e $\binom{n}{p}$, com $p \geqslant 0$, tem-se:

$$\boxed{\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1} \cdot \binom{n}{p}}$$

Demonstração:

$$\boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}} = \frac{n-p}{p+1} \cdot \binom{n}{p} = \frac{n-p}{p+1} \cdot \frac{n!}{p!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n-p}{(p+1)p!} \cdot \frac{n!}{(n-p)(n-p-1)!} = \frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]} =$$

$$= \binom{n}{p+1} = \boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Exemplos

a) $\binom{18}{8} = \binom{18}{7} \cdot \frac{18-7}{7+1} = \frac{11}{8}\binom{18}{7}$

b) $\binom{26}{16} = \binom{26}{15} \cdot \frac{26-15}{15+1} = \frac{11}{16}\binom{26}{15}$

c) $\binom{19}{4} = \binom{19}{3} \frac{19-3}{3+1} = 4\binom{19}{3}$

Exercícios Resolvidos

16.16) Resolva a equação $\binom{x}{7} = 5\binom{x}{6}$

Solução

Da propriedade 2, vem que $\binom{x}{7} = \binom{x}{6}\frac{x-6}{6+1}$. Então, a equação se escreve:

$$\binom{x}{6} \cdot \frac{x-6}{7} = 5\binom{x}{6}$$

donde $\frac{x-6}{7} = 5$ ou seja, $x = 29$

Logo, $V = \{29\}$

16.17) Resolva a equação $\binom{x}{10} = \frac{136}{45}\binom{x}{8}$

Solução

Devemos *reduzir* a classe do número $\binom{x}{10}$ para 8; para isso, fazemos duas aplicações sucessivas da propriedade 2:

$$\binom{x}{10} = \binom{x}{9}\frac{x-9}{9+1} = \binom{x}{8}\frac{x-8}{8+1} \cdot \frac{x-9}{10}$$

Então, a equação dada se escreve

$$\binom{x}{8}\frac{x-8}{9} \cdot \frac{x-9}{10} = \frac{136}{45}\binom{x}{8}$$

que, simplificada, resulta em $x^2 - 17x - 200 = 0$. As raízes dessa última equação são $x = 25$ ou $x = -8$.

Como $x = -8$ não convém, temos $V = \{25\}$

16.18) Mostre que $(n+2)\binom{2n}{n+2} = (n-1)\binom{2n}{n-1}$

Solução

Vamos aplicar a propriedade 2 ao primeiro membro:

$$(n+2)\binom{2n}{n+2} = (n+2)\binom{2n}{n+1}\frac{2n-(n+1)}{n+1+1} = \binom{2n}{n+1}(n-1) = A$$

É evidente que poderíamos ir reduzindo a classe do binomial que encontramos na expressão A até chegarmos à classe n − 1 do binomial do segundo membro. Mas, se lembrarmos dos *binomiais complementares*, podemos escrever

$$\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1}$$

Então,

$$A = \binom{2n}{n+1}(n-1) = \binom{2n}{n-1}(n-1)$$

que é o segundo membro.

Exercícios Propostos

16.19) Resolva as equações

a) $\binom{x}{10} = 3\binom{x}{9}$

b) $\binom{x}{6} = \frac{3}{2}\binom{x}{5}$

16.20) Resolva as equações

a) $\binom{x}{7} = \frac{15}{7}\binom{x}{5}$

b) $\binom{x}{8} = \frac{13}{4}\binom{x}{6}$

16.21) Mostre que

$$n\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} = p\binom{n+1}{p+1}$$

16.6 – RELAÇÃO DE STIFEL

A propriedade 2, que acabamos de estudar, nos dá uma *relação* entre dois binomiais consecutivos. Vamos, agora, ver como efetuar a *soma de dois números binomiais consecutivos* ou, invertendo o sentido de leitura, como *decompor* um número binomial numa soma de binomiais. É a seguinte a **Relação de Stifel:**

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$

Demonstração

$$\boxed{1^{\underline{o}}\text{ membro}} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p}\frac{n-p}{p+1} =$$

$$= \binom{n}{p}\left[1 + \frac{n-p}{p+1}\right] = \frac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\frac{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= \binom{n+1}{p+1} = \boxed{2^{\underline{o}}\text{ membro}}$$

Exemplos

a) $\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6}$

b) $\binom{21}{11} + \binom{21}{10} = \binom{22}{11}$

c) $\binom{13}{8} = \binom{12}{8} + \binom{12}{7}$

d) $\binom{17}{10} = \binom{16}{10} + \binom{16}{9}$

e) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} = \binom{n}{k-1}$

f) $\binom{k-1}{m} = \binom{k-2}{m} + \binom{k-2}{m-1}$

Exercícios Resolvidos

16.22) Resolva a equação $\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{x}$

Solução

Da Relação de Stifel, temos que

$$\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6}$$

Então, a equação fica $\binom{11}{6} = \binom{11}{x}$

Da igualdade de binomiais de mesmo numerador: $x = 6$ ou $x + 6 = 11$

Logo, $V = \{5; 6\}$

16.23) Resolva a equação $\binom{24}{7} + \binom{24}{16} = \binom{25}{x^2}$

Solução

Em primeiro lugar, lembramos da igualdade de binomiais complementares:

$$\binom{24}{16} = \binom{24}{8}$$

e reescrevemos a equação como:

$$\binom{24}{7} + \binom{24}{8} = \binom{25}{x^2}$$

Aplicando a Relação de Stifel ao primeiro membro, vem

$$\binom{25}{8} = \binom{25}{x^2}$$

donde $x^2 = 8$ ou $8 + x^2 = 25$

e daí, $x = \pm 2\sqrt{2}$ ou $x = \pm\sqrt{17}$

Como o binomial $\binom{25}{x^2}$ está definido para esses 4 valores de x,

$V = \{-\sqrt{17}, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{17}\}$

16.24) Resolva a equação $\binom{17}{5} + \binom{17}{x} = \binom{18}{6}$

Solução

Nesse caso é conveniente decompormos, pela Relação de Stifel, o segundo membro da equação

$$\binom{18}{6} = \binom{17}{6} + \binom{17}{5}$$

Podemos, então, escrever

$$\binom{17}{5} + \binom{17}{x} = \binom{17}{6} + \binom{17}{5}$$

donde

$$\binom{17}{x} = \binom{17}{6}$$

e daí, $x = 6$ ou $x + 6 = 17$

Logo, $V = \{6; 11\}$

16.25) Mostre que

$$\binom{n+2}{p} + \binom{n+1}{p-1} = \frac{n+p+2}{p}\binom{n+1}{p-1}$$

Solução

Da Relação de Stifel, temos

$$\binom{n+2}{p} = \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p-1}$$

e escrevemos

$$\boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \binom{n+2}{p} + \binom{n+1}{p-1} = \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p-1} + \binom{n+1}{p-1} =$$

$$= \binom{n+1}{p-1}\frac{n+1-(p-1)}{p} + 2\binom{n+1}{p-1} = \binom{n+1}{p-1}\left[\frac{n-p+2}{p} + 2\right] =$$

$$= \binom{n+1}{p-1}\frac{n+p+2}{p} = \boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Exercícios Propostos

16.26) Dê o valor verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $\binom{18}{11} + \binom{18}{12} = \binom{19}{12}$

b) $\binom{20}{8} + \binom{20}{7} = \binom{21}{13}$

c) $\binom{15}{5} = \binom{14}{5} + \binom{14}{10}$

d) $\binom{23}{8} + \binom{23}{9} + \binom{24}{10} = \binom{25}{10}$

16.27) Resolva as equações

a) $\binom{18}{10} + \binom{18}{9} = \binom{19}{2x+3}$

b) $\binom{29}{21} + \binom{29}{22} = \binom{30}{x^2-3}$

16.28) Resolva as equações

a) $\binom{13}{x} + \binom{13}{7} = \binom{14}{8}$

b) $\binom{20}{13} + \binom{20}{2x} = \binom{21}{8}$

16.29) Resolva a equação

$$\binom{102}{51} = 2\binom{100}{x-1} + 2\binom{100}{50}$$

16.30) Mostre que

$$\binom{n+1}{p} - \binom{n-1}{p-2} = \frac{n+p}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Capítulo 17

O Triângulo de Pascal

17.1 — O TRIÂNGULO DE PASCAL

Os números binomiais, como vimos, apresentam uma série de propriedades interessantes.

Vamos, agora, construir uma **tabela**, com os números binomiais, onde algumas das propriedades já conhecidas serão visualizadas, e outras poderão ser encontradas.

Essa tabela é formada de modo que, em cada **linha**, tem-se uma seqüência de todos os números binomiais de **mesmo numerador e classes crescentes** e, em cada **coluna**, tem-se números binomiais de **mesma classe**, com **numeradores crescentes**:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Essa tabela é conhecida por **Triângulo de Pascal**.

Se calcularmos os valores dos números binomiais, o Triângulo se escreve:

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Notamos que:

– o primeiro elemento da tabela é $1 = \binom{0}{0}$;

– cada nova linha possui um elemento a mais que a linha anterior;

– todas as linhas começam e terminam pelo número 1 (pois $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$).

A primeira questão que surge ao escrevermos o Triângulo com os **valores** dos números binomiais é como evitar o trabalho de cálculo desses números pela fórmula $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Isso é facilmente resolvido com as observações acima e com a

Relação de Stifel no Triângulo. Já sabemos que, por exemplo,

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$$

Notando que $\binom{3}{2}$ e $\binom{3}{3}$ são dois termos consecutivos de uma linha do Triângulo, sua **soma é igual ao termo, da linha seguinte, que está abaixo da segunda parcela dessa soma**, isto é, $\binom{4}{3}$ está abaixo de $\binom{3}{3}$. Observe esse e outros exemplos, todos garantidos pela Relação de Stifel:

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} + & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} + & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} + & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} + & \binom{4}{4} \\
 & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 + & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 + & 1 \\
1 & 4 + & 6 & 4 + & 1 \\
 & & 10 & & 5
\end{array}$$

Então, podemos, a partir dessa observação, construir o Triângulo, linha por linha, sem lançar mão da fórmula de cálculo de números binomiais.

Por exemplo, a partir da última linha completa acima, temos

$$\begin{array}{llllllll}
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Números binomiais complementares – **É bastante fácil notar que, em cada linha do triângulo, os termos equidistantes dos extremos são iguais. Por exemplo, na 6ª linha**

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \qquad\qquad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Justificativa imediata: são números binomiais complementares.

Soma dos termos de uma linha – Também é fácil notar que a **soma dos elementos da linha** correspondente aos binomiais de numeradores **n** é 2^n. Por exemplo,

$\binom{0}{0}$	$1 = 2^0$	1
$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	$1 + 1 = 2^1$	$1\quad 1$
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	$1 + 2 + 1 = 2^2$	$1\quad 2\quad 1$
$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$	$1\quad 3\quad 3\quad 1$

Esse fato já é do nosso conhecimento (item 16.3):

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Outras propriedades – **Podemos ainda notar as seguintes propriedades** (observe o esquema com exemplos):

DE COLUNAS

$$\begin{array}{cccccc}
1 &&&&& \\
1 & 1 &&&& \\
 & + &&&& \\
1 & 2 & 1 &&& \\
 & + & + &&& \\
1 & 3 & 3 & 1 && \\
 & + & + &&& \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & \| & \| &&& \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

....

DE DIAGONAIS

$$\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
1 & 1 &&&&& \\
 & + &&&&& \\
1 & 2 & 1 &&&& \\
 && + &&&& \\
1 & 3 & 3 & 1 &&& \\
 & + && + &&& \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 && \\
 && + & \| &&& \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

....

17.2 – UMA NOTA HISTÓRICA

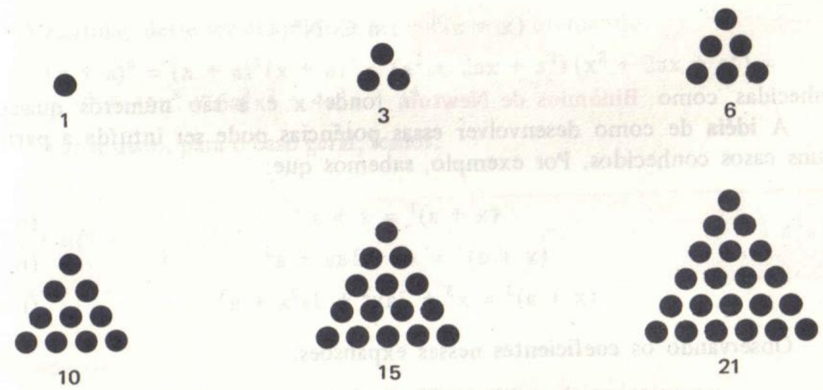
A tabela dos números binomiais é conhecida como **Triângulo de Pascal** porque foi **Blaise Pascal**, matemático e filósofo francês do século XVII, quem primeiro escreveu um tratado sobre ela: *Traité du triangle arithmétique*.

Entretanto, o Triângulo já era bem conhecido muito antes de 1653, quando Pascal pela primeira vez editou seu tratado. Ele já aparecera em uma aritmética do começo do século XVI, cujo autor era Petrus Apianus, astrônomo da Universidade de Ingolstadt. Uma ilustração em um livro de 1303, escrito por um matemático chinês, também mostra o Triângulo, e pesquisas mais recentes encontraram vestígios dela em épocas mais antigas. Omar Khayyam, que era tão bom matemático quanto poeta e filósofo, conhecia o Triângulo por volta de 1100, tendo recebido esse conhecimento provavelmente de fontes chinesas ou indianas, mais antigas.

Uma das inúmeras curiosidades contidas no Triângulo de Pascal é a seqüência dos ***números triangulares***, que forma a **3ª coluna** do Triângulo. Os números:

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

recebem o nome de *triangulares* porque indicam os números de elementos de conjuntos de pontos com os quais se forma uma tabela triangular, como sugere a ilustração abaixo:



Qualquer um de nós pode estudar o Triângulo e nele descobrir mais propriedades, mas é improvável que elas serão novas, pois o que foi citado aqui nem sequer arranha a superfície de uma vasta literatura. O próprio Pascal, no seu tratado a respeito do Triângulo, disse que estava deixando de publicar muito mais do que incluía. "É uma coisa estranha", exclamou ele, "como o Triângulo é fértil em propriedades!".

Capítulo

18 Binômio de Newton

18.1 – INTRODUÇÃO: COMO DESENVOLVER $(x + a)^n$

Entre as aplicações dos números binomiais, damos destaque especial ao desenvolvimento de potências do tipo

$$(x + a)^n \quad , n \in \mathbb{N}^*,$$

conhecidas como Binômios de Newton, onde **x** e **a** são números quaisquer.

A **idéia** de como desenvolver essas potências pode ser intuída a partir de alguns casos conhecidos. Por exemplo, sabemos que:

$$(x + a)^1 = x + a \qquad (n = 1)$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \qquad (n = 2)$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \qquad (n = 3)$$

Observando os **coeficientes** nessas expansões:

$$1 \quad 1 \qquad (n = 1)$$
$$1 \quad 2 \quad 1 \qquad (n = 2)$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad (n = 3)$$

vemos reproduzidas algumas linhas do **Triângulo de Pascal** e podemos, portanto, escrever esses coeficientes na notação binomial $\binom{n}{p}$.

Repetindo, então, aqueles exemplos, temos:

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0} a^0x^1 \binom{1}{1} a^1x^0$$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} a^0x^2 + \binom{2}{1} a^1x^1 + \binom{2}{2} a^2x^0$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} a^0x^3 + \binom{3}{1} a^1x^2 + \binom{3}{2} a^2x^1 + \binom{3}{3} a^3x^0$$

Esses casos particulares *sugerem* que ao desenvolvermos $(x + a)^n$, **os coeficientes do desenvolvimento são (todos) os números binomiais de numerador n**; em cada parcela, **a** recebe como expoente **a classe do binomial** e **x** recebe como expoente **a diferença entre o numerador e a classe do binomial.**

Vamos aplicar essa idéia para $(x + a)^4$:

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0} a^0x^4 + \binom{4}{1} a^1x^3 + \binom{4}{2} a^2x^1 + \binom{4}{3} a^3x^1 + \binom{4}{4} a^4x^0$$

Substituindo os binomiais pelos seus valores (que podem ser tomados na linha do numerador 4 do **Triângulo de Pascal**), temos

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

A exatidão deste resultado pode ser confirmada efetuando:

$$(x + a)^4 = (x + a)^2(x + a)^2 = (x^2 + 2ax + a^2)(x^2 + 2ax + a^2) =$$
$$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

A partir disto, para o caso geral, temos:

$$\boxed{(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0x^n + \binom{n}{1} a^1x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^nx^0}$$

Demonstração

Recorrendo ao **Método da Indução Matemática**, demonstramos:

Teorema 1

Para n = 1, já verificamos que é verdadeira.

Teorema 2

Admitindo que a fórmula é verdadeira para n - 1, isto é, que:

$$(x + a)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^0x^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^1x^{n-2} + \binom{n-1}{2} a^2x^{n-3} + \ldots +$$
$$+ \binom{n-1}{n-1} a^{n-1}x^0 \qquad \text{(I)}$$

Vamos provar que também é para **n**.

Sendo $(x+a)^n = (x+a)^{n-1}\cdot(x+a) = \underbrace{(x+a)^{n-1}}_{(I)}\cdot x + \underbrace{(x+a)^{n-1}}_{(I)}\cdot a$,

temos:

$(x+a)^{n-1}\cdot x =$

$$= \binom{n-1}{0}a^0x^n + \binom{n-1}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n-1}{2}a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{n-1}a^{n-1}x^1 \quad \text{(II)}$$

$(x+a)^{n-1}\cdot a =$

$$= \binom{n-1}{0}a^1x^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^2x^{n-2} + \binom{n-1}{2}a^3x^{n-3} + \dots + \binom{n-1}{n-1}a^nx^0 \quad \text{(III)}$$

Somando, *membro a membro*, (II) e (III), obtemos:

$$(x+a)^n = \binom{n-1}{0}a^0x^n + \left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right]a^1x^{n-1} +$$

$$+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]a^2x^{n-2} + \dots + \left[\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}\right]a^{n-1}x^1 +$$

$$+\binom{n-1}{n-1}a^0x^1$$

Lembrando que $\binom{n-1}{0}=\binom{n}{0}$ e $\binom{n-1}{n-1}=\binom{n}{n}$, e aplicando a **Relação de Stifel** nas expressões entre colchetes, vem

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}a^nx^0$$

que é a tese do **Teorema 2.**

Observações — Tomemos mais um exemplo:

$(x+a)^5 =$

$$= \binom{5}{0}a^0x^5 + \binom{5}{1}a^1x^4 + \binom{5}{2}a^2x^3 + \binom{5}{3}a^3x^4 + \binom{5}{4}a^4x^1 + \binom{5}{5}a^5x^0$$

Notemos que cada termo desse desenvolvimento tem a forma $\binom{5}{p}a^px^{5-p}$, onde **p** pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5. Por isso, podemos escrever, compactamente:

$$(x+a)^5 = \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}a^px^{5-p}$$

Também percebemos que o desenvolvimento de $(x+a)^5$ tem 6 termos. Então, fazemos as observações:

1ª) O desenvolvimento de $(x+a)^n$ é

$$\boxed{(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^px^{n-p}}$$

2ª) Esse desenvolvimento tem **n + 1** termos

18.2 — DESENVOLVIMENTO DE $(x - a)^n$

Vimos acima que cada parcela do desenvolvimento de $(x + a)^n$ tem a forma

$$\binom{n}{p}a^px^{n-p}$$

No caso de $(x - a)^n$, se observarmos que

$$(x-a)^n = [x+(-a)]^n$$

percebemos que suas parcelas serão do mesmo tipo que as de $(x+a)^n$, apenas substituindo a por (−a). Assim:

$$\binom{n}{p}(-a)^px^{n-p}$$

Mas, como $(-a)^p = [(-1)a]^p = (-1)^pa^p$, temos

$$\binom{n}{p}(-a)^px^{n-p} = (-1)^p\binom{n}{p}a^px^{n-p}$$

A interpretação é muito simples: para desenvolvermos $(x - a)^n$ usamos o mesmo processo de $(x+a)^n$, precedendo, cada termo, com o sinal **+ quando p é par** e **− quando p é ímpar** (pois $(-1)^p = 1$, se **p** é par e $(-1)^p = -1$ se **p** é ímpar).

Exercícios Propostos

18.5) Desenvolva

a) $(x - a)^5$ b) $(x + 2)^4$

c) $(x - 2)^6$ d) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$

18.6) Calcule o valor de:

a) $2^5 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot 7 + \binom{5}{2} 2^3 \cdot 7^2 + \ldots + 7^5$

b) $5^6 - \binom{6}{1} 5^5 \cdot 3 + \binom{6}{2} 5^4 \cdot 3^2 - \ldots + 3^6$

c) $7^4 + 4 \cdot 7^3 \cdot 3 + 6 \cdot 7^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 7 \cdot 3^3 + 3^4$

d) $101^5 - 5 \cdot 101^4 + 10 \cdot 101^3 - 10 \cdot 101^2 + 5 \cdot 101 - 1$

18.7) Calcule

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} 2^p \cdot 3^{8-p}$

b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 11^p \cdot 2^{2n-2p}$

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, 21^p \cdot 11^{n-p} \binom{n}{p}$

d) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} 11^{n-p}$

e) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} 11^p$

18.8) Calcule

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Sugestão: idéia do exercício 18.4

18.9) Calcule

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2p}$, n par b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2p}$, n ímpar

Sugestão: utilize os resultados dos exercícios 18.4 e 18.8

18.3 – FÓRMULAS DO TERMO GERAL

Um problema bastante comum é o de se obter um determinado termo do desenvolvimento de $(x + a)^n$ ou de $(x - a)^n$, sem que haja necessidade de se efetuar a expansão.

Já sabemos que em

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

cada parcela tem a forma $\binom{n}{p} a^p x^{n-p}$.

Notemos que, para p = 0, obtemos o **primeiro termo** do desenvolvimento; vamos representá-lo por T_1:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^0 x^n$$

Para p = 1, temos o **segundo termo** T_2:

$$T_2 = \binom{n}{1} a^1 x^{n-1}$$

Para p = 2, temos o **terceiro termo** T_3:

$$T_3 = \binom{n}{2} a^2 x^{n-2}$$

e assim por diante. Vemos, então, que o número que representa a **posição** do termo na expansão é uma unidade **maior** que a classe do coeficiente binomial. Por isso podemos escrever genericamente que:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}}$$

Essa expressão é conhecida como **termo geral** de $(x + a)^n$ pois, como **x**, **a** e **n** são números fixados pelo binômio, para cada valor que dermos a **p** obteremos uma determinada parcela do desenvolvimento.

Analogamente, para $(x - a)^n$

$$(x - a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n - \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \ldots$$

como a única modificação é o sinal (-) precedendo os coeficientes binomiais de classe ímpar, a expressão do termo geral é

$$\boxed{T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}}$$

Exemplos

a) Considere o binômio $(x + 2y)^{15}$. Comparando com $(x + a)^n$, temos $a = 2y$ e $n = 15$.

A expressão do *termo geral* é, então:

$$T_{p+1} = \binom{15}{p} (2y)^p x^{15-p}$$

Para acharmos o 5º termo de seu desenvolvimento, fazemos $p + 1 = 5$ e obtemos $p = 4$:

$$T_5 = \binom{15}{4} (2y)^4 x^{15-4} = \binom{15}{4} \cdot 16y^4x^{11} = 21\,840y^4x^{11}$$

b) Considere o binômio $(x^2 - 2x)^{12}$. Comparando com $(x - a)^n$, temos x^2 no lugar de x, $a = 2x$ e $n = 12$.

A expressão do *termo geral* é:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{12}{p} (2x)^p (x^2)^{12-p}$$

que pode ser simplificada:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{12}{p} 2^p x^p x^{24-2p} = (-1)^p \binom{12}{p} 2^p x^{24-p}$$

Para obtermos, por exemplo, o 10º termo do desenvolvimento, fazemos $p + \ = 10$, vindo $p = 9$:

$$T_{10} = (-1)^9 \binom{12}{9} 2^9 x^{24-9}$$

Logo, $$T_{10} = -112\,640x^{15}$$

Exercícios Resolvidos

18.10) Determine o termo em x^{10} do desenvolvimento de $(x - \frac{1}{x})^{20}$

Solução

Devemos, em primeiro lugar, escrever a expressão do *termo geral* desse binômio. Comparando-o com $(x - a)^n$, temos $a = \frac{1}{x}$ e $n = 20$. Então,

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p} = (-1)^p \binom{20}{p} (\frac{1}{x})^p x^{20-p}$$

Simplificando-o, temos

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{20}{p} x^{20-2p}$$

Como queremos o expoente de x igual a 10, fazemos

$$20 - 2p = 10 \quad \text{donde} \quad p = 5$$

Substituindo esse valor em T_{p+1}, vem

$$T_{5+1} = (-1)^5 \binom{20}{5} x^{20-2\cdot 5} = -15\,504x^{10}$$

18.11) Calcule o *termo independente* de x no desenvolvimento de $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^9$

Solução

Comparando o binômio dado com $(x + a)^n$, temos $\sqrt{x}$ no lugar de x, $a = \frac{2}{x}$ e $n = 9$. Seu *termo geral*, então, se escreve:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} = \binom{9}{p} (\frac{2}{x})^p (\sqrt{x})^{9-p}$$

Simplificando: $$T_{p+1} = \binom{9}{p} 2^p x^{\frac{9-3p}{2}}$$

O *termo independente* de x é obtido fazendo o expoente de x igual a zero. Assim:

$$\frac{9-3p}{2} = 0 \quad \text{donde} \quad p = 3$$

Substituindo esse valor em T_{p+1}, vem

$$T_{3+1} = \binom{9}{3} 2^3 x^{\frac{9-3\cdot 3}{2}} = 672$$

18.12) Calcule o *termo médio* do desenvolvimento de $(3x^2 - \frac{2}{x})^8$

Solução

Usando a fórmula do *termo geral* de $(x - a)^n$:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

onde temos $3x^2$ no lugar de x, $a = \frac{2}{x}$ e n = 8, vem:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{8}{p} (\frac{2}{x})^p (3x^2)^{8-p}$$

que, simplificado, é igual a

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{8}{p} 2^p \cdot 3^{8-p} \cdot x^{16-3p}$$

Lembremos, agora, que nas expansões de $(x \pm a)^n$ surgem n + 1 termos; no nosso caso (n = 8) temos 9 termos e, portanto, o *termo médio* procurado é o 5º:

1º ___ ___ ___ ___ $\boxed{5º}$ ___ ___ ___ 9º

Então, fazemos, na expressão de T_{p+1}, p + 1 = 5:

$$T_5 = (-1)^4 \binom{8}{4} 2^4 \cdot 3^{8-4} \cdot x^{16-3\cdot 4} = \binom{8}{4} 2^4 \cdot 3^4 \cdot x^4 = 362\,880x^4$$

18.13) Sabendo que no desenvolvimento de $(x + a)^n$ são iguais os coeficientes binomiais do 6º e 20º termos, determine n.

Solução

Na expressão $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$ vemos que:

a) para o 6º termo, p + 1 = 6, temos o coeficiente binomial $\binom{n}{5}$

b) para o 20º termo, p + 1 = 20, temos o coeficiente binomial $\binom{n}{19}$

Então, devemos ter $\binom{n}{5} = \binom{n}{19}$; isto só é possível se forem números binomiais complementares. Logo,

$$5 + 19 = n \Longrightarrow n = 24$$

18.14) Ao elevarmos a expressão ax + b, a > 0, a um expoente $n \in \mathbb{N}^*$, uma das parcelas encontradas é $26\,730\,b^7x^4$. Determine a e n.

Solução

O *termo geral* do desenvolvimento de $(ax + b)^n$ é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} b^p (ax)^{n-p}$$

Para que um desses possíveis termos seja $26\,730\,b^7x^4$, devemos ter

$$\binom{n}{p} b^p a^{n-p} x^{n-p} = 26\,730\,b^7x^4$$

Dessa igualdade é imediato que

$$\begin{cases} p = 7 & \text{I} \\ n - p = 4 & \text{II} \\ \binom{n}{p} a^{n-p} = 26\,730 & \text{III} \end{cases}$$

De I e II vem n = 11.
Como p = 7 e n = 11, a igualdade III se escreve:

$$\binom{11}{7} a^{11-7} = 26\,730$$

isto é

$$330\,a^4 = 26730$$

donde $a^4 = 81$, ou seja, $a = \pm 3$. Como a > 0, vem a = 3.

18.15) Quantos *termos racionais* surgem no desenvolvimento de $(\sqrt[3]{5} + \sqrt{2})^8$?

Solução

O termo geral desse binômio é

$$T_{p+1} = \binom{8}{p} (\sqrt{2})^p (\sqrt[3]{5})^{8-p}$$

Esse termo será um número racional quando os radicais forem *cancelados*, o que ocorrerá quando, simultaneamente, p for par e 8 − p for múltiplo de 3, com $0 \leqslant p \leqslant 8$. Então, as possibilidades são:

Para p = par: p = 0; 2; 4; 6; 8
Para 8 − p = múltiplo de 3: p = 2; 5; 8

Assim, para ocorrerem ambas as condições, tomamos os valores comuns, isto é, a intersecção dos conjuntos {0; 2; 4; 6; 8} e {2; 5; 8}.

Portanto, p = 2 ou p = 8, o que quer dizer que existem dois termos racionais no desenvolvimento:

$$p = 2: \quad T_{2+1} = \binom{8}{2} (\sqrt{2})^2 (\sqrt[3]{5})^{8-2} = 1400$$

$$p = 8: \quad T_{8+1} = \binom{8}{8} (\sqrt{2})^8 (\sqrt[3]{5})^{8-8} = 16$$

18.16) Calcule o *termo em x^{21}* do desenvolvimento de $(x^2 + x + a)^{12}$

Solução

O trinômio dado pode ser escrito na forma de um binômio $(X + A)^n$ se percebermos que

$$(x^2 + x + a)^{12} = [\underbrace{x^2}_{X} + \underbrace{(x + a)}_{A}]^{12}$$

O termo geral de $(X + A)^n$ é

$$T' = \binom{n}{p} A^p X^{n-p}$$

Obtemos, então, um *desenvolvimento parcial* em que o termo geral se escreve

$$T' = \binom{12}{p} (x + a)^p \cdot (x^2)^{12-p}$$

Mas T' encerra a expressão $(x + a)^p$ que se expande através de termos do tipo

$$\binom{p}{k} a^k x^{p-k} \qquad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ p)$$

Portanto, a expressão T' também será desenvolvida em uma soma de termos cujo termo geral é

$$T = \binom{12}{p}\binom{p}{k} a^k \cdot x^{p-k} \cdot (x^2)^{12-p}$$

ou, simplificando:

$$T = \binom{12}{p}\binom{p}{k} a^k x^{24-p-k}$$

(note que devemos ter $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant 12$)

Deste modo, T representa um termo qualquer do desenvolvimento de $(x^2 + x + a)^{12}$.

Como queremos x^{21}, devemos impor:

$$24 - p - k = 21$$

ou seja,

$$p + k = 3$$

As possíveis duplas (p; k) são

$$p = 0;\ k = 3$$
$$p = 1;\ k = 2$$
$$p = 2;\ k = 1$$
$$p = 3;\ k = 0$$

Como $p \geqslant k$, apenas as duas últimas duplas nos convêm.

O fato de termos encontrado dois pares (p; k) significa que no desenvolvimento de $(x^2 + x + a)^{12}$ surgem duas parcelas com x^{21}:

para p = 2 e k = 1, temos

$$T = \binom{12}{2}\binom{2}{1} a^1 x^{24-2-1} = 132ax^{21}$$

para p = 3 e k = 0, temos

$$T = \binom{12}{3}\binom{3}{0} a^0 x^{24-3-0} = 220x^{21}$$

No caso de se querer, após o desenvolvimento, reduzi-los a um único termo em x^{21}, teremos:

$$132ax^{21} + 220x^{21} = 44\,(3a + 5)\,x^{21}$$

Exercícios Propostos

• 18.17) Calcule, dos desenvolvimentos dados,

a) o 6º termo de $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{10}$

b) o 14º termo de $(\frac{2}{x} - x^4)^{16}$

• 18.18) Calcule, dos desenvolvimentos dados,

a) o termo em x^8 de $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{14}$

b) o termo em x^{11} de $(x^2 - 5x)^7$

c) o termo em x^{13} de $(\sqrt{x} - x^2)^{16}$

• 18.19) Calcule o termo independente de x do desenvolvimento de:

a) $(2x - \frac{3}{x^2})^9$

b) $(x^2 - \frac{4}{x^3})^{15}$

c) $(x^3 + \frac{1}{x})^{11}$

• 18.20) Calcule o termo médio do desenvolvimento de

a) $(2x^3 - \sqrt[3]{x})^{12}$ b) $(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{10}$

• 18.21) Sabendo que, no desenvolvimento de $(x - a)^n$, são iguais os coeficientes binomiais do 13º e 18º termos, determine n

• 18.22) Sabendo que, no desenvolvimento de $(2x + a)^9$ são iguais os coeficientes de x^3 e x^7, determine a real

• 18.23) Ao elevarmos a expressão ax − b a um expoente $n \in \mathbb{N}^*$, uma das parcelas é $-28\,500b^{17}x^3$. Determine a e n (a real)

• 18.24) Quantos termos racionais tem o desenvolvimento de $(\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{2})^{22}$? Determine a posição desses termos no desenvolvimento

• 18.25) Determine o termo em

a) x^{16} do desenvolvimento de $(x^2 + x + 2)^{10}$

b) x^{44} do desenvolvimento de $(x^3 - x^2 - 1)^{16}$

18.4 — ALGUMAS APLICAÇÕES DO BINÔMIO DE NEWTON

Mostraremos, neste item, algumas das aplicações do desenvolvimento de $(x + a)^n$

Exercícios Resolvidos

18.26) **Aproximação usando o Teorema do Binômio**

Quando a é "pequeno" comparado com x, uma primeira aproximação para $(x + a)^n$ é dada pelos dois primeiros termos do desenvolvimento binomial, isto é:

$$(x + a)^n \cong x^n + nx^{n-1} \cdot a$$

Uma segunda e melhor aproximação é dada pelos três primeiros termos do desenvolvimento binomial, isto é:

$$(x + a)^n \cong x^n + nx^{n-1} \cdot a + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot a^2$$

e assim sucessivamente...

A aproximação escolhida em um problema particular é feita no processo de trabalho, e depende da exatidão exigida no resultado.

Problema : calcular com aproximação de 4 casas decimais $(0{,}99)^5$

$$(0{,}99)^5 = (1 - 0{,}01)^5 = 1 - 5 \cdot (0{,}01) + 10 \cdot (0{,}01)^2 - 10(0{,}01)^3 + 5(0{,}01)^4 - (0{,}01)^5 =$$

$$= (1 - 0{,}05 + 0{,}001 - 0{,}00001 + \underbrace{0{,}00000005 - \ldots)}_{\substack{\text{negligenciável} \\ \text{para aproximação} \\ \text{de 4 casas decimais}}} \cong 0{,}95099$$

A aproximação acima tem 5 casas decimais exatas; para uma aproximação com 4 casas decimais, abandonamos a 5ª casa, obtendo:

$$0{,}9510$$

Observe que ao abandonarmos a 5ª casa obtivemos:

$$0{,}9509$$

Mas, o valor 0,9510 é uma melhor aproximação para 4 casas decimais (aproximação "por excesso")

18.27) Calcule, utilizando o binômio de Newton, a soma S_n dos n primeiros números naturais.

Solução

Considerando o desenvolvimento

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

fazemos x assumir, sucessivamente, os valores 1, 2, 3, 4, ... , n. Assim:

$$\begin{aligned}
x = 1&: \quad 2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \\
x = 2&: \quad 3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \\
x = 3&: \quad 4^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \\
\vdots \quad & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x = n&: \quad (n + 1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

Somando todas essas igualdades, obtemos

$$(n + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

Como $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = S_n$, temos

$$(n + 1)^2 = 1 + 2\,S_n + n$$

donde $$S_n = \frac{(n + 1)^2 - n - 1}{2}$$

que simplificada fornece

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

18.28) Calcule a soma

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

É dado que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

Solução

Para o cálculo da soma dos cubos dos n primeiros números naturais (positivos), consideramos o desenvolvimento de $(x + 1)^4$:

$$(x + 1)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} 1^1 \cdot x^3 + \binom{4}{2} 1^2 \cdot x^2 + \binom{4}{3} 1^3 x^1 + \binom{4}{4} 1^4$$

Temos, então:

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Fazemos, agora, x assumir sucessivamente os valores 1, 2, 3, ... , n. Assim:

$$\begin{aligned}
x = 1&: \quad 2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\
x = 2&: \quad 3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\
x = 3&: \quad 4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 \\
\ldots \quad & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x = n&: \quad (n + 1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

Somando todas essas igualdades, obtemos

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3] + 6 \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] +$$
$$+ 4 \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + n] + n$$

Nessa última igualdade, temos que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = C_n \quad \text{(a soma pedida)}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(dado do exercício)}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(resultado obtido no exercício anterior)}$$

Podemos, então, escrever:

$$(n+1)^4 = 1 + 4\,C_n + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

Donde tiramos

$$C_n = \frac{(n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)}{4}$$

Simplificando, vem

$$C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Observação: os dois últimos exercícios resolvidos nos mostram que para o cálculo de somas da forma

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

podemos utilizar o desenvolvimento do binômio

$$(x+1)^{k+1}$$

e nele fazer sucessivamente $x = 1, 2, 3, \dots, n$.

Exercícios Propostos

18.29) Calcule, com aproximação de 3 casas decimais:

a) $(1{,}04)^{20}$ b) $(2{,}002)^8$

18.30) Calcule a soma Q_n dos quadrados dos n primeiros números naturais.

18.31) Conhecidos os resultados

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

calcule

a) $\displaystyle\sum_{p=1}^{20} (p^2 + 1)$ b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (p^3 - 3p)$ c) $\displaystyle\sum_{p=1}^{19} p^4$

Exercícios Suplementares

V.1) Para os inteiros n e p, $0 \leqslant p \leqslant n$, calcule:

$$\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

V.2) O inteiro n ($n > 2$) permanece constante quando p assume todos os valores inteiros de 1 a n. Qual é o menor e qual é o maior valor de $\binom{n}{p}$?

V.3) Mostre que:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right] \dots \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] =$$
$$= \frac{(n+1)^n}{n!}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\dots\binom{n}{n}$$

V.4) 1º) Escreva o desenvolvimento de $(1+x)^n$ pela fórmula do binômio. Observe que $\binom{n}{q}$ é o coeficiente de x^q ($q = 0, 1, \dots n$)

2º) Calcule o coeficiente de x^q ($q \leqslant n$ e $q \leqslant p$) no desenvolvimento de cada um dos dois membros da igualdade:

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^p = (1+x)^{n+p}$$

Deduza a fórmula:

$$\binom{n}{0}\binom{p}{q} + \binom{n}{1}\binom{p}{q-1} + \dots + \binom{n}{q}\binom{p}{0} = \binom{n+p}{q}$$

Fazendo $n = p = q$ na fórmula acima, deduza que:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

V.5) Seja a um número real positivo e n um inteiro positivo.

1º) Escreva o desenvolvimento de $(1 + a)^n$ segundo as potências crescentes de a.

2º) Designa-se por u_p o termo desse desenvolvimento que contém a^p.

Calcule $\dfrac{u_{p+1}}{u_p}$. Para que valores de p tem-se $u_{p+1} \geqslant u_p$?

3º) Qual é o *maior termo* do desenvolvimento de $(1 + a)^n$? Determinar esse maior termo para os desenvolvimentos de $(1 + \pi)^{1000}$ e de $(1 + \dfrac{51}{50})^{100}$

V.6) Determine n para que os coeficientes de x^4, x^5 e x^6 no desenvolvimento de $(1 + x)^n$ estejam em P.A.

V.7) A razão entre o terceiro e o quarto termos no desenvolvimento de $(2 + 3x)^n$, segundo potências crescentes de x, é $\dfrac{5}{14}$ quando $x = \dfrac{2}{5}$. Determine n.

V.8) Sabe-se que a, b e n são inteiros positivos e que os três primeiros termos na expansão binomial de $(a + b)^n$ são 729, 2 916 e 4 860 respectivamente. Determine a, b e n.

V.9) Desenvolva $(c + 2y)^5$ pela fórmula do binômio. Aplique o resultado para calcular $(1{,}02)^5$ com 4 casas decimais corretas.

V.10) Prove que se x e y são inteiros positivos, o número $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ é divisível por 5.

V.11) No desenvolvimento de $(1 - 2x + ax^2)^4$ como um polinômio em x, o coeficiente de x^3 é zero. Calcule a, e determine o coeficiente de x^4.

V.12) Os três primeiros termos no desenvolvimento, segundo as potências crescentes de x, de $(1 + 2x + ax^2)^n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, são: $1 + 2nx + \lambda x^3$. Calcule a e λ em função de n.

V.13) Determine o inteiro positivo p para que os coeficientes de x e de x^2 no desenvolvimento de $(1 + x)^{2p} \cdot (1 - x)^p$ sejam iguais.

V.14) O desenvolvimento de $(1 + x)^{10}(1 + ax + bx^2)$, segundo potências crescentes de x, começa com $1 + x + x^2$. Determine a e b.

PARTE VI

Capítulo 19 — Complementos da análise combinatória

Capítulo

19

Complementos da análise combinatória

19.1 – PERMUTAÇÕES CIRCULARES

O tipo de problema que vamos estudar neste item trata, em síntese, de determinar de quantas maneiras podemos dispor n elementos distintos *em torno de um círculo.*

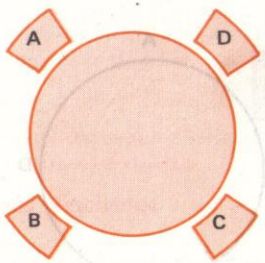
Cada uma dessas maneiras é chamada de uma **permutação circular** dos n elementos, e indicaremos o total desses agrupamentos por:

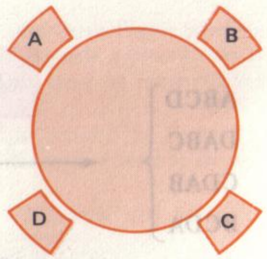
$$PC_n$$

Para melhor entendermos o conceito, vamos imaginar, como exemplo, que quatro pessoas A, B, C e D vão sentar-se em volta de uma mesa redonda, *não havendo lugares preferenciais.*

O número de modos de dispor essas pessoas é indicado, então, por PC_4.

Inicialmente, devemos compreender o que diferencia as possíveis disposições. Consideremos duas quaisquer:



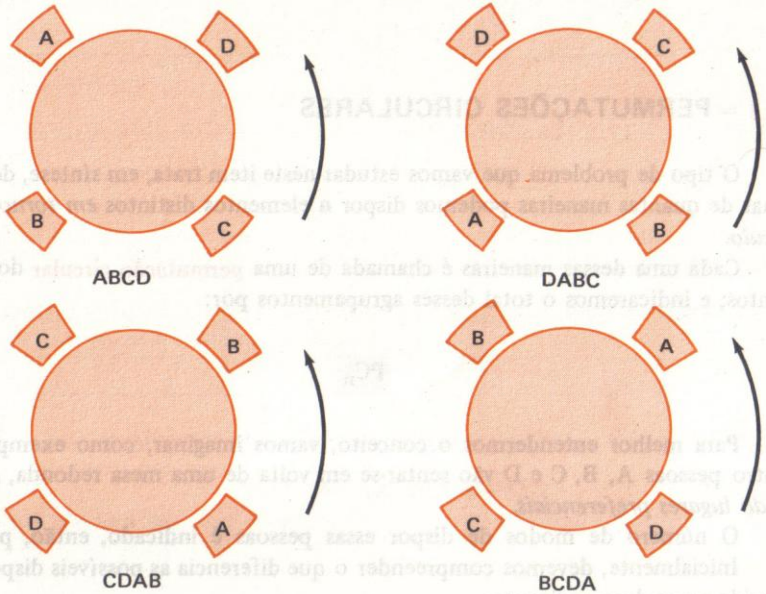


É fácil notar que houve, de uma para outra, uma mudança na *posição relativa* das pessoas; por exemplo, em ambas, A e D estão lado a lado mas, na primeira, D está *à esquerda* de A e, na segunda, D está *à direita* de A.

Dizemos, aqui, que duas permutações circulares são diferentes quando a **posição relativa dos elementos é diferente.**

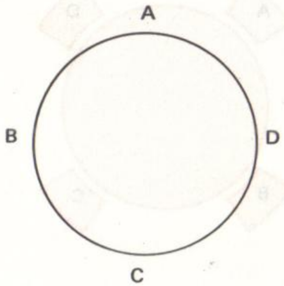
É preciso, então, observar que, se a partir de uma das disposições possíveis, apenas fizermos os elementos *girarem em conjunto* ao redor do círculo, sem alterar a posição de *uns em relação aos outros*, todas as distribuições assim obtidas são **equivalentes** e por isso consideradas como uma única permutação circular.

Assim, no caso do nosso exemplo, as seguintes 4 figuras

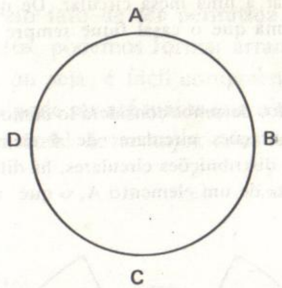


definem 4 permutações **simples** que constituem uma só permutação **circular:**

ABCD
DABC
CDAB
BCDA



É evidente que a uma outra disposição qualquer dessas pessoas também correspondem 4 permutações simples:



ADCB
BADC
CBAD
DCBA

Essa observação nos leva a estabelecer uma proporção: *como a uma permutação circular de 4 elementos corresponde um grupo de 4 permutações simples,* temos:

$$\begin{array}{lcl} 1 \ \text{(circular)} & \longrightarrow & 4 \ \text{(simples)} \\ PC_4 & \longrightarrow & P_4 \end{array}$$

e daí, que

$$PC_4 = \frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6$$

De modo análogo, concluímos que *a cada permutação circular de* n *elementos corresponde um grupo de* n *permutações simples.* Então, temos:

$$\begin{array}{lcl} 1 \ \text{(circular)} & \longrightarrow & n \ \text{(simples)} \\ PC_n & \longrightarrow & P_n \end{array}$$

Portanto,

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n}$$

donde

$$\boxed{PC_n = (n-1)!}$$

Exercícios Resolvidos

19.1) De quantas maneiras 8 crianças podem ocupar os 8 lugares de um carrossel?

Solução

Tratando-se de dispor as 8 crianças em um círculo, o total de modos é

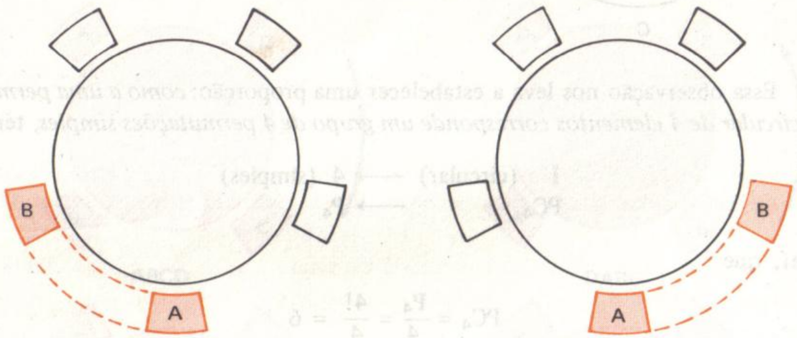
$$PC_8 = (8-1)! = 7! = 5\,040$$

19.2) Cinco pessoas (entre elas um casal) devem sentar a uma mesa circular. De quantos modos pode ser feita a sua disposição, de tal forma que o casal fique sempre junto?

Solução

É evidente que para mantermos o casal *unido*, devemos considerá-lo como *um só elemento* e, portanto, calcular o total de permutações circulares de 4 elementos.

No entanto, não devemos esquecer que, nas distribuições circulares, há diferença entre um elemento B estar à esquerda ou à direita de um elemento A, o que nos dá 2 possibilidades:



Assim, o total de modos é

$$2\,PC_4 = 2(4-1)! = 2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$$

Exercícios Propostos

19.3) De quantos modos podem 6 crianças se colocarem em roda?

19.4) Das 8 pessoas que devem sentar-se à uma mesa, A e B nunca podem ser vizinhas. Quantas são as disposições possíveis?

19.5) Um joalheiro dispõe de 4 tipos de pedras preciosas para confeccionar broches (com as pedras em círculo) e alianças, usando em cada jóia uma pedra de cada tipo. Quantos broches diferentes ele pode construir? E quantas alianças?

19.6) Os 8 lugares de um carrossel serão ocupados por 4 meninos e 4 meninas. Quantas são as maneiras de se fazer a ocupação de modo que meninos e meninas fiquem intercalados?

19.2 – ARRANJOS COM REPETIÇÃO

Neste item, voltamos a formar, com os elementos de um conjunto E, **agrupamentos ordenados**, podendo agora permitir que um elemento compareça mais de uma vez em cada grupo: são os arranjos com repetição.

Pelo fato de ser permitida a repetição, se por exemplo o conjunto E tem 3 elementos, podemos formar arranjos desses elementos tomados 4 a 4, tomados 5 a 5 etc., ou seja, é fácil compreendermos que agora a classe de um arranjo com repetição pode ser até maior que o número de elementos de E.

O total de arranjos com repetição de **n** elementos classe **k** é indicado por

$$AR_{n,k}$$

Exemplos

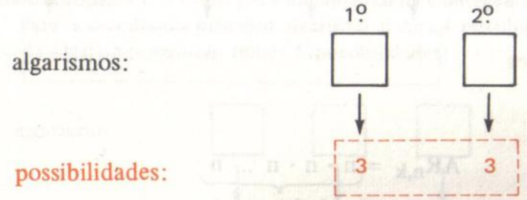
a) Consideremos $E = \{6; 8; 9\}$. Os **números de 2 algarismos** que podemos formar com esses elementos são

66	86	96
68	88	98
69	89	99

Temos, então, 9 arranjos de 3 elementos tomados 2 a 2, e podemos escrever

$$AR_{3,2} = 9$$

A esse resultado também se chega através do Princípio Fundamental da Contagem: para a escolha do primeiro algarismo temos 3 possibilidades e, como podemos repetir, para a escolha do segundo temos 3 possibilidades:



Então, o total desses números é

$$AR_{3,2} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

b) Seja $E = \{5; 7\}$. Os números de 4 algarismos que podemos formar com esses elementos são

5555	5755	7555	7755
5557	5757	7557	7757
5575	5775	7575	7775
5577	5777	7577	7777

Temos, então, 16 arranjos de 2 elementos tomados 4 a 4, e podemos escrever

$$AR_{2,4} = 16$$

Ou, como fizemos no exemplo anterior:

	1º	2º	3º	4º
algarismos:	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
possibilidades:	2	2	2	2

$$AR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Se procedermos de modo análogo para o cálculo do número de arranjos com repetição de n elementos tomados k a k:

	1º	2º	3º	...	kº
elementos:	$\square$	$\square$	$\square$	...	$\square$
possibilidades:	n	n	n	...	n

Obtemos

$$AR_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{k \text{ fatores}}$$

ou seja

$$\boxed{AR_{n,k} = n^k}$$

Observação. Para os casos em que $k = 0$ e $k = 1$, temos

$$AR_{n,0} = n^0 = 1$$

$$AR_{n,1} = n^1 = n$$

A exemplo do que fizemos nos arranjos simples, consideramos o conjunto ϕ como um arranjo de classe zero e os conjuntos unitários como arranjos de classe 1.

Exercício Resolvido

19.7) Quantos números de 3 algarismos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 8?

Solução

Podemos resolver de duas maneiras:

1º modo: (utilizando o conceito de arranjo)

Cada número é um arranjo com repetição de 5 elementos classe 3; seu total é, então

$$AR_{5,3} = 5^3 = 125$$

Nesse total, no entanto, estão incluídos os agrupamentos que começam com o zero e que não são números de 3 algarismos:

0		

Fixando o zero, temos 5 elementos para ocupar as duas casas restantes, dando-nos

$$AR_{5,2} = 5^2 = 25 \text{ agrupamentos}$$

Logo, o total de números é

$$AR_{5,3} - A_{5,2} = 125 - 25 = 100$$

2º modo: (utilizando o Princípio Fundamental da Contagem)

Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidades (excluímos o zero); para cada algarismo seguinte temos 5 possibilidades:

algarismos:	$\square$	$\square$	$\square$
possibilidades:	4	5	5

Logo, o total de números é

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$$

Nota – O leitor percebeu, com esse exercício, que muitos dos problemas do capítulo 9 referentes ao Princípio Fundamental da Contagem podem ser resolvidos com o conceito de arranjos com repetição e, pela própria exposição desse conceito, que os problemas de arranjos com repetição podem, todos, ser resolvidos por aquele Princípio. Por isso, os exercícios propostos a seguir não constituem novidade.

Exercícios Propostos

19.8) Dispondo de 3 cores, de quantos modos podemos pintar, cada uma de uma só cor, 5 casas dispostas em fila?

19.9) Cada *sinal* do Código Morse é formado por pontos e traços. Determine o número de sinais que podem ser formados com

a) 4 desses dois símbolos
b) até 4 desses dois símbolos

19.10) Quantos são os números naturais de 5 algarismos nos quais aparecem algarismos repetidos?

19.11) Num país as placas dos automóveis são constituídas de 2 letras (escolhidas de um alfabeto de 26 letras) seguidas de dois algarismos, sendo excluídas as placas que têm dois zeros e, também, as placas que têm duas letras O. Determine o total de automóveis que podem ser emplacados nesse país.

19.3 – COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

Quando estudamos as combinações *simples*, aprendemos que elas são agrupamentos (de elementos distintos) que não se modificam quando se altera a ordem de seus elementos. Por exemplo, sabemos que as combinações de classe 3

$$\{7; 8; 9\}, \{8; 7; 9\}, \{9; 8; 7\}$$

são todas **iguais**.

O conceito de **combinação com repetição** não é diferente: também é um agrupamento em que a ordem de seus elementos não é considerada; apenas, agora, é permitida a repetição de elementos.

Assim, se por exemplo tomarmos o conjunto $E = \{a; b; c; d\}$, os agrupamentos

aa			
ab	bb		
ac	bc	cc	
ad	bd	cd	dd

são as combinações (com repetição), de classe 2, dos 4 elementos de E.

É evidente, então, que aqui os agrupamentos **ab** e **ba** são iguais, o mesmo acontecendo com **bd** e **db**; e os agrupamentos **ab** e **bd** são diferentes porque têm elementos diferentes.

O número de combinações com repetição dos **n** elementos de um conjunto E tomados **k** a **k** é indicado por

$$\boxed{CR_{n,k}}$$

No exemplo acima, temos $n = 4$, $k = 2$ e $CR_{4,2} = 10$.

Exemplos

a) Consideremos $E = \{a; b; c\}$. As combinações de classe 3 desses elementos são

aaa	aab	aac
abb	abc	acc
bbb	bbc	bcc
ccc		

Temos, então, que $CR_{3,3} = 10$.

b) Seja $E = \{\alpha; \beta\}$. As combinações de classe 4 desses elementos são

$$\alpha\alpha\alpha\alpha \quad \alpha\alpha\alpha\beta \quad \alpha\alpha\beta\beta \quad \alpha\beta\beta\beta \quad \beta\beta\beta\beta$$

Temos, então, que $CR_{2,4} = 5$.

Cálculo de $CR_{n,k}$

Para determinarmos o número de combinações com repetição no caso geral, consideremos o conjunto

$$E = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$$

e vamos convencionar que cada combinação de classe k de seus elementos será sempre escrita de modo que os índices dos elementos fiquem em ordem natural; por exemplo, a combinação de classe $k = 6$

$$a_2 a_5 a_1 a_3 a_3 a_1$$

deve ser apresentada na forma

$$a_1 a_1 a_2 a_3 a_3 a_5 \qquad (I)$$

Em seguida, trocamos cada elemento da combinação pela letra x afetada de um novo índice, que é obtido somando-se o índice antigo com o número de elementos que precedem o elemento considerado. Por exemplo na combinação (I), o elemento a_2 será substituído por x_4, o segundo dos elementos a_3 será substituído por x_7; essa combinação passa então a

$$x_1 x_2 x_4 x_6 x_7 x_{10}$$

Para reforçar, outro exemplo: a combinação de classe $k = 6$

$$a_4 a_4 a_4 a_6 a_8 a_n \quad \text{(II)}$$

passa a

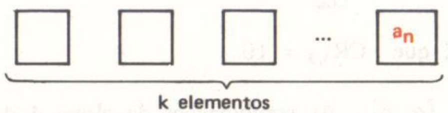
$$x_4 x_5 x_6 x_9 x_{12} x_{n+5}$$

Devemos observar que, com esse recurso, cada combinação de classe k acaba tendo todos os seus elementos com índices diferentes.

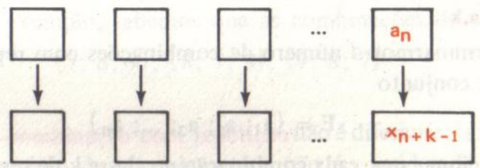
É fundamental notar, também, que a letra x terá índice máximo quando o elemento a_n ocupar a última posição da combinação. Por exemplo, na combinação (II) o elemento a_n é substituído por x_{n+5}; o índice $n + 5$ é o maior possível quando se tem uma combinação de classe $k = 6$.

Qual é, então, o índice máximo de x no caso de uma combinação de classe k qualquer?

Fazendo a_n ser o último dos k elementos da combinação



ele deve ser trocado por x com o índice n somado aos k - 1 elementos que o precedem.



Assim, o índice máximo é $n + k - 1$.

Com tudo isso percebemos que cada combinação com repetição de classe k com os elementos de

$$E = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots,\ a_n\}$$

é representada por uma combinação simples de classe k dos elementos de

$$F = \{x_1;\ x_2;\ x_3;\ \dots;\ x_{n+k-1}\}$$

o que nos leva a concluir que

$$\boxed{CR_{n,k} = C_{n+k-1,k}}$$

Exemplos

$$CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

$$CR_{3,4} = C_{3+4-1,4} = C_{6,4} = C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

$$CR_{5,5} = C_{5+5-1,5} = C_{9,5} = 126$$

Exercícios Resolvidos

19.12) Podendo escolher entre os sabores hortelã, laranja e limão, de quantos modos uma criança pode comprar 5 balas?

Solução

Notando que cada grupo de 5 balas é uma combinação de elementos repetidos escolhidos entre os 3 sabores, o total de modos é

$$CR_{3,5} = C_{3+5-1,5} = C_{7,5} = 21$$

19.13) Podendo escolher entre 5 tipos de queijo e 4 marcas de vinho de quantos modos é possível comprar 2 formas de queijo e 3 garrafas de vinho?

Solução

O problema se resolve em duas etapas:

1º) *escolha das formas de queijo*

Como se dispõe de 5 tipos para escolher 2 (iguais ou não), o número de possibilidades é $CR_{5,2} = C_{6,2} = 15$.

2º) *escolha das garrafas de vinho*

Como se dispõe de 4 marcas para escolher 3 garrafas (iguais ou não) o número de possibilidades é $CR_{4,3} = C_{6,3} = 20$.

Finalmente, o número de possibilidades de compra de queijo e vinho é

$$CR_{5,2} \cdot CR_{4,3} = 15 \cdot 20 = 300$$

19.14) Determine o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Solução

É evidente que para se obter uma soma de 3 números inteiros não negativos igual a 6, tais números devem ser escolhidos convenientemente entre os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Por exemplo, as trincas

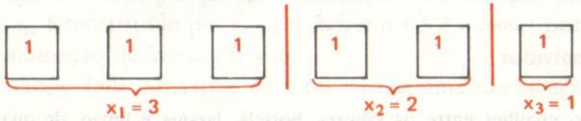
$$(0;\ 2;\ 4),\quad (2;\ 2;\ 2),\quad (0;\ 0;\ 6)$$

são *algumas* das soluções da equação.

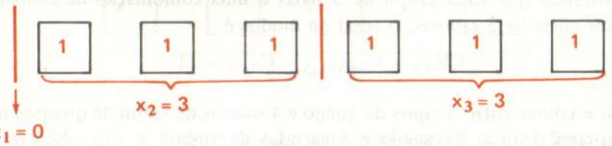
Para obtermos todas as soluções, vamos recorrer ao seguinte processo: como a soma deve ser 6, escrevemos 6 vezes o número 1:

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$$

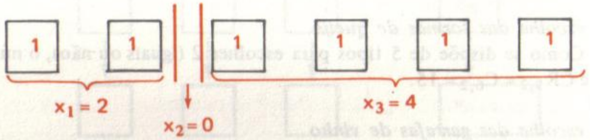
Como temos 3 incógnitas, separamos a fila acima em 3 grupos. Para isso, precisamos de apenas **duas** barras. Assim, as somas das unidades até a primeira barra, da primeira até a segunda e da segunda até o fim da fila nos dão valores de x_1, x_2 e x_3 que satisfazem a equação. Por exemplo



$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 2 + 1 = 6$$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 3 + 3 = 6$$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 0 + 4 = 6$$

Deste modo, se calcularmos o total de maneiras de se colocar as duas barras nas 7 posições possíveis, teremos o número de soluções da equação.

Como se trata de escolher 2 das 7 posições, não havendo modificação se trocarmos as 2 barras entre si, e podendo colocar as 2 na mesma posição, cada escolha é uma combinação **com repetição** de 7 elementos **tomados 2 a 2**. Então, temos:

$$CR_{7,2} = C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ soluções}$$

19.15) Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$$

Solução

Não podemos, agora, aceitar soluções em que alguma variável seja igual a zero; no entanto, vamos observar que subtraindo uma unidade de cada elemento das soluções pedidas, por exemplo

$$(3;\ 4;\ 1;\ 2;\ 3) \xrightarrow{-1} (2;\ 3;\ 0;\ 1;\ 2)$$

$$(6;\ 1;\ 3;\ 2;\ 1) \xrightarrow{-1} (5;\ 0;\ 2;\ 1;\ 0)$$

$$(2;\ 5;\ 2;\ 2;\ 2) \xrightarrow{-1} (1;\ 4;\ 1;\ 1;\ 1)$$

obtemos as soluções inteiras **não negativas** da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \qquad \text{(I)}$$

Portanto, basta determinar o número dessas soluções da equação (I), o que fazemos como no exercício anterior.

Como devemos ter soma 8, escrevemos

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$$

Tendo 5 incógnitas, precisamos de 4 barras para separar essa fila em 5 grupos. Dispomos de 9 posições para colocar 4 barras, podendo haver mais de uma na mesma posição. Assim, cada escolha é uma combinação com repetição, de classe 4, de 9 elementos.

Logo, o total de soluções inteiras e positivas da equação dada é

$$CR_{9,4} = C_{12,4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

Exercícios Propostos

19.16) Calcule

a) $CR_{8,3}$ b) $CR_{5,7}$ c) $CR_{6,6}$

19.17) Verifique que $CR_{n,k} = CR_{k+1,n-1}$

19.18) Um vendedor de livros quer comprar, para revenda, 5 volumes. O fornecedor dispõe de vários exemplares de 6 romances e de 6 livros técnicos. Determine o número de compras diferentes que pode o vendedor fazer, obtendo:

a) 5 livros quaisquer
b) 3 romances e 2 livros técnicos

19.19) Com os elementos do conjunto $E = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ formam-se as combinações com repetição de classe 5. Quantas delas tem o elemento d? Quantas não tem o elemento a?

19.20) Determine o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

19.21) Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

19.22) Considere a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m = \alpha$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha \geqslant m$. Determine o número de soluções inteiras e

a) não negativas
b) positivas

Exercícios Suplementares

VI.1) Quantos são os números de 3 algarismos em nosso sistema, em que aparecem algarismos repetidos?

VI.2) De quantos modos podemos repartir 17 livros, entre 4 alunos, admitindo que alguns possam ficar sem livros?

VI.3) Nas faces de um tetraedro regular de quantas maneiras podemos aplicar 4 cores distintas ou não, usando-se 7 cores?

VI.4) Numa urna existem muitas bolas brancas e vermelhas. Retirando-se 3 bolas sucessivamente, de quantas maneiras pode sair a distribuição das cores?

VI.5) Com os algarismos 3, 4 e 5 quantos números podemos formar tendo no mínimo 3 algarismos e no máximo 6 algarismos?

VI.6) Com os algarismos 1, 3, 5 e 7 quantos números de 4 algarismos podemos formar começando com 1 e terminando com o 7?

VI.7) Quantas palavras diferentes se podem formar, batendo-se 5 vezes ao acaso, em uma das 26 teclas de letras da máquina de escrever?

VI.8) Escrevendo-se todos os números inteiros de 1 a 1 000, quantas vezes os algarismos (de zero a nove) foram utilizados?

PARTE VII

Capítulo **20**

Noções de probabilidade

20.1 – EXPERIMENTO ALEATÓRIO – RESULTADOS EQUIPROVÁVEIS

Quando lançamos um dado e observamos o número obtido na face superior, sabemos de antemão que o resultado poderá ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. No entanto, **não podemos garantir** que irá ocorrer, por exemplo, o número 4; é *possível* que ocorra, como também é possível ocorrer qualquer outro número em jogo. Essa impossibilidade de prever o resultado se deve ao que chamamos de *acaso*.

Formamos, assim, a idéia de **experimento aleatório**: uma experiência que, embora executada repetidas vezes, em condições aparentemente idênticas, pode apresentar resultados variados, não sendo possível a previsão lógica de cada resultado.

Os lançamentos de dados ou moedas, a distribuição das cartas de um baralho, os sorteios em geral, são exemplos de experimentos aleatórios.

Os vários resultados desse tipo de experiência podem ou não ser **igualmente prováveis**, isto é, a *oportunidade* de se obter um determinado resultado pode ser igual ou diferente da *oportunidade* de um outro resultado da mesma experiência. Por exemplo, ao lançarmos um dado, a *chance* de ocorrer o número 4 é **igual** à de ocorrer o 1, o 2, o 3, o 5 ou o 6. Isso já não acontece no seguinte experimento: em dez etiquetas iguais e enfileiradas, escrevemos a palavra MATEMÁTICA, uma letra em cada etiqueta:

M	A	T	E	M	Á	T	I	C	A

em seguida, misturamos as dez em uma urna e retiramos uma delas. É fácil perceber que as *chances* das letras M, A, T, E, I, C não são todas iguais, pois há mais etiquetas com a letra A do que com a letra T, mais com M do que com E etc.

Muitas vezes, o **processo** de realização de um experimento pode tornar seus resultados equiprováveis ou não. Admita-se, como exemplo, que desejamos escolher um animal de uma jaula onde há um elefante, um macaco, um cavalo, um gato selvagem e uma zebra. Se simplesmente sorteamos o animal entrando na jaula e escolhendo aquele que primeiro nos morder, é evidente que o gato terá maior oportunidade de ser escolhido. No entanto, se marcarmos o nome de cada bicho em um cartão (cinco cartões iguais) e sortearmos um, podemos garantir que todos os animais têm a mesma chance de serem escolhidos, isto é, os resultados da experiência se tornam igualmente prováveis.

Nesta obra, restringiremos nosso estudo aos **experimentos aleatórios de resultados equiprováveis.**

20.2 – ESPAÇO AMOSTRAL – EVENTO

Ao realizarmos um experimento aleatório, com a finalidade de observar a ocorrência de um determinado tipo de resultado, dois conjuntos traduzem nossa expectativa: um, formado por todos os resultados possíveis da experiência; outro, formado pelos resultados que desejamos observar. Assim, se num jogo lançamos um dado e nosso sucesso depender da obtenção de um número maior que 4, nos fixamos no conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, que descreve *tudo* que pode acontecer, e no conjunto $\{5; 6\}$, que descreve o que *queremos* que aconteça. É claro que o segundo conjunto será, sempre, um **subconjunto** do primeiro. Adotamos, então, as seguintes definições:

Espaço Amostral – Ao conjunto E formado por **todos os resultados possíveis** de um experimento aleatório damos o nome de **espaço amostral.**

Em nosso estudo, vamos considerar apenas **espaços amostrais finitos e não vazios**, e indicaremos o número de resultados por n_E.

Evento – Damos o nome de **evento** a **qualquer subconjunto** do espaço amostral.

Em termos práticos, o evento é um conjunto formado pelos resultados cuja ocorrência desejamos observar, pelos resultados que queremos *ver acontecer.*

Indicaremos por n_A o número de elementos de um evento A.

Exemplos

Experimento 1: lançar um dado; o resultado é o número obtido na face superior.

- *espaço amostral*:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \quad n_E = 6$$

- *alguns eventos*:

a) observar a ocorrência do número 2:

$$A = \{2\}; \quad n_A = 1$$

b) observar a ocorrência de número par:

$$B = \{2; 4; 6\}; \quad n_B = 3$$

c) observar a ocorrência de número maior que 6:

$$C = \phi; \quad n_C = 0$$

d) observar a ocorrência de número inteiro:

$$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = E; \quad n_D = 6$$

Experimento 2: lançar duas moedas diferentes; o resultado é o par de faces superiores.

- *espaço amostral* (c = cara; k = coroa):

$$E = \{(c; c); (c; k); (k; c); (k; k)\}; \quad n_E = 4$$

- *alguns eventos*:

a) ocorrência de duas caras:

$$A = \{(c; c)\}; \quad n_A = 1$$

b) ocorrência de no mínimo uma cara:

$$B = \{(c; k); (k; c); (c; c)\}; \quad n_B = 3$$

c) ocorrência de no máximo uma cara:

$$C = \{(c; k); (k; c); (k; k)\}; \quad n_C = 3$$

Experimento 3: lançar dois dados diferentes; o resultado é o par de números obtidos nas faces superiores.

- *espaço amostral*:

$$E = \{\begin{array}{l}(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6)\\ (2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6)\\ (3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6)\\ (4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6)\\ (5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6)\\ (6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6)\end{array}\}; \quad n_E = 6 \cdot 6 = 36$$

- *alguns eventos*:

a) ocorrer números iguais nos dois dados:

$$A = \{(1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)\}; \quad n_A = 6$$

b) ocorrer números de paridades opostas:

$B = \{(1;2); (1;4); (1;6);$
$(2;1); (2;3); (2;5);$
$(3;2); (3;4); (3;6);$
$(4;1); (4;3); (4;5);$
$(5;2); (5;4); (5;6);$
$(6;1); (6;3); (6;5)\}; n_B = 18$

c) ocorrer soma 7:

$$C = \{(1;6); (2;5); (3;4); (4;3); (5;2); (6;1)\}; n_C = 6$$

d) ocorrer soma 11:

$$D = \{(5;6); (6;5)\}; n_D = 2$$

Nota – A seqüência de exemplos acima mostra que, à medida que o número de elementos envolvidos no experimento vai aumentando, torna-se cada vez mais *difícil* escrever o espaço amostral **enumerando** cada um dos resultados possíveis. Por isso, utilizamos, em alguns casos, o processo de representar o conjunto apenas **descrevendo** o tipo de elementos que ele possui e, para a determinação do **número** de resultados, recorremos aos métodos de contagem da Análise Combinatória. Vejamos alguns exemplos.

Experimento 4: retirar 3 cartas de um baralho de 52 cartas e observar, independente da ordem, o grupo formado.

- *espaço amostral*:

$$E = \{\text{grupos de 3 cartas}\}$$

O total de resultados possíveis, isto é, o número de elementos E, é o número de **combinações** de 52 elementos tomados 3 a 3:

$$n_E = C_{52,3} = 22\,100$$

- *alguns eventos*:

a) ocorrer 3 ases:

$$A = \{\text{grupos de 3 ases}\}$$

Como temos 4 ases no baralho,

$$n_A = C_{4,3} = 4$$

b) ocorrer 3 cartas de copas:

$$B = \{\text{grupos de 3 cartas de copas}\}$$

Como temos 13 cartas de copas,

$$n_B = C_{13,3} = 286$$

c) ocorrer exatamente um ás:

$$C = \{\text{grupos com ás e 2 outras cartas}\}$$

Para a escolha do ás, temos 4 possibilidades; para a escolha das outras duas, eliminamos os ases, restando-nos 48 cartas, o que nos dá $C_{48,2}$ possibilidades

$$\boxed{\text{Ás}} \quad \boxed{\neq\text{Ás} \mid \neq\text{Ás}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

possibilidades: $\boxed{4 \qquad C_{48,2}}$

Logo, temos $n_C = 4 \cdot C_{48,2} = 4\,512$

Experimento 5: **de uma urna com 31 bolas numeradas de 1 a 31, retirar duas e observar o par de números obtidos.**

- *espaço amostral*:

notando que ao retirarmos duas bolas formamos um par ordenado de elementos distintos (se uma delas tem o número 17, a outra certamente terá um número diferente de 17), temos

$$E = \{(x;y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 31 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 31 \text{ e } x \neq y\}$$

e $n_E = A_{31,2} = 930$

- *alguns eventos*:

a) **ocorrer dois números menores ou iguais a 21:**

$$A = \{(x;y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 21 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 21 \text{ e } x \neq y\}$$

$$n_A = A_{21,2} = 420$$

b) **ocorrer um par com primeiro elemento menor que 12:**

$$B = \{(x;y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x < 12 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 31 \text{ e } x \neq y\}$$

Notando que para o primeiro elemento temos 11 possibilidades e, escolhido este, restam 30 possibilidades para o segundo, temos

$$n_B = 11 \cdot 30 = 330$$

20.3 – PROBABILIDADE

Vamos, agora, definir probabilidade de um evento num experimento aleatório de resultados equiprováveis.

b) O evento *ocorrer número maior que 4* é representado pelo conjunto $B = \{5; 6\}$.
Como $n_B = 2$, vem

$$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se desejarmos os resultados em *porcentagem*, multiplicamos os números encontrados por 100%. Assim, temos:

a) a probabilidade de ocorrer número primo é $\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$.

b) a probabilidade de ocorrer número maior que 4 é $\frac{1}{3} \cdot 100\% \cong 33{,}33\%$.

20.2) Numa urna há cem bolas numeradas de 1 a 100. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade dela possuir um:

a) múltiplo de 3?
b) múltiplo de 7?

Solução

O espaço amostral da experiência é

$$E = \{1; 2; 3; 4; ...; 99; 100\} \quad e \quad n_E = 100$$

a) O evento *ocorrer um múltiplo de 3* é $A = \{3; 6; 9; ...; 99\}$. Para obtermos n_A basta dividirmos 100 por 3: o quociente é n_A.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ \hline 1 & 33 \end{array}$$

Então, como $n_A = 33$, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{33}{100}$

b) O evento ocorrer um múltiplo de 7 é $B = \{7; 14; 21; ...; 98\}$. Como o quociente da divisão de 100 por 7 é 14, temos $n_B = 14$. Logo, $P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$.

Observação: Os números n_A e n_B poderiam, evidentemente, ser obtidos pela expressão do termo geral das progressões aritméticas $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

20.3) No lançamento de dois dados diferentes, qual a probabilidade de ocorrer:

a) soma 7?
b) ao menos um número primo?

Solução

O resultado de um lançamento de dois dados é um par ordenado. Dessa forma, o espaço amostral do experimento pode ser assim descrito:

$$E = \{(x; y),\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 6 \ \ e \ \ 1 \leqslant y \leqslant 6\}$$

Para o cálculo de n_E, temos:

1º dado 2º dado

$$\boxed{x} \qquad \boxed{y}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

possibilidades: 6 6

Logo, $n_E = 6 \cdot 6 = 36$

a) O evento *ocorrer soma 7* é

$$A = \{(1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2); (6; 1)\}$$

Como $n_A = 6$, $P[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) O evento *ocorrer ao menos um número primo* é:

$$\begin{aligned} B = \{&(1; 2); (1; 3); (1; 5); \\ &(2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6); \\ &(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6); \\ &(4; 2); (4; 3); (4; 5); \\ &(5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5); (5; 6); \\ &(6; 2); (6; 3); (6; 5)\} \end{aligned}$$

Como $n_B = 27$, $P[B] = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

20.4) No exercício anterior, qual a probabilidade de não ocorrer soma 11?

Solução

Consideremos o evento ocorrer *soma 11*: $C = \{(5; 6); (6; 5)\}$. Temos

$$P[C] = \frac{n_C}{n_E} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Observando que o evento não *ocorrer soma 11* é o complementar de C, vem:

$$P[\overline{C}] = 1 - P[C] = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

20.5) A tabela a seguir dá o número de máquinas de calcular existentes em um escritório, segundo suas características. Todas as máquinas estão embaladas em estojos iguais. Escolhendo um estojo ao acaso, determine a probabilidade dele:

	ELÉTRICAS	MANUAIS
NOVAS	45	30
USADAS	15	10

a) conter uma máquina nova
b) conter uma máquina manual
c) não conter uma máquina elétrica usada
d) não conter uma máquina manual usada

Intuitivamente, o leitor domina a *idéia* de probabilidade: se num jogo de cara ou coroa nosso sucesso é a ocorrência de cara, temos a *metade das chances* de ganhar e dizemos, inclusive, que nossa *probabilidade* é de 1 para 2 e, portanto, igual a $\frac{1}{2}$. No entanto é preciso esclarecer que, em duas jogadas, não acontecerá necessariamente uma cara e uma coroa; é possível que, em por exemplo 10 jogadas, ocorra 8 vezes coroa, ao que reagimos dizendo:

"Puxa, que azar!" ou

"Não é possível: essa moeda é viciada!!"

O que devemos entender ao avaliar em $\frac{1}{2}$ a probabilidade de obter cara, é que num número *muito grande* de lançamentos da moeda, a freqüência com que ocorre cada uma das faces é bastante próxima da metade do número de jogadas.

Com essas considerações, definimos

A **probabilidade** de ocorrer um evento A, num experimento aleatório de espaço amostral E, é o número P[A] dado por

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E}$$

Observações

1ª) É evidente que, sendo A um **subconjunto** de E, temos

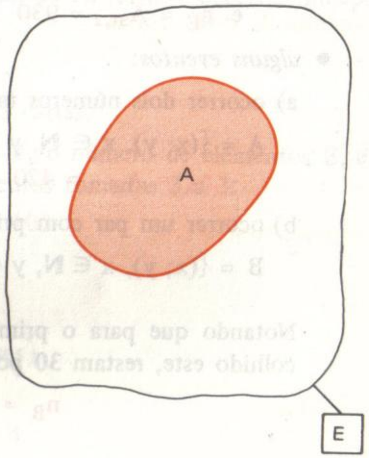
$$0 \leqslant n_A \leqslant n_E$$

Dividindo essa dupla desigualdade por n_E, vem

$$\frac{0}{n_E} \leqslant \frac{n_A}{n_E} \leqslant \frac{n_E}{n_E}$$

ou seja

$$\boxed{0 \leqslant P[A] \leqslant 1}$$

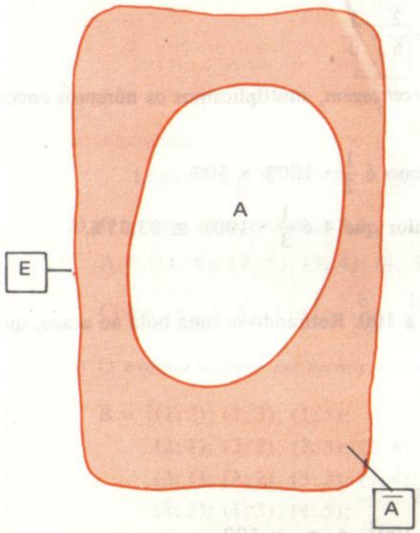


Nos casos extremos, temos:

- se $P[A] = 0$, o evento $A = \phi$ chama-se **evento impossível**;
- se $P[A] = 1$, o evento $A = E$ chama-se **evento certo.**

Esses casos podem ser ilustrados pelos eventos dos itens **c** e **d** do experimento 1, nos exemplos anteriores.

2ª) *Probabilidade do evento complementar*



Seja $\bar{A}$ o evento complementar de A em relação a E. Percebemos que $\bar{A}$ possui, como elementos, todos os resultados descritos no espaço amostral *com exceção daqueles que formam A*. Assim, se calcularmos a **probabilidade de $\bar{A}$**, estaremos determinando a **probabilidade de não ocorrer o evento A.** Como

$$n_{\bar{A}} = n_E - n_A,$$

dividindo membro a membro por n_E, vem

$$\frac{n_{\bar{A}}}{n_E} = \frac{n_E}{n_E} - \frac{n_A}{n_E}$$

ou seja,

$$\boxed{P[\bar{A}] = 1 - P[A]}$$

o que quer dizer que **a probabilidade de não ocorrer um certo evento é 1 menos a probabilidade dele ocorrer.** Portanto, se a probabilidade de, por exemplo, retirarmos uma bola azul de uma urna é 0,3 (30%), a de não retirarmos uma bola dessa cor é 1 - 0,3 = 0,7 (70%).

Exercícios Resolvidos

20.1) Qual a probabilidade de, no lançamento de um dado, obtermos:

a) número primo?

b) número maior que 4?

Solução

O espaço amostral do lançamento é:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}. \text{ Então, } n_E = 6$$

a) O evento *ocorrer número primo* é representado pelo conjunto $A = \{2; 3; 5\}$. Como $n_A = 3$, vem

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Solução

O espaço amostral dessa experiência é o conjunto E de todas as máquinas. Assim, vemos na tabela que $n_E = 100$.

a) O evento A = {ocorre máquina nova} tem 75 casos favoráveis, isto é, $n_A = 75$. Então,

$$P[A] = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

b) o evento B = {ocorre máquina manual} tem 40 casos favoráveis, isto é, $n_B = 40$. Então,

$$P[B] = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

c) seja o evento C = {ocorre máquina elétrica nova}. Como existem 45 máquinas que são elétricas e novas, temos $n_C = 45$ e $P[C] = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

Observando que o evento **não** *ocorre máquina elétrica nova* é o complementar de C, vem:

$$P[\overline{C}] = 1 - P[C] = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

d) seja o evento D = {ocorre máquina manual usada}. Temos $n_D = 10$ e $P[D] = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Observando que o evento **não** *ocorre máquina manual usada* é o complementar de D, vem:

$$P[\overline{D}] = 1 - P[D] = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

20.6) No exercício anterior, suponha que uma pessoa escolhe um estojo ao acaso e descobre que ele contém uma máquina nova. Qual a probabilidade dessa máquina ser elétrica?

Solução

Quando recebemos a informação de que a máquina é nova, imediatamente eliminamos todas as máquinas usadas da experiência:

	ELÉTRICAS	MANUAIS
NOVAS	45	30

isto é, restringimos o nosso campo de trabalho às 75 novas. Isso equivale a reduzir o espaço amostral ao conjunto E' de máquinas novas, com $n_{E'} = 75$. Nesse campo, o evento F = {máquina elétrica} tem 45 casos favoráveis. Então,

$$P[F] = \frac{n_F}{n_{E'}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

20.7) Numa urna há 7 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. Retirando-se, simultaneamente, duas bolas, qual a probabilidade de ambas serem azuis?

Solução

Devemos notar que, nessa experiência, o espaço amostral E não é formado pelas 11 bolas consideradas individualmente, pois cada **dupla** de bolas é que constitui um resultado. Assim,

$$E = \{(\text{todas}) \text{ duplas de bolas}\}$$

e o total de resultados possíveis é, portanto:

$$n_E = C_{11,2} = 55$$

Como o evento desejado é

$$A = \{(\text{todas}) \text{ duplas de bolas azuis}\}$$

temos:

$$n_A = C_{7,2} = 21$$

Logo, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{C_{7,2}}{C_{11,2}} = \frac{21}{55}$

20.8) Numa urna há 20 cartões numerados de 1 a 20. Retirando-se, ao acaso, dois cartões, qual a probabilidade de se obter um par de números menores que 12?

Solução

Como cada resultado é um par ordenado de elementos diferentes, o espaço amostral E pode ser escrito:

$$E = \{(x;\ y),\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 20 \ \text{ e } \ 1 \leqslant y \leqslant 20 \ \text{ e } \ x \neq y\}$$

Assim, dispondo de 20 elementos para escolher, ordenadamente, 2 distintos, temos:

$$n_E = A_{20,2} = 380$$

O evento *par de números menores que 12* é

$$A = \{(x;\ y),\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x < 12 \ \text{ e } \ 1 \leqslant y < 12 \ \text{ e } \ x \neq y\}$$

Como dispomos agora de 11 elementos, vem:

$$n_A = A_{11,2} = 110$$

Logo, $P[A] = \frac{A_{11,2}}{A_{20,2}} = \frac{110}{380} = \frac{11}{38}$

20.9) Retirando-se, ao acaso, 4 cartas de um baralho de 52 cartas, determine a probabilidade de se obter

a) 4 ases
b) 4 cartas de copas
c) 2 ases e 2 reis

Solução

Como cada resultado é formado por 4 cartas, nosso espaço amostral é

$$E = \{\text{(todos) grupos de 4 cartas}\}$$

e temos $n_E = C_{52,4}$

a) seja o evento *ocorrer 4 ases*:

$$A = \{\text{grupo dos 4 ases}\}$$

É importante notar que A possui **um só elemento**, pois os 4 ases do baralho formam um único **grupo de 4 cartas**. Assim, se $n_A = 1$,

$$P[A] = \frac{1}{C_{52,4}} = \frac{1}{270\,725}$$

b) o evento $B = \{\text{(todos) grupos de 4 cartas de copas}\}$ é constituído pelo total de combinações das 13 cartas de copas formadas 4 a 4. Assim, $n_B = C_{13,4}$ e

$$P[B] = \frac{C_{13,4}}{C_{52,4}} = \frac{\dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{715}{270\,725}$$

c) Para calcularmos o número de elementos do evento $C = \{\text{(todos) grupos com 2 ases e 2 reis}\}$, como dispomos de 4 ases e 4 reis, fazemos:

A	A		R	R

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

possibilidades: $\boxed{C_{4,2} \qquad C_{4,2}}$

$$n_C = C_{4,2} \cdot C_{4,2}$$

$$\text{Logo,} \quad P[C] = \frac{C_{4,2} \cdot C_{4,2}}{C_{52,4}} = \frac{\dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{36}{270\,725}$$

Exercícios Propostos

20.10) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número cujo dobro é menor que 10?

20.11) Lançando-se duas moedas diferentes qual a probabilidade de se obter no mínimo uma cara?

20.12) Numa urna há 4 bolas verdes, 6 amarelas e 5 brancas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade dela:

a) ser verde?
b) não ser branca?
c) não ser amarela?

20.13) No lançamento de dois dados diferentes, ambos de 4 faces (tetraedros regulares), qual a probabilidade de se obter

a) soma 7?
b) soma menor que 5?
c) número primo em ambos?
d) ao menos um número ímpar?

20.14) Abrindo-se, ao acaso, um livro de 200 folhas numeradas, apenas na frente, de 1 a 200, qual a probabilidade de se observar:

a) um múltiplo de 11?
b) um múltiplo de 15?

20.15) Sabe-se que uma pessoa nasceu entre os anos de 1885 e 1979 (excluídos esses anos). Qual a probabilidade do ano de nascimento ter sido bissexto?

20.16) A tabela a seguir dá as características sangüíneas de 50 indivíduos. Escolhendo-se, ao acaso, uma dessas pessoas, qual é, em porcentagem, a probabilidade dela:

	tipo A	tipo B
fator RH^+	20	15
fator RH^-	10	5

a) ter sangue tipo A?
b) não ter sangue com fator RH^-?
c) ter sangue tipo A com fator RH^+?
d) não ter sangue tipo B com fator RH^-?

20.17) No exercício anterior, suponha que se escolheu uma pessoa de sangue tipo B. Qual a probabilidade dela ter fator RH^+?

20.18) Retirando-se, ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas, descobre-se que é um ás. Qual a probabilidade dele ser de ouros? E de ser de naipe preto?

20.19) Retirou-se uma carta de um baralho de 52 cartas e descobriu-se que ela é de espadas. Qual a probabilidade de ter sido sorteado:

a) um ás?
b) uma figura?
c) uma carta com múltiplo de 2?

20.20) Cada termo do desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ $n > 6$ é escrito em uma etiqueta (todas etiquetas iguais). O mesmo se faz com os termos de $(y - b)^n$. As etiquetas são todas colocadas em uma urna e retira-se uma ao acaso. Determine a probabilidade de ter sido escolhida uma etiqueta com:

a) o termo $\binom{n}{6} a^6 x^{n-6}$

b) um termo cujo coeficiente binomial é $\binom{n}{6}$

c) um termo cujo coeficiente binomial tenha o valor $\dfrac{n!}{6!\,(n-6)!}$

20.21) Um professor de Matemática diz a seus alunos que, sob certas condições, é capaz de adivinhar um número; e propõe o seguinte: um dos alunos deve pensar num número inteiro *entre* 9 e 50, e subtrair desse número a soma de seus dois algarismos (por exemplo, se o aluno pensar no 45, ele deve fazer a operação 45 − (4 + 5), obtendo o número 36). Qual a probabilidade do professor acertar, na primeira tentativa, o número obtido pelo aluno após a operação solicitada?

20.22) Numa urna há 8 bolas azuis, 7 vermelhas e 5 pretas. Retirando-se simultaneamente 3 bolas, qual a probabilidade de:

a) as 3 serem azuis?
b) nenhuma das 3 ser vermelha?

20.23) Formam-se todos os anagramas da palavra SALÁRIO. Escolhendo-se um deles ao acaso, qual a probabilidade de se obter um anagrama em que as duas letras A não estão juntas?

20.24) De um baralho de 28 cartas (4 naipes com 7 cartas cada) são retiradas simultaneamente 5 cartas. Determine a probabilidade de serem obtidas:

a) 5 cartas de ouros
b) 3 cartas de ouros e 2 de espadas
c) exatamente 3 cartas de ouros
d) no mínimo 4 cartas de ouros

20.25) Num estoque de 20 camisas, há 5 com defeito. Escolhendo-se ao acaso 6 camisas, qual a probabilidade de que exatamente a metade delas seja defeituosa?

20.26) Num grupo de 12 profissionais há 4 geógrafos, 4 historiadores e 4 cientistas sociais. Escolhendo-se, ao acaso, uma comissão de 6 pessoas, qual a probabilidade de haver exatamente 2 de cada profissão citada?

20.27) Duas etiquetas são sorteadas de uma caixa com n etiquetas, numeradas de 1 a n. Qual a probabilidade de que as duas etiquetas escolhidas tenham números consecutivos?

20.28) De uma urna com n etiquetas, numeradas de 1 a n, $(n > 4)$, são retiradas 3 etiquetas. Sendo n um número ímpar, qual a probabilidade de serem obtidas 3 etiquetas com números ímpares consecutivos?

20.29) Considere o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Do conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; ...; 51\}$ são escolhidos dois números distintos para ocuparem, respectivamente, os lugares de x e y em D. Qual a probabilidade de que os números escolhidos acarretem $D = 0$?

20.30) Considere o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Do conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ são escolhidos três números distintos para ocuparem, respectivamente, os lugares de a, b e c. Assim, sempre se terá $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$. Qual a probabilidade de que os três números escolhidos acarretem $D = 0$?

Capítulo 21

Soma de probabilidades

Vamos considerar a realização de um experimento aleatório, de espaço amostral E, no qual se deseja observar **a ocorrência de um evento A ou de um evento B.** Para melhor nos situarmos, um exemplo: suponhamos que de uma urna com 30 bolas, numeradas de 1 a 30, seja extraída uma bola para se verificar a ocorrência de *um múltiplo de 2* **ou** *de um múltiplo de 3*; estão assim caracterizados o espaço amostral:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...; 30\} \quad (n_E = 30)$$

e os eventos

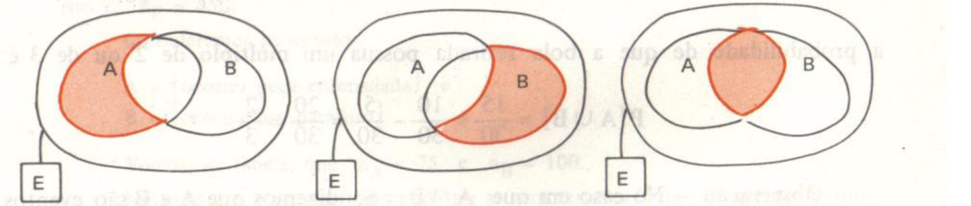
$$A = \{2; 4; 6; 8; ...; 30\} \quad (n_A = 15)$$
$$B = \{3; 6; 9; 12; ...; 30\} \quad (n_B = 10)$$

Quando dizemos "observar a ocorrência de A ou B" estamos nos dispondo a aceitar, como resultados *favoráveis*, aqueles que correspondam ao sucesso:

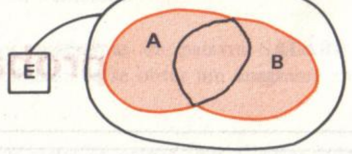
1º) somente de A (e não de B)
2º) somente de B (e não de A)
3º) de A e de B, simultaneamente

Assim, no exemplo acima, admitimos a ocorrência de um número que seja somente múltiplo de 2 (2; 4; 8; 10; 14; 16; 20; 22; 26; 28), somente múltiplo de 3 (3; 9; 15; 21; 27), e também de um múltiplo simultâneo de 2 e de 3 (6; 12; 18; 24; 30), isto é, múltiplo de 6.

Ora, se representarmos todas essas possibilidades através de diagramas



somente A (múltiplo só de 2) — somente B (múltiplo só de 3) — A e B (múltiplo de 6) fica evidente que observar a ocorrência de A ou B equivale a observar a ocorrência da **união** dos dois eventos, isto é, do evento $A \cup B$.



A ou B
(múltiplo de 2 ou 3)

Sendo assim, para calcularmos a **probabilidade** de ocorrer A ou B, lembramos que:

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$$

e dividimos ambos os membros dessa igualdade por n_E:

$$\frac{n_{A\cup B}}{n_E} = \frac{n_A}{n_E} + \frac{n_B}{n_E} - \frac{n_{A\cap B}}{n_E}$$

Obtemos, desse modo, a expressão conhecida como **regra da soma de probabilidades** ou **probabilidade da união:**

$$\boxed{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]}$$

onde lemos que a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é a probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade de ocorrer A e B.

No exemplo, temos:

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{15}{30}, \quad P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{10}{30}$$

e, como $A \cap B = \{\text{múltiplo de } 6\}$ $(n_{A\cap B} = 5)$ $P[A \cap B] = \dfrac{n_{A\cap B}}{n_E} = \dfrac{5}{30}$. Portanto,

a probabilidade de que a bola retirada possua um **múltiplo de 2 ou de 3** é:

$$P[A \cup B] = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Observação – No caso em que $A \cap B = \phi$, dizemos que A e B são eventos **mutuamente exclusivos**, isto é, se um deles ocorrer, o outro certamente não ocorrerá.

Nesta situação, como $n_{A\cap B} = 0$, é claro que:

$$\boxed{P[A \cup B] = P[A] + P[B]}$$

Como exemplo, consideremos uma lista de 20 diplomatas, dos quais 8 se encontram no Brasil, 6 em Angola e os demais em outros países; escolhendo um dos nomes ao acaso, a probabilidade de ele ser de um diplomata que se acha no Brasil (B) ou em Angola (A) é:

$$P[B \cup A] = P[B] + P[A] = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

pois, evidentemente, o evento *estar no Brasil* e o evento *estar em Angola* são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \phi$ e $P[A \cap B] = 0$.

Exercícios Resolvidos

21.1) **Numa caixa há 100 parafusos e 50 porcas, cada uma das peças embalada de modo a torná-las indistingüíveis pelo tato. Metade dos parafusos e metade das porcas estão enferrujadas. Escolhendo-se uma peça ao acaso, qual a probabilidade de se obter uma peça enferrujada ou um parafuso?**

Solução

	PERFEITAS	ENFERRUJADAS	
PARAFUSOS	50	50	100
PORCAS	25	25	50
	75	75	150

O espaço amostral E do experimento *retirada de uma peça* tem 150 elementos, isto é, $n_E = 150$.

Consideremos os eventos

A = {ocorrer peça enferrujada} e
B = {ocorrer um parafuso}

Vemos, na tabela, que $n_A = 75$ e $n_B = 100$.

Notando que a peça retirada pode ter as características tanto do evento A como do evento B, isto é:

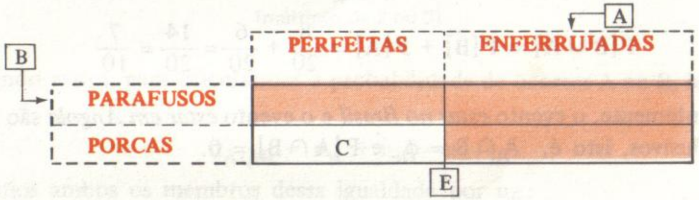
$A \cap B$ = {ocorrer parafuso enferrujado} onde $n_{A \cap B} = 50$, a probabilidade de ser escolhida uma peça enferrujada ou um parafuso é:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] =$$

$$= \frac{75}{150} + \frac{100}{150} - \frac{50}{150} = \frac{125}{150} = \frac{5}{6}$$

Outro modo:

Podemos, também, resolver o problema utilizando o conceito de probabilidade do evento complementar



Para tanto, basta entendermos que *ocorrer peça enferrujada* ou *parafuso* equivale a não ocorrer porca perfeita.

Assim, se considerarmos o evento

$$C = \{\text{ocorrer porca perfeita}\}$$

(veja o diagrama), temos $n_C = 25$ e $P[C] = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade procurada é

$$P[A \cup B] = P[\overline{C}] = 1 - P[C] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

21.2) Numa sala estão reunidas 12 pessoas, entre elas José e Eustáquio. Escolhendo-se, ao acaso, uma comissão de 4 pessoas, qual a probabilidade de José ou Eustáquio pertencerem a essa comissão?

Solução

O espaço amostral E dessa experiência é o conjunto de todas as comissões de 4 pessoas que podem ser formadas com as 12 participantes da reunião. Portanto,

$$n_E = C_{12,4}$$

Considerando o evento A como aquele formado pelas comissões das quais José participa, temos

$$n_A = C_{11,3}$$

pois, fixado José, restam 11 outras pessoas para ocuparem as 3 vagas seguintes.

Considerando o evento B como aquele formado pelas comissões das quais Eustáquio participa, temos

$$n_B = C_{11,3}$$

pois, fixado Eustáquio, restam 11 outras pessoas para ocuparem as 3 vagas seguintes.

É evidente que o evento $A \cap B$ é aquele formado pelas comissões às quais pertencem, simultaneamente, José e Eustáquio. Fixando ambos, restam 10 pessoas para ocuparem as outras 2 vagas da comissão; assim,

$$n_{A \cap B} = C_{10,2}$$

Logo, a probabilidade de se escolher uma comissão à qual pertencem José ou Eustáquio é

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] =$$

$$= \frac{C_{11,3}}{C_{12,4}} + \frac{C_{11,3}}{C_{12,4}} - \frac{C_{10,2}}{C_{12,4}} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{19}{33}$$

21.3) Numa caixa há 30 etiquetas, numeradas de 1 a 30. Retirando-se, simultaneamente, duas etiquetas, qual a probabilidade de se obter um par de números primos ou um par de múltiplos de 2?

Solução

O espaço amostral E dessa experiência é o total de pares de números distintos que podem ser formados com as 30 etiquetas. Portanto,

$$n_E = A_{30,2}$$

Seja A o evento formado por todos os pares de números primos. Como entre 1 e 30 há 10 números primos (2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29), o total de pares possíveis é

$$n_A = A_{10,2}$$

Seja B o evento formado por todos os pares de múltiplos de 2. Como entre 1 e 30 há 15 múltiplos de 2 (2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30), o total de pares aumentados com esses números é

$$n_B = A_{15,2}$$

Devemos agora notar que não existe um par de números que sejam simultaneamente primos e múltiplos de 2, pois existe um só número primo múltiplo de 2: o próprio 2. Assim, A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $P[A \cap B] = 0$

Logo, a probabilidade de ocorrer um par de números primos ou múltiplos de 2 é:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] =$$

$$= \frac{A_{10,2}}{A_{30,2}} + \frac{A_{15,2}}{A_{30,2}} = \frac{3}{29} + \frac{7}{29} = \frac{10}{29}$$

Exercícios Propostos

•21.4) Numa urna há 200 bolas numeradas de 1 a 200. Retirando-se, ao acaso, uma bola qual a probabilidade de se obter:

a) múltiplo de 2 ou múltiplo de 5?
b) múltiplo de 7 ou múltiplo de 11?
c) múltiplo de 23 ou múltiplo de 13?

21.5) Numa urna há 12 bolas brancas, numeradas de 1 a 12, e 18 bolas vermelhas, numeradas de 13 a 30. Retirando-se ao acaso uma bola, qual a probabilidade de

a) se obter bola vermelha ou número ímpar?
b) *não se obter*: bola branca ou número primo?

21.6) Numa caixa há 60 lâmpadas de 60 W e 100 lâmpadas de 100 W, todas em embalagens iguais. Sabe-se que $\frac{1}{3}$ das lâmpadas de 60 W e $\frac{1}{4}$ das de 100 W estão queimadas. Escolhendo-se, ao acaso, duas lâmpadas, qual a probabilidade de ambas serem de 100 W ou estarem queimadas?

21.7) Numa reunião do diretório de um partido estão presentes 10 mulheres e 15 homens. Metade das mulheres e $\frac{1}{3}$ dos homens participaram da fundação do partido. Escolhendo-se 3 dessas pessoas ao acaso, qual a probabilidade de que as 3 sejam mulheres ou tenham participado da fundação?

21.8) De um baralho de 52 cartas, 2 são sorteadas simultaneamente. Qual a probabilidade de serem:

a) 2 cartas de copas ou 2 cartas vermelhas?
b) 2 cartas de copas ou 2 de ouros?
c) 2 cartas de espadas ou 2 ases?

21.9) Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, de probabilidades $P[A] = \frac{2}{5}$ e $P[B] = \frac{7}{10}$ e tais que $P[A \cap B] = \frac{1}{5}$. Calcule as probabilidades dos eventos:

a) $\overline{A \cup B}$
b) $\overline{A} \cup \overline{B}$
c) $\overline{A} \cap \overline{B}$
d) $A \cap \overline{B}$

21.10) Uma estação meteorológica informa que, para um certo dia, a probabilidade de chover é 60%, a de "fazer frio" é 65% e a de chover e fazer frio é de 35%. Determine, para esse dia, a probabilidade de:

a) chover ou fazer frio
b) não chover e não fazer frio
c) chover e não fazer frio
d) não chover e fazer frio

Capítulo

22

Produto de probabilidades

22.1 – EXEMPLOS INICIAIS

Vamos, agora, considerar experimentos aleatórios cuja realização se desenvolve em etapas, como por exemplo:

Experimento 1: lançar um dado e, *em seguida*, uma moeda, observando o número e a figura obtida nas faces superiores. Temos:

primeira etapa: lançar o dado
segunda etapa: lançar a moeda

O espaço amostral dessa experiência é

$$E = \{(1; C);\ (1; K);\ (2; C);\ (2; K);\ (3; C);\ (3; K);\ (4; C);\ (4; K);\ (5; C);\ (5; K);\ (6; C);\ (6; K)\}$$

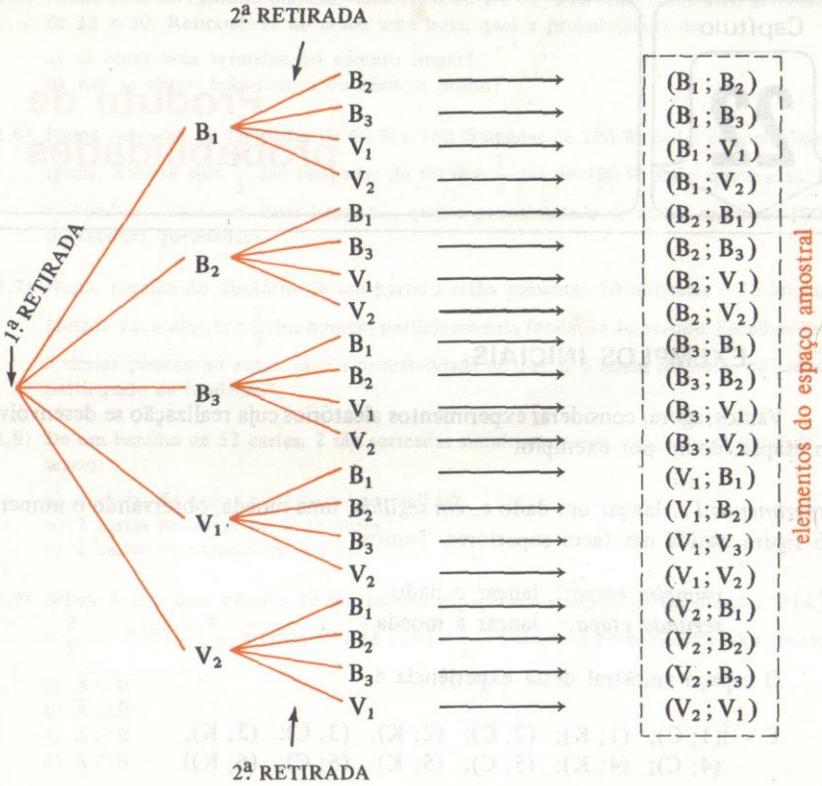
onde C = cara e K = coroa e $n_E = 12$.

Experimento 2: de uma urna com 3 bolas brancas e 2 vermelhas, retirar duas bolas, *uma após a outra*, sem reposição da primeira bola retirada, observando a cor de cada uma delas. Temos:

primeira etapa: retirar a primeira bola
segunda etapa: retirar a segunda bola

O número de elementos do espaço amostral E dessa experiência pode ser obtido com o auxílio do Princípio Fundamental da Contagem: na retirada da primeira bola, temos 5 possibilidades; na segunda, como não há reposição da bola retirada anteriormente, temos 4 possibilidades. Assim, $n_E = 5 \cdot 4 = 20$.

De fato, representando por B_1, B_2, B_3 as bolas brancas e por V_1 e V_2 as vermelhas, o diagrama de árvore da página seguinte fornece todos os resultados possíveis:



É claro que, estando os espaços amostrais construídos, podemos calcular pela definição as probabilidades de quaisquer eventos dessas experiências. Assim, considerando:

- **no experimento 1** o evento A: ocorrer *número maior que 4 e cara*, temos:

$$A = \{(5; c); (6; c)\}$$

$$n_A = 2 \text{ e, portanto, } P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- **no experimento 2** o evento A: ocorrer *duas bolas brancas*, temos:

$$A = \{(B_1; B_2); (B_1; B_3); (B_2; B_1); (B_2; B_3); (B_3; B_1); (B_3; B_2)\}$$

$$n_A = 6 \text{ e, portanto } P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

No entanto, é possível chegar a tais resultados sem que os espaços amostrais sejam construídos, utilizando apenas as etapas que completam o experimento.

22.2 – PROBABILIDADE CONDICIONAL

Exemplo

Consideremos o seguinte experimento. Em uma escola há alunos brasileiros e alemães, dos quais alguns falam somente a sua língua de origem, enquanto outros falam português e alemão. O quadro abaixo dá a distribuição dos alunos conforme essas qualificações

brasileiros	52 falam só português
	38 falam as duas línguas
alemães	43 falam só alemão
	87 falam as duas línguas

O experimento consiste em sortear um estudante.

O espaço amostral E constitui-se de 220 elementos, que são todos os estudantes: $n_E = 220$.

Fixemos dois eventos:

A: o estudante sorteado fala as duas línguas

B: o estudante sorteado é alemão

O evento A é formado pelos 38 brasileiros que falam as duas línguas, juntamente com os 87 alemães também bilíngües: $n_A = 125$.

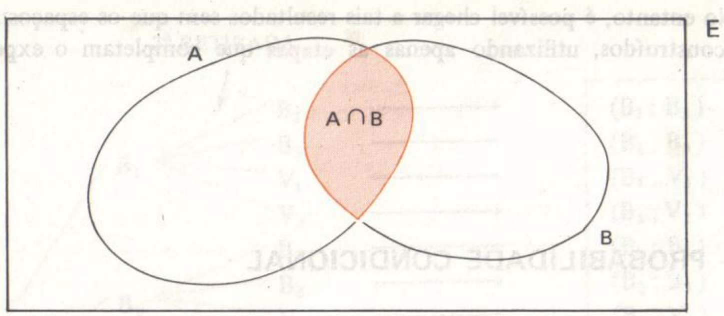
O evento B é formado por todos os alunos alemães: $n_B = 130$.

Assim,

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{125}{220} \cong 56{,}8\%$$

$$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{130}{220} \cong 59{,}1\%$$

A figura seguinte ilustra a situação esquematicamente. Note que um evento não exclui o outro, ou seja, $A \cap B \neq \phi$. A interseção dos dois eventos é constituída pelos resultados em que o estudante sorteado *fala as duas línguas* e *é alemão*. Calculemos também a probabilidade deste evento. Temos: $n_{A \cap B} = 87$,



donde

$$P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{87}{220} \cong 39{,}5\%$$

Fixemos agora um terceiro evento, que de certa forma relaciona os dois anteriores:

C: ocorrer no sorteio um estudante **alemão**, *sabendo que o estudante sorteado fala as duas línguas*

ou, em outras palavras:

C: ocorrer o **evento B**, *supondo que já ocorreu o evento A*

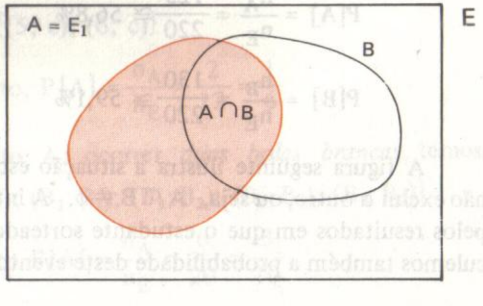
Indicaremos este novo evento pela notação C = B/A, que pode ser lida "C é o evento B *condicionado* à ocorrência de A".

Calculemos a probabilidade deste evento.

O fato de estarmos supondo que já ocorreu A **altera** o conjunto dos resultados possíveis. De fato, já não tem sentido incluir no espaço amostral um resultado em que o estudante só fale português ou só fale alemão. Devemos portanto *restringir o espaço amostral* àqueles resultados em que o estudante sorteado fala as duas línguas. Mas isto corresponde exatamente a considerar **o próprio conjunto A como sendo o novo espaço amostral** E_1:

$$n_{E_1} = n_A = 125$$

Assim, passam a nos interessar somente os resultados do evento B **que estejam no conjunto A**. Em outras palavras, *só nos interessam os elementos do conjunto* A ∩ B. Portanto,



$$P[C] = P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{87}{125} = 69{,}6\%$$

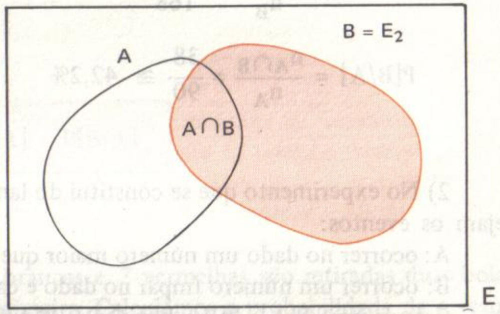
Da mesma forma, podemos considerar o evento:

D: ocorrer no sorteio um estudante que **fala as duas línguas**, *sabendo que o estudante sorteado é alemão*

Neste caso, D = A/B, isto é, "D é o evento A *condicionado* à ocorrência de B". No cálculo da probabilidade deste evento, o novo espaço amostral E_2 a ser considerado é o próprio conjunto B e temos:

$$P[D] = P[A/B] =$$

$$= \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{87}{130} \cong 66{,}9\%$$



Definição

Sejam A e B dois eventos ($A \neq \phi$) do mesmo espaço amostral E. Chama-se **probabilidade de B condicionada a A** e se indica por P[B/A] o número dado por

$$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A}$$

Exemplos

1) No experimento considerado acima, onde um estudante é sorteado, considere os eventos:

A: sortear um estudante brasileiro

B: sortear um estudante que fala alemão.

Vamos calcular P[A], P[B], P[A ∩ B], P[A/B] e P[B/A]. Temos:

$n_E = 220$

n_A = número de brasileiros = 90

n_B = número de brasileiros que falam alemão mais o número de alemães = = 38 + 130 = 168

$n_{A \cap B}$ = número de brasileiros que falam alemão = 38

Assim, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{90}{220} \cong 40{,}9\%$

$$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{168}{220} \cong 76{,}4\%$$

$$P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{38}{220} \cong 17{,}3\%$$

$$P[A/B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{38}{168} \cong 22{,}6\%$$

$$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{38}{90} \cong 42{,}2\%$$

2) No experimento que se constitui do lançamento de um dado e uma moeda, sejam os eventos:

A: ocorrer no dado um número maior que 1

B: ocorrer um número ímpar no dado e cara na moeda

Calculemos: $P[A]$, $P[B]$, $P[A \cap B]$, $P[A/B]$ e $P[B/A]$.

Temos $n_E = 12$ e

$A = \{(2; c);\ (2; k);\ (3; c);\ (3; k);\ (4; c);\ (4; k);\ (5; c);\ (5; k);\ (6; c);\ (6; k)\}$ $(n_A = 10)$

$B = \{(1; c);\ (3; c);\ (5; c)\}$ $(n_B = 3)$

$A \cap B = \{(3; c);\ (5; c)\}$ $(n_{A \cap B} = 2)$

Assim, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P[A/B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{2}{3}$$

$$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

22.3 – PROBABILIDADE DA INTERSEÇÃO

O conceito de probabilidade condicional examinado no item anterior, encontra sua mais importante aplicação no cálculo da probabilidade da **interseção de dois (ou mais) eventos**. Basta considerar a dedução seguinte, onde A e B são eventos quaisquer $(A \neq \phi)$ de um mesmo espaço amostral E. Temos:

$$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{\left(\frac{n_{A \cap B}}{n_E}\right)}{\left(\frac{n_A}{n_E}\right)} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

donde

$$\boxed{P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A]}$$

Exemplo

De uma urna com 13 bolas brancas e 7 vermelhas são retiradas duas bolas sucessivamente, sem reposição da primeira. Calculemos a probabilidade de o resultado ser formado por **duas bolas brancas**. Para isso, consideramos dois eventos:

A: sair bola branca na 1ª retirada

B: sair bola branca na 2ª retirada

É claro que desejamos calcular $P[A \cap B]$, o que se faz com a fórmula acima. Temos, imediatamente, $P[A] = \frac{13}{20}$.

Para obter $P[B/A]$, imaginemos que *já foi retirada a 1ª bola e que ela é branca* e calculemos a probabilidade de sair também branca a 2ª bola. Ora, nesse caso a urna passa a conter 12 bolas brancas e 7 vermelhas e temos:

$$P[B/A] = \frac{12}{19}$$

Assim, $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = \frac{13}{20} \cdot \frac{12}{19} \cong 41{,}1\%$

Se desejarmos a probabilidade de ser sorteada **bola vermelha na 1ª retirada e bola branca na 2ª retirada**, teremos:

1ª retirada A = sair bola vermelha

urna: $\begin{cases} 13 \text{ brancas} \\ 7 \text{ vermelhas} \end{cases}$

$$P[A] = \frac{7}{20}$$

2ª retirada B = sair bola branca

urna: $\begin{cases} 13 \text{ brancas} \\ 6 \text{ vermelhas} \end{cases}$

$$P[B/A] = \frac{13}{19}$$

Portanto, $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19} \cong 23{,}9\%$

Eventos em etapas

O problema de calcular a probabilidade da interseção de eventos aparece freqüentemente quando a realização do experimento se desenvolve em etapas. Cada etapa é por si só uma experiência aleatória. A probabilidade de um evento pode ser calculada **multiplicando-se** as probabilidades dos eventos parciais que constituem cada etapa. O único cuidado a tomar é calcular a probabilidade de cada evento parcial *supondo que os anteriores já ocorreram,* isto é, calcular suas **probabilidades condicionais.**

Exemplos

a) De um baralho são retiradas, sucessivamente, duas cartas, sem reposição da primeira. A probabilidade de ocorrer **duas cartas de espadas** pode ser calculada assim:

1ª retirada A = sair carta de espadas

baralho: $\begin{cases} 13 \text{ espadas} \\ 39 \text{ outros naipes} \end{cases}$

$$P[A] = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

2ª retirada B = sair carta de espadas

baralho: $\begin{cases} 12 \text{ espadas} \\ 39 \text{ outros naipes} \end{cases}$

$$P[B/A] = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$$

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{17} = \frac{1}{17}$$

b) No exemplo ao lado, retiram-se sucessivamente 5 cartas, sem reposição. A probabilidade de ocorrer **nas duas primeiras retiradas cartas de ouros e, nas três últimas, cartas de copas,** pode ser calculada assim:

Retirada	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Baralho	13 ouros 13 copas 26 outros	12 ouros 13 copas 26 outros	11 ouros 13 copas 26 outros	11 ouros 12 copas 26 outros	11 ouros 11 copas 26 outros
Evento	sair ouros	sair ouros	sair copas	sair copas	sair copas
Probabilidade	$p_1 = \frac{13}{52}$	$p_2 = \frac{12}{51}$	$p_3 = \frac{13}{50}$	$p_4 = \frac{12}{49}$	$p_5 = \frac{11}{48}$

A probabilidade pedida é

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{50} \cdot \frac{12}{49} \cdot \frac{11}{48} \cong 0{,}09\%$$

Note que, em cada retirada (a partir da 2ª) a probabilidade que calculamos é **condicional**, pois ao considerarmos o baralho modificado, estamos automaticamente *supondo que os eventos de etapas anteriores já ocorreram.*

Exercícios Resolvidos

22.1) Numa caixa há 10 parafusos, 4 dos quais enferrujados. Retirando-se, ao acaso, dois parafusos com reposição, qual a probabilidade do primeiro estar enferrujado e o segundo não?

Solução

Na *primeira* retirada, temos o evento
A_1 = {parafuso enferrujado}, onde $n_{A_1} = 4$; a probabilidade desse evento é $p_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Na **segunda** retirada, como houve reposição, temos novamente 10 parafusos. O evento dessa retirada é A_2 = {parafuso não enferrujado}, onde $n_{A_2} = 6$. Sua probabilidade é $p_2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

A probabilidade de ocorrerem A_1 e A_2 é, então

$$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

22.2) Um edifício tem 12 andares e 3 apartamentos por andar. Uma pessoa quer encontrar um parente que mora nesse edifício, mas não sabe o andar nem o apartamento que deve procurar. Se ele escolher ao acaso um andar e, nesse andar, um apartamento, qual a probabilidade de acertar o local desejado?

Solução

Temos duas etapas: escolher o andar e, em seguida, um apartamento.

Na primeira temos o evento

$$A_1 = \{\text{andar certo}\},$$

cuja probabilidade é $p_1 = \frac{1}{12}$.

Na segunda, temos o evento

$$A_2 = \{\text{apartamento certo}\},$$

cuja probabilidade é $p_2 = \frac{1}{3}$.

Portanto, a probabilidade de ocorrerem A_1 e A_2 é

$$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

22.3) De um grupo de 10 homens e 15 mulheres escolhemos, ao acaso, duas pessoas, uma após a outra. Qual a probabilidade de

a) a primeira ser mulher e a segunda homem?

b) que as duas sejam mulheres?

Solução

Nos dois casos, quando da primeira escolha, temos 25 pessoas disponíveis; já para a segunda, dispomos de 24.

a) A probabilidade do evento $A_1 = \{\text{a primeira é mulher}\}$ é $p_1 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Supondo que a primeira é mulher, entre as 24 restantes temos ainda 10 homens.

Portanto, a probabilidade do evento $A_2 = \{\text{a segunda é homem}\}$ é $p_2 = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

Logo, a probabilidade de A_1 e A_2 é

$$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$$

b) A ocorrência de duas mulheres se compõem dos eventos

$$A_1 = \{\text{a primeira é mulher}\},$$

cuja probabilidade é $p_1 = \frac{3}{5}$ e

$$A_3 = \{\text{a segunda é mulher}\}$$

Supondo que a primeira é mulher, entre as 24 restantes temos agora 14 mulheres.

Portanto, $p_3 = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

Logo, a probabilidade de A_1 e A_3 é

$$P = p_1 \cdot p_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{20}$$

22.4) De um baralho de 52 cartas são retiradas, sem reposição, 3 cartas. Determine a probabilidade de se obter:

a) 3 ases

b) 3 cartas de ouros

Solução

a) *1ª retirada*: temos 4 ases em 52 cartas; a probabilidade de se obter um ás é $p_1 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

2ª retirada: supondo que a primeira carta obtida foi um ás, como não há reposição temos 3 ases em 51 cartas. A probabilidade de se obter o segundo ás é $p_2 = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

3ª retirada: supondo que as duas primeiras cartas foram ases, temos 2 deles em 50 cartas. A probabilidade de se obter o terceiro ás é $p_3 = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$.

Logo, a probabilidade de se obter 3 ases é

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{5\,525}$$

b) com raciocínio análogo ao item a, tendo inicialmente 13 cartas de ouros, escrevemos:

1ª carta de ouros: probabilidade $p_1 = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

2ª carta de ouros: probabilidade $p_2 = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$

3ª carta de ouros: probabilidade $p_3 = \frac{11}{50}$

Logo, a probabilidade de serem obtidas 3 cartas de ouros é

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{11}{50} = \frac{11}{850}$$

22.5) Numa urna há 8 bolas azuis, 5 amarelas e 7 vermelhas. Retirando-se, ao acaso, duas bolas, com reposição, qual a probabilidade de resultarem as duas da mesma cor?

Solução

Como o enunciado não especifica a cor, podemos ter a ocorrência de duas bolas azuis (evento A) ou duas amarelas (evento B) ou duas vermelhas (evento C).

É evidente que A, B e C são eventos mutuamente exclusivos; portanto, a probabilidade pedida será

$$P = P[A] + P[B] + P[C]$$

Temos, então, notando que há reposição da primeira:

1º) Para duas bolas azuis (A)

- probabilidade da primeira ser azul: $p_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$
- probabilidade da segunda ser azul: $p_2 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Logo, $P[A] = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

2º) Para duas bolas amarelas (B)

- probabilidade da primeira ser amarela: $p_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
- probabilidade da segunda ser amarela: $p_4 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Logo, $P[B] = p_3 \cdot p_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

3º) Para duas bolas vermelhas (C)

- probabilidade da primeira ser vermelha: $p_5 = \frac{7}{20}$
- probabilidade da segunda ser vermelha: $p_6 = \frac{7}{20}$

Logo, $P[C] = p_5 \cdot p_6 = \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} = \frac{49}{400}$

Finalmente, a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor é:

$$P = P[A] + P[B] + P[C] = \frac{4}{25} + \frac{1}{16} + \frac{49}{400} = \frac{69}{200}$$

Exercícios Propostos

22.6) Lançando-se um dado e uma moeda, qual a probabilidade de se obter número primo e coroa?

22.7) Numa urna há 4 bolas pretas, 3 brancas e 8 vermelhas. Retirando-se ao acaso duas bolas, com reposição, qual a probabilidade de resultarem:

a) a primeira branca e a segunda vermelha?
b) a primeira preta e a segunda não preta?
c) duas vermelhas?

22.8) Numa estante há 20 livros, 6 dos quais faltando páginas. Escolhendo-se ao acaso, sem reposição, dois livros, qual a probabilidade de ocorrerem:

a) um livro perfeito e um defeituoso?
b) dois livros perfeitos?
c) dois livros defeituosos?

22.9) Num edifício de 12 andares, com 14 apartamentos por andar, existem 5 andares com 3 apartamentos desocupados cada. Todo o resto do edifício está ocupado. Escolhendo-se ao acaso um andar, e nele um apartamento, qual a probabilidade de se chegar a um apartamento desocupado?

22.10) Lançando-se um dado 3 vezes, qual a probabilidade de ocorrer número menor que 5 nas 3 vezes?

22.11) De um grupo de 18 estudantes, 6 fazem Engenharia, 6 Medicina e 6 Economia. Escolhendo-se, um após o outro, 3 estudantes, qual a probabilidade de:

a) todos fazerem Medicina?
b) o primeiro fazer Medicina e os outros dois Engenharia?
c) o primeiro fazer Medicina, o segundo Engenharia e o terceiro Economia?

22.12) De um baralho de 28 cartas (os 4 naipes, com cartas do ás ao 7) são retiradas, com reposição, 4 cartas. Qual a probabilidade de se obter:

a) 4 cartas de paus?
b) 4 cartas vermelhas?
c) ás, 5, 6 e 7 nessa ordem?

22.13) Um volante de loteria esportiva é preenchido com 2 palpites duplos, 3 triplos e os 8 restantes simples. Considerando-se apenas o acaso, qual a probabilidade de se acertar os 13 jogos?

22.14) Um volante de loteria esportiva é preenchido com dois palpites triplos, quatro duplos e quatro simples preenchidos pela lógica. Os três restantes, bem como os duplos, são preenchidos ao acaso. Se ocorrer a lógica, qual a probabilidade de se fazer 13 pontos?

22.15) Numa sala há duas urnas. Na primeira há 6 bolas brancas e 4 pretas; na outra há 5 brancas, 3 pretas e 4 vermelhas. Escolhe-se uma urna ao acaso e dela retira-se, ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade dessa bola ser branca?

22.16) Numa urna há 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 vermelhas. Retirando-se, ao acaso, sem reposição, 3 bolas, qual a probabilidade de todas terem a mesma cor?

22.17) Há 18 bolas em uma urna, sendo 9 vermelhas e 9 amarelas. Uma pessoa retira uma bola ao acaso, e a esconde. Para adivinhar a cor da bola retirada, utilizo a seguinte estratégia: sorteio uma segunda bola dentre as 17 que restaram na urna; se é vermelha, digo que a primeira bola retirada é amarela; se é amarela, digo que a primeira é vermelha. Qual a minha probabilidade de acertar?

22.18) Numa caixa há 4 urnas iguais. Na primeira urna há 4 anéis de brilhante e 2 de vidro; na segunda há 5 anéis de brilhante e 1 de vidro; na terceira há 3 anéis de brilhante e 3 de vidro; na quarta há 2 de brilhante e 4 de vidro. Escolhe-se uma urna ao acaso e dela retira-se um anel. Qual a probabilidade dele ser de brilhante?

Capítulo

23 Distribuição binomial

23.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos considerar exclusivamente as situações em que um determinado experimento aleatório é repetido n vezes, sempre em idênticas condições, de maneira que em cada vez que tal experimento é realizado, a probabilidade de ocorrer um evento A é sempre a mesma. Situações como:

– *lançar uma moeda* **6** *vezes* e, a cada lançamento, observar a face superior.

Temos $n = 6$ e, por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento $A = \{\text{cara}\}$ é, em cada vez, $P[A] = \frac{1}{2}$

– *lançar um dado* **7** *vezes* e, a cada lançamento, observar a face superior.

Temos $n = 7$ e, por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento $A = \{\text{número maior que } 2\}$ é, em cada vez, $P[A] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

– *numa prova com* **10** *testes* (5 alternativas cada, uma só correta), *um aluno "chuta" todos* (isto é, assinala ao acaso uma alternativa) e observa se acertou ou errou cada teste.

Temos $n = 10$ e, a cada "chute", a probabilidade de acertar (A) é $P[A] = \frac{1}{5}$.

O problema que aqui nos propomos resolver é o de calcular a probabilidade de ocorrer o evento A em k das n vezes que o experimento se repete ($k \leqslant n$).

Para isso, vamos partir da solução de um exemplo:

Analisando seus antecedentes genéticos, um casal descobre que a probabilidade de ter um filho de olhos verdes é $\frac{7}{8}$. Supondo que esse casal pretenda ter 5 filhos, qual a probabilidade de 3 deles terem olhos verdes?

Vemos que, das $n = 5$ vezes que o fato *ter um filho* deve se repetir, o evento

$$A = \{\text{filho de olhos verdes}\}$$

deve ocorrer três vezes ($k = 3$). Portanto, devemos supor que nas outras duas vezes não ocorra filho de olhos verdes, o que representa o evento complementar de A.

Para o nascimento de cada filho, temos:

$$P[A] = \frac{7}{8} \quad \text{e} \quad P[\bar{A}] = 1 - P[A] = \frac{1}{8}$$

Vamos, inicialmente, calcular a probabilidade de que os três primeiros filhos tenham olhos verdes. Isso corresponde à ocorrência dos *eventos sucessivos:*

primeiro filho de olhos verdes (A)
segundo filho de olhos verdes (A)
terceiro filho de olhos verdes (A)
quarto filho de olhos não verdes ($\bar{A}$)
quinto filho de olhos não verdes ($\bar{A}$)

Pela regra do **produto de probabilidades**

	1º	2º	3º	4º	5º
	$\boxed{A}$	$\boxed{A}$	$\boxed{A}$	$\boxed{\bar{A}}$	$\boxed{\bar{A}}$
	↓	↓	↓	↓	↓
probabilidades:	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

temos que a probabilidade V dos três primeiros terem olhos verdes é

$$V = P[A] \cdot P[A] \cdot P[A] \cdot P[\bar{A}] \cdot P[\bar{A}] = P[A]^3 \cdot P[\bar{A}]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

No entanto, como o problema não especifica em que ordem devem ocorrer os tipos de olhos verdes temos vários outros modos de considerar a distribuição desses três entre os cinco filhos. Eis *alguns* deles:

1º	2º	3º	4º	5º
$\boxed{A}$	$\boxed{A}$	$\boxed{\bar{A}}$	$\boxed{\bar{A}}$	$\boxed{A}$

1º	2º	3º	4º	5º
$\boxed{A}$	$\boxed{\bar{A}}$	$\boxed{A}$	$\boxed{A}$	$\boxed{\bar{A}}$

1º	2º	3º	4º	5º
$\overline{A}$	A	$\overline{A}$	A	A

Notemos que, para cada um desses modos, temos probabilidade de ocorrer três filhos de olhos verdes; e ela é sempre igual à probabilidade **V** dos três primeiros terem olhos verdes:

$$P[A]^3 \cdot P[\overline{A}]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

Sendo assim, a probabilidade P de ocorrerem três filhos de olhos verdes (*em qualquer ordem*) é igual ao produto de **V** pelo total de maneiras possíveis de se distribuir o evento A em 3 das 5 posições.

Ora, sabemos que o número de modos de se escolher 3 das 5 posições é dado por $C_{5,3} = \binom{5}{3}$. Portanto, temos finalmente:

$$P = C_{5,3} \cdot V = \binom{5}{3} P[A]^3 \cdot P[\overline{A}]^2$$

ou seja,

$$P = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1\,715}{16\,384} \cong 0{,}105$$

Resolvido o exemplo proposto, onde tínhamos $n = 5$, $k = 3$, $P[A] = \frac{7}{8}$ e $P[\overline{A}] = \frac{1}{8}$, observemos que a probabilidade obtida

$$P = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

pode ser escrita

$$P = \binom{n}{k} P[A]^k \cdot P[\overline{A}]^{n-k}$$

Percebemos, então, que esta expressão corresponde a um dos termos do desenvolvimento do Binômio de Newton

$$(x + a)^n$$

onde $a = P[A]$ e $x = P[\overline{A}]$, devendo-se a esse fato a denominação **distribuição binomial de probabilidades**.

Vamos, então, ao enunciado e resolução do caso geral

23.2 – EXPRESSÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Se, em cada uma das n tentativas de um experimento aleatório, a probabilidade de sucesso de um evento A é P[A], então a probabilidade de que A ocorra em k das n tentativas ($k \leqslant n$) é

$$P = \binom{n}{k} P[A]^k \cdot P[\overline{A}]^{n-k}$$

Demonstração

Como o evento **A** deve ter sucesso em **k** das **n** vezes, nas **n – k** vezes restantes não deve ocorrer **A** ou seja, deve ocorrer o evento complementar de **A**, cuja probabilidade é

$$P[\overline{A}] = 1 - P[A]$$

Suponhamos que **A** ocorra nas **k** primeiras tentativas, ou seja, calculemos a probabilidade dos *eventos sucessivos*

ocorrer A na primeira tentativa
ocorrer A na segunda tentativa
. . . .
ocorrer A na k-ésima tentativa
não ocorrer A na k + 1-ésima tentativa
. . . .
não ocorrer A na n-ésima tentativa

Pela regra do **produto de probabilidades**

	1ª	2ª	3ª		kª	(k + 1)ª		nª
	A	A	A	...	A	$\overline{A}$	...	$\overline{A}$
	↓	↓	↓		↓	↓		↓
probabilidades:	P[A]	P[A]	P[A]	...	P[A]	$P[\overline{A}]$	...	$P[\overline{A}]$

temos que a probabilidade **R** de ocorrer **A** nas **k** primeiras tentativas é

$$R = \underbrace{P[A] \cdot P[A] \cdot P[A] \ldots P[A]}_{\text{k vezes}} \cdot \underbrace{P[\overline{A}] \ldots P[\overline{A}]}_{\text{n − k vezes}}$$

ou seja, $R = P[A]^k \cdot P[\overline{A}]^{n-k}$

No entanto, A não deve ocorrer *necessariamente* nas k primeiras tentativas, mas em quaisquer k das n posições possíveis.

Para cada uma das distribuições de A e $\bar{A}$ temos uma probabilidade igual a R, pois os números de vezes que devem ocorrer A e $\bar{A}$ é, sempre, k e n - k, respectivamente. Portanto, a probabilidade P de ocorrer k vezes A é igual ao produto de R pelo total de maneiras de se distribuir o evento A em k das n posições.

Como esse total é dado pelo número de combinações de n elementos tomados k a k, isto é, $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, vem, finalmente

$$P = C_{n,k} \cdot R$$

ou seja,

$$P = \binom{n}{k} P[A]^k \cdot P[\bar{A}]^{n-k}$$

Exercícios Resolvidos

23.1) Lançando-se uma moeda 6 vezes, qual a probabilidade de ocorrer 4 vezes cara?

Solução

Temos n = 6 e k = 4.

Em cada lançamento, a probabilidade de sucesso do evento A = {cara} é $P[A] = \frac{1}{2}$. Conseqüentemente, a probabilidade de não ocorrer cara é $P[\bar{A}] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Logo, a probabilidade de ocorrer 4 vezes cara é

$$P = \binom{6}{4} P[A]^4 \cdot P[A]^{6-4} = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

23.2) Num exame de 10 testes (5 alternativas cada, uma só correta), um aluno "chuta" os 10 testes. Qual a probabilidade dele acertar a metade? (Escreva a resposta em porcentagem.)

Solução

Temos n = 10 e k = 5.

A probabilidade de acertar um teste é $P[A] = \frac{1}{5}$ e a de não acertar é $P[\bar{A}] = 1 - P[A] = \frac{4}{5}$.

Logo, a probabilidade de acertar a metade deles é

$$P = \binom{10}{5} P[A]^5 \cdot P[\bar{A}]^{10-5} = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cong 0{,}0264,$$

portanto 2,64%.

23.3) Lançando-se um dado 5 vezes, qual a probabilidade de ocorrer o número 6 no mínimo 3 vezes?

Solução

Temos n = 5 e, a cada lançamento, a probabilidade de ocorrer o evento

$$A = \{6\}$$

e $P[A] = \frac{1}{6}$, e a de não ocorrer o número 6 é $P[\bar{A}] = 1 - P[A] = \frac{5}{6}$.

Como queremos a probabilidade de sucesso de A no mínimo 3 vezes, devemos considerar a ocorrência do número 6 exatamente 3 vezes, ou 4 vezes ou 5 vezes:

1º) probabilidade de ocorrer A 3 vezes (k = 3):

$$P_1 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{10 \times 5^2}{6^6}$$

2º) probabilidade de ocorrer A 4 vezes (k = 4):

$$P_2 = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5^2}{6^6}$$

3º) probabilidade de ocorrer A 5 vezes (k = 5):

$$P_3 = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^6}$$

Logo, a probabilidade de ocorrer A no mínimo 3 vezes é

$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= \frac{10 \times 5^2}{6^6} + \frac{5^2}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{23}{1\,296}$$

Exercícios Propostos

23.4) Lançando-se uma moeda 10 vezes, determine a probabilidade de ocorrer:

a) cara na 8ª vez

b) cara na 8ª vez, sabendo que nas 7 primeiras jogadas ocorrem cara

c) 3 vezes cara

23.5) Supondo que um casal pretenda ter 4 filhos, e que não haja nascimento de gêmeos, qual a probabilidade de 2 dos 4 filhos serem do sexo feminino?

23.6) Lançando-se um dado 6 vezes, qual a probabilidade de ocorrer

a) 4 vezes o número 1?

b) 2 vezes número primo?

c) 6 vezes número menor que 3?

d) nenhuma vez número menor que 3?

23.7) Um casal sabe que a probabilidade dele ter um filho de cabelos pretos é $\frac{2}{5}$. Supondo que o casal pretenda ter 4 filhos, qual a probabilidade dele ter no máximo dois filhos de cabelos pretos?

23.8) Uma prova consta de 10 testes (com 4 alternativas cada, uma só correta). Um estudante "chuta" os 10 testes. Qual a probabilidade dele acertar no mínimo 7 testes?

23.9) Numa caixa de controle há 10 interruptores, cada um comandando um circuito elétrico. Cada circuito tem probabilidade de 20% de queimar ao ser acionado. Acionando os 10 interruptores, qual a probabilidade de no máximo dois circuitos resultarem queimados?

23.10) Numa sala de espetáculos há 26 lugares mas todos os dias são vendidos 30 ingressos. Em cada dia, a probabilidade de cada pessoa (que adquire ingresso), não comparecer à função é 10%. Qual a probabilidade de, num certo dia, a sala ficar com superlotação (mais que 26 pessoas)?

Exercícios Suplementares

VII.1 Uma urna contém 10 bolas, indiscerníveis ao tato, numeradas de 0 a 9. Retira-se uma bola ao acaso. Quais são as probabilidades para que a bola tirada porte um número divisível por 2; por 3; por 6?
Duas urnas A e B, semelhantes à urna do parágrafo anterior, são colocadas lado a lado; retira-se uma bola de A e depois uma bola de B, e forma-se o número cujo algarismo das dezenas é o número tirado de A e o algarismo das unidades, o número tirado de B. Qual é a probabilidade para que o número assim obtido seja divisível por 3?

VII.2 Uma urna contém **n** bolas, numeradas de 1 a **n**. Extrai-se uma bola. Qual é a probabilidade para que o número nela desenhado:
a) seja divisível por 6 ou por 9
b) seja divisível por 6 e por 9
Caso particular: n = 100

VII.3 Quatro urnas A, B, C e D contêm, cada uma, cinco bolas idênticas, numeradas de 1 a 5. Extrai-se uma bola de cada urna. Qual é a probabilidade P, para que 3 seja o maior número extraído?

VII.4 Seja a equação do 2º grau:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

Os coeficientes p e q são determinados, respectivamente, por duas jogadas sucessivas de um dado perfeito, cujas faces são numeradas de 1 a 6.
Determine as probabilidades dos eventos:
a) a equação (1) admite raízes reais distintas
b) a equação (1) admite uma raiz dupla
c) a equação (1) não admite raízes reais

VII.5 Uma urna contém **n** bolas brancas, n + 2 bolas pretas e 4 bolas verdes ($n > 0$).
Um jogador tira uma bola ao acaso (cada bola tem a mesma probabilidade de ser tirada):
1º) Se ela é **branca**, ele ganha
2º) Se ela é **preta**, ele perde
3º) Se ele é **verde**, ele retira outra bola ao acaso (sem repor a verde): ele ganha se esta é **branca**; se não, ele perde.
Qual é, em função de **n**, a probabilidade P_n para que o jogador ganhe?

VII.6 Dispomos de três dados A, B e C *não viciados*.
O dado A porta sobre uma face o número 3, sobre três faces o número 4 e sobre duas faces o número 5.
O dado B porta sobre duas faces o número 4 e sobre quatro faces o número 2.
O dado C porta sobre cinco faces o número 4 e sobre uma face o número 2.

Lançam-se simultaneamente os três dados. Qual é a probabilidade para se obter:
a) três números iguais;
b) o conjunto de números: $\{2;\ 4;\ 5\}$;
c) três números cuja soma é S e tal que $S \geqslant 12$.

VII.7 Numa loteria de 6 números, designa-se por $P_{(k)}$ a probabilidade de se tirar o número k $(1 \leqslant k \leqslant 6)$.
Supõe-se $P_{(1)} = P_{(3)} = P_{(5)} = a$ e $P_{(2)} = P_{(4)} = P_{(6)} = b$

Pratica-se uma única tiragem e designa-se com A o evento: "o número tirado é maior ou igual a 4"; seja P(A) a probabilidade de A.

Determine a e b para que $P(A) = \frac{5}{12}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

1.4) a) m.n.
b) $a_{21} = 407,\ a_{m2} = 850,\ a_{1n} = 517,\ a_{mn} = 1000$

1.5) 2×3 ou 3×2
1.6) $n^2 - n$
1.7) 12

1.8) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

1.9) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

1.10) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 18 & 9 \end{bmatrix}$

1.11) 14

1.15) $A = A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ A é simétrica

1.16) $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2},\ c = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

1.17) sim
1.18) 6

1.19) a) $I^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $J^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $O^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.20) $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Capítulo 2

2.11) a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 9 & 16 & -1 \\ 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

2.12) $y = 1$ e $x = \pm 1$

2.13) a) $\begin{bmatrix} -24 & -24 & -24 \\ -26 & 3 & -33 \\ -49 & -70 & 8 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} -\frac{24}{17} & -\frac{24}{17} & -\frac{24}{17} \\ -\frac{26}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{33}{17} \\ -\frac{49}{17} & -\frac{70}{17} & \frac{8}{17} \end{bmatrix}$

2.14) Seja $A = [a_{ij}]$.
$\alpha \cdot A + \beta \cdot A = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] =$
$= [(\alpha + \beta) a_{ij}] = (\alpha + \beta)[a_{ij}] = (\alpha + \beta) \cdot A$

2.15) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

2.16) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

2.17) Se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $A + B = [\alpha_{ij}]$, então tem-se $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$\operatorname{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =$$
$$= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

2.18) Se $A = [a_{ij}]$ e $A^t = [b_{ij}]$, então $b_{ij} = a_{ji}$.
Sejam $\alpha A = [c_{ij}]$ e $(\alpha A)^t = [d_{ij}]$. Então
$(\alpha A)^t = [d_{ij}] = [c_{ji}] = [\alpha a_{ji}] = \alpha[a_{ji}] = \alpha[b_{ij}] = \alpha A^t$

2.19) Como $A - B = A + (-1)B$, temos
$(A - B)^t = (A + (-1)B)^t = A^t + ((-1)B)^t = A^t + (-1)B^t = A^t - B^t$

2.20) Seja $B = A - A^t$. Então
$B^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -B$

2.21) a) 2×4 b) 1×4 c) 2×4

2.22) $AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$

2.23) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.25) a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

b) $AB = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, BA não existe

2.26) $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2.37) $C_{32} = 24$, $C_{13} = 13$

2.38) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.39) $x = \frac{1}{5}$

2.40) $3b = 2c = 6(a - d)$

2.42) Se A é involutiva então $A^2 = I$. Portanto
$(I - A)(I + A) = I^2 - A^2 = I - I = 0$
Inversamente, se $(I - A)(I + A) = 0$ tem-se $I^2 - A^2 = 0$ donde $A^2 = I$ e portanto A é involutiva.

2.43) Teorema 1: Para n = 1 a igualdade é evidente.
Teorema 2:

Hipótese: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos(k\,\theta) & \operatorname{sen}(k\,\theta) \\ -\operatorname{sen}(k\,\theta) & \cos(k\,\theta) \end{bmatrix}$

Tese: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & \operatorname{sen}((k+1)\theta) \\ -\operatorname{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k\,\theta) & \operatorname{sen}(k\,\theta) \\ -\operatorname{sen}(k\,\theta) & \cos(k\,\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos(k\,\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(k\theta) & \cos\theta\operatorname{sen}(k\,\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos(k\theta) \\ -\operatorname{sen}\theta\cos(k\,\theta) - \cos\theta\operatorname{sen}(k\,\theta) & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(k\,\theta) + \cos\theta\cos(k\,\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & \operatorname{sen}((k+1)\theta) \\ -\operatorname{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$$

2.45) Sejam $(A + B)C = [d_{ij}]_{m \times p}$, $AC = [e_{ij}]_{m \times p}$ e $BC = [f_{ij}]_{m \times p}$
Temos

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} k_{ik}c_{kj} = e_{ij} + f_{ij}$$

donde $[d_{ij}]_{m \times p} = [e_{ij}]_{m \times p} + [f_{ij}]_{m \times p}$

ou seja, $(A + B)C = AC + BC$

2.46) Sejam $AB = [c_{ij}]$ e $BA = [d_{ij}]$. Temos

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{tr}(BA)$$

2.47) Teorema 1: $(A_1A_2)^t = A_2^t \cdot A_2^t$
Sejam $A_1 = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $A_2 = [b_{ij}]_{n \times p}$. Sejam também
$A_1A_2 = [c_{ij}]_{m \times p}$, $(A_1A_2)^t = [d_{ij}]_{p \times m}$, $A_1^t = [e_{ij}]_{n \times m}$,

$A_2^t = [f_{ij}]_{p \times n}$ e $A_2^t A_1^t = [g_{ij}]_{p \times m}$

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} e_{kj}f_{ik} = g_{ij}$$

Assim, $(A_1A_2)^t = A_2^t A_1^t$

Teorema 2:
Hipótese
$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k)^t = A_k^t \cdot A_{k-1}^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t$
Tese
$(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k+1})^t = A_{k+1}^t \cdot A_k^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t$
Seja $A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k = B$. Temos

$$\begin{aligned}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k+1})^t &= (B \cdot A_{k+1})^t = A_{k+1}^t \cdot B^t = \\ &= A_{k+1}^t (A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k)^t = \\ &= A_{k+1}^t \cdot A_k^t \cdot A_{k-1}^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t\end{aligned}$$

2.48) Teorema 1: $A^{1+q} = A^1 \cdot A^q$ (por definição)
Teorema 2:
Hipótese $A^{k+q} = A^k \cdot A^q$
Tese $A^{(k+1)+q} = A^{k+1} \cdot A^q$

$$A^{(k+1)+q} = A^{1+(k+q)} = A^1 \cdot A^{k+q} = A^1 \cdot (A^k \cdot A^q) =$$
$$= (A^1 \cdot A^k) \cdot A^q = A^{k+1} \cdot A^q$$

2.49) $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 =$
$= A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2$

2.50) a) Se $B = A^t$ então $B^t = (A^t)^t = A = A^t = B$
b) Se $B = A^2$ então $B^t = (A^2)^t = (A^t)^2 = A^2 = B$
c) Se $C = AB$ então $C^t = (AB)^t = (BA)^t = A^tB^t = AB = C$

2.52) $(A^t \cdot B^t + 3C)^t = (A^tB^t)^t + (3C)^t = (B^t)^t \cdot (A^t)^t + 3C^t =$
$= BA - 3c$

2.53) b) $A \cdot B = B \cdot A = O$
c) Se $M_1 = a_1 \cdot A + b_1 \cdot B$ e $M_2 = a_2 \cdot A + b_2 \cdot B$
então $M_1 \cdot M_2 = (a_1 \cdot A + b_1 \cdot B) \cdot (a_2 \cdot A + b_2 \cdot B) =$
$= a_1 \cdot A \cdot (a_2 \cdot A + b_2 \cdot B) + b_1 \cdot B \cdot (a_2 \cdot A + b_2 \cdot B) =$
$= a_1a_2 \cdot A^2 + a_1b_2 \cdot A \cdot B + a_2b_1 \cdot B \cdot A + b_1b_2 \cdot B^2 =$
$= a_1a_2 \cdot A + a_1b_2 \cdot O + a_2b_1 \cdot O + b_1b_2 \cdot B = aA + bB$
onde $a = a_1a_2$ e $b = b_1b_2$

2.57) a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \sec\theta & -\operatorname{tg}\theta \\ -\operatorname{tg}\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$ c) Não existe

2.59) $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

2.60) a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ c) Não existe

2.61) $I^{-1} = I$

2.63) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{9}{4} & 2 \end{bmatrix}$

2.64) $X = \begin{bmatrix} \cos 3a \\ \operatorname{sen} 3a \end{bmatrix}$

2.65) $XA = B \Rightarrow (XA)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow XI = BA^{-1} \Rightarrow x = BA^{-1}$

2.66) a) $X = A^{-1}CB^{-1}$

b) $X = A^{-1}(C - B)$

c) $X = A^{-1}B^t$

d) $X = B^t - A$

e) $X = A^{-1}B^{-1}$

2.78) Seja $B = A^{-1}$

$B^t = (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1} = B$

2.79) $Q^{-1}BQ = Q^{-1}(QAQ^{-1})Q = (Q^{-1}Q)A(Q^{-1}Q) =$

$= IAI = A$

2.80) $X = A^{-1}$

2.81) $P^{-1} + Q^{-1} = I \Rightarrow P(P^{-1} + Q^{-1})Q = PIQ \Rightarrow$

$\Rightarrow PP^{-1}Q + PQ^{-1}Q = PQ \Rightarrow Q + P = PQ$

2.82) 1º) Se $\Delta \neq 0$, então sendo $B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ tem-se

$BA = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

donde A é invertível e $A^{-1} = B$

2º) Se A é invertível então existe a matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

tal que $AA^{-1} = I_2$, ou seja,

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} ax + bz = 1 \ (1) & cx + dz = 0 \ (3) \\ ay + bw = 0 \ (2) & cy + dw = 1 \ (4) \end{cases}$

Façamos (1) • (4) − (2) • (3). Resulta

$(ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) = 1$

donde $adxw + bcyz - adyz - bcxw = 1$

ou ainda $(ad - bc)(xw - yz) = 1$

donde $\Delta = ad - bc \neq 0$.

2.83) Sejam $X = A^{-1} + B^{-1}$ e $Y = A(A + B)^{-1}B$. Temos

$XY = (A^{-1} + B^{-1})(A(A + B)^{-1}B) =$

$= (A^{-1}A + B^{-1}A)(A + B)^{-1}B =$

$= (I + B^{-1}A)(B^{-1}(A + B))^{-1} =$

$= (I + B^{-1}A)(B^{-1}A + B^{-1}B)^{-1} =$

$= (I + B^{-1}A)(I + B^{-1}A)^{-1} = I$

Assim, $X^{-1} = Y$, ou seja,

$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$

2.84) Note em 1º lugar que $I - K$ e $J + K$ *comutam.* Então

$B^t = ((I + K)(I - K)^{-1})^t = ((I - K)^{-1})^t \cdot (I + K)^t = ((I - K)^t)^{-1}(I + K)^t =$

$= (I - K^t)^{-1}(I + K^t) = (I + K)^{-1}(I - K)$

e assim

$B^tB = (I + K)^{-1}(I - K)(I + K)(I - K)^{-1} = (I + K)^{-1}(I + K)(I - K)(I - K)^{-1} =$

$= I \cdot I = I$

Logo, $B^{-1} = B^t$ e B é ortogonal.

2.85) a) $A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a^2 + bc + a - 2 & ac + cd + c \\ ab + bd + b & bc + d^2 + d - 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a^2 + (ad + 2) + a - 2 & c(a + d) + c \\ b(a + d) + b & (ad + 2) + d^2 + d - 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a(a + d) + a & c(a + d) + c \\ b(a + d) + b & d(a + d) + d \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -a + a & -c + c \\ -b + b & -d + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Assim, $A^2 = -A + 2I$. Daí vem $A^2 + A = 2I$ donde $A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) = I$, logo

$A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I$. Portanto, $A^{-1} \in \urcorner$, com $\beta = \frac{1}{2}$.

b) Sejam $X = \alpha_1 A + \beta_1 I$ e $Y = \alpha_2 A + \beta_2 I$ elementos de $\urcorner$. Temos

$$
\begin{aligned}
XY &= (\alpha_1 A + \beta_1 I)(\alpha_2 A + \beta_2 I) = \\
&= \alpha_1\alpha_2 A^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)A + \beta_1\beta_2 I = \\
&= \alpha_1\alpha_2(-A + 2I) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)A + \beta_1\beta_2 I = \\
&= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\alpha_2)A + (\beta_1\beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2)I = \\
&= \alpha A + \beta I \in \urcorner
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

3.4) a) 18 b) 1 c) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ d) $\sec^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$

3.5) a) $S = \{-\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\}$ b) $S = \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

3.6) $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3.7) a) 16 b) 6 c) 17 d) 12 e) -32

3.8) a) 1 b) 0 c) $a_{11}a_{22}a_{33}$

3.9) a) 12 b) 3 c) $\frac{1}{3}$

3.11) a) $S = \{-3\}$ b) $S = \{-10; 2\}$

3.12) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < -4\}$

3.13) a) 34 b) 256 c) 2

3.14) a) abcde b) 1

3.15) a) 16 b) 16 c) 0

3.16) a) 2 b) -2 c) 32 d) 59

3.17) a) $3(d - a)$ b) $a_1^4 - a_2^4$

3.18) a) -25 b) 16

3.19) Aplica-se o Teorema de Laplace:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

3.20) $\begin{bmatrix} x & a & b \\ a & x & c \\ b & c & x \end{bmatrix}$

3.21) Sim

3.22) Se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $AB = [c_{ij}]$, com $a_{ij} = 0$ e $b_{ij} = 0$ para $i < j$, então para $i < j$ tem-se também $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 0$, pois para $1 \leqslant k < j$ tem-se $b_{kj} = 0$ e para $j \leqslant k \leqslant n$ tem-se $a_{ik} = 0$.

3.23) $(-1)^{n+1}$

3.24) $\det A = (-t)A_{11} + a_1 A_{1n}$

$$
A_{11} = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix} = (-t)^{n-1}
$$

$$
A_{1n} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_2 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_n
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\det A &= (-t)(-t)^{n-1} + a_1 a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_n = \\
\det A &= (-t)(-t)^{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \\
&= (-t)^n + (-1)^{n+1} \quad a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \\
&= (-1)^n (t^n - a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

4.6) -4

4.7) -3

4.8) Multiplicando a 1ª coluna por a_2a_3, a 2ª por a_1a_3 e a 3ª por a_1a_2, obtemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_2a_3}\cdot\frac{1}{a_1a_3}\cdot\frac{1}{a_1a_2}\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 \\ a_2a_3b_1 & a_1a_3b_2 & a_1a_2b_3 \\ a_2a_3c_1 & a_1a_3c_2 & a_1a_2c_3\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_2a_3}\cdot\frac{1}{a_1a_3}\cdot\frac{1}{a_1a_2}\cdot a_1a_2a_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a_2a_3b_1 & a_1a_3b_2 & a_1a_2b_3\\ a_2a_3c_1 & a_1a_3c_2 & a_1a_2c_3\end{vmatrix}$$

4.9) Multiplicando a 1ª linha por α, a 2ª por β e a 3ª por γ, obtemos

$$\begin{vmatrix}1&\alpha&\beta\gamma\\1&\beta&\gamma\alpha\\1&\gamma&\alpha\beta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha&\alpha^2&\alpha\beta\gamma\\ \beta&\beta^2&\alpha\beta\gamma\\ \gamma&\gamma^2&\alpha\beta\gamma\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix}\alpha&\alpha^2&1\\ \beta&\beta^2&1\\ \gamma&\gamma^2&1\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1&\alpha&\alpha^2\\1&\beta&\beta^2\\1&\gamma&\gamma^2\end{vmatrix}$$

4.10) Multiplicando a 2ª linha por bc, a 3ª por ac e a 4ª por ab, obtemos

$$\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&0&c&b\\b&c&0&a\\c&b&a&0\end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix}0&a&b&c\\abc&0&bc^2&b^2c\\abc&ac^2&0&a^2c\\abc&ab^2&a^2b&0\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(abc)\cdot a\cdot b\cdot c}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&c^2&b^2\\1&c^2&0&a^2\\1&b^2&a^2&0\end{vmatrix}$$

4.11) $\det A = 0$

4.12) zero

4.13) $S = \mathbb{R}$

4.17) $\begin{vmatrix}x&1&2x+3\\y&3&2y+9\\z&5&2z+15\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x&1&2x\\y&3&2y\\z&5&2z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x&1&3\\y&3&9\\z&5&15\end{vmatrix} = 0$

4.18) $\begin{vmatrix}a&-1&d\\b&2&e\\c&-3&f\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a&b&c\\2&4&6\\d&e&f\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c&b&a\\3&6&1\\f&e&d\end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix}a&b&c\\-1&2&-3\\d&e&f\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a&b&c\\2&4&6\\d&e&f\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a&b&c\\1&6&3\\d&e&f\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&b&c\\0&0&0\\d&e&f\end{vmatrix} = 0$$

4.19) -6

4.20) 20

4.21) $S = \{0\}$

4.22) a) $\begin{vmatrix}a-b&1&a\\b-c&1&b\\c-a&1&c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&1&a\\b&1&b\\c&1&c\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b&1&a\\c&1&b\\a&1&c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&1&b\\b&1&c\\c&1&a\end{vmatrix}$

b) Multiplicando a 1ª linha por a, a 2ª por b, a 3ª por c e a 4ª por d, obtemos

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3+bcd\\1&b&b^2&b^3+acd\\1&c&c^2&c^3+abd\\1&d&d^2&d^3+abc\end{vmatrix} = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix}a&a^2&a^3&a^4+abcd\\b&b^2&b^3&b^4+abcd\\c&c^2&c^3&c^4+abcd\\d&d^2&d^3&d^4+abcd\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix}a&a^2&a^3&a^4\\b&b^2&b^3&b^4\\c&c^2&c^3&c^4\\d&d^2&d^3&d^4\end{vmatrix} + \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix}a&a^2&a^3&abcd\\b&b^2&b^3&abcd\\c&c^2&c^3&abcd\\d&d^2&d^3&abcd\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a&a^2&a^3&1\\b&b^2&b^3&1\\c&c^2&c^3&1\\d&d^2&d^3&1\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix} = 0$$

4.23)

$$\det\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \det\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{p} a_j & pd & pg\\ \sum_{j=1}^{p} b_j & pe & ph\\ \sum_{j=1}^{p} c_j & pf & pi\end{bmatrix} = p^2 \det\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{p} a_j & d & g\\ \sum_{j=1}^{p} b_j & e & h\\ \sum_{j=1}^{p} c_j & f & i\end{bmatrix} =$$

$$= p^2 \sum_{j=1}^{p} \det\begin{bmatrix}a_j & d & g\\ b_j & e & h\\ c_j & f & i\end{bmatrix} = p^2 \sum_{j=1}^{p} (\det A_j)$$

4.25) $\det(A+B) = \det\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11}&b_{12}\\a_{21}&b_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}b_{11}&a_{12}\\b_{21}&a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix} =$$

$$= \det A + \det B + \begin{vmatrix}a_{11}&b_{12}\\a_{21}&b_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}b_{11}&a_{12}\\b_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$ donde, a tese.

4.37) a) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d+e \\ a & c & d & e+b \\ a & d & e & b+c \\ a & e & b & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & b+c+d+e \\ a & c & d & b+c+d+e \\ a & d & e & b+c+d+e \\ a & e & b & b+c+d+e \end{vmatrix} =$

$= a(b+c+d+e) \begin{vmatrix} 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & e & 1 \\ 1 & e & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

4.38) (3ª coluna) = (–1) • (1ª coluna) + (–1) • (2ª coluna)

4.39) a) Como $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}$, resulta que (2ª linha) = (1ª linha) - 2(3ª linha)

b) (3ª linha) = (1ª linha) + (2ª linha)

4.40) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2b+2c+2a & b+c+2a & b \\ 2c+2a+2b & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

4.41) a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ 1 & b^2 & b^2(b-a) \\ 1 & c^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b^2-a^2 & b^2(b-a) \\ 1 & c^2-a^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^2(b-a) \\ c^2-a^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ c+a & c^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ c-b & c^2-b^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ 1 & c+b \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)\left[(b+a)(c+b) - b^2\right] =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b-a & b(b-a) \\ c-a & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

4.42) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & 0 & b-d & b^2-d^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} =$

$= (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a+c \\ 0 & 0 & 1 & b+d \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} =$

$= (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & b+d \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 1 & a+c \\ 1 & b+d \end{vmatrix} =$

$= (a-c)(b-d)(b+d-a-c)$

4.43) Multipliquemos a 1ª linha por a, a 2ª por b e a 3ª por c. O determinante fica

$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(b^2+c^2) & a^2b & a^2c \\ b^2a & b(c^2+a^2) & b^2c \\ c^2a & c^2b & c(a^2+b^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 0 & -2c^2 & -2b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$

$= -2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = -2(-a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2) = 4a^2b^2c^2$

4.44) Zero (a 3ª coluna é combinação linear das duas primeiras)

4.45) Zero

4.47) sen 20° • sen 40° • sen 80°

4.48) $S = \{1; -1\}$

4.49) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } x > 7\}$

4.50) $S = \{0; -10\}$

4.51) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

4.52) Multiplicando-se a 1ª linha por a, a 2ª por b, a 3ª por c e a 4ª por d, o determinante fica

$$\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & a^2b & a^2c & a^2d \\ b^2a & b(b^2+1) & b^2c & b^2d \\ c^2a & c^2b & c(c^2+1) & c^2d \\ d^2a & d^2b & d^2c & d(d^2+1)\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 & c^2 \\ d^2 & d^2 & d^2 & d^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ b^2 & b^2+1 & b^2 & b^2 \\ c^2&c^2&c^2+1&c^2\\ d^2&d^2&d^2&d^2+1\end{vmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b^2&1&0&0\\c^2&0&1&0\\d^2&0&0&1\end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

4.53) $$\begin{vmatrix}0&a&b&c\\-a&0&1&-1\\-b&-1&0&1\\-c&1&-1&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&a&b&(a+b+c)\\-a&0&1&0\\-b&-1&0&0\\-c&1&-1&0\end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c)\begin{vmatrix}-a&0&1\\-b&-1&0\\-c&1&-1\end{vmatrix} = -(a+b+c)(-a-b-c) = (a+b+c)^2$$

4.54) $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & c+a & a+b\\ 2a_1+2b_1+2c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ 2a_2+2b_2+2c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & c+a & a+b\\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$$

4.55) $$\det A_n = \begin{vmatrix} 1&1&1&\dots&1\\-1&0&1&\dots&1\\-1&-1&0&\dots&1\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \\ -1&-1&-1&\dots&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&2&\dots&2\\0&0&1&\dots&2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix} = 1$$

4.56) $$\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&1+a_1&1&\dots&1\\1&1&1+a_2&\dots&1\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&\dots&1+a_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&a_1&0&\dots&0\\0&0&a_2&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \\0&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix} =$$

$= a_1a_2\dots a_n$

4.57) Mesmo raciocínio do exercício 4.36.

4.62) 288

4.63) $$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2\end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & b+a\\1&c+a\end{vmatrix} =$$

$= (b-a)(c-a)\,|(c+a)-(b+a)| =$

$= (b-a)(c-a)(c-b) =$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

4.64) a) $$\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} b-a&b-a&b-a\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix}c-b&c-b\\c-b&d-b\end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix}1&1\\c-b&d-b\end{vmatrix} =$$

$= a(b-a)(c-b)(d-c)$

4.69) 48

4.70) 12

4.71) $(b - a)(c - a)(c - b)$

4.72) Como $V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ então, se $V = 0$, um dos fatores $x_i - x_j = 0$, logo, existem dois elementos x_i e x_j iguais. Inversamente, se dois elementos x_α e x_β são iguais, a diferença correspondente $x_\alpha - x_\beta = 0$ anula o produto, logo $V = 0$.

4.73) $S = \{-2, 5, -4\}$

4.74) $S = \{1, -1, 2\}$

Capítulo 5

5.7) a) não b) sim

5.8) $\det A = 1$

5.9) $\det(A^t B^t) = \det(A^t) \cdot \det(B^t) = \det A \cdot \det B$
$\det(AB^t) = \det A \cdot \det(B^t) = \det A \cdot \det B$
$\det(A^t B) = \det(A^t) \cdot \det B = \det A \cdot \det B$

5.10) a) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ c) não existe

5.11) a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

5.12) a) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5.13) ± 1

5.14) a) sim
b) $(AB)^* = (\det(AB))(AB)^{-1} = (\det A)(\det B)B^{-1}A^{-1} =$
$= ((\det B)B^{-1}) \cdot ((\det A)A^{-1}) = B^* A^*$.

Capítulo 6

6.1) A equação (a)

6.2) a) sim b) não c) $k = 7$

6.3) sim

6.4) a) sim b) não

6.5) a) $m = 2$, $n = 15$, $p = 16$
b) $k = 1$

6.6) $[A \,\vdots\, B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6.7) a) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 38 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 3 & -7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$

6.8) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

6.9) a) (2; 4) b) (1; 3) c) (4; 1)

6.10) a) (−1; 1; 2) b) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ c) (2; 1; 4) d) (1; 3; −2)

6.11) a) (2; 3; 1; 3) b) (1; −1; −1; 1)

6.12) $a \neq \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$; (0; 0; 0)

6.13) $\left(\frac{7 + 3m}{1 + m^2}; \frac{3 - 7m}{1 + m^2}\right)$

6.14) $m \neq -\frac{1}{3}$; $\left(\frac{2 + 8m}{1 + 3m}; \frac{1 + 4m - m^2}{2 + 6m}\right)$

6.15) a) $S = \varnothing$ b) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$

6.16) $(\cos 2\alpha; \text{sen}\, 2\alpha)$

6.17) $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \frac{5}{2}$

6.18) $M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; (-15; -11)

6.19) $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$; $\left(-2; \frac{13}{4}; \frac{33}{4}\right)$

Capítulo 7

7.2) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

7.3) Podemos demonstrar a (t e 3) utilizando as duas primeiras equações do sistema, pois pela (t e 1) não se perde a generalidade. Sejam então o sistema

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e o sistema

$$(S_1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (ka_{11} + a_{21})x_1 + (ka_{12} + a_{22})x_2 + \ldots + (ka_{1n} + a_{2n})x_n = kb_1 + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

obtido de (S) somando-se a 2ª equação com a 1ª, sendo esta previamente multiplicada por *k*.

(S) e (S_1) somente diferem pela 2ª equação.

1ª parte) Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de (S), então substituindo estes valores na 2ª equação de (S_1) obtemos

(1º membro) $= (ka_{11} + a_{21})\alpha_1 + (ka_{12} + a_{22})\alpha_2 + \ldots + (ka_{1n} + a_{2n})\alpha_n =$
$= k(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) =$
$= kb_1 + b_2 =$ (2º membro)

Logo, toda solução de (S) é solução de (S_1)

2º parte) Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de (S_1), então é claro que

$(ka_{11} + a_{21})\alpha_1 + (ka_{12} + a_{22})\alpha_2 + \ldots + (ka_{1n} + a_{2n})\alpha_n = kb_1 + b_2$

donde

$$k\underbrace{(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)}_{b_1} + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) = kb_1 + b_2$$

$kb_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) = kb_1 + b_2$

e assim $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2$

Logo, toda solução de (S_1) é solução de (S)

Portanto, $(S) \sim (S_1)$

7.4) a) (1; 3; 1) b) $(1 + 2\alpha; 1 - \alpha; \alpha)$ c) $(\alpha; -2\alpha; -8\alpha)$

7.5) a) $\left(-6; \frac{13}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right)$ b) $\left(\frac{7}{3} - 2\alpha; 4 - 3\alpha; 1 + \alpha; \alpha\right)$
c) $(\alpha; 2\alpha + 3\beta + 1; 2 + \beta; \beta)$

7.6) a) $\left(\frac{a^2 - ab + 2a - b}{a^2}; \frac{2a - b}{a^2}; \frac{b}{a}\right)$ b) $(\alpha - 1; \alpha; 2)$

7.25) a) $\left(\frac{8}{5}; -\frac{7}{10}\right)$ b) inconsistente

7.26) a) $\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{2}{3}\right)$ b) inconsistente
c) $(-1 - 7\alpha; 2 + 2\alpha; \alpha)$

7.27) a) (1; 1) b) (2; 1; -1)

7.28) a) $(6 - 2\alpha - 5\beta; \alpha; \beta; 2\beta - 1)$
b) inconsistente

7.29) a) (0; 0; 0) b) (0; 0; 0) c) $\left(-\frac{19\alpha}{3}; -\frac{53\alpha}{11}; -\frac{79\alpha}{33}; \alpha\right)$

7.30) a) Se $m = -1$: inconsistente
Se $m \neq -1$: determinado, $S = \left\{\left(\frac{2m + 3}{m + 1}; \frac{-1}{m + 1}\right)\right\}$
b) Se $m \neq 6$: inconsistente
Se $m = 6$: indeterminado, $S = \{(3 - 2\alpha; \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

7.31) a) Se $k = 1$: inconsistente
Se $k \neq 1$: determinado, $S = \left\{\left(\frac{k + 1}{k - 1}; \frac{2}{k - 1}; \frac{2}{1 - k}\right)\right\}$
b) Se $m \neq -1$: inconsistente
Se $m = -1$: determinado, $S = \{(1; 2)\}$

7.32) a) Se $k = -2$: inconsistente

Se $k = 1$: indeterminado, $S = \{(\alpha;\ \beta;\ 1 - \alpha - \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Se $k \neq 1$ e $k \neq -2$: determinado, $S = \left\{\left(\dfrac{1}{k+2};\ \dfrac{1}{k+2};\ \dfrac{1}{k+2}\right)\right\}$

b) Se $k = 4$: inconsistente

Se $k \neq 4$: indeterminado,

$$S = \left\{\left(\frac{k-6}{k-4} - (k+4)\alpha;\ \frac{1}{k-4} + 2\alpha;\ \alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

7.33) a) Se $k = 3$: indeterminado,

$S = \{(5 - 10\alpha;\ 7\alpha - 3;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Se $k \neq 3$: determinado, $S = \{(6 + 3k;\ -4 - 2k;\ -1)\}$

b) Se $k = -5$: inconsistente

Se $k = 2$: indeterminado,

$$S = \left\{\left(3\alpha - 3;\ \frac{4 - 5\alpha}{2};\ \alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Se $k \neq -5$ e $k \neq 2$: determinado,

$$S = \left\{\left(\frac{-3k-3}{k+5};\ \frac{4}{k+5};\ \frac{4}{k+5}\right)\right\}$$

7.34) a) Se $k \neq 1$: inconsistente

Se $k = 1$: indeterminado, $S = \{(0;\ \alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

b) Se $k = 6$ ou $k = \pm\sqrt{3}$: indeterminado

Se $k \neq 6$ e $k \neq \pm\sqrt{3}$: determinado

7.35) $a = 1$

7.36) Basta mostrar que $\det A = 2abc \neq 0$

7.37) a) $a = -4$ e $b = -7$: indeterminado

$a = -4$ e $b \neq -7$: inconsistente

$a \neq -4$: determinado

b) $a = -1$ e $b = 8$: indeterminado

$a = -1$ e $b \neq 8$: inconsistente

$a \neq -1$: determinado

7.38) $ab = 1$: indeterminado p/ $a = 1$ e inconsistente p/ $a \neq 1$

$ab \neq 1$: determinado

7.39) $m = -2$: inconsistente

$m = 1$: indeterminado

$m \neq -2$ e $m \neq 1$: determinado

7.40) $\left(\dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)};\ \dfrac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)};\ \dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}\right)$

7.41) a) $a = b = 0$: indeterminado

$a = b = 1$: indeterminado

$a = b \neq 0$ e 1 : inconsistente

$a \neq b$: determinado

b) $a = 3$: determinado

$a \neq 3$: inconsistente

c) $m = \pm 1$ e $p = 1$: indeterminado

$m = \pm 1$ e $p \neq 1$: inconsistente

$m \neq \pm 1$: determinado

7.42) Se $\operatorname{sen} 2\alpha = 0$: indeterminado

Se $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 0$: inconsistente

7.43) $k = 0$: indeterminado

$k \neq 0$: inconsistente

7.44) a) $k = 6$ b) $\left(\dfrac{17 - 40\alpha}{16};\ \alpha;\ \dfrac{3}{8}\right)$

7.45) $a = -74$ e $b = -76$

7.46) não existem a e b

Capítulo 8

8.4) a) 2 b) 3

8.5) a) 2 b) 2

8.6) a) 2 b) 3

8.7) a) 2 b) 3

8.8) $a = -1$: $p(A) = 1$

$a \neq -1$: $p(A) = 3$

8.9) $k = 3 : p(A) = 1$

$k \neq 3$: $p(A) = 2$

8.10) $p(A) = 3,\ \forall k$

8.11) $m = 10$ e $n = \dfrac{1}{3}$: $p(A) = 2$

$m \neq 10$ ou $n \neq \dfrac{1}{3}$: $p(A) = 3$

8.12) 1

8.17) a) determinado b) indeterminado

8.18) a) inconsistente b) indeterminado

8.19) a) indeterminado b) inconsistente c) determinado

8.20) a) $a = 3$: indeterminado
$a \neq 3$: determinado

b) $a = \pm 2$: inconsistente
$a \neq \pm 2$: determinado

8.21) $m = 1$: inconsistente
$m = -2$: indeterminado
$m \neq 1$ e $m \neq -2$: determinado

Capítulo 9

9.9) a) 67 b) 57 c) 80

9.10) a) $b - a$ b) $b - a$ c) $b - a + 1$ d) $b - a - 1$

9.11) a) 118 b) 278

9.12) 34

9.13) a) 52 b) 142

9.14) a) 250 b) 166 c) 45

9.15) Cr\$ 20,00 (máximo) e Cr\$ 5,00 (mínimo)

9.16) em três jogadas

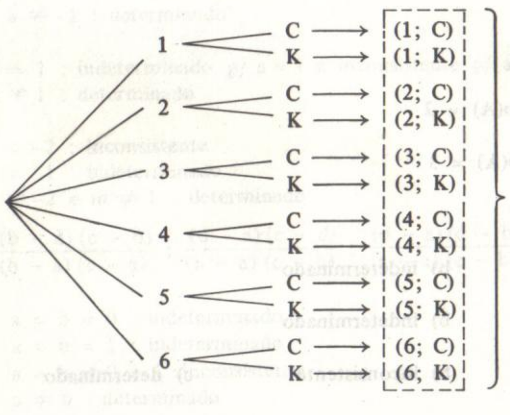
9.17) VVP; VPV; PVV

9.18) a) 6 b) 7

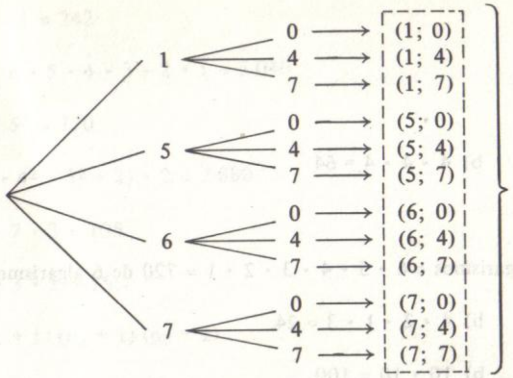
9.19) $n - 2$

9.20) $n + 1$

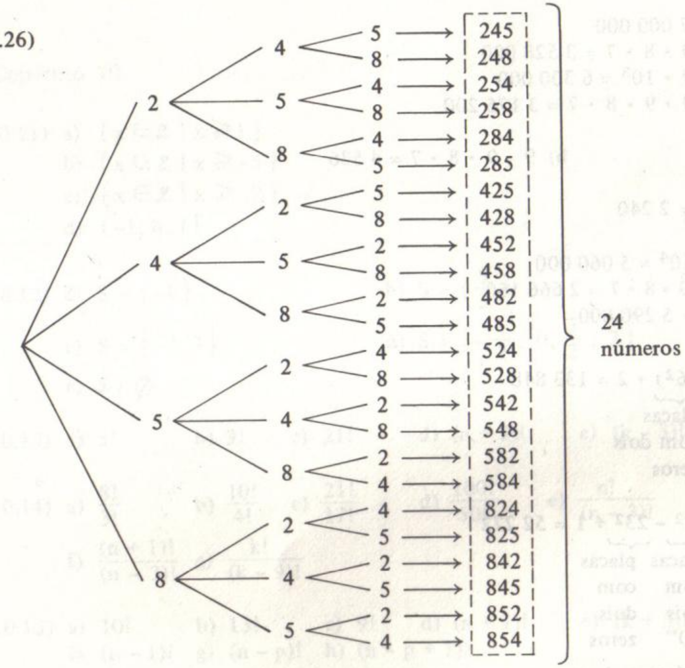
9.24) C = cara K = coroa



9.25)



9.26)



9.27) Há 8 modos do jogo se desenvolver e as possíveis quantias são Cr\$ 8,00, Cr\$ 15,00, Cr\$ 22,00 ou Cr\$ 29,00.

9.28) a) 13 b) aprovada em 4 e rejeitada em 9
c) 6 peças d) 90 segundos

9.29) 11

9.40) $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$

9.41) $8 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

9.42) $6 \cdot 4 = 24$

9.43) a) $6 \cdot 6 = 36$ b) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

9.44) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

9.45) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ de 3 algarismos e $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ de 6 algarismos

9.46) a) $4 \cdot 2 = 8$ b) $4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 24$

9.47) a) $11 \cdot 11 = 121$ b) $10 \cdot 10 = 100$
c) $11 \cdot 10 = 110$ d) $10 \cdot 9 = 90$

9.48) a) $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$
b) $7 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3\,528\,000$
c) $7 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 6\,300\,000$
d) $7 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3\,175\,200$

9.49) a) 9 000 b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$

9.50) $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,240$

9.51) a) $23 \cdot 22 \cdot 10^4 = 5\,060\,000$
b) $23^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,666\,160$
c) $23^2 \cdot 10^4 = 5\,290\,000$

9.52) $(\underbrace{26^2 \cdot 10^2}_{\text{total sem a restrição}} - \underbrace{26^2}_{\text{placas com dois zeros}}) \cdot 2 = 133\,848$

9.53) $\underbrace{23^2 \cdot 10^2}_{\text{total sem as restrições}} - \underbrace{10^2}_{\text{placas com dois “O”}} - \underbrace{23^2}_{\text{placas com dois zeros}} + 1 = 52\,272$

(note que o número 1 teve que ser somado pois, ao retirarmos as placas com dois "O" e as placas com dois zeros, a placa $\boxed{\text{OO - 00}}$ foi retirada duas vezes.)

9.54) $10^4 - 10 - 10^2 + 1 = 9\,891$

9.55) $2^5 = 32$

9.56) $3^{13} = 1\,594\,323$

9.57) $3^5 - 1 = 242$

9.58) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

9.59) $6 \cdot 5^3 = 750$

9.60) $(5 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2) \cdot 2 = 2\,880$

9.61) $5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$

9.62) $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$

9.63) $(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)$

9.64) $(n - 2p + 1)(m - 2q + 1)$

Capítulo 10

10.11) a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -5\}$
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -2\}$
d) $\{-1; 0; 1\}$

10.12) a) $S = \{-1\}$ b) $S = \{\frac{8}{3}\}$
c) $S = \{-2; 3\}$ d) $S = \{-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}; 2\}$
e) $S = \varnothing$

10.13) a) $5!$ b) $9!$ c) $21!$ d) $(n+2)!$ e) $(k-3)!$

10.14) a) $\frac{8!}{3!}$ b) $\frac{10!}{4!}$ c) $\frac{21!}{17!}$ d) $\frac{100!}{50!}$ e) $\frac{n!}{(n-3)!}$
f) $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$ g) $\frac{k!}{(k-9)!}$

10.15) a) $10!$ b) $13!$ c) $9!$ d) $(n+1)!$ e) $(k+3)!$
f) $(n-1)!$ g) $(n-p)!$ h) $(n-p+1)!$

10.16) a) 56 b) 1 320 c) 165 d) 1 330

10.17) a) $n^2 - n$ b) $n^2 + 5n + 6$ c) $k^3 + 3k^2 + 2k$
d) $k - 1$ e) $\frac{1}{k^2 - 5k + 6}$ f) $n - p$

10.18) a) $n^2 - 9$ b) 1 c) $n + 1$
d) $n - 1$

10.19) a) $S = \{2\}$ b) $S = \{7\}$ c) $S = \{5\}$

10.20) Multiplicando os elementos da 1ª coluna por (-1) e somando-os em todas as outras colunas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

x(-1) ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

Como todos os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero, temos

$D = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$

10.21) D é um determinante de Vandermonde cujos elementos de base são 1, 2, 3, 4, . . . , 10
Então:

$D = (2-1)(3-1)(4-1)\ldots(10-1)\cdot(3-2)(4-2)\ldots(10-2)\cdot(4-3)(5-3)\ldots$
$\ldots(10-3)\ldots(10-9)$

$D = (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 8)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7)\ldots(1\cdot 2)\cdot(1)$

Como
$$\begin{aligned} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9 &= 9! \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 8 &= 8! \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7 &= 7! \\ &\ldots\ldots \\ 1\cdot 2 &= 2! \\ 1 &= 1! \end{aligned}$$

Temos

$$D = 9!\ 8!\ 7!\ \ldots\ 2!\ 1! = \prod_{n=1}^{9}(n!)$$

10.22) **1ª parte**

$\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = n\cdot n! = n\cdot n! + n! - n! =$

$= \underbrace{n!(n+1)}_{(n+1)!} - n! = (n+1)! - n! = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$

Outro modo

$\boxed{2^{\circ}\text{ membro}} = (n+1)! - n! = (n+1)\cdot n! =$

$= n![(n+1)-1] = n\cdot n! = \boxed{1^{\circ}\text{ membro}}$

2ª parte

A identidade provada acima nos mostra que toda parcela da forma $n\cdot n!$ pode ser escrita como a diferença $(n+1)! - n!$. Então, para cada parcela da soma S, temos:

$$\oplus\begin{cases} 1\cdot 1! = 2! - 1! & \text{(usamos } n = 1) \\ 2\cdot 2! = 3! - 2! & \text{(usamos } n = 2) \\ 3\cdot 3! = 4! - 3! & \text{(usamos } n = 3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ k\cdot k! = (k+1)! - k! & \text{(usamos } n = k) \end{cases}$$

$$\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k!}_{S} = (k+1)! - 1!$$

Logo, $S = (k+1)! - 1$

10.23) **1ª parte**

$\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = (n+2)n! = [(n+1)+1]n! =$

$= \underbrace{(n+1)n!}_{(n+1)!} + 1\cdot n! = (n+1)! + n! = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$

Outro modo

$\boxed{2^{\circ}\text{ membro}} = (n+1)! + n! = (n+1)\cdot n! + n! =$

$= n![(n+1)+1] = (n+2)\cdot n! = \boxed{1^{\circ}\text{ membro}}$

2ª parte

A identidade verificada acima nos mostra que qualquer parcela da forma $(n+2)n!$ pode ser escrita como sendo a soma $(n+1)! + n!$. Aplicando, então, a cada parcela de S (observando que nas parcelas em que n é par devemos trocar o sinal), temos:

$$\oplus\begin{cases} 3\cdot 1! = 2! + 1! & \text{(usamos } n = 1) \\ -4\cdot 2! = -3! - 2! & \text{(usamos } n = 2) \\ 5\cdot 3! = 4! + 3! & \text{(usamos } n = 3) \\ -6\cdot 4! = -5! - 4! & \text{(usamos } n = 4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (k+2)k! = (k+1)! + k! & \text{(usamos } n = k) \end{cases}$$

(k é ímpar)

$$S = (k+1)! + 1!$$

Logo, $S = (k+1)! + 1$

10.24) a) temos que $f(0) = 1$. Então, fazendo, em $f(n) = n\cdot f(n-1)$,

$n = 1$: $f(1) = 1\cdot f(0) = 1\cdot 1 = 1$
$n = 2$: $f(2) = 2\cdot f(1) = 2\cdot 1 = 2$
$n = 3$: $f(3) = 3\cdot f(2) = 3\cdot 2 = 6$
$n = 4$: $f(4) = 4\cdot f(3) = 4\cdot 6 = 24$
$n = 5$: $f(5) = 5\cdot f(4) = 5\cdot 24 = 120$

b) a exemplo do que fizemos acima, a definição nos permite escrever as seguintes n igualdades

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \cdot f(0) \\ f(2) = 2 \cdot f(1) \\ f(3) = 3 \cdot f(2) \\ f(4) = 4 \cdot f(3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f(n) = n \cdot f(n-1) \end{array}\right\} \otimes$$

Como não há fator algum nulo, multiplicamos essas n igualdades membro a membro, notando que o primeiro membro de uma igualdade é cancelado com um dos fatores do segundo membro da igualdade seguinte. Esse cancelamento não ocorre, evidentemente, com f(0) e f(n). Resulta, então:

$$f(n) = 1 \cdot f(0) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

Como $f(0) = 1$, vem

$$f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

10.25) a) Como $f(n) = n \cdot f(n-1)$, temos:

$$\boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}} = f(a+2) - f(a+1) =$$

$$= (a+2) \cdot f(a+1) - f(a+1) = f(a+1)[a+2-1] =$$

$$= [a+1] \cdot f(a+1) = \boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}} = (a+1)(a+1) \cdot f(a) =$$

$$= (a+1)^2 \cdot f(a) = \boxed{3^{\text{o}} \text{ membro}}$$

b) Como $a > 1$, aplicamos, também, $f(n) = n \cdot f(n-1)$:

$$\boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}} = 2f(a) - (a-1) \cdot f(a-1) =$$

$$= 2a \cdot f(a-1) - (a-1) \cdot f(a-1) =$$

$$= f(a-1) \cdot [2a - (a-1)] = [a+1] \cdot f(a-1) =$$

$$= \underbrace{a \cdot f(a-1)}_{f(a)} + 1 \cdot f(a-1) = f(a) + f(a-1) =$$

$$= \boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Capítulo 11

11.1) $C_{5,3}$

11.2) $C_{10,2}$

11.3) $A_{10,3}$

11.4) $C_{52,3}$; $C_{13,3}$

11.5) $A_{8,5}$

11.6) $A_{10,2}$

11.7) $A_{6,4}$

11.8) $A_{9,5}$

11.9) $C_{n,5}$

11.10) $C_{20,5}$

Capítulo 12

12.4) a) 5 040 b) 120 c) 720 d) $n^3 - 3n^2 + 2n$
e) $n^2 + 3n + 2$ f) 1 g) 7 h) 15

12.5) a) $n \geqslant 3$
b) $n \in \{0; 1; 2; 3\}$
c) $n \geqslant 2$
d) $n \geqslant -5$
e) $n \geqslant -5$
f) $n = 3$

12.6) a) $S = \{9\}$ b) $S = \{12\}$

12.7) a) $S = \{16\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \{11\}$

12.8) a) $n = 3$; $p = 1; 2; 3$
b) $n = 3$ e $p = 2; 3; 4; 5$
ou $n = 4$ e $p = 2; 3; 4; 5; 6$

12.9)

$$\boxed{1^{\text{o}} \text{ membro}} = (n+1)\,\frac{n!}{(n-p+1)!} + \frac{\frac{(n+1)!}{(n-p)!}}{(n-p+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(n-p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-p+1)(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!} =$$

$$= A_{n+1,p} + A_{n+1,p} = 2A_{n+1,p} = \boxed{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

12.12) a) 252 b) 165 c) 190 d) 495
e) 1 f) 1 g) 17 h) 1

12.13) a) $S = \{3\}$ b) $S = \{10\}$

12.14) $C_{n,p} = C_{n,p+1}$ pode ser escrita

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$

e daí temos $\dfrac{1}{p!(n-p)(n-p-1)!} = \dfrac{1}{(p+1)p!(n-p-1)!}$

donde $n - p = p + 1$, isto é $n = 2p + 1$

Como p é natural, conclui-se que 2p é par e $n = 2p + 1$ é ímpar

12.15) $\boxed{1^{\text{o}}\text{ membro}} = 2\dfrac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} - \dfrac{n!}{p!(n-p)!} =$

$= \dfrac{2(n+1)n!}{p!(n+1-p)(n-p)!} - \dfrac{n!}{p!(n-p)!} =$

$= \dfrac{n!}{p!(n-p)!}\left[\dfrac{2n+2}{n-p+1} - 1\right] = C_{n,p}\left[\dfrac{2n+2-n+p-1}{n-p+1}\right] =$

$= C_{n,p}\left[\dfrac{n+p+1}{n-p+1}\right] = \boxed{2^{\text{o}}\text{ membro}}$

Capítulo 13

13.20) a) 20 b) $C_{20,2} = 190$ c) $C_{11,2} = 55$ d) $C_{9,3} = 84$

13.21) $A_{10,4} = 5\,040$

13.22) $10 \cdot C_{9,3} = 840$

13.23) $4 \cdot A_{7,2} = 168$

13.24) $5 \cdot C_{8,3} = 280$

13.25) $5 \cdot A_{9,2} = 360$

13.26) $15 \cdot C_{6,3} = 300$

13.27) $C_{5,3} = 10$

13.28) $C_{7,5} - C_{5,3} = 11$

13.29) a) $A_{5,2} = 20$ b) $A_{7,4} - A_{5,2} = 820$

13.30) $A_{7,4} - A_{5,4} = 720$

13.31) $C_{8,5} - C_{6,3} = 36$

13.32) a) $C_{10,6} = 210$ b) $C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} = 375$
c) $2^{10} - C_{10,2} - C_{10,3} = 859$

13.33) a) $A_{9,5} = 15\,120$
b) $A_{9,3} + A_{8,3} = 840$
c) $A_{9,4} + 2\,A_{8,4} = 6\,384$
d) $A_{9,4} + A_{8,4} + 4\,A_{7,3} = 5\,544$

13.34) a) $C_{6,2} = 15$ b) $C_{6,3} = 20$

13.35) a) $C_{10,2} = 45$ b) $C_{10,2} - 10 = 35$

13.36) $D_n = \underbrace{C_{n,2}}_{\substack{\text{lados}\\+\\\text{diagonais}}} - \underbrace{n}_{\text{lados}} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

13.37) 1º modo: $C_{7,3} - C_{4,3} - C_{3,3} = 30$
2º modo: $4 \cdot C_{3,2} + 3 \cdot C_{4,2} = 30$

13.38) $C_{9,3} - C_{3,3} - C_{3,3} - C_{3,3} = 81$

13.39) $C_{12,3} - C_{3,3} - C_{4,3} - C_{5,3} = 205$

13.40) $C_{4,2} \cdot C_{6,4} = 90$

13.41) $C_{6,4} \cdot C_{6,3} = 300$

13.42) $A_{5,2} \cdot A_{4,2} = 240$

13.43) $C_{12,6} \cdot C_{6,4} = 13\,860$

13.44) $C_{10,3} \cdot C_{7,3} \cdot C_{4,2} = 25\,200$

13.45) $A_{4,3} \cdot A_{6,3} \cdot A_{5,3} = 172\,800$

13.46) $C_{25,5} \cdot C_{20,5} \cdot C_{15,5} \cdot C_{10,5} = \dfrac{25!}{(5!)^5}$

13.47) $C_{n,p} \cdot C_{n-p,p} \cdot C_{n-2p,p} \cdots C_{n-(\alpha-2)\cdot p,p}$

$= \dfrac{n!}{(p!)^{\alpha}}$

13.48) 1º modo: $C_{10,3} \cdot C_{6,2} + C_{10,4} \cdot 6 + C_{10,5} = 3\,312$
2º modo: $C_{16,5} - C_{10,2} \cdot C_{6,3} - 10C_{6,4} - C_{6,5} = 3\,312$

13.49) $C_{16,5} - C_{10,5} - 6\,C_{10,4} = 2\,856$

13.50) a) $C_{20,5} = 15\,504$ b) $C_{4,3} \cdot C_{4,2} = 24$
c) $C_{4,3} \cdot C_{4,2} \cdot A_{5,2} = 480$

13.51) a) $C_{4,2} \cdot C_{16,3} = 3\,360$
b) $C_{5,2} \cdot C_{15,3} = 4\,550$
c) $C_{4,3} \cdot C_{16,2} + C_{16,1} = 480$
d) $C_{20,5} - C_{16,5} = 11\,136$
e) $C_{20,5} - C_{15,5} - 5 \cdot C_{15,4} = 5\,676$

Capítulo 14

14.8) a) $P_3 = 6$ b) $P_4 = 24$ c) $P_5 = 120$

14.9) a) $3 \cdot 2 \cdot P_5 = 720$ b) $3 \cdot 4 \cdot P_5 = 1\,440$
c) $P_3 \cdot P_4 = 144$

14.10) a) $P_8 = 40\,320$ b) $A_{4,2} \cdot P_6 = 8\,640$
c) $A_{4,2} \cdot 4 \cdot P_5 = 5\,760$ d) $A_{4,2} \cdot A_{4,2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot P_2 = 1\,152$

14.11) a) $P_8 = 40\,320$ b) $P_8 \cdot P_3 = 241\,920$
c) $P_{10} - P_8 \cdot P_3 = 3\,386\,880$

14.12) $2P_5 \cdot P_5 = 28\,800$

14.13) $C_{10,3} \cdot P_7 = 604\,800$

14.14) $C_{5,3} \cdot C_{7,4} \cdot P_7 = 1\,764\,000$

14.15) a) $P_6 = 720$ b) $C_{8,5} \cdot P_3 = 336$

14.16) $2P_6 \cdot P_6 = 1\,036\,800$

14.17) $P_3 \cdot P_4 = 144$

14.18) 329º

14.19) 3 999 960

14.20) 279 972

Capítulo 15

15.5) a) $P_8^{(3)} = 6\,720$ b) $P_8^{(3;\,3)} = 1\,120$
c) $P_{13}^{(2;\,4;\,2;\,2)} = 32\,432\,400$

15.6) $P_9^{(3;\,2;\,4)} = 1\,260$; $P_3 = 6$

15.7) $n = 7$

15.8) $n = 4$

15.9) a) $P_9^{(3)} = 60\,480$ b) $P_{10}^{(3;\,2)} - P_9^{(3)} = 241\,920$

15.10) a) $P_{13}^{(6,\,7)}$ b) $P_5^{(2;\,3)} \cdot P_8^{(4;\,4)}$ c) $P_{10}^{(5;\,5)} \cdot P_3^{(2)}$
d) $P_5^{(2;\,3)} \cdot P_5^{(3;\,2)} \cdot P_3^{(2)}$

Capítulo 16

16.1) a) $n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 3$ b) $n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 2$

16.2) $D(f) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

16.3) $D = 0$

16.4) a) 16 b) 4 096 c) 2 176

16.5) a) $2^{10} - 1 = 1\,023$ b) $2^{10} - 1 - 10 - 1 = 1\,012$

16.9) a) $\binom{0}{0}$ b) $\binom{10}{0}$ c) $\binom{100}{61}$ d) $\binom{n}{n-1}$
e) $\binom{n}{3}$ f) $\binom{n+1}{2}$ g) $\binom{2n-2}{n-5}$

16.10) tem 2 colunas iguais, pois $\binom{12}{3} = \binom{12}{9}$,
$\binom{13}{6} = \binom{13}{7}$ e $\binom{14}{9} = \binom{14}{5}$ (complementares)

16.11) a) $S = \{\pm 3;\ \pm\sqrt{10}\}$ b) $S = \{7\}$
c) $S = \{-2;\ 4\}$ d) $S = \{\frac{1}{3}\}$ e) $S = \varnothing$

16.12) a) $S = \{(72;\ 3);\ (28;\ 25)\}$ b) $S = \{(4;\ 8)\}$

16.13) $\binom{n+2}{k} = \binom{n+2}{k+1} \Rightarrow \begin{cases} k = k + 1 & \text{(impossível)} \\ \text{ou} \\ k + k + 1 = n + 2 \end{cases}$
donde $n = 2k - 1 =$ ímpar

16.14) a) $n \geqslant p + q$ e $p \geqslant q$
b) $\binom{n}{p+q} = \binom{n}{p-q} \Rightarrow \begin{cases} p + q = p - q & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ p + q + p - q = n & \text{(II)} \end{cases}$
de (I), vem $q = 0$ que, como $q \in \mathbb{N}^*$, não convém;
de (II), vem $n = 2p =$ par

16.15) $\binom{n}{3k-1} = \binom{n}{2k+1} \Rightarrow \begin{cases} 3k - 1 = 2k + 1 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ 3k - 1 + 2k + 1 = n & \text{(II)} \end{cases}$
de (I), vem $k = 2$, o que não convém;
de (II), vem $n = 5k$ que é múltiplo de 5.

16.19) a) $S = \{39\}$ b) $S = \{14\}$

16.20) a) $S = \{15\}$ b) $S = \{20\}$

16.21) $\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = n\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} = n\binom{n}{p} - \binom{n}{p}\dfrac{n-p}{p+1} =$

$= \binom{n}{p}\left[n - \dfrac{n-p}{p+1}\right] = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \dfrac{(n+1)p}{p+1} =$

$= p\dfrac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = p\binom{n+1}{p+1} = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$

16.26) a) V b) V c) V d) V

16.27) a) $S = \{-\frac{7}{2}; 3\}$ b) $S = \{\pm\sqrt{11}, \pm 5\}$

16.28) a) $S = \{5; 8\}$ b) $S = \{4; 6\}$

16.29) $S = \{50; 52\}$

16.30) $\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = \binom{n+1}{p} - \binom{n-1}{p-2} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} - \binom{n-1}{p-2} =$

$= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}\binom{n-1}{p-2} - \binom{n-1}{p-2} =$

$= \binom{n-1}{p} + 2\binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}\dfrac{n-1-p+1}{p} + 2\binom{n-1}{p-1} =$

$= \binom{n-1}{p-1}\left[\dfrac{n-p}{p} + 2\right] = \binom{n-1}{p-1}\dfrac{n+p}{p} = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$

Capítulo 18

18.5) a) $x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$
b) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
c) $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$
d) $x^5 + 5x^3 + 10x + \dfrac{10}{x} + \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{1}{x^5}$

18.6) a) $(2+7)^5 = 9^5 = 59\,049$
b) $(5-3)^6 = 2^6 = 64$
c) $(7+3)^4 = 10^4 = 10\,000$
d) $(101-1)^5 = 100^5 = 10\,000\,000\,000$

18.7) a) $(3+2)^8 = 5^8 = 390\,625$
b) $(11+4)^n = 15^n$
c) $(11-21)^n = (-10)^n$
d) $(11-1)^n = 10^n$
e) $(1-11)^n = (-10)^n$

18.8) zero

18.9) a) 2^{n-1} b) 2^{n-1}

18.17) a) $\binom{10}{5}\dfrac{1}{x^5} = \dfrac{252}{x^5}$.

b) $-\binom{16}{13}2^3x^{49} = -4\,480x^{49}$

18.18) a) $T_5 = \binom{14}{4}x^8 = 1\,001x^8$

b) $T_4 = -\binom{7}{3}5^3x^{11} = -4\,375x^{11}$

c) não existe

18.19) a) $T_4 = -\binom{9}{3}3^3 2^6 = -145\,152$

b) $T_7 = \binom{15}{6}4^6 = 20\,500\,480$

c) não existe

18.20) a) $T_7 = \binom{12}{6}2^6x^{20} = 29\,568x^{20}$

b) $T_6 = \binom{10}{5}\dfrac{1}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{252\sqrt{x}}{x^3}$

18.21) $n = 29$

18.22) $a = \pm 2\sqrt[4]{\dfrac{3}{7}}$

18.23) $n = 20$; $a = \sqrt[3]{25}$

18.24) dois; sétimo e décimo nono termos

18.25) a) $1\,110x^{16}$ b) $2\,060x^{44}$

18.29) a) 2,176 b) 258,055

18.30) $Q_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18.31) a) 2 890
b) $\dfrac{n(n+1)(n^2+n-6)}{4} = \dfrac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{4}$
c) 562 666

Capítulo 19

19.3) $PC_6 = 120$

19.4) $PC_8 - 2PC_7 = 3\ 600$

19.5) $PC_4 = 6$ broches e $\frac{PC_4}{2} = 3$

19.6) $PC_4 \cdot P_4 = 144$

19.8) $AR_{3,5} = 243$

19.9) a) $AR_{2,4} = 16$
b) $AR_{2,1} + AR_{2,2} + AR_{2,3} + AR_{2,4} = 30$

19.10) $AR_{10,5} - AR_{10,4} - (A_{10,5} - A_{9,4}) = 62\ 784$

19.11) $AR_{26,2} \cdot AR_{10,2} - AR_{26,2} - AR_{10,2} + 1 = 66\ 825$

19.16) a) 120 b) 330 c) 462

19.17) $CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$

$CR_{k+1,n-1} = C_{k+n-1,n-1} = \binom{n+k-1}{n-1}$

como os dois binomiais são complementares, é imediato que $CR_{n,k} = CR_{k+1,n-1}$

19.18) a) $CR_{12,5} = 4\ 368$
b) $CR_{6,3} \cdot CR_{6,2} = 1\ 176$

19.19) $CR_{4,4} = 35$; $CR_{3,5} = 21$

19.20) $CR_{11,3} = 286$

19.21) $CR_{10,5} = 2\ 002$

19.22) a) $CR_{\alpha+1,m-1} = CR_{m,\alpha}$
b) $CR_{\alpha-m+1,m-1} = CR_{m,\alpha-m}$

Capítulo 20

20.10) $\frac{2}{3}$

20.11) $\frac{3}{4}$

20.12) a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$

20.13) a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

20.14) a) $\frac{9}{100}$ b) $\frac{13}{200}$

20.15) $\frac{23}{95}$

20.16) a) 0,6 = 60% b) 0,7 = 70%
c) 0,4 = 40% d) 0,9 = 90%

20.17) 0,75 = 75%

20.18) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$

20.19) a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{3}{13}$ c) $\frac{5}{13}$

20.20) a) $\frac{1}{2n+2}$ b) $\frac{1}{n+1}$ c) $\frac{2}{n+1}$

20.21) $\frac{1}{4}$

20.22) a) $\frac{14}{285}$ b) $\frac{143}{570}$

20.23) $\frac{5}{7}$

20.24) a) $\frac{1}{4\ 680}$ b) $\frac{7}{936}$ c) $\frac{35}{468}$ d) $\frac{53}{7\ 020}$

20.25) $\frac{455}{3\ 876}$

20.26) $\frac{18}{77}$

20.27) $\frac{2}{n}$

20.28) $\frac{\frac{n-3}{2}}{C_{n,3}} = \frac{3(n-3)}{n(n-1)(n-2)}$

20.29) $\frac{10}{A_{51,2}} = \frac{1}{255}$

20.30) $\frac{9}{A_{7,3}} = \frac{3}{70}$

Capítulo 21

21.4) a) $\frac{100}{200} + \frac{40}{200} - \frac{20}{200} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{28}{200} + \frac{18}{200} - \frac{2}{200} = \frac{11}{50}$

c) $\frac{8}{200} + \frac{15}{200} = \frac{23}{200}$

21.5) a) $\frac{18}{30} + \frac{15}{30} - \frac{9}{30} = \frac{4}{5}$

b) $1 - \left(\frac{12}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30}\right) = \frac{13}{30}$

21.6) $\frac{C_{100,2}}{C_{160,2}} + \frac{C_{45,2}}{C_{160,2}} - \frac{C_{25,2}}{C_{160,2}} = \frac{47}{106}$

21.7) $\frac{C_{10,3}}{C_{25,3}} + \frac{C_{10,3}}{C_{25,3}} - \frac{C_{5,3}}{C_{25,3}} = \frac{1}{23}$

21.8) a) $\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{26,2}}{C_{52,2}} - \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{C_{26,2}}{C_{52,2}} = \frac{25}{102}$

b) $\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{2}{17}$

c) $\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{4,2}}{C_{52,2}} = \frac{14}{221}$

21.9) a) $1 - P[A \cup B] = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

b) $1 - P[A \cap B] = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

c) $1 - P[A \cup B] = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

d) $P[A] - P[A \cap B] = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

21.10) a) 0,60 + 0,65 − 0,35 = 0,90 (90%)
b) 1 − 0,90 = 0,10 (10%)
c) 0,60 − 0,35 = 0,25 (25%)
d) 0,65 − 0,35 = 0,30 (30%)

Capítulo 22

22.6) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

22.7) a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{75}$ b) $\frac{4}{15} \cdot \frac{11}{15} = \frac{44}{225}$ c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{8}{15} = \frac{64}{225}$

22.8) a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{19} = \frac{21}{95}$ b) $\frac{7}{10} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190}$ c) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38}$

22.9) $\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{5}{56}$

22.10) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

22.11) a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{204}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{136}$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{68}$

22.12) a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2\,401}$

22.13) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{59\,049}$

22.14) $1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{2\,187}$

22.15) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{61}{120}$

22.16) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} = \frac{34}{455}$

22.17) $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{17} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{17} = \frac{9}{17}$

22.18) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

Capítulo 23

23.4) a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$

23.5) $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

23.6) a) $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{15\,552}$

b) $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$

c) $\binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{729}$

d) $\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$

23.7) $\binom{4}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

$= \frac{513}{625}$ (note que $P = \sum_{k=0}^{2} \binom{4}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$)

23.8) $\sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \frac{919}{262\,144}$

23.9) $\sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k}(0{,}2)^k(0{,}8)^{10-k} = 0{,}6778$

23.10) $\sum_{k=27}^{30} \binom{30}{k}(0{,}9)^k(0{,}1)^{30-k} = 0{,}4116$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) $x = 2, \quad y = 3, \quad z = 1, \quad t = 4$

I.2) $\begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ -6 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

I.3) $X = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{10}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

I.4) Basta efetuar o produto AA.

I.5) $\begin{bmatrix} b + d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$

I.6) $T_\alpha \cdot T_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}\,\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta & -\text{sen}\,\beta\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\beta \\ \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\text{sen}(\alpha+\beta) \\ \text{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = T_{\alpha+\beta}$

$T_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\text{sen}(-\alpha) \\ \text{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = T_\alpha^t$

I.7) Basta efetuar os produtos, lembrando que BA = AB.

I.8) a) $S^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = S$

b) $K^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -K$

c) Basta notar que $A = S + K$.

I.9) Basta efetuar o produto AB, obtendo a matriz O_3.

I.10) Basta efetuar A^2 e B^2.

I.11) $C(C - I) = C^2 - C = C - C = 0$

I.12) $S^2 = [\frac{1}{2}(I + A)]^2 = \frac{1}{4}(I + 2A + A^2) = \frac{1}{4}(2I + 2A) = \frac{1}{2}(I + A) = S$

$T^2 = [\frac{1}{2}(I - A)]^2 = \frac{1}{4}(I - 2A + A^2) = \frac{1}{4}(2I - 2A) = \frac{1}{2}(I - A) = T$

$ST = [\frac{1}{2}(I + A)]\,[\frac{1}{2}(I - A)] = \frac{1}{4}(I - A^2) = \frac{1}{4}(I - I) = 0$

I.13) **Método da Indução Matemática**

Teorema 1: (para $p = 1$)

$A^{p+1} = A^2 = (B + C)^2 = B^2 + 2BC + C^2 = B(B + 2C) = B^p[B + (p + 1)C]$

Teorema 2

Hipótese: $A^{k+1} = B^k[B + (k + 1)C]$

Tese: $A^{k+2} = B^{k+1}[B + (k + 2)C]$

$A^{k+2} = A \cdot A^{k+1} = AB^k[B + (k + 1)C] = (B + C)B^k[B + (k + 1)C] =$

$= (B + C)[B^{k+1} + (k + 1)B^kC] =$

$= B^{k+2} + (k + 1)B^{k+1}C + B^{k+1}C + (k + 1)B^kC^2 =$

$= B^{k+2} + (k + 2)B^{k+1}C + 0 =$

$= B^{k+1}[B + (k + 2)C]$

I.14) Há 2 soluções: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

I.15) Não

I.16) $X = BA^{-1}C^{-1}A$

I.17) $(A + B)A^{-1}(A - B) = (I + BA^{-1})(A - B) =$

$= A - B + BA^{-1}A - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

$(A - B)A^{-1}(A + B) = (I - BA^{-1})(A + B) =$

$= A + B - BA^{-1}A - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

I.18) **Teorema 1:** (para $n = 2$): $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$

Se $X = A_1A_2$ e $Y = A_2^{-1}A_1^{-1}$, então

$XY = A_1A_2A_2^{-1}A_1^{-1} = A_1IA_1^{-1} = A_1A_1^{-1} = I$

donde $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$

Teorema 2

Hipótese $(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$

Tese $(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot A_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1}A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$

Se $B = A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}A_k$ então

$(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot A_{k+1})^{-1} = (BA_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1} \cdot B^{-1} =$

$= A_{k+1}^{-1}A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$

I.19) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

I.20) a) $A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\frac{1}{\beta} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\beta} & \beta - \alpha \\ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} & 1 - \frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix}$

$A_\beta A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\frac{1}{\beta} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta}{\alpha} & \alpha - \beta \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} & 1 - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$

Se $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$ então $\beta - \alpha = \alpha - \beta$, donde $\alpha = \beta$;
se $\alpha = \beta$ então $A_\alpha = A_\beta$ e $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha = A_\alpha^2$

b) Basta efetuar a soma.

c) $A_\alpha^2 = 0$

d) Note que $(A_\alpha + A_\beta)^2 = A_\alpha^2 + A_\alpha A_\beta + A_\beta A_\alpha + A_\beta^2 =$

$= A_\alpha A_\beta + A_\beta A_\alpha = \left(2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)I_2$ (como em b)).

e) Basta elevar à potência n o resultado do item d).

f) Basta colocar $\beta = 2\alpha$ no resultado do item d).

II.1) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ então

$AB = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta + b\gamma \\ 0 & c\gamma \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha + c\beta \\ 0 & c\gamma \end{bmatrix}$

Assim, $a\beta + b\gamma = b\alpha + c\beta$

donde $b(\alpha - \gamma) - \beta(a - c) = 0$

isto é, $\begin{vmatrix} b & a - c \\ \beta & \alpha - \gamma \end{vmatrix} = 0$

II.2) Escrevendo-se

$$A - xI = \begin{bmatrix} a - x & 0 & 0 & d \\ 0 & b - x & 0 & e \\ 0 & 0 & c - x & f \\ d & e & f & 0 \end{bmatrix}$$

e desenvolvendo o determinante, obtemos

$\det(A - xI) = d^2(b - x)(c - x) + e^2(a - x)(c - x) + f^2(a - x)(b - x) = F(x)$

A expressão F(x) é um trinômio do 2º grau. Temos

$F(a) = d^2(b-a)(c-a) > 0$
$F(b) = e^2(a-b)(c-b) < 0$
$F(c) = f^2(a-c)(b-c) > 0$

Assim, a equação $F(x) = 0$ admite duas raízes reais x_1 e x_2 tais que

$a > x_1 > b > x_2 > c$.

II.3) Se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, assim

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ 1 & 1 & \operatorname{tg}\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 1 + 1 - \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma = 2$$

II.4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant x \leqslant -\sqrt{10} \quad \text{ou} \quad \sqrt{10} \leqslant x \leqslant 10\}$

II.5) zero

II.6) zero

II.7) $S = \{0; -10\}$

II.8) $S = \{0, 1, 2\}$

II.9) Lembrando que $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$, fica claro que a 3ª coluna é combinação linear das duas outras.

II.10) 1

II.11) No determinante da esquerda, multipliquemos a 2ª coluna por yz, a 3ª por xz e a 4ª por xy, obtendo

$$\frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} xyz \\ x \\ y \\ z \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

II.12) $$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 546 \\ 2 & 7 & 273 \\ 1 & 6 & 169 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 42 \\ 2 & 7 & 21 \\ 1 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

10 100 13

II.13) $x^n + (-1)^{n+1}y^n$

III.1) $\lambda = 1, \left(\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ ou $\lambda = -\frac{6}{5}, \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right)$

III.2) $\lambda = 1$: indeterminado

$\lambda = -\frac{2}{3}$: inconsistente

$\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -\frac{2}{3}$: determinado

III.3) $\lambda \neq -\frac{2}{3}$

III.4) $m = 0$ ou $m = -1$

III.5) Basta notar que $p(A) < n$, logo (S) é indeterminado.

III.6) Se $ad - bc \neq 0$, então um dos elementos a, b, c, d, pelo menos, é diferente de zero. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $d \neq 0$. Então,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d \sim \begin{bmatrix} ad & bd \\ c & d \end{bmatrix} -b \sim \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} -c \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \frac{1}{d} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

III.7) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \end{bmatrix} -(k+4) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k(k+4) & -k \end{bmatrix}$$

1) $k = 0$: sistema indeterminado

$$S = \{(3 - 3\alpha; 1; \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

2) $k = -4$: sistema inconsistente
3) $k \neq 0$ e $k \neq -4$: sistema determinado

III.8) $A(\lambda\overline{X}) = \lambda(A\overline{X}) = \lambda \cdot 0 = 0$

IV.1) 3

IV.2) 30

IV.3) 11

IV.4) 15 120

IV.5) $\{-1\}$

IV.6) $a = 6$, $b = 11$ e $c = 5$

IV.7) o quociente é 2^n

IV.8) $n(n-1)(n-2)$

IV.9) $N = 648$ e $S = 355\,680$

IV.10) $\binom{p+2}{3}$

IV.11) $\binom{n-1}{p-1}$

IV.12) 495

IV.13) 1º) $\binom{10}{p}^2$ 2º) 184 756

IV.14) 60

IV.15) Para a 2ª igualdade faça na relação anterior $n = 1, 2, 3, \dots, n$ e some membro a membro.

IV.16) 174

V.1) $\dfrac{(n!)^{n-1}}{[1!\,2!\dots(n-1)!]^2}$

V.2) $\binom{n}{p}$ é mínimo para $p = 1$; esse mínimo é n

$\binom{n}{p}$ é máximo para
$$\begin{cases} p = \dfrac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par; esse máximo é } \dbinom{n}{\frac{n}{2}} \\[2ex] p = \dfrac{n-1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar; esse máximo é } \dbinom{n}{\frac{n-1}{2}} = \dbinom{n}{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$$

V.3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1} = \dfrac{n+1}{1}\binom{n}{n}$

$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} = \dfrac{n+1}{2}\binom{n}{n-1}$

....

$\binom{n}{n-n} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{n}\binom{n}{1}$

multiplicando-se membro a membro, vem a tese

V.5) 1º) $1 + \binom{n}{1}a + \dots + \binom{n}{p}a^p + \dots + \binom{n}{n}a^n$

2º) $\dfrac{\mu_{p+1}}{\mu_p} = \dfrac{a(n-p)}{p+1}$; $p \leqslant \dfrac{na-1}{a+1}$,

isto é, se E(x) designa a parte inteira do número x:

$p \leqslant E\left(\dfrac{na-1}{a+1}\right)$

3º) o maior termo é μ_{p+1} com $p = E\left(\dfrac{na-1}{a+1}\right)$;

$\binom{1\,000}{759}\pi^{759}$; $\binom{100}{50}\left(\dfrac{51}{50}\right)^{50}$ e $\binom{100}{51}\left(\dfrac{51}{50}\right)^{51}$

V.6) 7; 14

V.7) 16

V.8) 3, 2, 6

V.9) $(1{,}02)^5 \cong 1{,}1041$

V.10) desenvolva $(x+y)^5$

V.11) $a = -\dfrac{4}{3}$; $-\dfrac{112}{3}$

V.12) $a = 2(1-n)$, $\lambda = -\dfrac{4}{3}n(n-1)(2n-1)$

V.13) 5

V.14) -9; 46

VI.1) 252

VI.2) 1 140

VI.3) 210

VI.4) 8

VI.5) 1 080

VI.6) 16

VI.7) 17 881 376

VI.8) 2 893

VII.1) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$ e 0,34

VII.2) a) $\dfrac{[\frac{n}{6}] + [\frac{n}{9}] - [\frac{n}{18}]}{n}$ onde $[x]$ significa "o maior inteiro que não supera x".

b) $\dfrac{[\frac{n}{18}]}{n}$

Caso particular: $\frac{11}{50}$; $\frac{1}{20}$

VII.3) $P = \frac{3^4}{5^4} \cong 0{,}13$

VII.4) $\frac{17}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{17}{36}$

VII.5) $\dfrac{n(2n + 9)}{(2n + 6)(2n + 5)}$

VII.6) a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{2}{27}$ c) $\frac{89}{108}$

VII.7) $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{12}$

Fotolito Lima
nelson manduca
Rua Arciprestes Ezequias, 327 — Fone 273-0367 — São Paulo, SP

Impresso em off-set por
GRÁFICA EDITORA HAMBURG LTDA.
Rua Apeninos, 294 — São Paulo — Brasil
Fones: 278-2648 278-1620 279-2765
com filmes fornecidos pelo editor

NOÇÕES DE MATEMÁTICA
(plano da obra)

Volume 1 — Conjuntos e funções
Volume 2 — Progressões e logaritmos
Volume 3 — Trigonometria
Volume 4 — Combinatória, matrizes e determinantes
Volume 5 — Geometria
Volume 6 — Geometria analítica
Volume 7 — Números complexos, polinômios e equações algêbricas
Volume 8 — Introdução à análise matemática