Luiz Roberto Dante

PROJETO MÚLTIPLO

Caderno de Estudo

Matemática

Ensino Médio

VOLUME 2

editora ática

PROJETO MÚLTIPLO

Caderno de Estudo

Matemática

Ensino Médio

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.
Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC – São Paulo.
Mestre em Matemática pela USP.
Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.
Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo.
Autor de vários livros, entre os quais: *Formulação e resolução de problemas de Matemática – Teoria e prática; Didática da Matemática na pré-escola; Projeto Ápis – Matemática* (1º ao 5º ano); *Projeto Teláris Matemática* (6º ao 9º ano); *Projeto Voaz Matemática* (Ensino Médio – volume único); *Matemática – Contextos & Aplicações* (Ensino Médio – volume único).

editora ática

editora ática

Diretoria editorial: Lidiane Vivaldini Olo
Editoria de Ciências Exatas: Cármen Matricardi
Editoras: Monique Matos de Oliveira,
Cibeli de Oliveira Chibante Bueno, Letícia Mancini Martins (estag.)
Colaboradora editorial: Pamela Hellebrekers Seravalli
Supervisor de arte e produção: Sérgio Yutaka
Supervisor de arte e criação: Didier Moraes
Coordenadora de arte e criação: Andréa Dellamagna
Editor de arte: André Gomes Vitale
Diagramação: Wander Camargo
Design gráfico: UC Produção Editorial, Andréa Dellamagna (miolo e capa)
Gerente de revisão: Hélia de Jesus Gonsaga
Equipe de revisão: Rosângela Muricy (coord.), Ana Paula Chabaribery
Malfa, Claudia Virgilio, Vanessa de Paula; Flávia Venézio
dos Santos e Gabriela Macedo de Andrade (estags.)
Supervisor de iconografia: Sílvio Kligin
Pesquisadora iconográfica: Cláudia Bertolazzi
Tratamento de imagem: Cesar Wolf e Fernanda Crevin
Foto da capa: Stoneography/Flickr Open/Getty Images
Grafismos: Shutterstock/Glow Images
Ilustrações: Theo Szczepanski

Av. das Nações Unidas, 7221, 3º andar, setor C
Pinheiros – São Paulo – SP
CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.atica.com.br/editora@atica.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dante, Luiz Roberto
Projeto Múltiplo: Matemática : ensino médio /
Luiz Roberto Dante. -- São Paulo : Ática, 2014.

Obra em 3 v.

1. Projeto Múltiplo: Matemática (Ensino médio)
I. Título.

14-02256 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Projeto Múltiplo: Matemática : Ensino médio 510.7

2014
ISBN 978 85 08 16705-0 (AL)
ISBN 978 85 08 16706-7 (PR)
Código da obra CL 737770
CAE 501220 (AL)
CAE 501240 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Uma publicação Abril EDUCAÇÃO

Apresentação

O Ensino Médio é a época na qual a maioria dos adolescentes faz uma escolha que os acompanhará por toda a vida: a da profissão que desejam seguir.

Além da profissão, a escolha da universidade também é um fator decisivo para o seu futuro sucesso profissional. E para que você tenha um bom desempenho no exame vestibular da universidade que escolher, além de conhecer muito bem todo o conteúdo do Ensino Médio, você deve ter uma ótima habilidade em resolver exercícios. Por esse motivo, este caderno reúne mais de 200 questões das mais renomadas universidades do país, questões de níveis complexos, que, no todo, representam um momento único de preparação para o vestibular. Para auxiliá-lo com as resoluções, cada sequência de exercícios de um mesmo tema é precedida por quadros-resumos que sintetizam os principais tópicos do conteúdo.

Encare o período de estudo com este caderno como oportunidade de aperfeiçoar sua capacidade de resolver exercícios de forma rápida e segura.

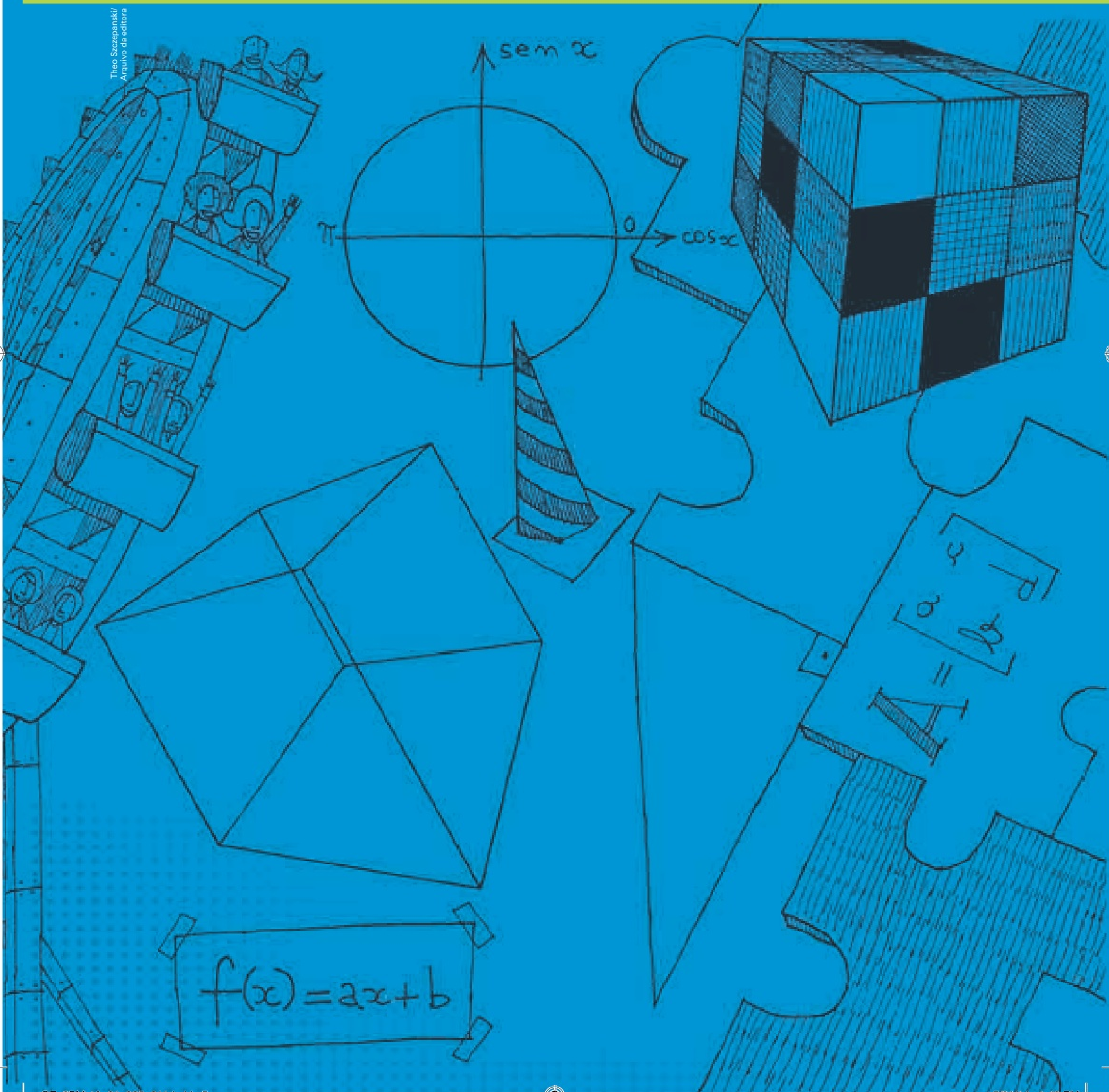
Utilize este caderno como um instrumento de aperfeiçoamento de suas habilidades e não desista dos seus sonhos.

Boa sorte!

Sumário

Vestibular em foco

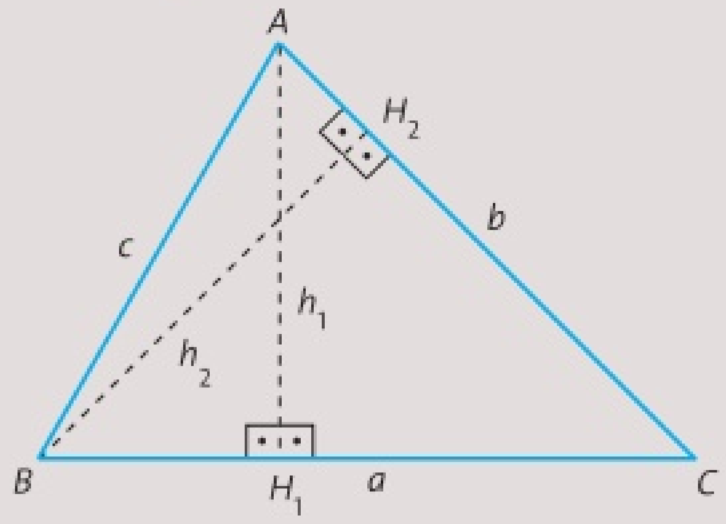
Theo Szczepanski/
Arquivo da editora



TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

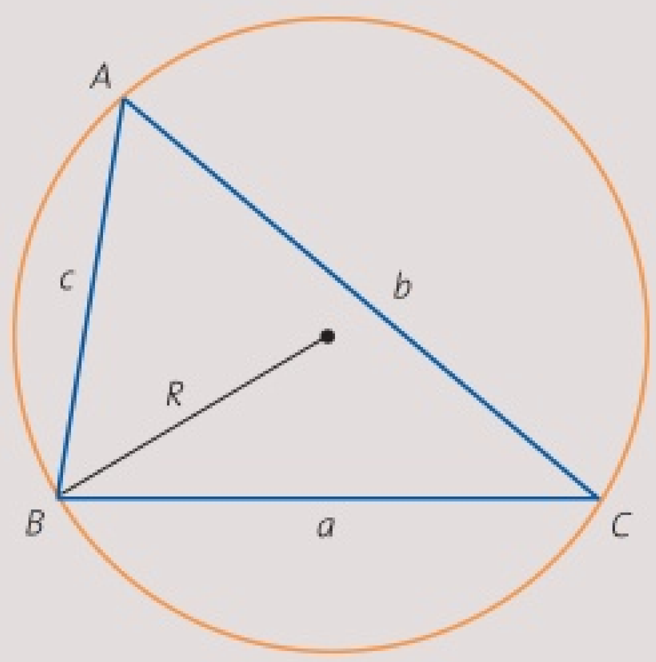
Lei dos senos

Definição



$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

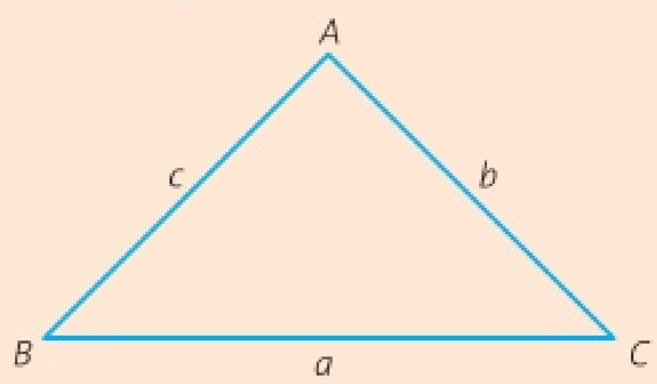
A constante $2R$



$$\frac{\text{medida do lado}}{\text{seno do ângulo oposto}} = 2R$$

Lei dos cossenos

Definição



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$

Exercícios

1. (Cesgranrio-RJ) No triângulo *ABC*, os lados *AC* e *BC* medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo *A* vale 30°. O seno do ângulo *B* vale:

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{2}{3}$.
c) $\frac{3}{4}$.
d) $\frac{4}{5}$.
e) $\frac{5}{6}$.

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{6}{\text{sen } 30°} = \frac{8}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\text{sen } \theta} \Rightarrow 6 \text{ sen } \theta = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{2}{3}$$

Resposta: alternativa **b**.

2. (Unicamp-SP) Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.

a) Quais são esses números?

b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.

a) Podemos representar os lados do triângulo por $(x - 2, x, x + 2)$.
Assim:
$x - 2 + x + x + 2 = 15 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$
Portanto, os lados do triângulo são 3, 5 e 7.

b) Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta \Rightarrow 49 = 25 + 9 - (2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \cos \theta = -15 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = 120°$.

3. (Unimontes-MG) Se num triângulo retângulo os catetos medem 2 m e 4 m, então o cosseno do menor ângulo desse triângulo é igual a:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
b) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 \Rightarrow (\text{hipotenusa})^2 = 4 + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{hipotenusa})^2 = 20 \Rightarrow \text{hipotenusa} = 2\sqrt{5}$$

Mas:

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{4\sqrt{5}}{10} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: alternativa **c**.

4. (UFJF-MG) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m, e formam um ângulo de 60°. O terceiro lado desse triângulo mede:

a) $2\sqrt{21}$ m.
b) $2\sqrt{31}$ m.
c) $2\sqrt{41}$ m.
d) $2\sqrt{51}$ m.
e) $2\sqrt{61}$ m.

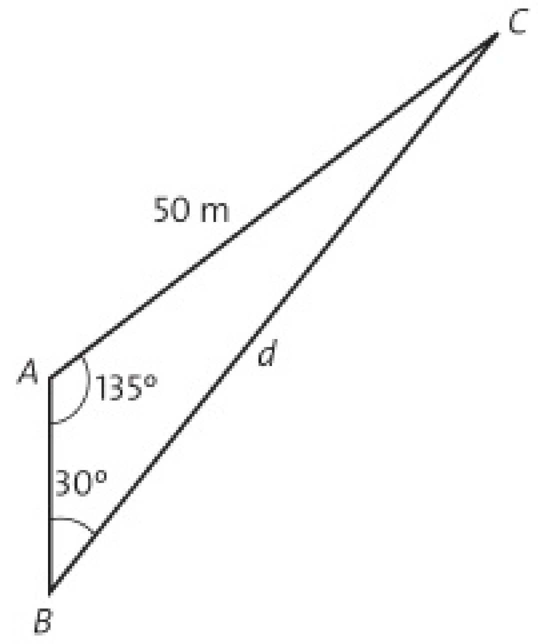
Pela lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 100 + 64 - 160 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 164 - 80 \Rightarrow x^2 = 84 \Rightarrow x = 2\sqrt{21}$$

Resposta: alternativa **a**.

5. (UFSM-RS) Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices *B* e *C* do triângulo, segundo a figura.



Assim, a distância *d* é:

a) $50\sqrt{2}$ m.
b) $50\frac{\sqrt{6}}{3}$ m.
c) $50\sqrt{3}$ m.
d) $25\sqrt{6}$ m.
e) $50\sqrt{6}$ m.

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen } 30°} = \frac{d}{\text{sen } 135°} \Rightarrow \frac{50}{\frac{1}{2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow d = 50\sqrt{2} \text{ m}$$

Resposta: alternativa **a**.

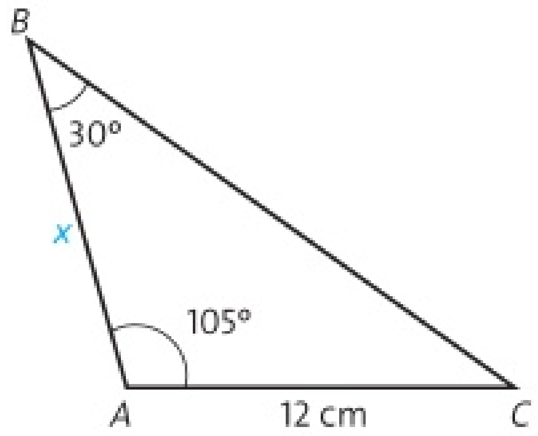
6. (Unifor-CE) Um terreno de forma triangular tem frentes de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um ângulo de 120°. A medida do terceiro lado do terreno, em metros, é:

a) $10\sqrt{5}$.
b) $10\sqrt{6}$.
c) $10\sqrt{7}$.
d) 26.
e) $20\sqrt{2}$.

$$x^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow x^2 = 400 + 100 - 2 \cdot 200 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 400 + 100 + 200 \Rightarrow x^2 = 700 \Rightarrow x = 10\sqrt{7} \text{ m}$$

Resposta: alternativa **c**.

7. (UPM-SP) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1 : 10 000, como na figura.



Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:

a) 2,3 km. b) 2,1 km. c) 1,9 km. d) 1,4 km. e) 1,7 km.

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 12\sqrt{2} \Rightarrow x \simeq 16{,}8 \text{ cm}$$

Como a escala é de 1 : 10 000, temos:

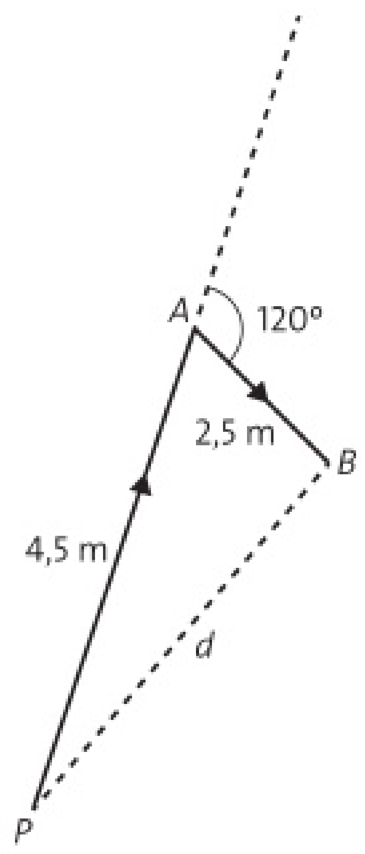
$x \simeq 168\ 000$ cm $\Rightarrow x \simeq 1{,}68$ km $\Rightarrow x \simeq 1{,}7$ km

Resposta: alternativa **e**.

8. (UFTM-MG) Robô da Nasa anda em Marte: em seu primeiro "test drive", o Curiosity andou 4,5 m, girou por 120° e percorreu mais 2,5 m, em 16 minutos.

O Estado de S. Paulo, 24 ago. 2012.

A figura esquematiza a trajetória do robô, contida em um plano, onde todos os trechos por ele percorridos foram em movimento retilíneo. Suponha que esse robô retorne ao ponto de partida (P), mantendo a mesma velocidade média desenvolvida anteriormente. Adotando como valor da raiz quadrada de um número decimal o número inteiro mais próximo, é correto afirmar que, para ir do ponto B ao ponto P, o robô irá demorar, aproximadamente:



a) 9 min 6 s. b) 12 min 6 s. c) 10 min 40 s. d) 13 min 12 s. e) 11 min 30 s.

Pela lei dos cossenos, temos:

$$d^2 = 4{,}5^2 + 2{,}5^2 - 2 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot \cos 60° \Rightarrow d^2 = 20{,}25 + 6{,}25 - 2 \cdot 11{,}25 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow d^2 = 26{,}50 - 11{,}25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 15{,}25 \Rightarrow d^2 \simeq 16 \Rightarrow d = 4$$

Logo, $d_{perc.} = 7$ m.

Mas tempo = 16 min. Então:

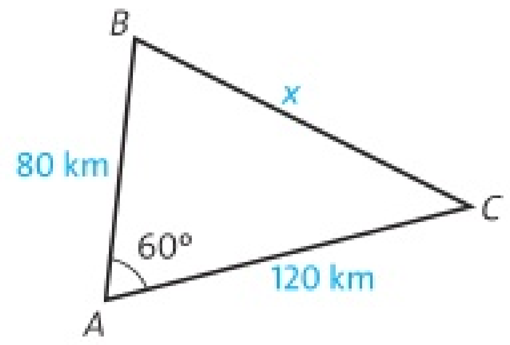
$$v_m = \frac{7}{16} \simeq 0{,}44$$

Portanto:

$$0{,}44 \simeq \frac{4}{t} \Rightarrow t \simeq 9{,}09 \text{ min} \Rightarrow t = 9 \text{ min } 6 \text{ s}$$

Resposta: alternativa **a**.

9. (Unirio-RJ) Deseja-se medir a distância entre duas cidades *B* e *C* sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que $AB = 80$ km e $AC = 120$ km, onde *A* é uma cidade conhecida, como mostra a figura abaixo.



Logo, a distância entre *B* e *C*, em km, é:

a) menor que 90.
b) maior que 90 e menor que 100.
c) maior que 100 e menor que 110.
d) maior que 110 e menor que 120.
e) maior que 120.

Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 14\,400 + 6\,400 - 2 \cdot 9\,600 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 11\,200 \Rightarrow x = \sqrt{11\,200}$

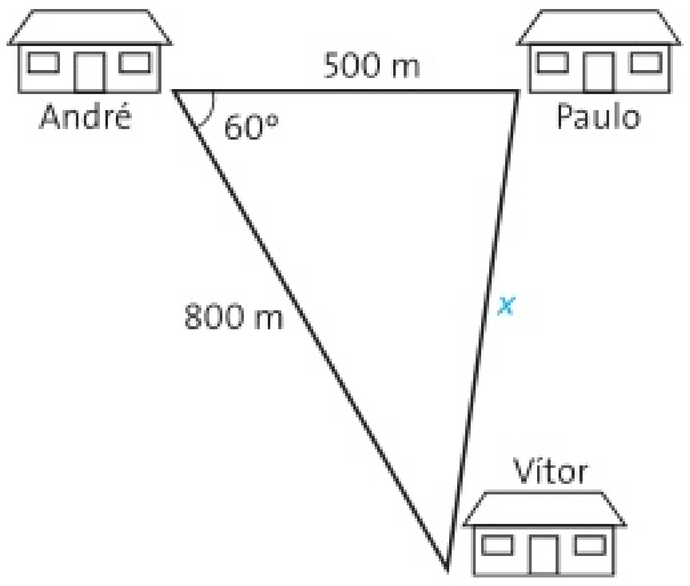
Mas:

- $\sqrt{10\,000} = 100$
- $\sqrt{12\,100} = 110$

Portanto, $100 < x < 110$.

Resposta: alternativa **c**.

10. (Unisc-RS) Os irmãos André, Paulo e Vítor moram em casas localizadas na mesma fazenda. Sabe-se que a casa de André dista 500 m da casa de Paulo e 800 m da casa de Vítor, e que o ângulo formado entre essas direções é 60°. Observando, no esquema ao lado, a planta da situação apresentada, pode-se concluir que a distância entre a casa de Paulo e a casa de Vítor é de:



a) 600 m. b) 1 300 m. c) 700 m. d) 900 m. e) 800 m.

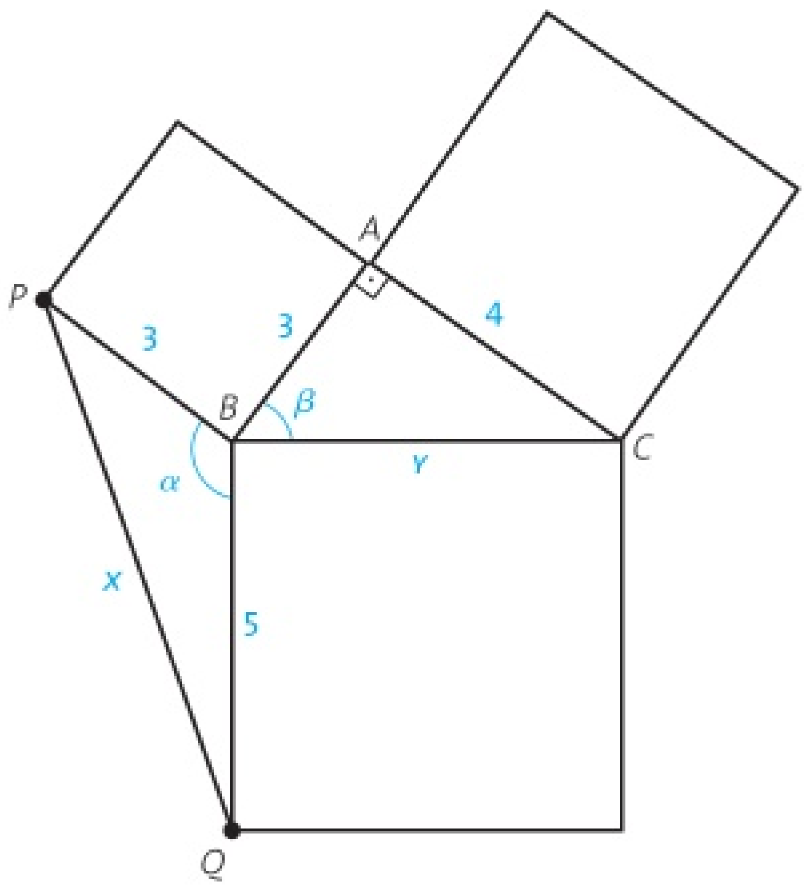
Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 800^2 + 500^2 - 2 \cdot 800 \cdot 500 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 640\,000 + 250\,000 - 2 \cdot 400\,000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 490\,000 \Rightarrow x = 700$ m

Resposta: alternativa **c**.

11. (ESCS-DF) Um painel, formado por três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo ABC de catetos AB e AC medindo 3 m e 4 m, respectivamente, necessita, para sustentá-lo, de um cabo de aço retilíneo que liga os vértices P e Q como mostra a figura ao lado. O comprimento do cabo PQ vale:



a) $2\sqrt{10}$ m. c) $\sqrt{46}$ m. e) $2\sqrt{15}$ m.

b) $2\sqrt{11}$ m. d) $2\sqrt{13}$ m.

No triângulo ABC, temos:

- $y^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow y^2 = 9 + 16 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5$
- $\cos \beta = \frac{3}{5}$

No triângulo PBQ, temos:

- Em B:
  $90° + \alpha + 90° + \beta = 360°$
- $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta$

Então:

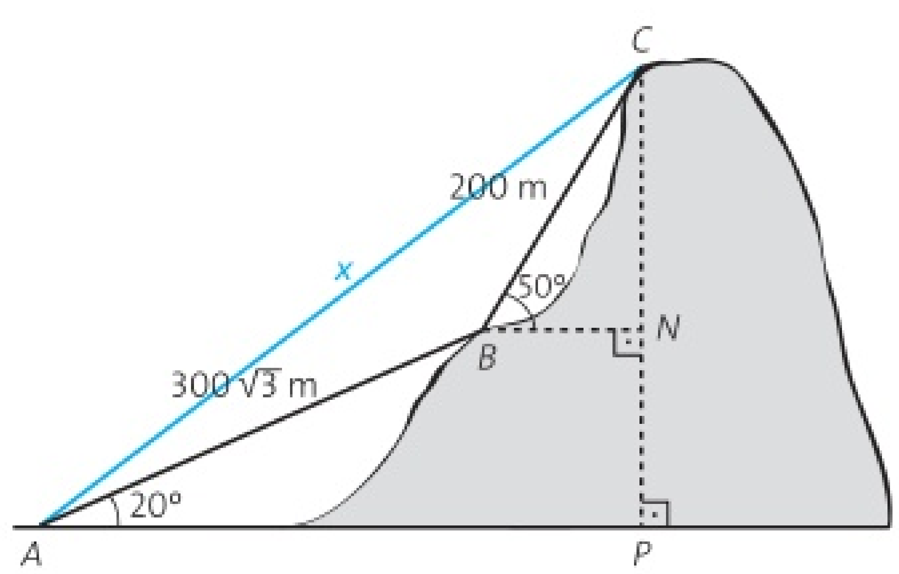
$\cos \alpha = \cos (180° - \beta) = -\cos \beta \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Pela lei dos cossenos, vem:

$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow x^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow x^2 = 34 + 18 \Rightarrow x^2 = 52 \Rightarrow x = 2\sqrt{13}$ m

Resposta: alternativa **d**.

12. (UFPB) Para explorar o potencial turístico de uma cidade, conhecida por suas belas paisagens montanhosas, o governo pretende construir um teleférico, ligando o terminal de transportes coletivos ao pico de um morro, conforme a figura ao lado.



Para a construção do teleférico, há duas possibilidades:

- o ponto de partida ficar localizado no terminal de transportes coletivos (ponto A), com uma parada intermediária (ponto B), e o ponto de chegada localizado no pico do morro (ponto C);
- o ponto de partida ficar localizado no ponto A e o de chegada localizado no ponto C, sem parada intermediária.

Supondo que $\overline{AB} = 300\sqrt{3}$ m, $\overline{BC} = 200$ m, $B\hat{A}P = 20°$ e $C\hat{B}N = 50°$, é correto afirmar que a distância entre os pontos A e C é de:

a) 700 m. b) 702 m. c) 704 m. d) 706 m. e) 708 m.

Da figura, calculamos o ângulo $A\hat{B}C = 150°$.

Pela lei dos cossenos, vem:

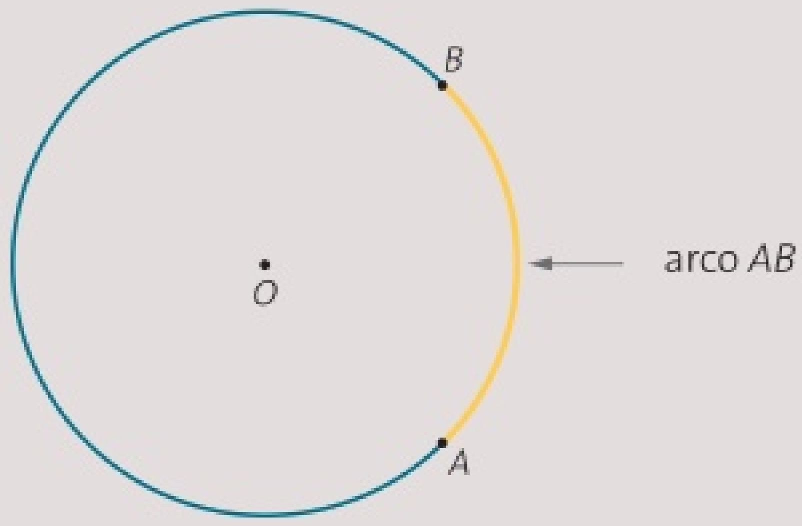
$x^2 = \left(300\sqrt{3}\right)^2 + 200^2 - 2 \cdot 300\sqrt{3} \cdot 200 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 270\,000 + 40\,000 + 180\,000 \Rightarrow x^2 = 490\,000 \Rightarrow x = 700$ m

Resposta: alternativa **a**.

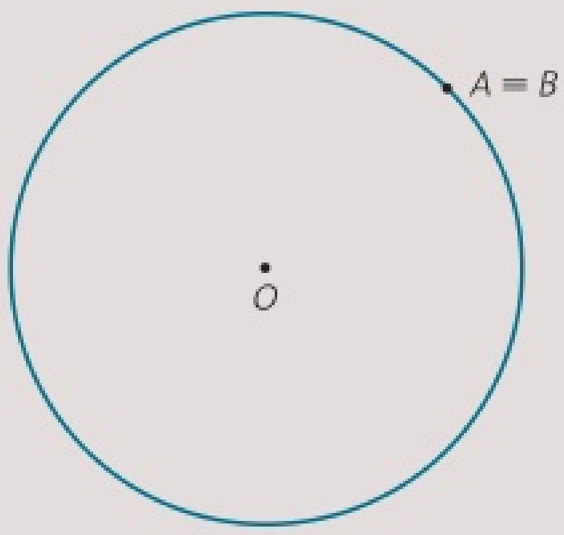
CICLO TRIGONOMÉTRICO E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Arco geométrico

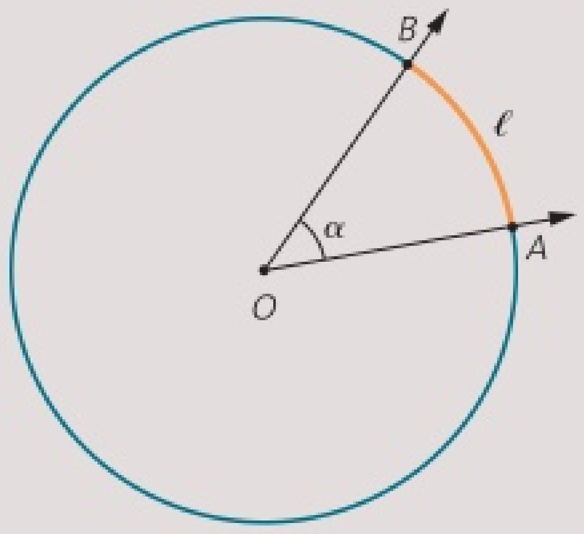
É uma parte da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os.



Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.



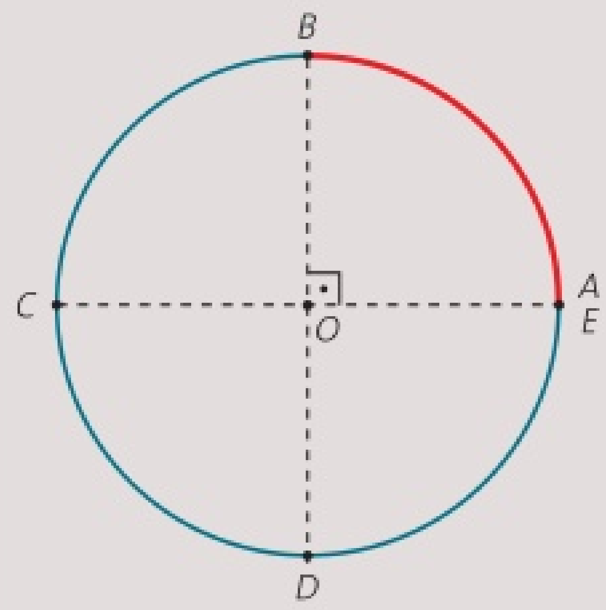
Relação entre o comprimento ℓ e a medida α



- $\ell = \dfrac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$ (em graus)
- $\ell = \alpha \cdot r$ (em radianos)

Relação entre as unidades para medir arcos

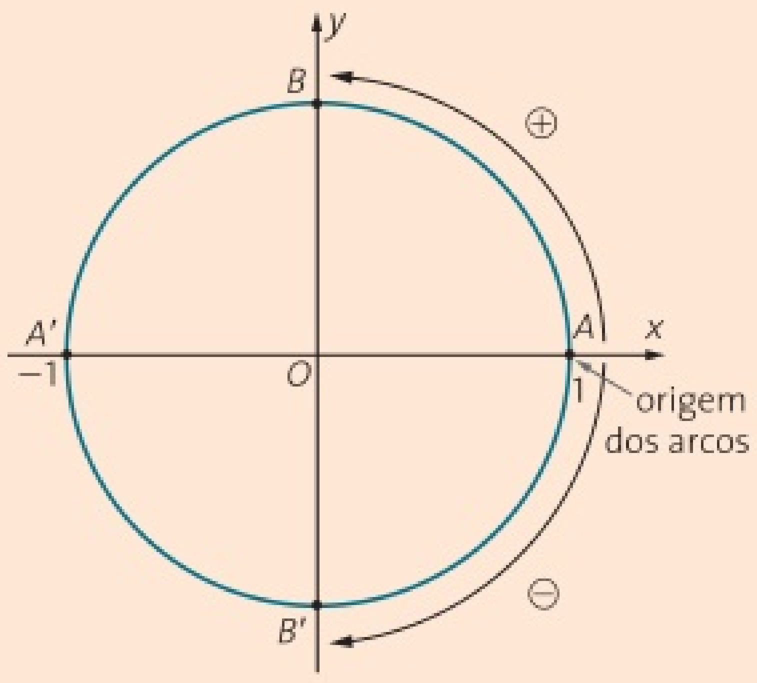
$\boxed{180° = \pi \text{ rad}}$



- $\widehat{AB}$: arco de 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad
- $\widehat{AC}$: arco de 180° ou π rad
- AD: arco de 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad
- $\widehat{AE}$: arco de 360° ou 2π rad

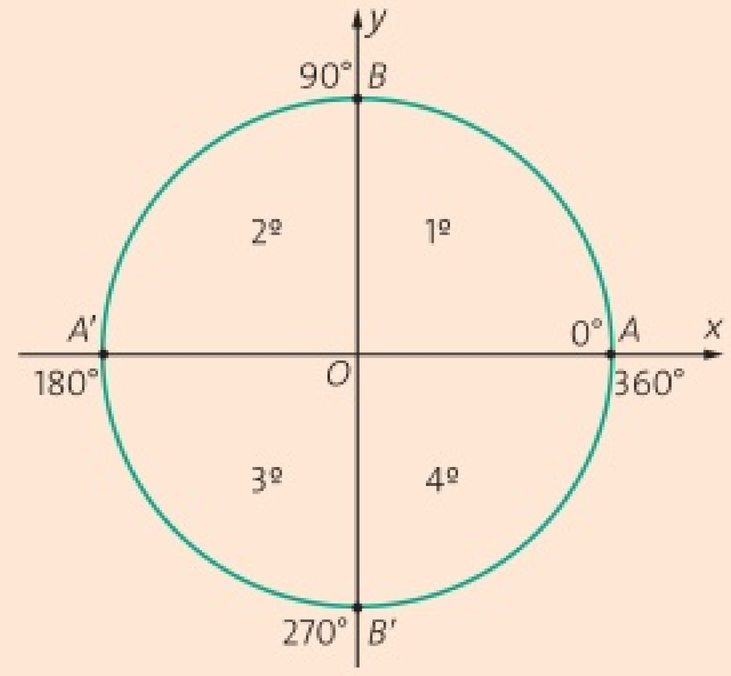
Circunferência trigonométrica

- Possui centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.
- O raio tem uma unidade de comprimento.
- O sentido positivo é o anti-horário.

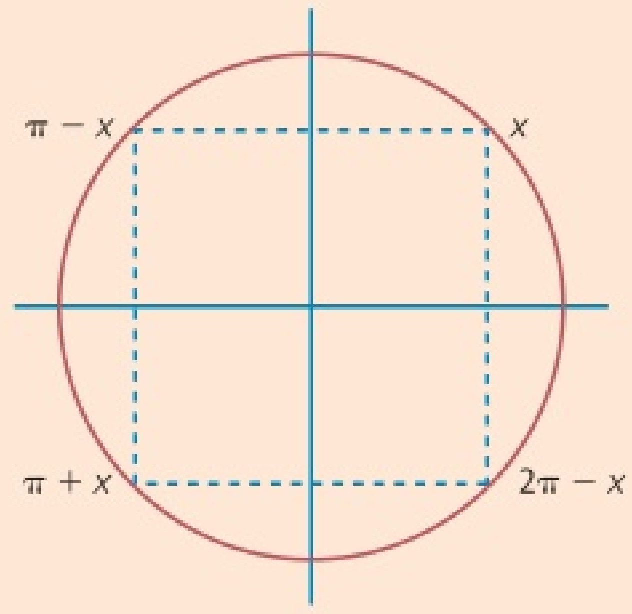


Quadrantes

Partes congruentes da circunferência, delimitadas pelos eixos x e y.

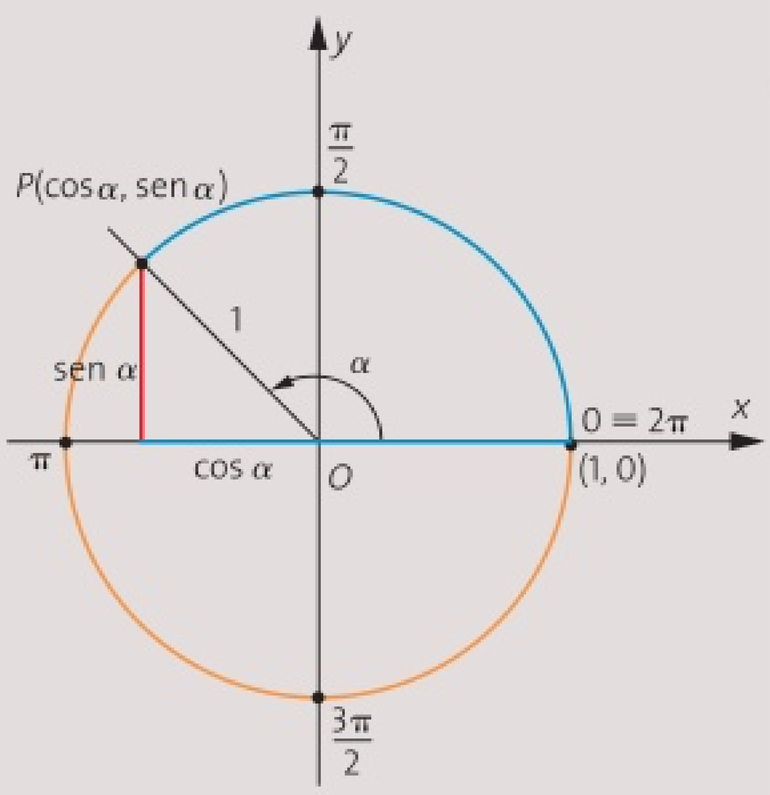


Simetria na circunferência trigonométrica



	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Não é definida.	0	Não é definida.	0

Ideia de seno, cosseno e tangente de um número real



Seno

ordenada $P = \text{sen } \alpha$

Cosseno

abscissa $P = \cos \alpha$

Tangente

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, com $\cos \alpha \neq 0$

Função seno

Definição

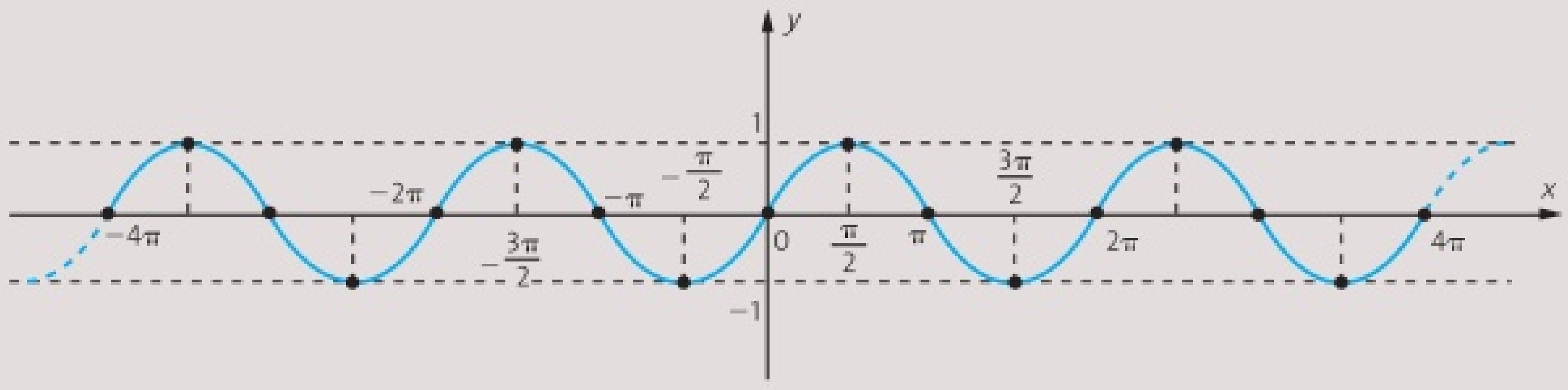
Função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real sen x, ou seja:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = \text{sen } x$

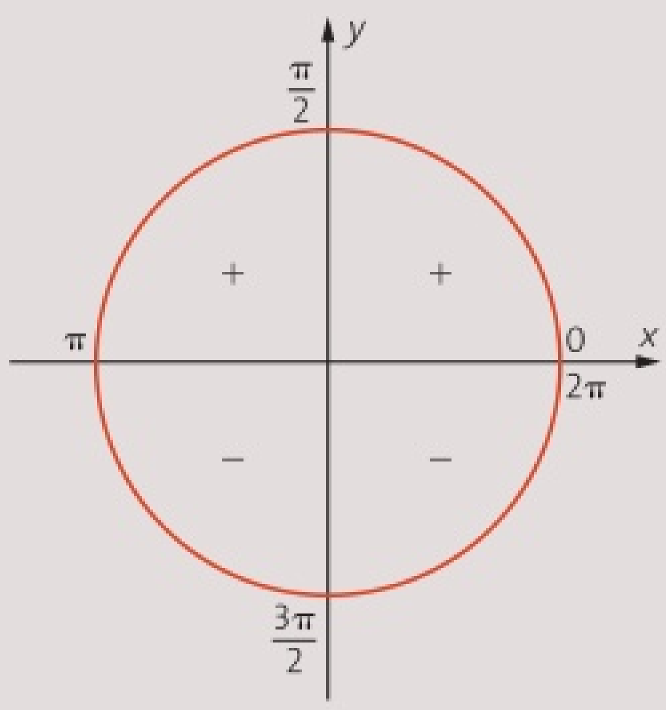
Representação gráfica

Senoide

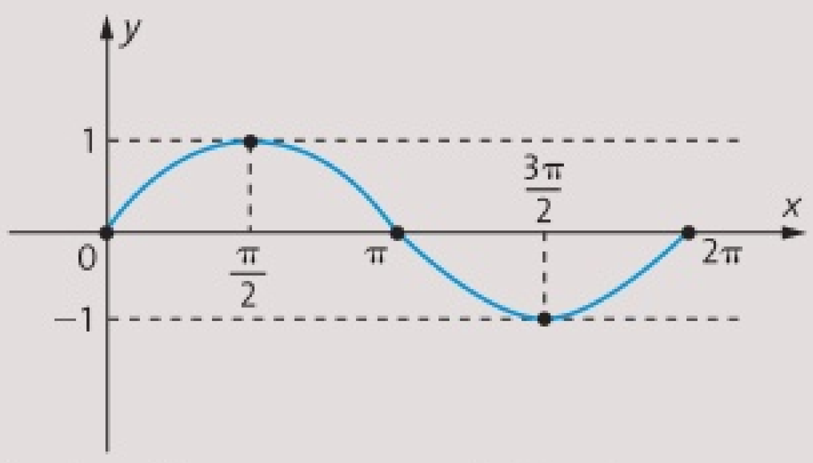


- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- $\text{sen }(-x) = -\text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$
- período: $p = 2\pi$

Sinal da função seno



Variação



- Quando x cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, sen x cresce de 0 a 1.
- Quando x cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, sen x decresce de 1 a 0.
- Quando x cresce de π a $\frac{3\pi}{2}$, sen x decresce de 0 a −1.
- Quando x cresce de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, sen x cresce de −1 a 0.

Função cosseno

Definição

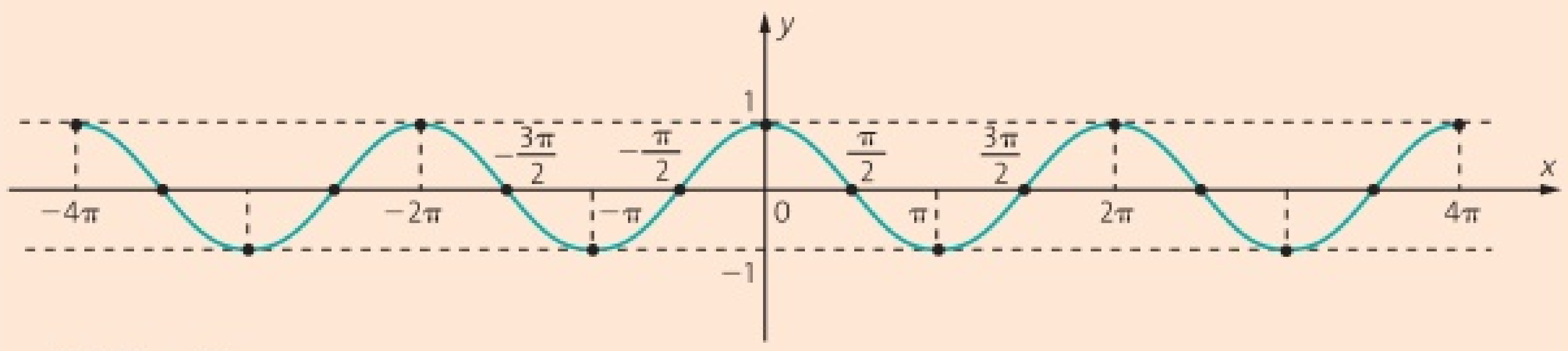
Função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real $\cos x$, ou seja:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = \cos x$

Representação gráfica

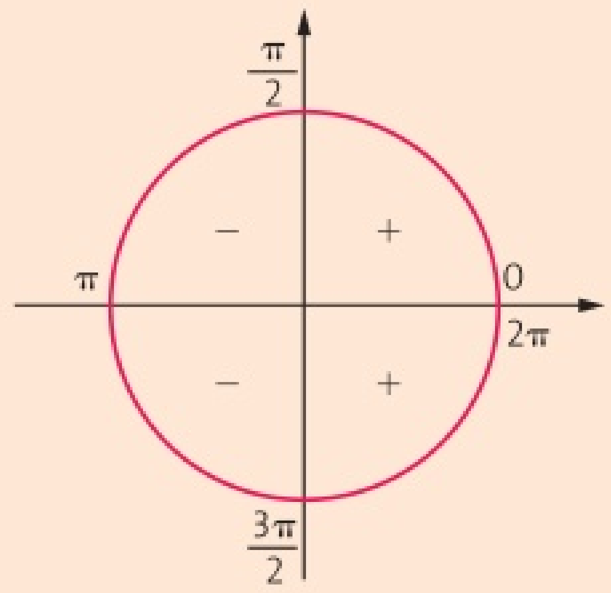
Cossenoide



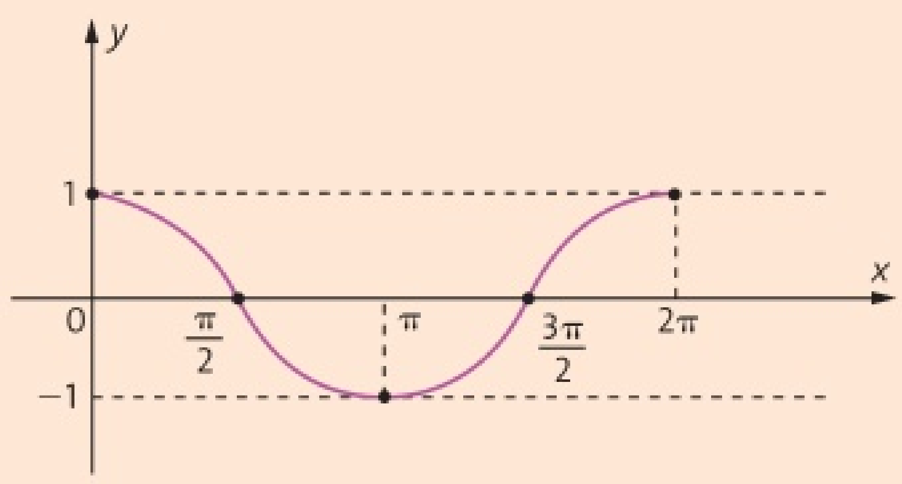
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- $\cos x = \cos(-x), \forall x \in \mathbb{R}$
- período: $p = 2\pi$

Observação: A cossenoide é uma senoide transladada $\frac{\pi}{2}$ para a direita.

Sinal da função cosseno



Variação



- Quando x cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ decresce de 1 a 0.
- Quando x cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, $\cos x$ decresce de 0 a -1.
- Quando x cresce de π a $\frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ cresce de -1 a 0.
- Quando x cresce de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, $\cos x$ cresce de 0 a 1.

CE_2PMatA_02_012a023.indd 15 5/21/14 1:46 PM

Função tangente

Definição

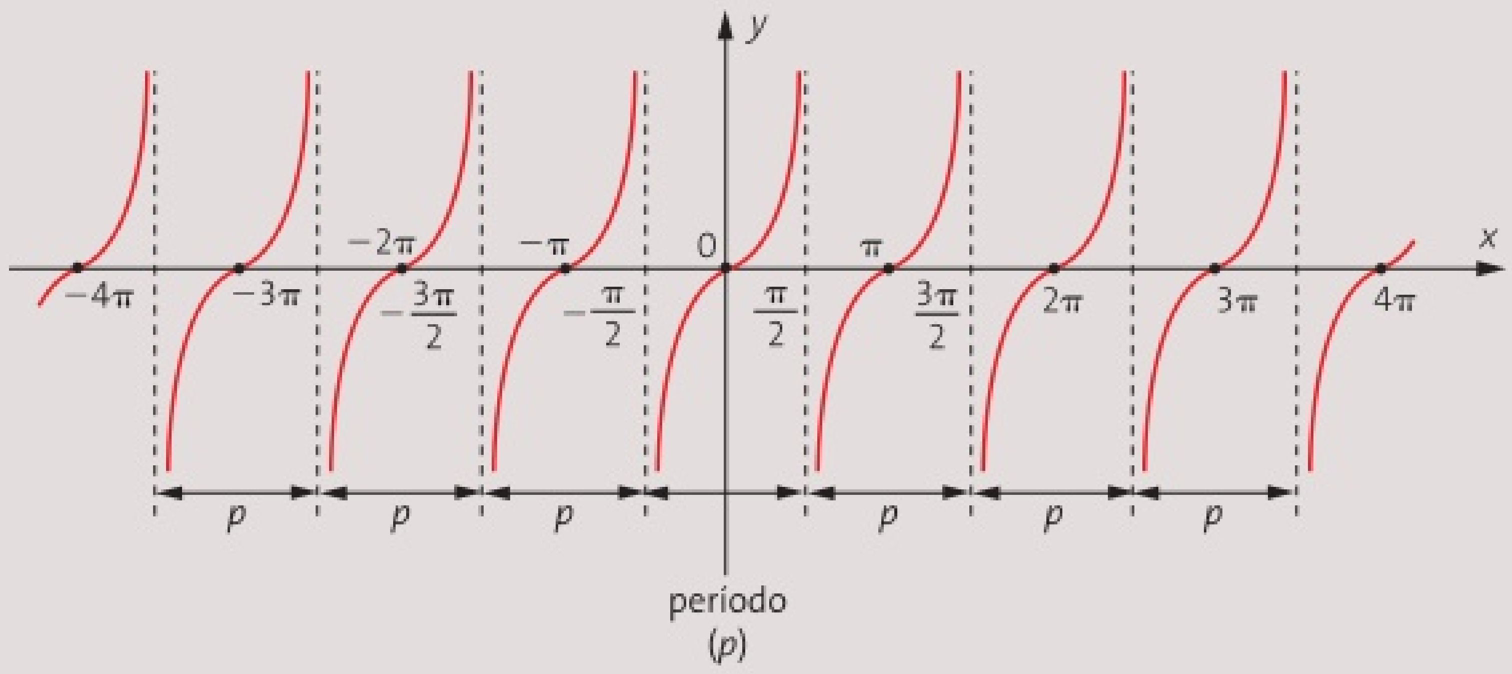
Função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real tg x, desde que x não seja $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ou qualquer um de seus arcos côngruos.

Ou seja:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

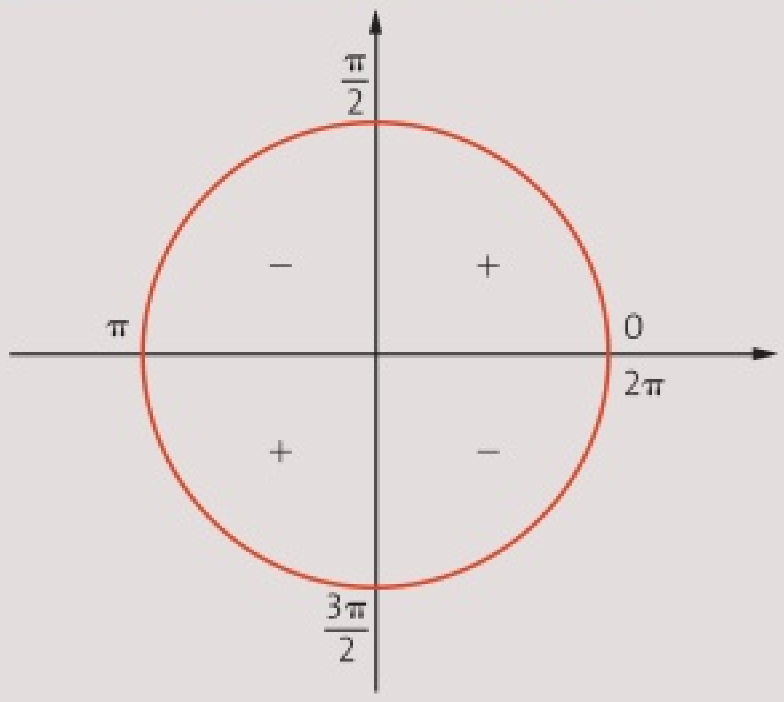
$x \to f(x) = \text{tg}\,(x)$, em que $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Representação gráfica



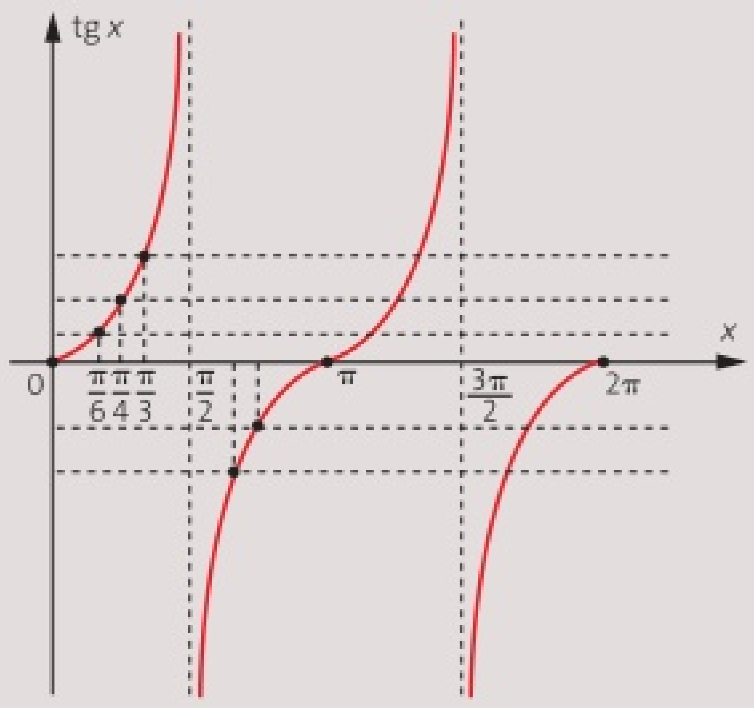
- $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- tg $x = -$tg $(-x)$, $\forall\, x \in D$
- período: $p = \pi$

Sinal da função tangente



Função tangente

Variação



- Quando x cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, tg x cresce de 0 a $+\infty$.
- Quando x cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, tg x cresce de $-\infty$ a 0.
- Quando x cresce de π a $\frac{3\pi}{2}$, tg x cresce de 0 a $+\infty$.
- Quando x cresce de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, tg x cresce de $-\infty$ a 0.

Senoides

Definição

Funções que envolvem seno e cosseno.

- $y = a + b \cdot \text{sen}\,(cx - d)$
- $y = a + b \cdot \cos\,(cx - d)$

Domínio

$D(f) = \mathbb{R}$

Imagem

$Im = [a - |b|; a + |b|]$

Período

$P = \frac{2\pi}{|c|}$

Exercícios

1. (Uneb-BA) A conversão de capim-elefante em energia não polui. Mesmo o gás carbônico, CO_2, emitido durante a queima da biomassa utilizada é menor do que o consumido pela gramínea durante todo o seu crescimento. Considere, no gráfico, que α é a medida do ângulo do setor circular, associado à energia hidrelétrica na composição da matriz energética nacional atual, e que β é a medida do ângulo do setor circular, associado a petróleo, gás e carvão na composição da matriz energética nacional com a contribuição potencial do capim-elefante.

VARGAS, 2010, p. 112-114.

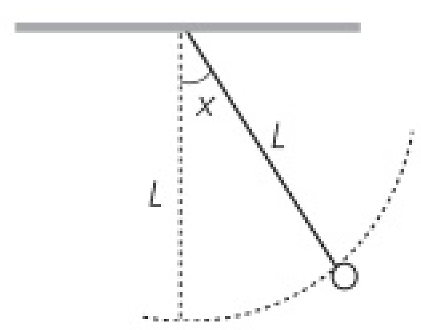
Nessas condições, $\alpha - \beta$ é igual a:

01) $\dfrac{17\pi}{10}$ rad. 02) $\dfrac{13\pi}{10}$ rad. 03) $\dfrac{11\pi}{10}$ rad. 04) $\dfrac{9\pi}{10}$ rad. 05) $\dfrac{7\pi}{10}$ rad.

$\alpha = 0{,}765 \cdot 2\pi$
$\beta = 0{,}115 \cdot 2\pi$
Então:
$\alpha - \beta = (0{,}765 - 0{,}115) \cdot 2\pi = 0{,}65 \cdot 2\pi = 1{,}3\pi$
Ou seja, $\dfrac{13\pi}{10}$.
Resposta: alternativa **02**.

Texto para as questões **2** e **3**.
Tales, um aluno do Curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa. A chegada ao Velho Continente foi em Portugal.

2. (PUC-RS) Ao visitar o Panteon, em Paris, Tales conheceu o Pêndulo de Foucault. O esquema abaixo indica a posição do pêndulo fixado a uma haste horizontal, num certo instante.



Sendo *L* o seu comprimento e *x* o ângulo em relação a sua posição de equilíbrio, então a altura *h* do pêndulo em relação à haste horizontal é expressa pela função:

a) $h(x) = L \cdot \cos(x)$.
b) $h(x) = L \cdot \text{sen}(x)$.
c) $h(x) = L \cdot \text{sen}(2x)$.
d) $h(x) = L \cdot \cos(2x)$.
e) $h(x) = 2L \cdot \cos(x)$.

$\cos x = \dfrac{h}{L}$
Para uma altura variante, temos $h(x) = L \cdot \cos(x)$.
Resposta: alternativa **a**.

3. (PUC-RS) Em Londres, Tales andou na London Eye, para contemplar a cidade. Esta roda gigante de 135 metros de diâmetro está localizada à beira do rio Tâmisa. Suas 32 cabines envidraçadas foram fixadas à borda da roda com espaçamentos iguais entre si. Então, a medida do arco formado por cinco cabines consecutivas é igual, em metros, a:

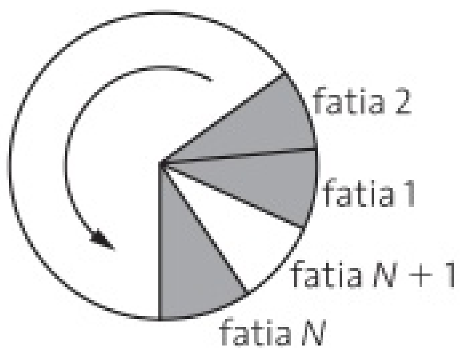
a) $\frac{153}{4}\pi$.
b) $\frac{675}{32}\pi$.
c) $\frac{675}{16}\pi$.
d) $\frac{135}{8}\pi$.
e) $\frac{135}{32}\pi$.

O ângulo formado por cinco cabines consecutivas será $\frac{4}{32} \cdot 360°$, ou seja, 45°. Seu arco é dado por:

$\frac{\pi}{4} \cdot R_c = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{135}{2} = \frac{135\pi}{8}$

Resposta: alternativa **d**.

4. (Ufscar-SP) Uma *pizza* circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo *N* de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia $N + 1$.



Considerando $\pi = 3{,}14$, o arco da fatia $N + 1$, em radiano, é:

a) 0,74.
b) 0,72.
c) 0,68.
d) 0,56.
e) 0,34.

$628 = 80 \cdot 7 + 68\ (\div\ 100) \Rightarrow 6{,}28 = 0{,}8 \cdot 7 + 0{,}68$
Então, $N = 7$ e o arco de 8ª fatia mede 0,68 rad.
Resposta: alternativa **c**.

5. (PUC-RS) Para resolver uma discussão entre dois alunos sobre a definição da função cossecante, um deles foi à Biblioteca Central. Como resultado da pesquisa, ele encontrou a definição de cossec *x*, que é:

a) $\frac{1}{\cos x}$, se $\cos x \neq 1$.
b) $\frac{1}{\text{sen } x}$, se $\text{sen } x \neq 1$.
c) $\frac{1}{\cos x}$, se $\cos x \neq 0$.
d) $\frac{1}{\sec x}$, se $\sec x \neq 0$.
e) $\frac{1}{\text{sen } x}$, se $\text{sen } x \neq 0$.

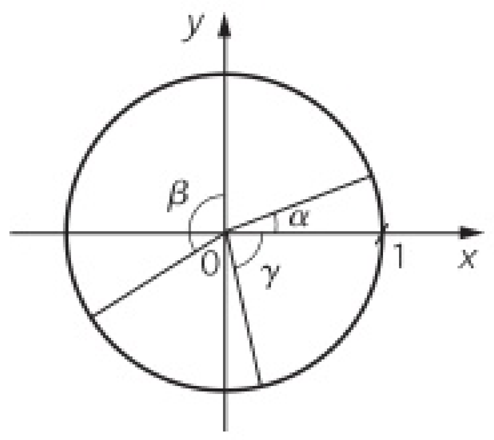
Resposta: alternativa **e**.

6. (UFRJ) Observe a função trigonométrica $y = 1 + 2\,\text{sen } x$. Pode-se afirmar que o seu conjunto imagem é o intervalo:

a) $[-2, 1]$.
b) $[-2, 2]$.
c) $[-1, 2]$.
d) $[-1, 3]$.
e) $[-1, 4]$.

Mínimo: $y = 1 - 2 = -1$
Máximo: $y = 1 + 2 = 3$
Logo, $Im = [-1, 3]$.
Resposta: alternativa **d**.

7. (UFF-RJ) Considere os ângulos α, β e γ conforme representados no círculo.

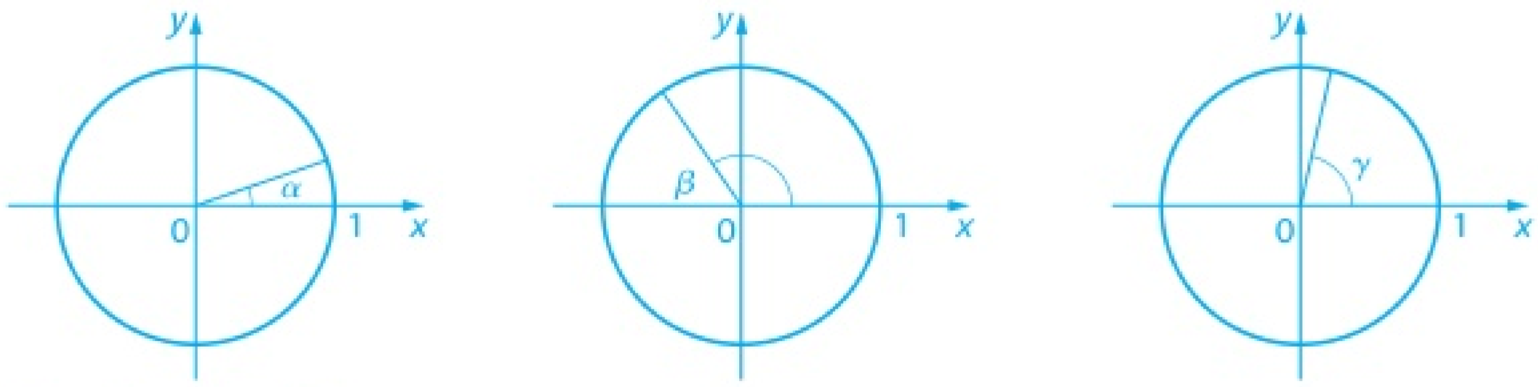


Pode-se afirmar que:

a) $\cos \alpha < \cos \beta$.   b) $\cos \gamma > \cos \alpha$.   c) $\operatorname{sen} \alpha > \operatorname{sen} \beta$.   d) $\operatorname{sen} \beta < \cos \gamma$.   e) $\cos \beta < \cos \gamma$.

Da figura, temos $\alpha < 90°$; $90° < \beta < 180°$ e $\gamma < 90°$.

Então:



Resposta: alternativa **e**.

8. (FGV-SP) Uma empresa utiliza a fórmula $P = 200 + 40 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$ para estimar a quantidade vendida mensalmente P de um produto, em que $t = 1$ representa o mês de janeiro de 2010, $t = 2$ representa o mês de fevereiro de 2010, $t = 3$ o mês de março de 2010 e assim por diante. Em quais meses de 2010 estão estimadas as vendas mínima e máxima respectivamente?

a) Outubro e abril.
b) Setembro e março.
c) Agosto e fevereiro.
d) Julho e janeiro.
e) Junho e dezembro.

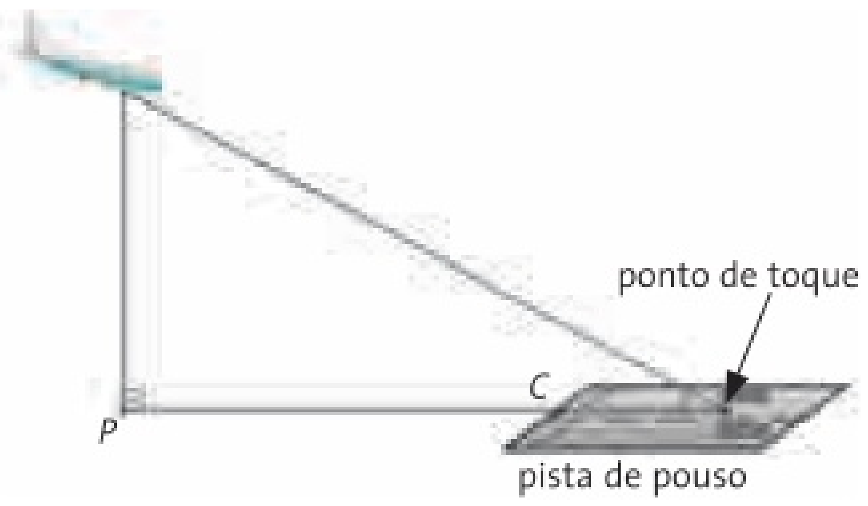
Mínimo: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \pi \Rightarrow t = 6$

Máximo: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = 0 \Rightarrow t = 0$

Como o período é de 12 h, será máximo novamente para $t = 12$. O valor $t = 0$ não é utilizado.

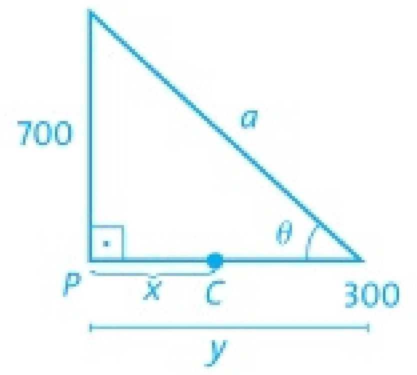
Resposta: alternativa **e**.

9. (UFG-GO) Um avião, em procedimento de pouso, encontrava-se a 700 m de altitude, no momento em que a linha que liga o trem de pouso ao ponto de toque formava um ângulo θ com a pista de pouso, conforme a ilustração ao lado. Para a aterrissagem, o piloto programou o ponto de toque do trem de pouso com o solo para 300 m após a cabeceira da pista, indicada por C na figura. Sabendo que sen $\theta = 0{,}28$ e que o ponto P é a projeção vertical do trem de pouso no solo, a distância, em metros, do ponto P ao ponto C corresponde a:



a) 1700. b) 2100. c) 2200. d) 2500. e) 2700.

Temos:



$0{,}28 = \dfrac{700}{a} \Rightarrow a = \dfrac{70\,000}{28} = 2\,500$

$2\,500^2 = 700^2 + y^2 \Rightarrow 625 \cdot 10^4 - 49 \cdot 10^4 = y^2 \Rightarrow y^2 = 576 \cdot 10^4 \Rightarrow y = 24 \cdot 10^2 \Rightarrow y = 2\,400$

$y = x + 300 \Rightarrow x = 2\,100$

Resposta: alternativa **b**.

10. (UCS-RS) Em certa região, a temperatura média mensal varia periodicamente entre a média mínima de 14 °C e a máxima de 38 °C. Das fórmulas a seguir, qual é a que descreve melhor a relação entre a temperatura média mensal (T) nessa região e o tempo (t) em meses decorridos desde o início de cada ano?

a) $T(t) = 26 + 12 \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

b) $T(t) = 14 \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

c) $T(t) = 12 - 26 \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

d) $T(t) = 12 + 26 \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

e) $T(t) = 38 + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

$$\begin{cases} a + |b| = 38 \\ a - |b| = 14 \end{cases}$$

$2a = 52 \Rightarrow a = 26$

Logo, $|b| = 12$.

Resposta: alternativa **a**.

11. (FGV-SP) Estima-se que, em 2009, a receita mensal de um hotel seja dada (em milhares de reais) por $R(t) = 3\,000 + 1500 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$, em que $t = 1$ representa o mês de janeiro, $t = 2$ o mês de fevereiro e assim por diante. A receita de março será inferior à de fevereiro em:

a) R$ 800 000,00.
b) R$ 750 000,00.
c) R$ 700 000,00.
d) R$ 650 000,00.
e) R$ 850 000,00.

Receita em março ($t = 3$): $R(3) = 3\,000 + 1\,500 \cdot \cos\dfrac{\pi}{2} = 3\,000$

Receita em fevereiro ($t = 2$): $R(2) = 3\,000 + 1\,500 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} =$

$= 3\,000 + 1\,500 \cdot \dfrac{1}{2} = 3\,000 + 750 = 3\,750$

$3\,750 - 3\,000 = 750$

Resposta: alternativa **b**.

12. (UFSM-RS) Uma gráfica que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei $C(t) = 200 + 120 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi \cdot t}{2}$, com t medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximo e mínimo desse produto são:

a) 320 e 200.
b) 200 e 120.
c) 200 e 80.
d) 320 e 80.
e) 120 e 80.

$C(t)_{\text{mín.}} = 200 - 120 = 80$
$C(t)_{\text{máx.}} = 200 + 120 = 320$
Resposta: alternativa **d**.

13. (USS-RJ) Certo navio encontra-se atracado num porto. A distância h, em u.c. (unidade de comprimento), de um ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré. Admitindo-se que h seja dada, em função do tempo t, por $h(t) = 10 - 3\cos(2t)$, é correto afirmar que, na maré alta, o valor de h, em u.c., será:

a) 16.
b) 14.
c) 13.
d) 12.
e) 10.

Na maré alta, a distância entre o casco do navio e o fundo do mar é máxima.
Logo:
$h(t)_{\text{máx.}} = 10 + 3 = 13$
Resposta: alternativa **c**.

14. (PUC-PR) Um terremoto de magnitude 8 graus da escala Richter atingiu, em setembro de 2009, a região de Samoa. O terremoto causou ondas de até 3 m. A maré alta neste local ocorreu à meia-noite. Suponha que o nível de água na maré alta era de 3 m; mais tarde, na maré baixa, era de 3 cm. Supondo que a próxima maré alta seja exatamente ao meio-dia e que a altura da água é dada por uma curva seno ou cosseno, qual das alternativas a seguir corresponde à fórmula para o nível da água na região em função do tempo?

a) $1{,}515 + 1{,}485 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
b) $1{,}515 + 1{,}485 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
c) $1{,}485 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
d) $1{,}485 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
e) $1{,}485 + 1{,}515 \cdot \cos(\pi t)$

- O período da função $h(t)$ é de 12 h. Então:
  $12 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$
- Os valores mínimo e máximo da função são, respectivamente, 3 cm e 3 m. Então:
  $\begin{cases} a + |b| = 3 \\ a - |b| = 0{,}03 \end{cases}$
  $2a = 3{,}03 \Rightarrow a = 1{,}515$
  Logo, $|b| = 1{,}485$.
- Analisando os dois itens anteriores, restam apenas as alternativas **a** e **b**. Descobre-se que a função correta é a cossenoidal, substituindo os valores de t na função:
  $\left.\begin{array}{l} \text{Meia-noite: } h(0) = 1{,}515 + 1{,}485 = 3 \text{ m (valor máximo)} \\ \text{Meio-dia: } h(12) = 1{,}515 + 1{,}485 = 3 \text{ m (valor máximo)} \end{array}\right\} \text{maré alta}$

Resposta: alternativa **a**.

15. (FGV-SP) Uma empresa exporta certo produto. Estima-se que a quantidade exportada q, expressa em toneladas, para cada mês do ano 2011, seja dada pela função $q = 40 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que $x = 1$ representa janeiro de 2011, $x = 2$ representa fevereiro de 2011 e assim por diante. Em que meses a exportação será de 38 toneladas? (Utilize os valores: $\sqrt{3} = 1{,}7$ e $\sqrt{2} = 1{,}4$.)

a) Abril e agosto.
b) Maio e setembro.
c) Junho e outubro.
d) Julho e novembro.
e) Agosto e dezembro.

$q = 40 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$

$q(x) = 38$

$38 = 40 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow 38 - 40 = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow -2 = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

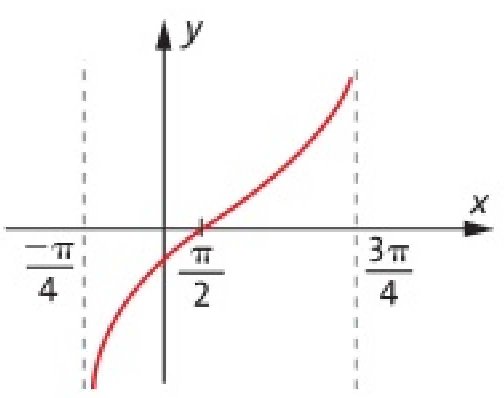
$x = 7$ (julho)

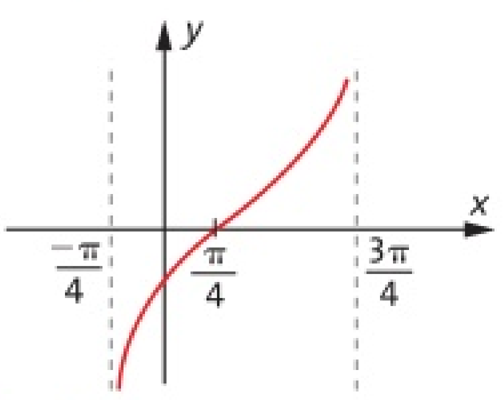
$\frac{\pi x}{6} = \frac{11\pi}{6}$

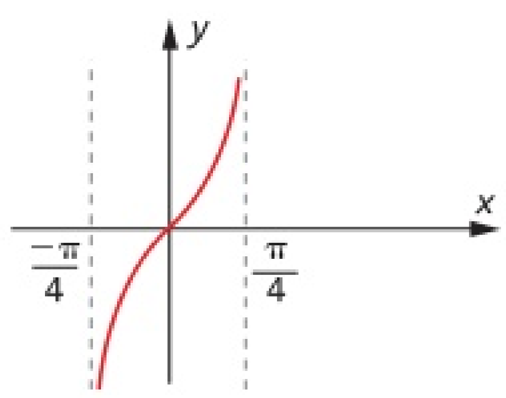
$x = 11$ (novembro)

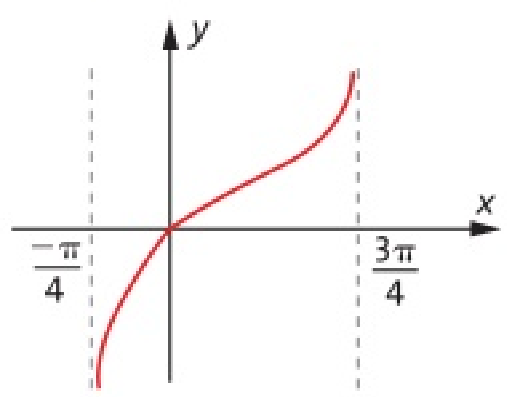
Resposta: alternativa **d**.

16. (Fatec-SP) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ é igual a:

a)


b)


c)


d)


e) n.d.a.

• Domínio:

$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• $p = \frac{\pi}{1} \Rightarrow p = \pi$

• $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Logo, $f(0) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, o gráfico que apresenta os valores calculados é o gráfico da alternativa **b**.

Resposta: alternativa **b**.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Identidade trigonométrica

Toda igualdade envolvendo funções trigonométricas que se verifica para todos os valores do domínio dessas funções.

Equação trigonométrica

Igualdade em que a incógnita aparece nas medidas dos arcos ou dos ângulos de funções trigonométricas.

Exemplos

- $\text{sen}\, x = a$
- $\cos x = a$
- $\text{tg}\, x = a$

Inequação trigonométrica

Desigualdade em que aparecem funções trigonométricas da incógnita.

Relações fundamentais

- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$, para todo $x \neq k\pi$
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$, para todo $x \neq k\pi$

Relações decorrentes das fundamentais

- $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\text{cotg}^2 x + 1 = \text{cossec}^2 x$, para todo $x \neq k\pi$

Adição e subtração de arcos

- $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$
- $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos a$
- $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$
- $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$
- $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$
- $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

Arcos duplos

- $\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
- $\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$
- $\cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$
- $\text{tg}\, 2a = \dfrac{2\, \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a}$

Transformação em produto

- $\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2\, \text{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\, \text{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\, \text{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

CE_2PMatA_03_024a029.indd 24 5/21/14 1:50 PM

Exercícios

1. (Unicid-SP) Sabendo-se que sen $(x + y) = k$, com $k \in \mathbb{R}$, então o valor de sen $(2x)$, em termos de k, é:

   a) $k^2 - 1$.
   b) $k + 1$.
   c) $k^2 + 1$.
   d) $k - 1$.
   e) $1 - k$.

   $\text{sen}\,x + \cos x = k \Rightarrow (\text{sen}\,x + \cos x)^2 = k^2 \Rightarrow \text{sen}^2\,x + 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x + \cos^2 x = k^2 \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x + 1 = k^2 \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = k^2 - 1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow \text{sen}\,2x = k^2 - 1$

   Resposta: alternativa **a**.

2. (UEPB) Sabendo que $\text{cotg}\,x = \frac{1}{2}$, o valor da tg $2x$ é igual a:

   a) $-\frac{1}{2}$.
   b) $\frac{4}{5}$.
   c) $\frac{4}{3}$.
   d) -1.
   e) $-\frac{4}{3}$.

   Temos:

   $$\begin{cases} \text{cotg}\,x = \frac{1}{2} \\ \text{cotg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x} \end{cases}$$

   Então:

   $$\frac{1}{\text{tg}\,x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\,x = 2$$

   Mas:

   $$\text{tg}\,2x = \frac{2\,\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x} \Rightarrow \text{tg}\,2x = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} \Rightarrow \text{tg}\,2x = \frac{4}{-3} \Rightarrow \text{tg}\,2x = -\frac{4}{3}$$

   Resposta: alternativa **e**.

3. (FFFCMPA-RS) Se tg $\theta = 2$, então o valor de $\dfrac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen } 2\theta}$ é:

a) -3.
b) $-\dfrac{1}{3}$.
c) $\dfrac{1}{3}$.
d) $\dfrac{2}{3}$.
e) 3.

$\text{tg } \theta = 2 \Rightarrow \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = 2 \Rightarrow \text{sen } \theta = 2 \cdot \cos \theta \Rightarrow \text{sen}^2 \theta = 4 \cdot \cos^2 \theta$

Mas:

$1 = \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \Rightarrow 1 = 4 \cdot \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \Rightarrow 1 = 5 \cdot \cos^2 \theta$

Então:

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen } 2\theta} = \frac{\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta}{1 + 2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta - 4 \cdot \cos^2 \theta}{5 \cdot \cos^2 \theta + 2 \cdot \cos \theta \cdot 2 \cdot \cos \theta} = \frac{-3 \cdot \cos^2 \theta}{5 \cdot \cos^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 \theta} = \frac{-3 \cdot \cos^2 \theta}{9 \cdot \cos^2 \theta} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Resposta: alternativa **b**.

4. (UEPG-PR) Se x é um arco do primeiro quadrante e $\cos x = \dfrac{2}{3}$, assinale o que for correto.

01) $\text{sen } (x - \pi) = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

02) $\text{tg } (x + \pi) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

04) $\text{sen } 2x = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

08) $\cos 2x = -\dfrac{1}{9}$

16) $\cos \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}$

Calcule a soma das alternativas corretas.

$\cos x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{4}{9}$

Então:

- $\text{sen}^2 x = \dfrac{5}{9} \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- $\text{tg}^2 x = \dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \text{tg } x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

01) $\text{sen } (x - \pi) = \text{sen } x \cdot \overbrace{\cos \pi}^{-1} - \overbrace{\cos \pi}^{0} \cdot \cos x = -\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (Correto)

02) $\text{tg } (x + \pi) = \dfrac{\text{tg } x + \overbrace{\text{tg } \pi}^{0}}{1 - \text{tg } x \cdot \underbrace{\text{tg } \pi}_{0}} = \text{tg } x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (Correto)

04) $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \Rightarrow \text{sen } 2x = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ (Correto)

08) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \dfrac{4}{9} - \dfrac{5}{9} = -\dfrac{1}{9}$ (Correto)

16) $\cos \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \overbrace{\cos \dfrac{\pi}{2}}^{0} - \text{sen } x \cdot \overbrace{\text{sen } \dfrac{\pi}{2}}^{1} = -\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (Incorreto)

Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

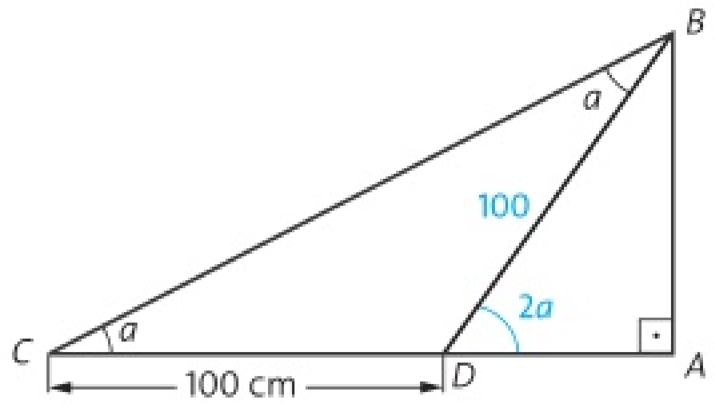
5. (Vunesp-SP) A expressão $\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)$ é igual a:

a) sen x. b) $-$sen x. c) cos x. d) $-$cos x. e) cos $2x$.

$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\underbrace{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{1}\right) \cdot \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos x$

Resposta: alternativa **c**.

6. (UFSC) Na figura a seguir determine a medida do segmento AB, em cm, sabendo que sen $a = 0{,}6$.



a) 96 cm b) 102 cm c) 108 cm d) 112 cm e) 140 cm

O triângulo DBC é isósceles de base $\overline{BC}$.

$\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{36}{100} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{64}{100} \Rightarrow \cos a = \frac{8}{10}$

Mas:

$\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a \Rightarrow \text{sen}\, 2a = 2 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{96}{100}$

Como $\text{sen}\, 2a = \frac{AB}{100}$, temos:

$\frac{AB}{100} = \frac{96}{100} \Rightarrow AB = 96$

Resposta: alternativa **a**.

7. (Uece) Em um triângulo, as medidas de seus lados, em metros, são três números inteiros consecutivos e a medida do maior ângulo é o dobro da medida do menor. A medida do menor lado deste triângulo é:

a) 3 m. b) 4 m. c) 5 m. d) 6 m.

$\frac{x-1}{\text{sen }\alpha} = \frac{x+1}{\text{sen }2\alpha} \Rightarrow \frac{x-1}{\text{sen }\alpha} = \frac{x+1}{2\,\text{sen }\alpha \cdot \cos\alpha} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x+1}{2(x-1)}$

Pela lei dos cossenos, temos:

$(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot \cos\alpha \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot \frac{x+1}{2(x-1)} \Rightarrow -2x = x^2 + 2x - \frac{x(x^2+2x+1)}{x-1} \Rightarrow$

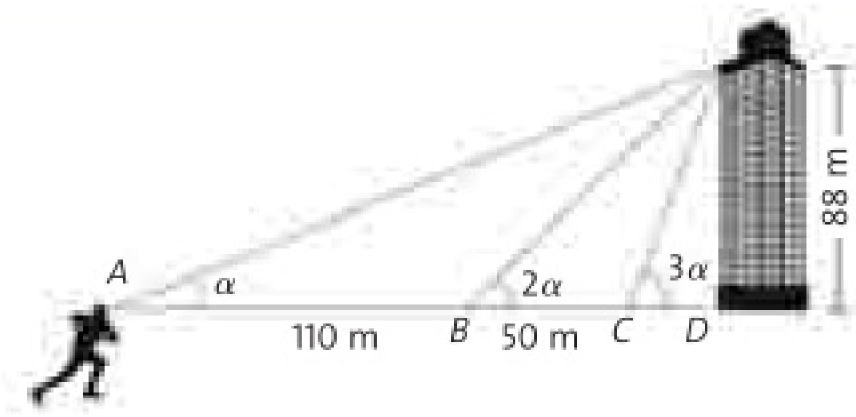
$\Rightarrow -(x^2+4x) = -\frac{x(x^2+2x+1)}{x-1} \Rightarrow (x^2+4x)(x-1) = (x^2+2x+1) \cdot x \Rightarrow x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x = x^3 + 2x^2 + x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$

Menor lado: $x - 1 = 5 - 1 = 4$ m

Resposta: alternativa **b**.

8. (UFPB) O ângulo, sob o qual um observador vê o topo de um prédio de 88 m de altura, duplica quando esse observador se aproxima 110 m do prédio, e triplica quando ele se aproxima mais 50 m. Neste instante, a distância entre o observador e o prédio é:



a) 50 m. b) 22 m. c) 176 m. d) 16 m. e) 18 m.

$\text{tg }\alpha = \frac{88}{110 + 50 + x}$

$\text{tg }2\alpha = \frac{88}{50 + x}$

$\text{tg }3\alpha = \frac{88}{x}$

$\text{tg }3\alpha = \text{tg }(2\alpha + \alpha) \Rightarrow \text{tg }3\alpha = \frac{\text{tg }\alpha + \text{tg }2\alpha}{1 - \text{tg }\alpha \cdot \text{tg }2\alpha} \Rightarrow \frac{88}{x} = \frac{\frac{88}{160+x} + \frac{88}{50+x}}{1 - \frac{88}{160+x} \cdot \frac{88}{50+x}} \Rightarrow x \simeq 16 \text{ m}$

Resposta: alternativa **d**.

9. (UFPE) Considerando a circunferência trigonométrica, identifique as sentenças a seguir como verdadeiras ou falsas.

I. No quadrante onde se localiza o arco de ($-4\,330°$), a função seno é crescente.

II. No quadrante onde se localiza o arco de $\frac{34\pi}{5}$ rad, a função cosseno é decrescente.

III. O valor da tangente do arco de $1\,000°$ é positivo.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) I e II somente. b) II e III somente. c) I, II e III. d) III somente. e) II somente.

I. $$\begin{array}{r|l} 4\,330° & 360° \\ -3\,600° & 12 \\ \hline 730 & \\ -720 & \\ \hline 10° & \end{array}$$

$-4\,330° \cong -10° \cong 350°$

O arco se encontra no quarto quadrante; logo, está correta a afirmativa.

II. $\frac{34\pi}{5} = \frac{34 \cdot 180}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 1\,224° & 360° \\ -1\,080° & 3 \\ \hline 44° & \end{array}$$

$\frac{34\pi}{5} \cong 44°$

44° está no primeiro quadrante; logo, está correta a afirmativa.

III. $$\begin{array}{r|l} 1\,000° & 360° \\ -720° & 2 \\ \hline 280° & \end{array}$$

$1\,000° \cong 280°$

280° está no quarto quadrante, no qual a tangente é negativa. Logo, está incorreta a alternativa.

Resposta: alternativa **a**.

10. (Uece) Para valores de x tais que $\cos x \neq 0$, a expressão $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x$ é igual a:

a) 0. b) 1. c) $\operatorname{sen}^2 x$. d) $\cos^2 x$.

$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$

Resposta: alternativa **b**.

MATRIZES

Definição

Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \times n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \downarrow n$$

$$\xrightarrow{\quad} \\ m$$

Representação genérica

- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $i, j \in \mathbb{N}$

Termos e elementos

Representação

$$a_{ij}$$

linha   coluna

Diagonal principal

São os elementos a_{ij} com $i = j$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Diagonal secundária

São os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

Matrizes especiais

Matriz quadrada

Possui número de linhas igual ao número de colunas ($m = n$).

Matriz identidade (I_n)

Possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais, iguais a zero.

$a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$

Matriz nula ($0_{m \times n}$ ou 0_n)

Possui todos os elementos iguais a zero ($a_{ij} = 0$).

Matriz transposta (A^t)

A matriz transposta de uma matriz A é aquela cujas linhas são ordenadamente as colunas de A.

Igualdade

$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Operações

Adição

$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Subtração

$A_{m \times n} - B_{m \times n} = C_{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Multiplicação de um número real por uma matriz

$\alpha A \Rightarrow \alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$

Multiplicação de matrizes

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

iguais

Observação: A multiplicação de matrizes não é comutativa.

Matrizes obtidas por meio de operações

Matriz oposta ($-A$)

$-A + A = 0_{m \times n}$

Matriz inversa (A^{-1})

$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

Exercícios

1. (UFTM-MG) A soma dos elementos da 3ª linha da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ definida por $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ é igual a:

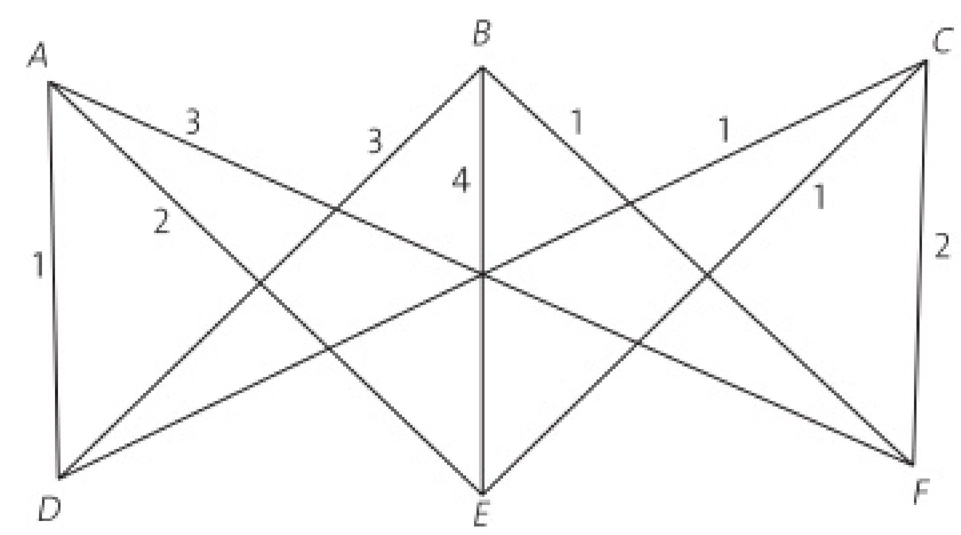
a) 9. b) 8. c) 7. d) 5. e) 4.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$A = a_{31} + a_{32} + a_{33} = (3 - 1) + (3 - 2) + (3 + 3) = 9$

Resposta: alternativa **a**.

2. (Ufal) A figura ao lado ilustra a rede de conexões entre os aeroportos A, B e C de uma cidade, e os aeroportos D, E e F de outra cidade. O número sobre a linha unindo os nomes de dois aeroportos representa o número de linhas aéreas voando na rota de um aeroporto ao outro. Podemos representar os aeroportos de uma cidade como as linhas de uma matriz, os aeroportos da outra como as colunas da matriz e em cada interseção linha-coluna o número de conexões entre os dois aeroportos.
Qual das matrizes a seguir não contém as informações corretas sobre os voos entre as duas cidades?



a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

É preciso que os valores nas linhas estejam agrupados de forma que a quantidade de voos de um aeroporto para os outros três da outra cidade fiquem na mesma linha. Então:

$$\begin{array}{cc} & \text{colunas} \\ \text{linhas} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resposta: alternativa **e**.

3. (UEL-PR) Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. A matriz Q fornece a quantidade de cada componente na fabricação dos modelos de sapatos, enquanto a matriz C fornece o custo unitário, em reais, destes componentes.

Dados:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{borracha} & \text{couro} & \text{tecido} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{modelo 1} \\ \text{modelo 2} \\ \text{modelo 3} \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{borracha} \\ \text{couro} \\ \text{tecido} \end{array}$$

A matriz V que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos é dada por:

a) $V = \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$. b) $V = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$. c) $V = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$. d) $V = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$. e) $V = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Do texto, temos que $V = Q \cdot C$.

Então:

$$V = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10 + 1 \cdot 50 + 1 \cdot 30 \\ 1 \cdot 10 + 2 \cdot 50 + 0 \cdot 30 \\ 2 \cdot 10 + 0 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Resposta: alternativa **e**.

4. (Ufpel-RS) Durante a Copa do Mundo 2006, muito se ouviu falar do "quadrado mágico", aquele formado por Kaká, Ronaldinho Gaúcho, Ronaldo Fenômeno e Adriano.

Matematicamente, uma matriz quadrada de ordem n é chamada quadrado mágico quando a soma dos números de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária dá sempre o mesmo resultado.

Considerando a matriz M um quadrado mágico, onde $M = \begin{pmatrix} x & 2y + 1 & 2y - 6 \\ y - 1 & z + 6 & x + 3 \\ 2x & 2z + 3 & 2z + 8 \end{pmatrix}$ e a soma S dos elementos da diagonal principal é dada por $S = \dfrac{n(n^2 + 1)}{2}$ em que n é a ordem da matriz M, é correto afirmar que:

a) $x = z$. b) $y < x$. c) $x < z$. d) $y = z$. e) $x = y$.

$$S = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

Temos:

$$\begin{cases} x + 4y - 5 = 15 \Rightarrow x + 4y = 20 \\ 2x + 4z + 11 = 15 \Rightarrow 2x + 4z = 4 \\ x + 3z + 14 = 15 \Rightarrow x + 3z = 1 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{x} - 2z = -2 \\ \cancel{x} + 3z = 1 \end{cases}$$
$$z = -1$$

Assim:

- $x + 2z = 2 \Rightarrow x + 2(-1) = 2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$
- $x + 4y = 20 \Rightarrow 4 + 4y = 20 \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4$

Resposta: alternativa **e**.

5. (Unirio-RJ) Um laboratório farmacêutico fabrica 3 tipos de remédios utilizando diferentes compostos. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ dada a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do composto j serão utilizadas para fabricar uma unidade do remédio do tipo i.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Quantas unidades do composto 2 serão necessárias para fabricar 3 remédios do tipo 1, 2 remédios do tipo 2 e 5 remédios do tipo 3?

a) 18 b) 21 c) 24 d) 27 e) 30

O composto 2 está na coluna 2, então:
3 remédios do tipo 1 + 2 remédios do tipo 2 + 5 remédios do tipo 3 $= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 21$ unidades do composto 2.

Resposta: alternativa **b**.

6. (Unimontes-MG) Um construtor tem contratos para construir 2 estilos de casa: moderno e colonial. A quantidade de material empregado em cada tipo de casa é dada pela matriz:

$$\begin{array}{l} \\ \text{moderno} \\ \text{colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ferro} & \text{madeira} & \text{tijolo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 20 & 18 \\ 5 & 22 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suponha que o construtor vá construir 2 casas do tipo moderno e 3 do tipo colonial. Se os preços por unidade de ferro, madeira e tijolo são, respectivamente, R$ 15,00, R$ 8,00 e R$ 10,00, então o custo total do material empregado é igual a:

a) R$ 1 923,00.
b) R$ 1 602,00.
c) R$ 1 973,00.
d) R$ 1 932,00.

$C = 2(6 \cdot 15 + 20 \cdot 8 + 18 \cdot 10) + 3(5 \cdot 15 + 22 \cdot 8 + 12 \cdot 10) \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 2 \cdot 430 + 3 \cdot 371 \Rightarrow C = 860 + 1\,113 \Rightarrow C = 1\,973$

Resposta: alternativa **c**.

7. (UFSM-RS) Ao comprar os produtos necessários para fazer uma feijoada, uma dona de casa resolveu pesquisar preços em três supermercados. A matriz P dos preços está representada a seguir; a primeira linha mostra os preços por kg do supermercado A; a segunda, do supermercado B; a terceira, do supermercado C. Esses preços são relativos, respectivamente, aos produtos feijão, linguiça, tomate e cebola.

$$P = \begin{pmatrix} 2{,}05 & 9{,}89 & 2{,}48 & 1{,}78 \\ 1{,}93 & 11{,}02 & 2{,}00 & 1{,}60 \\ 1{,}70 & 10{,}80 & 2{,}40 & 1{,}20 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sabendo que a matriz Q representa as quantidades necessárias, respectivamente, de feijão, linguiça, tomate e cebola, a dona de casa economizará mais se efetuar as compras no supermercado:

a) A.
b) B.
c) C.
d) A ou B indiferentemente.
e) A ou C indiferentemente.

No supermercado A: $5 \cdot 2{,}05 + 3 \cdot 9{,}89 + 2 \cdot 2{,}48 + 3 \cdot 1{,}78 = 49{,}67$
No supermercado B: $5 \cdot 1{,}93 + 3 \cdot 11{,}02 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1{,}60 = 51{,}51$
No supermercado C: $5 \cdot 1{,}7 + 3 \cdot 10{,}8 + 2 \cdot 2{,}4 + 3 \cdot 1{,}2 = 47{,}3$

Resposta: alternativa **c**.

8. (UFPB) Ao olhar a folha do calendário, João perguntou a Maria qual era o dia da semana, e recebeu a seguinte resposta: a data de hoje é um dos elementos da matriz AB, onde A é a matriz 4×7 formada apenas pelos números do calendário (conforme estão dispostos na figura) e B é a transposta da matriz $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} D & S & T & Q & Q & S & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \end{pmatrix} \end{array}$$

O dia da semana era:

a) segunda.
b) terça.
c) quarta.
d) quinta.
e) sexta.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \end{pmatrix}_{4 \times 7} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_{7 \times 1} = \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 38 \\ 66 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

O único valor da matriz AB contido no calendário é 10, correspondendo à terça-feira.

Resposta: alternativa **b**.

9. (UFRRJ) Uma fábrica de guarda-roupas utiliza três tipos de fechaduras (dourada, prateada e bronzeada) para guarda-roupas em mogno e cerejeira, nos modelos básico, luxo e requinte. A tabela 1 mostra a produção de móveis durante o mês de outubro de 2005, e a tabela 2, a quantidade de fechaduras utilizadas em cada tipo de armário no mesmo mês.

Tabela 1: Produção de armários em outubro de 2005

Madeira/Modelo	Básico	Luxo	Requinte
Mogno	3	5	4
Cerejeira	4	3	5

Tabela 2: Fechaduras usadas em outubro de 2005

Tipo/Madeira	Básico	Luxo
Dourada	10	12
Prateada	8	8
Bronzeada	4	6

A quantidade de fechaduras usadas nos armários do modelo requinte nesse mês foi de:

a) 170. b) 192. c) 120. d) 218. e) 188.

4 de mogno + 5 de cerejeira = 4(10 + 8 + 4) + 5(12 + 8 + 6) = 4 · 22 + 5 · 26 = 88 + 10 = 218

Resposta: alternativa **d.**

10. (UFG-GO) Seja $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n, onde $a_{ij} = i + j$. Nessas condições, a soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz é:

a) n^2. c) $2n + n^2$. e) $n + 2n^2$.

b) $2n + 2n^2$. d) $n^2 + n$.

$a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = 2 + 4 + ... + 2n = \frac{(2 + 2n)n}{2} =$

$= \frac{2(1 + n)n}{2} = n^2 + n$

Resposta: alternativa **d.**

11. (UFC-CE) As matrizes A e B são quadradas de ordem 4 e tais que $AB = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. Determine a matriz BA.

$AB = 9I_4 \Rightarrow BA = 9I_4 = AB$

Resposta: AB.

DETERMINANTES

Definição

Número real associado às matrizes quadradas.

Cálculo do determinante

De ordem 1

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

De ordem 2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

De ordem 3 – Regra de Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Abaixamento de ordem ou regra de Chió

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} & a_{23} - a_{13} \cdot a_{21} & a_{24} - a_{14} \cdot a_{21} \\ a_{32} - a_{12} \cdot a_{31} & a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{34} - a_{14} \cdot a_{31} \\ a_{42} - a_{12} \cdot a_{41} & a_{43} - a_{13} \cdot a_{41} & a_{44} - a_{14} \cdot a_{41} \end{bmatrix}$$

Propriedades

- $\det A^t = \det A$
- $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det (AB) = \det A \cdot \det B$ (teorema de Binet)
- $\det (kA_n) = k^n \cdot \det A_n$ (k é um numero real e n é a ordem de A)
- Troca de posição de filas paralelas: para cada troca, o novo determinante fica multiplicado por -1.
- O determinante é nulo nas seguintes condições: fila de zeros, filas paralelas iguais ou filas paralelas proporcionais.

Exercícios

1. (IFSC) Calcule o valor de x para que se tenha $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

a) -3
b) 6
c) 0
d) 3
e) -6

$2x + 12 = 0 \Rightarrow x = -6$

Resposta: alternativa **e**.

2. (UEL-PR) Se o determinante da matriz

$$A = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ é nulo, então:

a) $x = -3$.
b) $x = -\dfrac{7}{4}$.
c) $x = -1$.
d) $x = 0$.
e) $x = \dfrac{7}{4}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 4x - 1 + 2x + x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

Resposta: alternativa **e**.

3. (Vunesp-SP) Seja A uma matriz. Se $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 14 & 34 \end{bmatrix}$, o determinante A é:

a) 8.
b) $2\sqrt{2}$.
c) 2.
d) $\sqrt[3]{2}$.
e) 1.

$$\det A^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 14 & 34 \end{vmatrix} = 204 - 196 = 8$$

$$\det A = \sqrt[3]{\det A^3} \Rightarrow \det A = 2$$

Resposta: alternativa **c**.

4. (UEL-PR) Se A é uma matriz quadrada 2×2 de determinante 10. Se $B = -2 \cdot A$ e $C = 3 \cdot B^{-1}$, onde B^{-1} é a matriz inversa de B, então o determinante de C é:

a) -60.
b) $-\dfrac{3}{20}$.
c) $-\dfrac{20}{3}$.
d) $\dfrac{9}{40}$.
e) $\dfrac{40}{9}$.

$B = -2A \Rightarrow \det B = (-2)^2 \cdot \det A \Rightarrow \det B = 4 \cdot \det A$

$$C = 3 \cdot B^{-1} \Rightarrow \det C = 3^2 \cdot \frac{1}{\det B} \Rightarrow \det C = 9 \cdot \frac{1}{4 \det A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det C = \frac{9}{40}$$

Resposta: alternativa **d**.

5. (Ufam) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ uma matriz real, então det A é:

a) -3.　b) 3.　c) 10.　d) -10.　e) 24.

Temos, utilizando o terorema de Laplace e escolhendo a 1ª linha, que:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Escolhendo agora a 2ª coluna:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Escolhendo agora a 3ª coluna:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 + 2) = -3$$

Portanto, det $A = -3$.

Resposta: alternativa **a**.

---

6. (UFPB) Três cidades distintas foram representadas em um mapa (plano) pelos pontos C_1, C_2 e C_3. Considere a matriz $D = (d_{ij})_{3 \times 3}$, onde d_{ij} é a distância entre C_i e C_j, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$.
Nesse contexto, considere as seguintes afirmações:

I. Se C_1, C_2 e C_3 são vértices de um triângulo equilátero, D é uma matriz cujos elementos são todos iguais.

II. A matriz D é simétrica.

III. O determinante da matriz D é nulo.

Está(ão) correta(s) apenas:

a) I.　b) II.　c) III.　d) I e II.　e) II e III.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

I. A matriz para um triângulo equilátero irá apresentar todos os valores iguais, exceto os da linha principal, que serão sempre iguais a zero.
II. De fato $D = D^t$.
III. $\det D = (d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31}) + (d_{13} \cdot d_{21} \cdot d_{32}) \neq 0$

Resposta: alternativa **b**.

7. (Fatec-SP) O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. Se os números inteiros x e y são tais que a matriz tem traço igual a 4 e determinante igual a -19, então o produto xy é igual a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$$

a) -4. b) -3. c) -1. d) 1. e) 3.

Como o traço é a soma dos elementos da diagonal principal, então:

$2 + x + y = 4$

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = 2xy + 4 - 8 - 3y = -19$$

Então:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 4 \Rightarrow y = 2 - x \\ 2xy - 3y = -15 \end{cases}$$

Então:

$y(2x - 3) = -15 \Rightarrow (2 - x) \cdot (2x - 3) = -15 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 + 7x + 9 = 0 \Rightarrow x' = \dfrac{9}{2}$ e $x'' = -1$

Logo, $x = -1$ e $y = 3$.

Portanto:

$x \cdot y = -3$

Resposta: alternativa **b**.

8. (Uece) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. O valor do determinante da matriz $C = A \cdot B$ é:

a) 6. b) 16. c) 26. d) -26.

$C = A \cdot B \Rightarrow \det C = \det A \cdot \det B$

Mas:

$\det A = 0 + 12 + 12 - 0 - 4 - 4 = 16$

$\det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Então:

$\det C = 16 \cdot 1 = 16$

Resposta: alternativa **b**.

9. (Cefet-PR) Dada a matriz quadrada A, na ordem n, com $\det A \neq 0$, o valor de $\det A \cdot \det A^{-1}$ é:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Temos que $A \cdot A^{-1} = I_n$ e $\det I_n = 1$. Então, $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

Resposta: alternativa **a**.

10. (PUC-RS) Se a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem inversa, então $\det A^{-1}$ é:

a) $bc - bd$.

b) $\left(\dfrac{1}{ad}\right) - \left(\dfrac{1}{bc}\right)$.

c) $\det A$.

d) $\dfrac{1}{ad - bc}$.

e) $\dfrac{1}{(\det A)^2}$.

$\det A = ad - bc$

Então:

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{ad - bc}$

Resposta: alternativa **d**.

CE_2PMatA_05_036a039.indd 39 5/21/14 1:52 PM

SISTEMAS LINEARES

Equação linear

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$

Sistema de equações lineares

Sistema linear $m \times n$

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Classificação

Possível determinado (SPD)

Possui uma única solução.

Possível indeterminado (SPI)

Possui infinitas soluções.

Impossível (SI)

Não possui solução.

Método do escalonamento

Definição

A matriz dos coeficientes tem, em cada uma de suas linhas, o primeiro elemento não nulo à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte.

Classificação

- SPD: A última linha possui uma equação do 1º grau com uma incógnita.
- SPI: A última linha possui uma equação sem incógnitas verdadeira.
- SI: A última linha possui uma equação sem incógnitas falsa.

Sistema linear homogêneo (SH)

Todos os termos independentes são nulos.

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Observação: Um SH é sempre um sistema possível, pois admite pelo menos uma solução (0, 0, 0), denominada trivial, nula ou imprópria.

Sistemas lineares equivalentes

Possuem o mesmo conjunto solução, mesmo que ele seja o conjunto vazio.

Discussão

Identificar valores dos parâmetros em que ele é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

Exercícios

1. (UPE) Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

a) 5 reais b) 8 reais c) 10 reais d) 15 reais e) 24 reais

Considere:
m: preço da margarida
l: preço do lírio
r: preço da rosa

Então:

$$\begin{cases} 4m + 2l + 3r = 42 \\ m + 2l + r = 20 \\ 2m + 4l + r = 32 \quad \cdot(-1)\cdot(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 4l + r = 32 \\ -m - 2l = -12 \quad \cdot(-2) \\ -2m - 10l = -54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 4l + r = 32 \\ -m - 2l = -12 \\ -6l = -30 \Rightarrow l = 5 \end{cases}$$

Se $m + 2l + r = 20$, subtraindo o preço de 1 lírio, temos a resposta:
$m + l + r = m + 2l + r - l = 20 - 5 = 15$ reais

Resposta: alternativa **d**.

2. (FGV-SP) Como se sabe, no jogo de basquete, cada arremesso convertido de dentro do garrafão vale 2 pontos e, de fora do garrafão, vale 3 pontos. Um time combinou com seu clube que receberia $ 50,00 para cada arremesso convertido de 3 pontos e $ 30,00 para cada arremesso convertido de 2 pontos. Ao final do jogo, o time fez 113 pontos e recebeu $ 1 760,00. Então, a quantidade de arremessos convertidos de 3 pontos foi:

a) 13. b) 15. c) 16. d) 17. e) 18.

Considere:
x: arremessos de 3 pontos
y: arremessos de 2 pontos

$$\begin{cases} 3x + 2y = 113 \\ 50x + 30y = 1760 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = 13$.
Portanto, 13 arremessos foram convertidos em 3 pontos.
Resposta: alternativa **a**.

3. (UEG-GO) Um feirante vendeu todo o seu estoque de maçãs e peras por R$ 350,00. O preço de venda das peras e das maçãs está descrito na tabela abaixo:

2 maçãs por R$ 2,00
2 peras por R$ 1,50

Se o feirante tivesse vendido somente metade das maçãs e $\frac{2}{5}$ das peras, ele teria arrecadado R$ 160,00. Sendo assim, quantas frutas o feirante vendeu?

a) 200 b) 300 c) 400 d) 500

Considere:

m: preço de todas as maçãs

p: preço de todas as peras

$$\begin{cases} m + p = 350 \\ \frac{m}{2} + \frac{2}{5}p = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + p = 350 \\ 5m + 4p = 1600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4m - \cancel{4p} = -1400 \\ 5m + \cancel{4p} = 1600 \end{cases}$$

$$m = 200$$

Mas:

$m + p = 350 \Rightarrow p = 350 - 200 \Rightarrow p = 150$

Logo:

$$\begin{array}{lcl} 3 \text{ maçãs} & — & 2 \text{ reais} \\ x & — & 200 \text{ reais} \end{array} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 200}{2} \Rightarrow x = 300 \text{ maçãs}$$

$$\begin{array}{lcl} 2 \text{ peras} & — & 1{,}50 \text{ reais} \\ y & — & 150 \text{ reais} \end{array} \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 150}{1{,}50} \Rightarrow x = 200 \text{ peras}$$

Portanto:

$x + y = 300 + 200 = 500$

Resposta: alternativa **d**.

4. (UFJF-MG) Uma gaveta contém somente lápis, canetas e borrachas. A quantidade de lápis é o triplo da quantidade de canetas. Se colocarmos mais 12 canetas e retirarmos 2 borrachas, a gaveta passará a conter o mesmo número de lápis, canetas e borrachas. Quantos objetos havia na gaveta inicialmente?

a) 34 b) 44 c) 54 d) 64 e) 74

Considere:

b: quantidade de borrachas

c: quantidade de canetas

l: número de lápis

Então:

$$\begin{cases} l = 3c \\ c + 12 = l \\ b - 2 = l \end{cases}$$

Logo:

$c + 12 = 3c \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$

$l = 3c \Rightarrow l = 3 \cdot 6 \Rightarrow l = 18$

$b - 2 = l \Rightarrow b - 2 = 18 \Rightarrow b = 20$

Portanto, inicialmente havia:

$l + b + c = 18 + 20 + 6 = 44$ objetos

Resposta: alternativa **b**.

5. (Vunesp-SP) Uma família fez uma pesquisa de mercado, nas lojas de eletrodomésticos, à procura de três produtos que desejava adquirir: uma TV, um *freezer* e uma churrasqueira. Em três das lojas pesquisadas, os preços de cada um dos produtos eram coincidentes entre si, mas nenhuma das lojas tinha os três produtos simultaneamente para a venda. A loja *A* vendia a churrasqueira e o *freezer* por R$ 1 288,00. A loja *B* vendia a TV e o *freezer* por R$ 3 698,00 e a loja *C* vendia a churrasqueira e a TV por R$ 2 588,00. A família acabou comprando a TV, o *freezer* e a churrasqueira nestas três lojas. O valor total pago, em reais, pelos três produtos foi de:

a) 3 767,00. b) 3 777,00. c) 3 787,00. d) 3 797,00. e) 3 807,00.

Considere:
t: preço da TV
f: preço do *freezer*
c: preço da churrasqueira

Então:

$$\begin{cases} c + f = 1288 \\ t + f = 3698 \\ c + t = 2588 \end{cases}$$

$$\overline{2(c + t + f) = 7574 \Rightarrow c + t + f = 3787 \text{ reais}}$$

Resposta: alternativa **c**.

6. (Unifor-CE) Celso e Plínio são eletricistas e, por hora de trabalho, Celso cobra R$ 4,00 a mais do que Plínio. Considerando que, certo dia, ambos trabalharam juntos em um mesmo local por um período de 6 horas e lhes foi pago o total de R$ 240,00 pelo serviço feito, é correto afirmar que:

a) Celso cobra R$ 24,00 por hora de trabalho.
b) Plínio cobra R$ 16,00 por hora de trabalho.
c) Celso recebeu R$ 26,00 a mais do que Plínio.
d) a parte que coube a Plínio foi R$ 108,00.
e) a parte que coube a Celso foi R$ 134,00.

Considere:
c: preço cobrado por Celso por hora
p: preço cobrado por Plínio por hora

Então:

$$\begin{cases} c = p + 4 \\ 6(c + p) = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c - \cancel{p} = 4 \\ c + \cancel{p} = 40 \end{cases}$$

$$2c = 44 \Rightarrow c = 22$$

Mas:
$c + p = 40 \Rightarrow p = 40 - 22 \Rightarrow p = 18$

Portanto, Plínio recebeu por 6 horas de trabalho: $6 \cdot 18 = 108$ reais.

Resposta: alternativa **d**.

7. (FGV-SP) Na cantina de um colégio, o preço de 3 chicletes, 7 balas e 1 refrigerante é R$ 3,15. Mudando-se as quantidades para 4 chicletes, 10 balas e 1 refrigerante, o preço, nessa cantina, passa para R$ 4,20. O preço, em reais, de 1 chiclete, 1 bala e 1 refrigerante nessa mesma cantina, é igual a:

a) 1,70. b) 1,65. c) 1,20. d) 1,05. e) 0,95.

Considere:

c: preço do chiclete

b: preço da bala

r: preço do refrigerante

Então:

$$\begin{cases} 3c + 7b + r = 3{,}15 & \cdot (3) \\ 4c + 10b + r = 4{,}20 & \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9c + 21b + 3r = 9{,}45 \\ -8c - 20b - 2r = -8{,}40 \end{cases}$$

$$c + b + r = 1{,}05$$

Resposta: alternativa **d**.

8. (UFC-CE) Uma fábrica de confecções produziu, sob encomenda, 70 peças de roupas entre camisas, batas e calças, sendo a quantidade de camisas igual ao dobro da quantidade de calças. Se o número de bolsos em cada camisa, bata e calça é dois, três e quatro, respectivamente, e o número total de bolsos nas peças é 200, então podemos afirmar que a quantidade de batas é:

a) 36. b) 38. c) 40. d) 42. e) 44.

Considere:

l: quantidade de calças

b: quantidade de batas

c: quantidade de camisas

Então:

$$\begin{cases} c = 2l \\ c + b + l = 70 \\ 2c + 3b + 4l = 200 \end{cases}$$

Mas:

$$\begin{cases} 2l + b + l = 70 \\ 4l + 3b + 4l = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3l + b = 70 \\ 8l + 3b = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9l - \cancel{3b} = -210 \\ 8l + \cancel{3b} = 200 \end{cases}$$

$$-l = -10 \Rightarrow l = 10$$

Logo:

$c = 2l \Rightarrow c = 20$

$c + b + l = 70 \Rightarrow 20 + b + 10 = 70 \Rightarrow b = 40$

Resposta: alternativa **c**.

9. (Uesc-BA) Três amigos, X, Y e Z, resolveram fazer um passeio de final de semana, indo de carro da cidade A até a cidade B no veículo de um deles, rateando as despesas com combustível. Dos 54 litros de combustível necessários para completar a viagem, X contribuiu com 32 litros e Y com 22 litros. A contribuição de Z foi de R$ 50,22, valor que foi dividido entre X e Y, de modo a tornar o rateio equitativo. Então, o valor recebido por:

01) X foi igual a R$ 22,32.
02) Y foi igual a R$ 22,32.
03) X foi igual a R$ 18,60.
04) Y foi igual a R$ 18,60.
05) Y foi igual a R$ 11,16.

Considere:
p: preço de 1 litro de combustível
x: valor gasto por X inicialmente
y: valor gasto por Y inicialmente
Sabendo que a contribuição de Z torna o rateio equitativo, os três amigos devem gastar o mesmo valor, ou seja, o total gasto em combustível é 3 vezes a contribuição de Z.
Assim:
$54p = 150,66 \Rightarrow p = 2,79$
$x = 32p = 89,28$
$y = 22p = 61,38$
Como cada um devia ter gasto apenas R$ 50,22 reais, X deve receber de Z R$ 39,06 e Y, R$ 11,16.

Resposta: alternativa **05**.

10. (Unifesp) Em uma lanchonete, o custo de 3 sanduíches, 7 refrigerantes e uma torta de maçã é R$ 22,50. Com 4 sanduíches, 10 refrigerantes e uma torta de maçã, o custo vai para R$ 30,50. O custo de um sanduíche, um refrigerante e uma torta de maçã, em reais, é:

a) 7,00.
b) 6,50.
c) 6,00.
d) 5,50.
e) 5,00.

Considere:
t: preço da torta de maçã
r: preço do refrigerante
s: preço do sanduíche
Assim:

$$\begin{cases} 3s + 7r + t = 22,5 & \cdot (3) \\ 4s + 10r + t = 30,5 & \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9s + 21r + 3t = 67,5 \\ -8s - 20r - 2t = -61,0 \end{cases}$$
$$\overline{s + r + t = 6,5}$$

Resposta: alternativa **b**.

CIRCUNFERÊNCIA

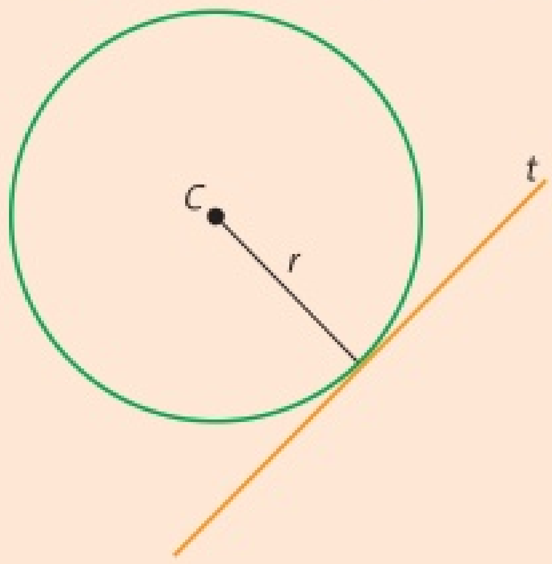
Definição

Figura geométrica formada por todos os planos de um plano equidistante de um dado ponto desse plano, o centro.

Posições relativas entre reta e circunferência

Tangentes

Possuem um único ponto comum.

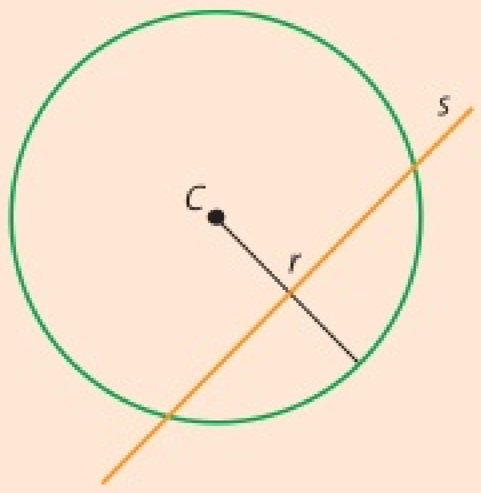


$d_{C,t} = \text{raio}$

Observação: O raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.

Secantes

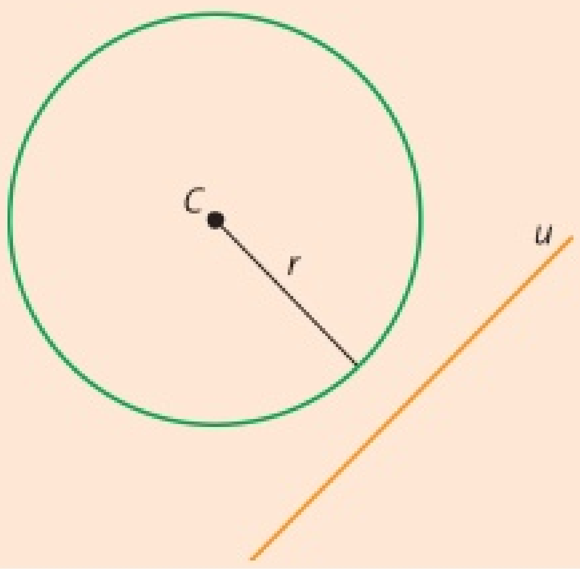
Possuem dois pontos comuns.



$d_{C,t} < \text{raio}$

Externas

Não possuem pontos comuns.

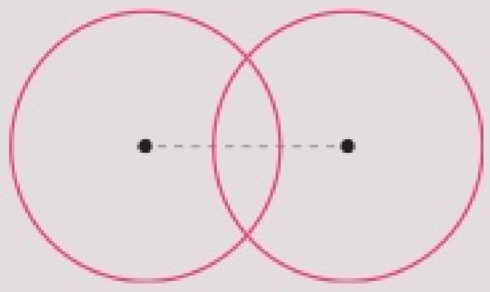


$d_{C,t} > \text{raio}$

Posições relativas entre duas circunferências

Secantes

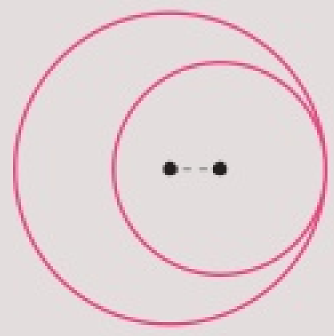
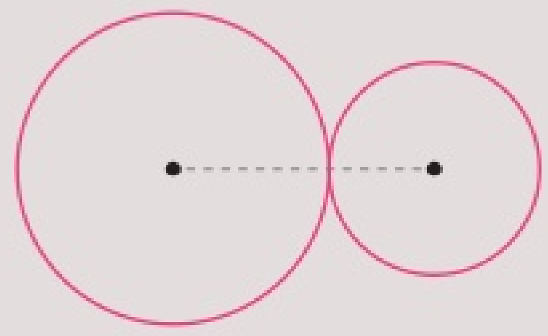
Possuem dois pontos comuns.



$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

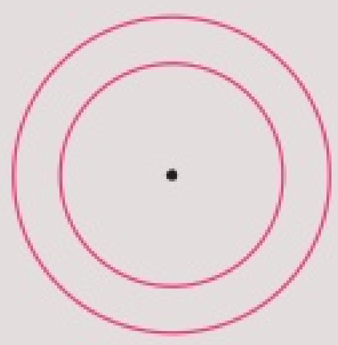
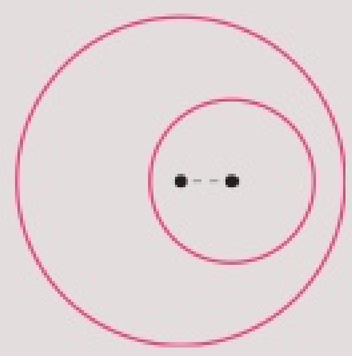
Tangentes

- Possuem um único ponto comum.
- O centro e o ponto de tangência são colineares.

Internas	**Externas**
 $d = r_1 - r_2$	 $d = r_1 + r_2$

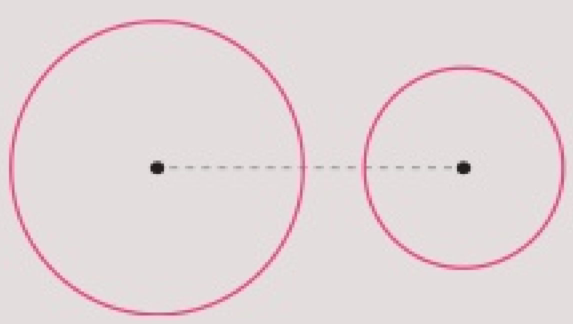
Internas

Não possuem pontos comuns.

Concêntricas	**Não concêntricas**
 $d = 0$	 $d < r_1 - r_2$

Externas

Não possuem pontos comuns.

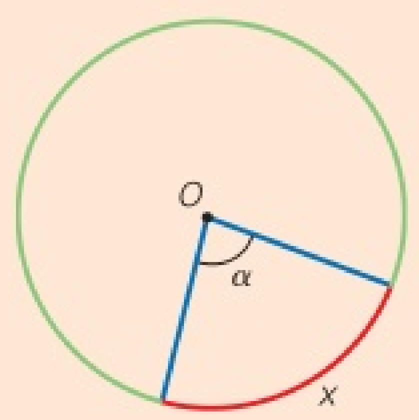


$d > r_1 + r_2$

Ângulos

Central

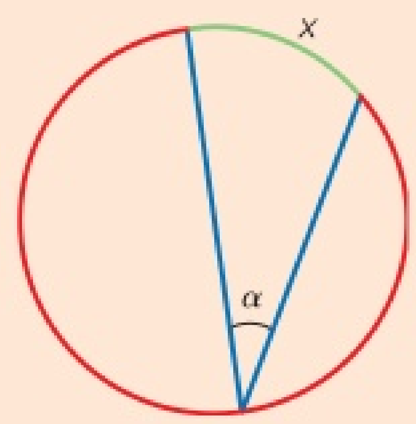
- Vértice: centro *O*.
- Lados: dois pontos quaisquer pertencentes à circunferência.



$\alpha = x$

Inscrito

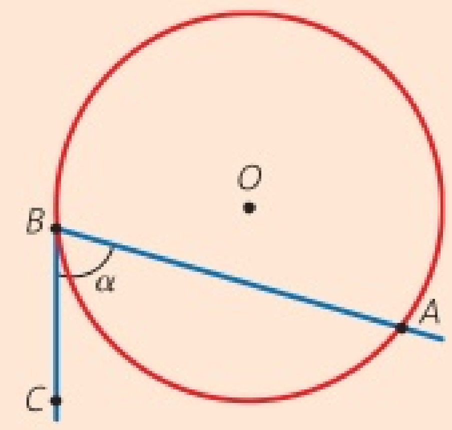
- Vértice: um ponto qualquer da circunferência.
- Lados: dois pontos quaisquer pertencentes à circunferência, na qual determina duas cordas.



$\alpha = \dfrac{x}{2}$

De segmento

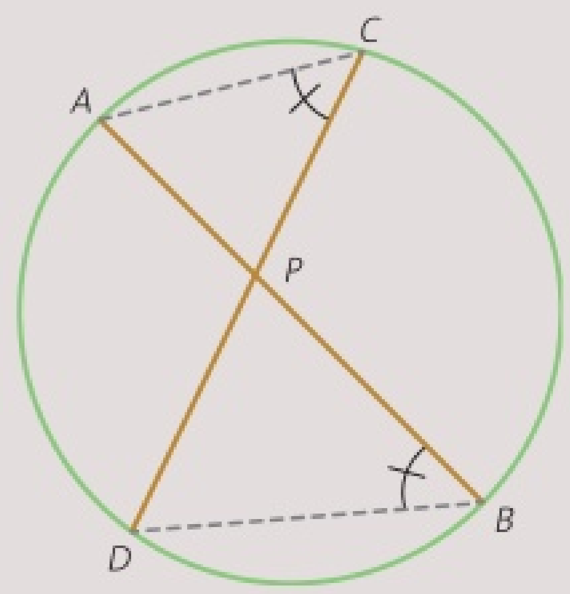
- Vértice: um ponto qualquer da circunferência.
- Lados: um deles é secante à circunferência, o outro, tangente a ela.



$\alpha = \dfrac{x}{2}$

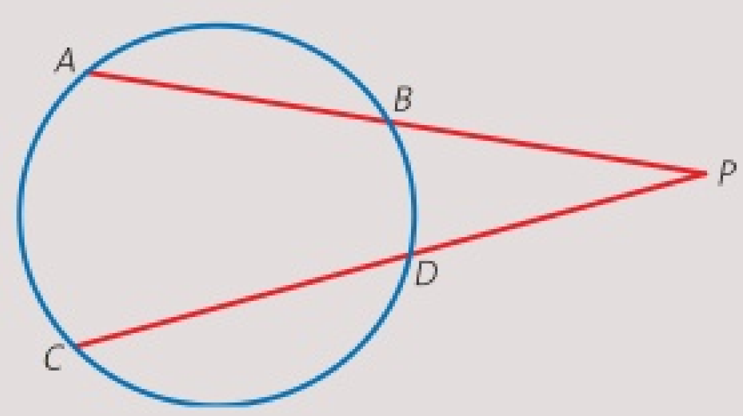
Relações métricas

Cruzamento de duas cordas



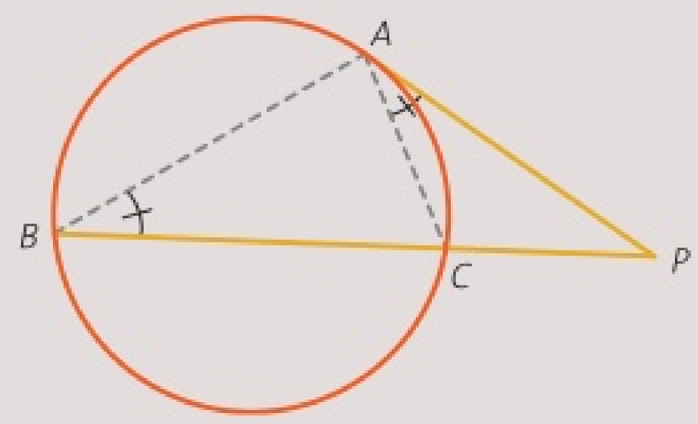
$AP \cdot BP = CP \cdot DP$

Dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Segmento secante e tangente a partir de um mesmo ponto

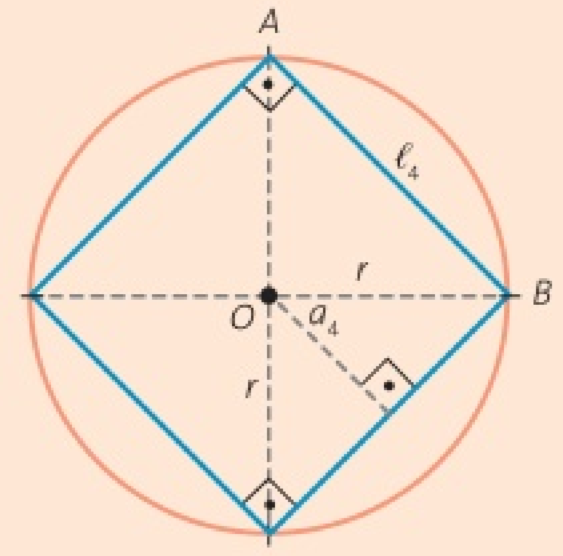


$(PA)^2 = PB \cdot PC$

Polígonos regulares inscritos

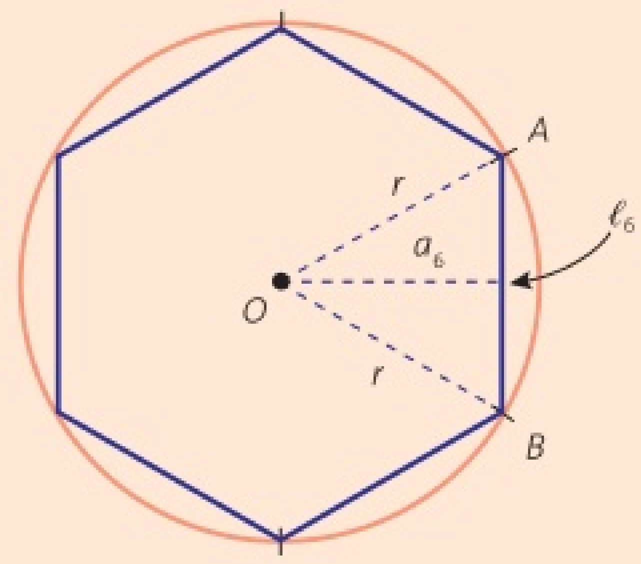
Possuem todos os lados e ângulos congruentes e encontram-se totalmente inseridos na circunferência.

Quadrado



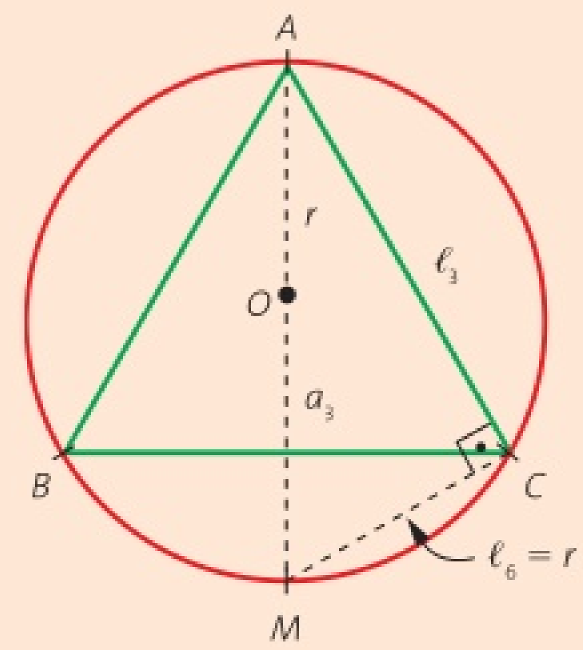
- lado (ℓ_4): $r\sqrt{2}$
- apótema (a_4): $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

Hexágono regular



- lado (ℓ_6): r
- apótema (a_6): $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

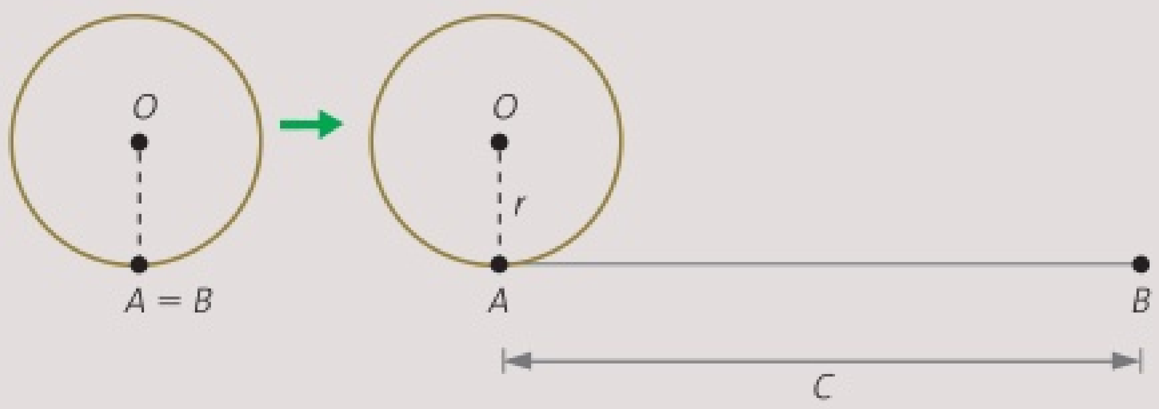
Triângulo equilátero



- lado (ℓ_3): $r\sqrt{3}$
- apótema (a_3): $\dfrac{r}{2}$

Comprimento

$C = 2\pi r$



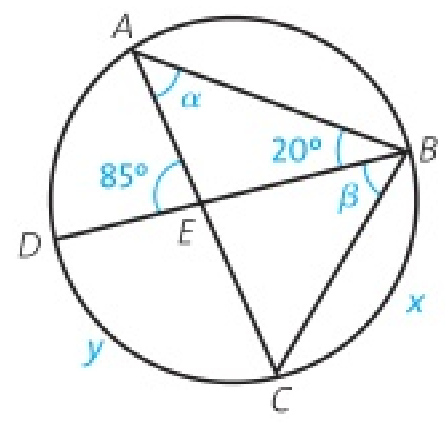
$AB = C$ (comprimento da circunferência)

Equações

- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (reduzida)
- $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$ (normal)

Exercícios

1. (Ufes) Observe a figura.

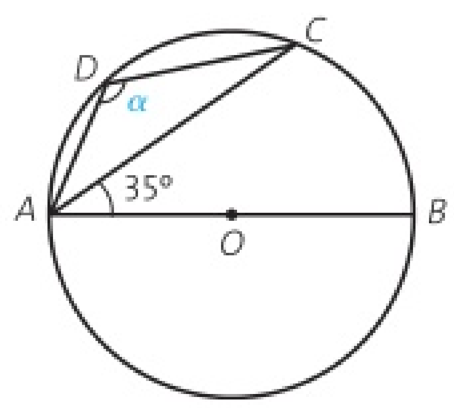


Nessa figura, *BD* é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*, e os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{E}D$ medem, respectivamente, 20° e 85°. Assim sendo, o ângulo $C\hat{B}D$ mede:

a) 25°.
b) 35°.
c) 30°.
d) 40°.

$\alpha + 95° + 20° = 180° \Rightarrow \alpha = 65°$
Portanto:
$x + y = 180° \Rightarrow y = 50°$
Logo:
$\beta = \dfrac{y}{2} = 25°$
Resposta: alternativa **a**.

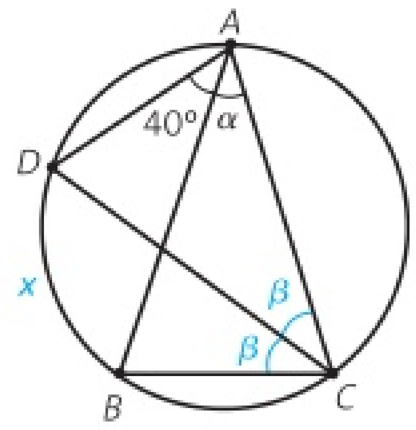
2. (Fuvest-SP) A medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro *O* é:



a) 125°.
b) 110°.
c) 120°.
d) 100°.
e) 135°.

Considerando $A\hat{D}C$, temos:
$2\alpha = 70° + 180° \Rightarrow 2\alpha = 250° \Rightarrow \alpha = 125°$
Resposta: alternativa **a**.

3. (Ufes) Na figura, *A*, *B*, *C* e *D* são pontos de uma circunferência, a corda *CD* é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas *AB* e *AC* têm o mesmo comprimento.



Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é:

a) 10°. b) 15°. c) 20°. d) 25°. e) 30°.

$x = 2 \cdot 40° = 80°$

$\beta = \frac{80°}{2} = 40°$

Então, $\hat{C} = 80°$. Mas $\hat{B} = \hat{C} = 80°$. Logo:

$\alpha + 80° + 80° = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$

Resposta: alternativa **c**.

4. (IFSP) Considere uma circunferência de centro *O* e raio 6 cm. Sendo *A* e *B* pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é 5π cm. A medida do ângulo central $A\hat{O}B$, correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$ considerado, é:

a) 120°. b) 150°. c) 180°. d) 210°. e) 240°.

$C = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$ cm

$\frac{5\pi}{12\pi} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = 360° \cdot \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = 150°$

Resposta: alternativa **b**.

5. (IFMG) Uma partícula descreve um arco de 1 080° sobre uma circunferência de 15 cm de raio. A distância percorrida por essa partícula, em cm, é igual a:

a) 90π. b) 120π. c) 140π. d) 160π.

$\frac{1080°}{360°} = 3$ voltas

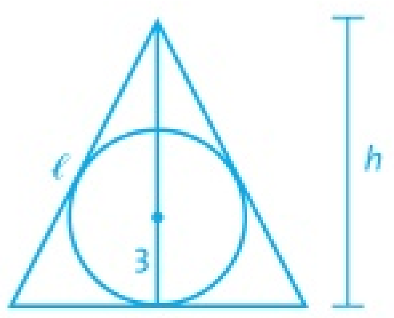
$d = 3 \cdot C \Rightarrow d = 3 \cdot 2\pi \cdot 15 \Rightarrow d = 90\pi$ cm

Resposta: alternativa **a**.

6. (UFRGS-RS) O perímetro do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio 3 é:

a) $18\sqrt{3}$. c) 36. e) 38.

b) $20\sqrt{3}$. d) $15\sqrt{6}$.



No triângulo equilátero, temos $h = 3r$ e $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Então:

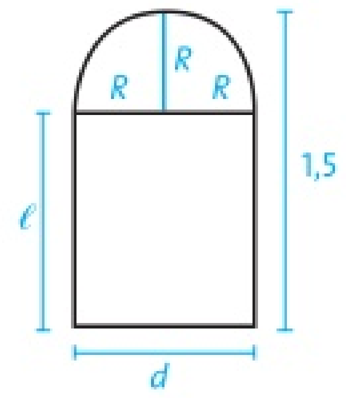
$h = 3r \Rightarrow h = 9$

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow \ell = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

Portanto, perímetro $= 18\sqrt{3}$.

Resposta: alternativa **a**.

7. (PUC-RJ) A figura a seguir é uma janela com formato de um semicírculo sobre um retângulo. Sabemos que a altura da parte retangular da janela é 1 m e a altura total da janela é 1,5 m.



A largura da parte retangular, expressa em metros, deve ser:

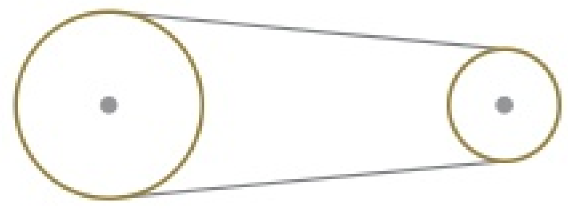
a) 0,5. b) 1. c) 2. d) π. e) 2π.

$R_c = 0{,}5$ m

$D = 1$ m

Resposta: alternativa **b**.

8. (Unifesp) A figura mostra duas roldanas circulares ligadas por uma correia. A roldana maior, com raio 12 cm, gira fazendo 100 rotações por minuto, e a função da correia é fazer a roldana menor girar. Admita que a correia não escorregue.



Para que a roldana menor faça 150 rotações por minuto, o seu raio, em centímetros, deve ser:

a) 8. b) 7. c) 6. d) 5. e) 4.

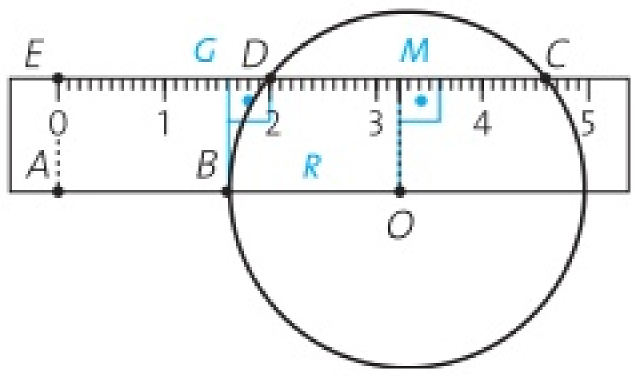
Como as velocidades são iguais, temos:

$v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{100 \cdot C_1}{1 \text{ min}} = \frac{150 \cdot C_2}{1 \text{ min}} \Rightarrow 2C_1 = 3C_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 2\pi \cdot 12 = 3 \cdot 2\pi \cdot R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{24}{3} \Rightarrow R_2 = 8$ cm

Resposta: alternativa **a**.

9. (Uerj) A figura abaixo representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência.



Considere os seguintes dados:

Segmentos	**Medida** (cm)
$\overline{AB}$	1,6
$\overline{ED}$	2,0
$\overline{EC}$	4,5

O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

a) 3,1. b) 3,3. c) 3,5. d) 3,6.

Como $OB = R_c$, $2OB = d_c$ e $OB = GD + DM$, temos:

$OB = (ED - AB) + \left(\frac{EC - ED}{2}\right) \Rightarrow OB = (2 - 16) + \left(\frac{2,5}{2}\right)$

Logo:

$2 \cdot OB = 3,3$ cm

Resposta: alternativa **b**.

10. (UFGD-MS) Se uma bola de basquete, com circunferência máxima de 78 cm, for centralizada no aro de uma cesta com 45 cm de diâmetro, de quanto será a folga x entre a bola e o aro em toda a volta? (Considere: $\pi = 3,14$.)

a) 16,29 c) 5,04 e) 1,17

b) 20 d) 10,08

Seja d a medida, em centímetros, do diâmetro da circunferência máxima da bola. Assim:

$\pi \cdot d = 78 \Rightarrow d = \frac{78}{\pi}$

Então:

$2x = 45 - \frac{78}{3,14} \Rightarrow 2x \simeq 45 - 24,84 \Rightarrow 2x \simeq 20,16 \Rightarrow x \simeq 10,08$

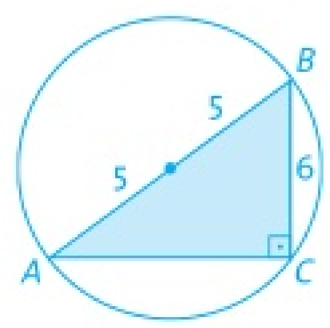
Portanto, em centímetros, o valor aproximado de x é de 10,08.

Resposta: alternativa **d**.

11. (Fuvest-SP) O triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então, a área do triângulo ABC, em cm^2, vale:

a) 24. c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. e) $2\sqrt{3}$.

b) 12. d) $6\sqrt{2}$.



$AC^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow AC = 8$

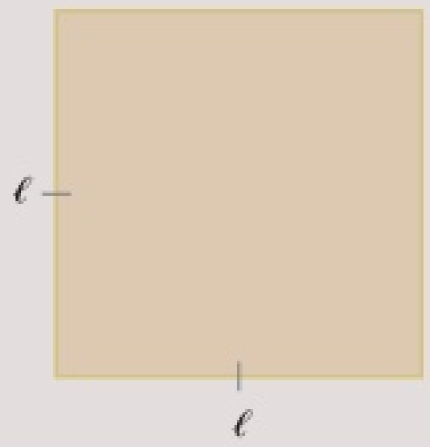
$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

Logo, a área do triângulo ABC é 24 cm^2.

Resposta: alternativa **a**.

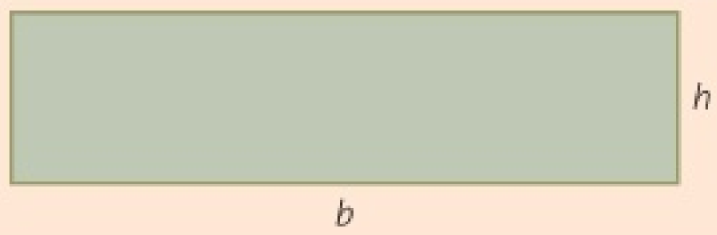
ÁREAS: MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

Região quadrada



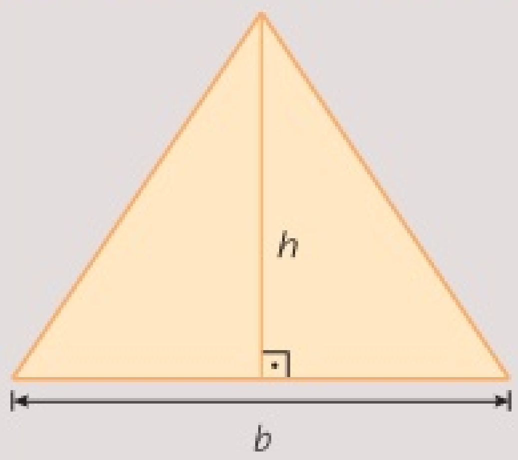
$A = \ell^2$

Região retangular



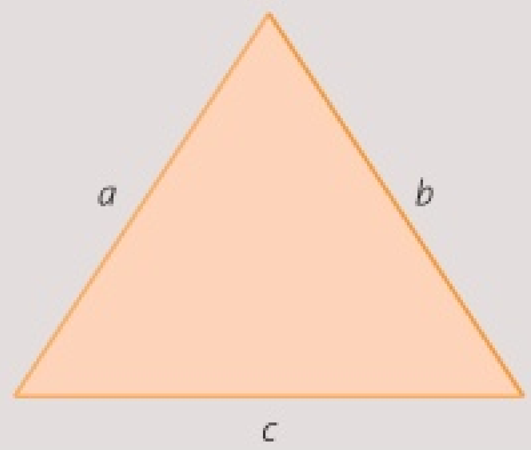
$A = bh$

Região triangular



$$A = \frac{bh}{2}$$

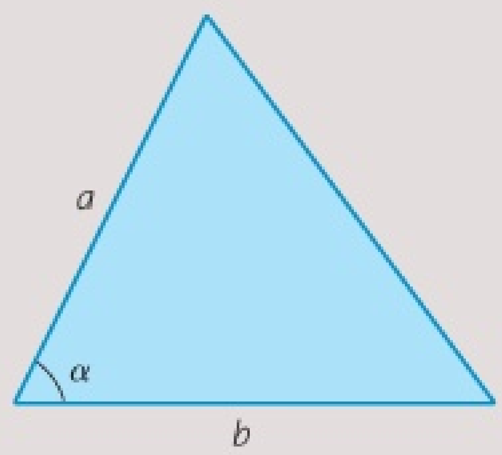
Conhecidos os três lados (fórmula de Heron)



$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

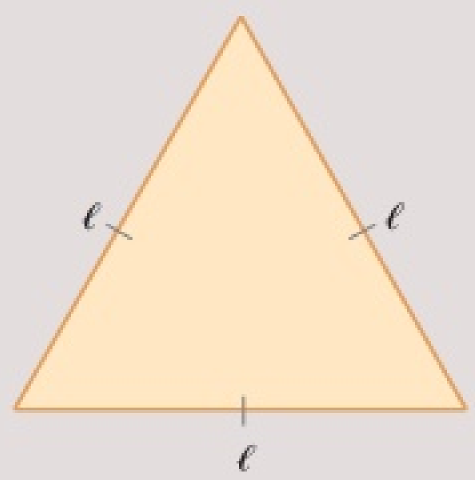
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Conhecidos dois lados e o ângulo entre eles



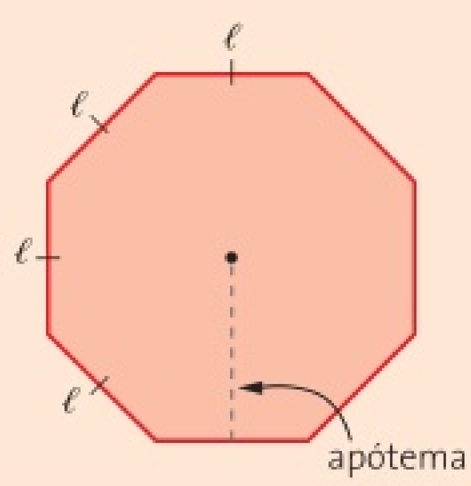
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\ \alpha$$

Triângulo equilátero



$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Polígono regular qualquer



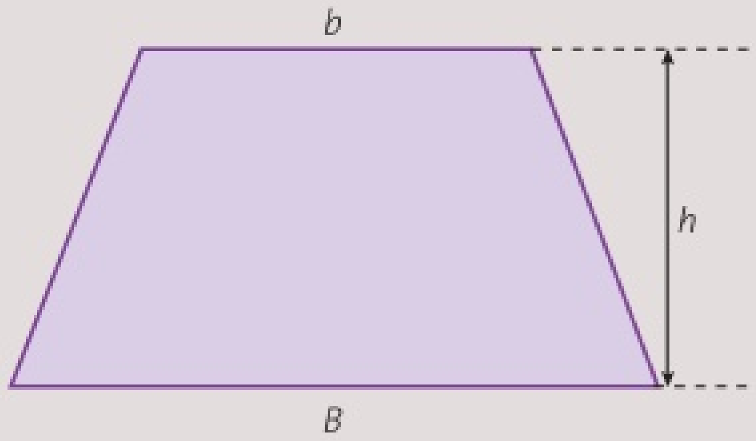
n: lados

p: semiperímetro

$$A = \frac{n\ell a}{2}$$

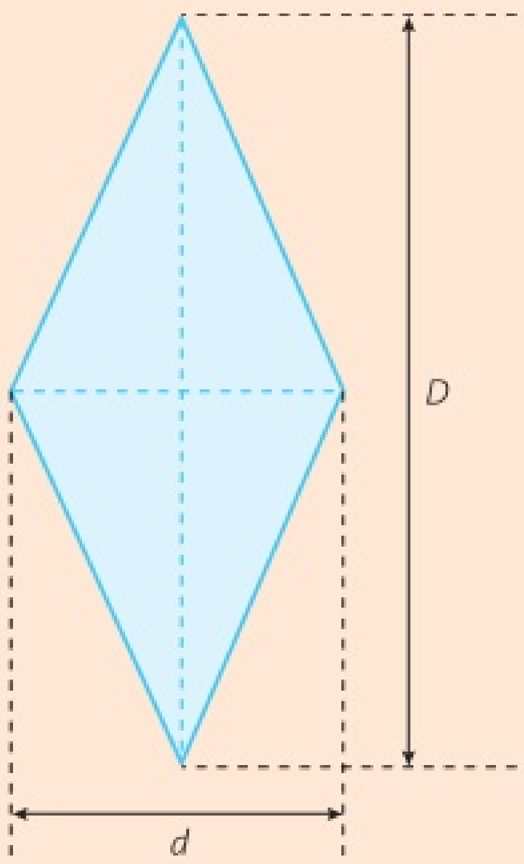
$$A = pa$$

Trapézio



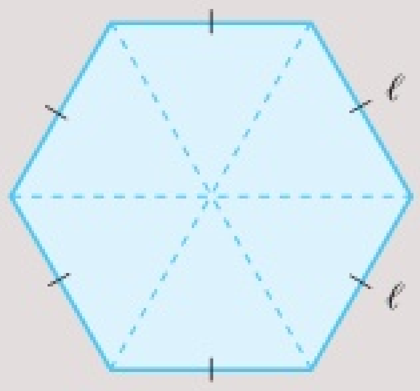
$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Losango



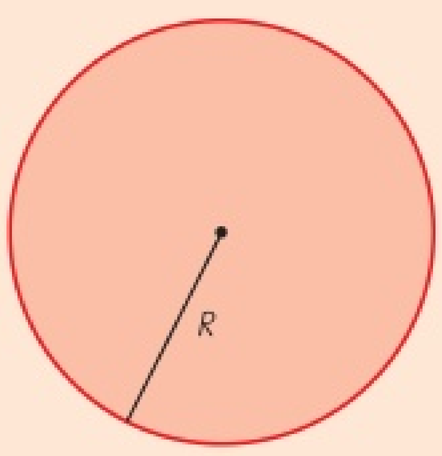
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Hexágono



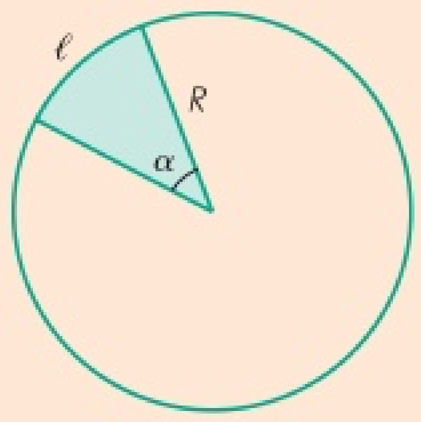
$$A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Círculo



$$A = \pi R^2$$

Setor circular



$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

Razão de semelhança

Duas figuras geométricas semelhantes com razão de semelhança k entre suas grandezas lineares têm áreas com razão de semelhança k^2.

Exercícios

1. (Unicamp-SP) Um vulcão que entrou em erupção gerou uma nuvem de cinzas que atingiu rapidamente a cidade de Rio Grande, a 40 km de distância. Os voos com destino a cidades situadas em uma região circular com centro no vulcão e com raio 25% maior que a distância entre o vulcão e Rio Grande foram cancelados. Nesse caso, a área da região que deixou de receber voos é:

a) maior que 10 000 km².
b) menor que 8 000 km².
c) maior que 8 000 km² e menor que 9 000 km².
d) maior que 9 000 km² e menor que 10 000 km².

Sendo $\pi = 3{,}14$ e $R = 40$ km, temos:

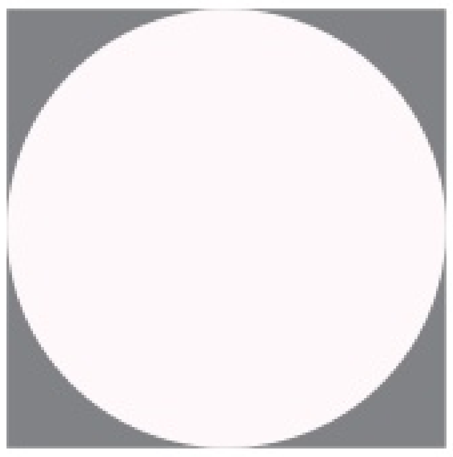
$R = \frac{25}{100} \cdot 40 + 40 \Rightarrow r = 50$ km

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 2\,500 \Rightarrow A = 7\,850$ km²

Logo, $A < 8\,000$ km².

Resposta: alternativa **b**.

2. (Unirg-TO) Em uma determinada construção o engenheiro responsável dá um problema de cálculo de área de uma estrutura para ser resolvido por seu estagiário. A estrutura é representada na figura ao lado. O problema consiste em determinar o lado do quadrado. Este quadrado está circunscrito por uma circunferência cuja medida da área é 7 500 m². Sabendo-se que os lados do quadrado tangenciam a circunferência, e que o estagiário resolveu corretamente o problema. Então, o valor do lado do quadrado é:
(considere $\pi = 3$)



a) 25 m.
b) 50 m.
c) 75 m.
d) 100 m.

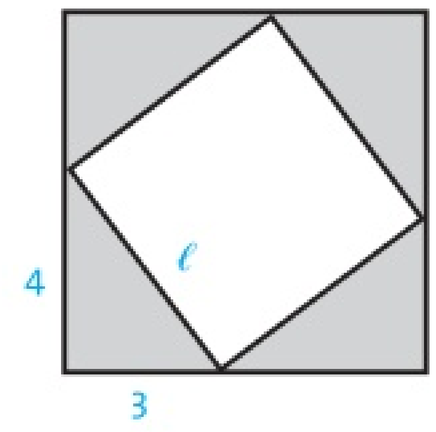
$A = 7\,500 \Rightarrow \pi r^2 = 7\,500 \Rightarrow 3r^2 = 7\,500 \Rightarrow r^2 = 2\,500 \Rightarrow r = 50$

Logo:

$\ell = 2r \Rightarrow \ell = 2 \cdot 50 \Rightarrow \ell = 100$

Resposta: alternativa **d**.

3. (UFRN) A figura ao lado representa uma área quadrada, no jardim de uma residência. Nessa área, as regiões sombreadas são formadas por quatro triângulos cujos lados menores medem 3 m e 4 m, onde será plantado grama. Na parte branca, será colocado um piso de cerâmica. O proprietário vai ao comércio comprar esses dois produtos e, perguntado sobre a quantidade de cada um, responde:



a) 24 m^2 de grama e 25 m^2 de cerâmica.
b) 24 m^2 de grama e 24 m^2 de cerâmica.
c) 49 m^2 de grama e 25 m^2 de cerâmica.
d) 49 m^2 de grama e 24 m^2 de cerâmica.

$\ell^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \ell^2 = 16 + 9 \Rightarrow \ell^2 = 25 \Rightarrow \ell = 5$

Logo:

$A_1 = \dfrac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow A_1 = 6$

$A_2 = \ell^2 \Rightarrow A_2 = 25$

Portanto:

- grama $= 4A_1 = 4 \cdot 6 = 24$ m^2
- cerâmica $= A_2 = 25$ m^2

Resposta: alternativa **a**.

---

4. (IFPE) O SBT, em parceria com a Nestlé, criou um novo programa de perguntas e respostas chamado *Um milhão na mesa*. Nele, o apresentador Silvio Santos faz perguntas sobre temas escolhidos pelos participantes. O prêmio máximo é de R$ 1 000 000,00 que fica, inicialmente, sobre uma mesa distribuídos em 50 pacotes com 1 000 cédulas de R$ 20,00 cada um. Cada cédula de R$ 20,00 é um retângulo de 14 cm de base por 6,5 cm de altura.

Colocando todas as cédulas uma ao lado da outra, teríamos uma superfície de:

a) 415 m^2.
b) 420 m^2.
c) 425 m^2.
d) 455 m^2.
e) 475 m^2.

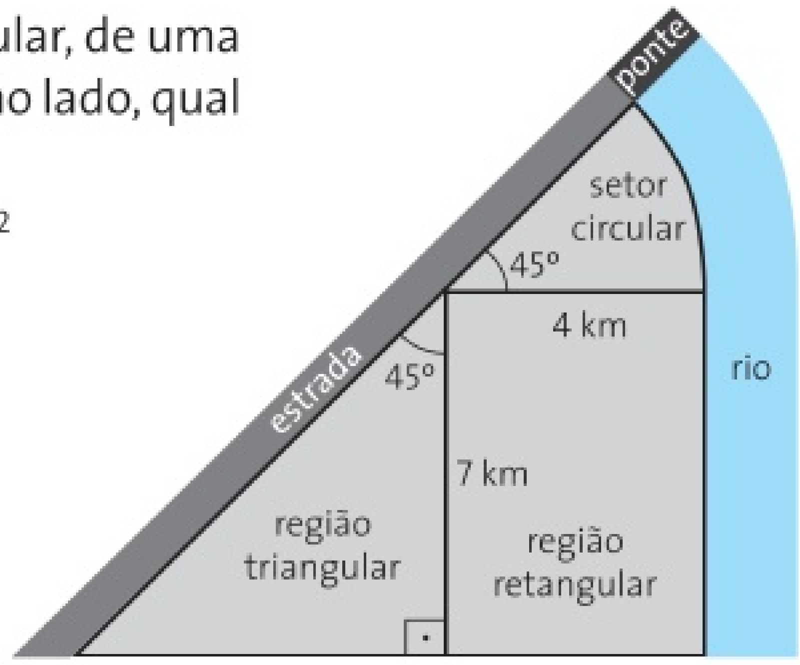
Total de notas: $50 \cdot 1\,000 = 50\,000$

Área de cada nota = base · altura $= 0{,}14 \text{ m} \cdot 0{,}065 \text{ m} = 0{,}0091 \text{ m}^2$

Área total = total de notas · área de cada nota $= 50\,000 \cdot 0{,}0091 = 455 \text{ m}^2$

Resposta: alternativa **d**.

5. (UEL-PR) Sabendo-se que o terreno de um sítio é composto de um setor circular, de uma região retangular e de outra triangular, com as medidas indicadas na figura ao lado, qual a área aproximada do terreno?



a) 38,28 km^2
b) 45,33 km^2
c) 56,37 km^2
d) 58,78 km^2
e) 60,35 km^2

• Área da região triangular:

Como os catetos são iguais (opostos ao ângulo de 45°), o triângulo é retângulo isósceles.

Então:

$A_{\text{região triangular}} = \dfrac{\text{cateto 1} \times \text{cateto 2}}{2} = 7 \cdot \dfrac{7}{2} = \dfrac{49}{2}$

• Área da região retangular:

$A_{\text{região retangular}} = 7 \cdot 4 = 28$

• Área do setor circular:

$A_{\text{setor circular}} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360°}$

Como $R = 4$ e $\alpha = 45°$, temos:

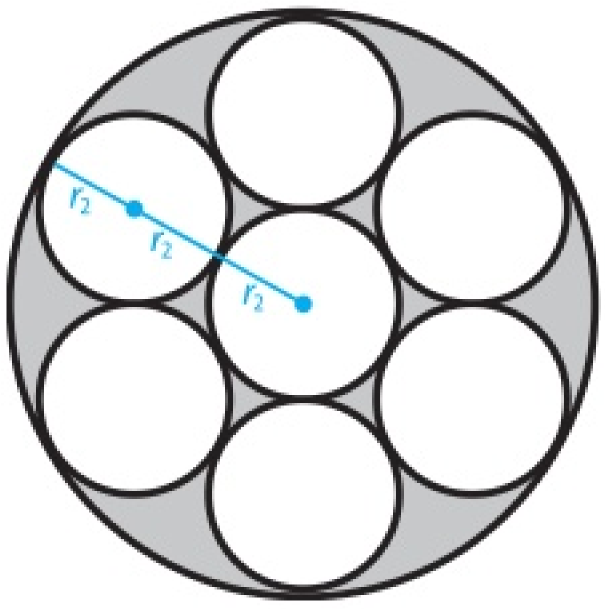
$A_{\text{setor circular}} = \dfrac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 45}{360} = 6{,}28$

Portanto:

$A_{\text{terreno}} = A_{\text{região triangular}} + A_{\text{região retangular}} + A_{\text{setor circular}} \Rightarrow A_{\text{terreno}} = 24{,}5 + 28 + 6{,}28 \Rightarrow A_{\text{terreno}} = 58{,}78\ km^2$

Resposta: alternativa **d**.

6. (FGV-SP) Cada um dos 7 círculos menores da figura a seguir tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande, e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.



Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm^2, é igual a:

a) π.
b) $\dfrac{3\pi}{2}$.
c) 2π.
d) $\dfrac{5\pi}{2}$.
e) 3π.

Temos:
$r_1 = 3r_2 = 3$

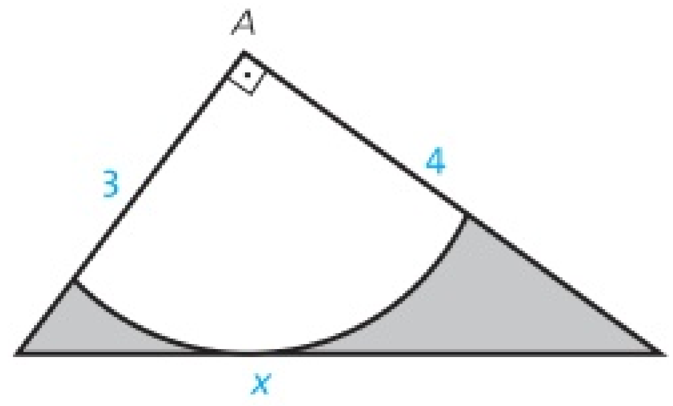
Mas:
$A = A_1 - 7A_2$

Então:
$A_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$
$A_2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

Portanto:
$A = 9\pi - 7\pi \Rightarrow A = 2\pi$

Resposta: alternativa **c**.

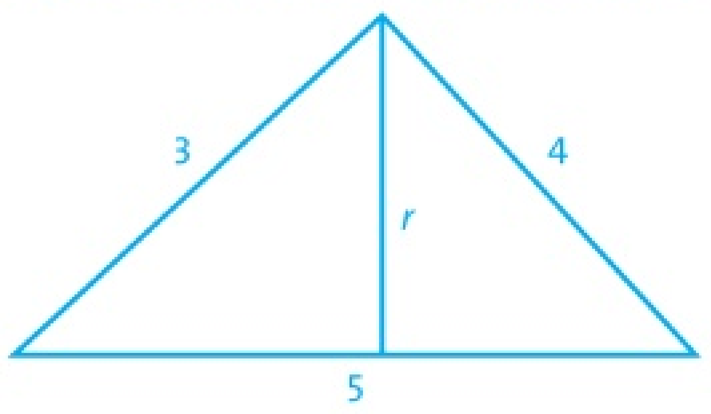
7. (UPM-SP) Na figura, os catetos do triângulo medem 3 e 4 e o arco de circunferência tem centro A. Dentre as alternativas, fazendo $\pi = 3$, o valor mais próximo da área assinalada é:



a) 3,15. b) 2,45. c) 1,28. d) 2,60. e) 1,68.

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:



$3 \cdot 4 = 5 \cdot r \Rightarrow r = 2{,}4$

Mas:

$A_{\text{assinalada}} = A_{\text{triângulo}} - A_{\text{setor } 90°}$

Então:

- $A_{\text{triângulo}} = 3 \cdot \dfrac{4}{2}$
- $A_{\text{setor } 90°} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{3{,}14 \cdot (2{,}4)^2 \cdot 90}{4 \cdot 360} = 4{,}32$

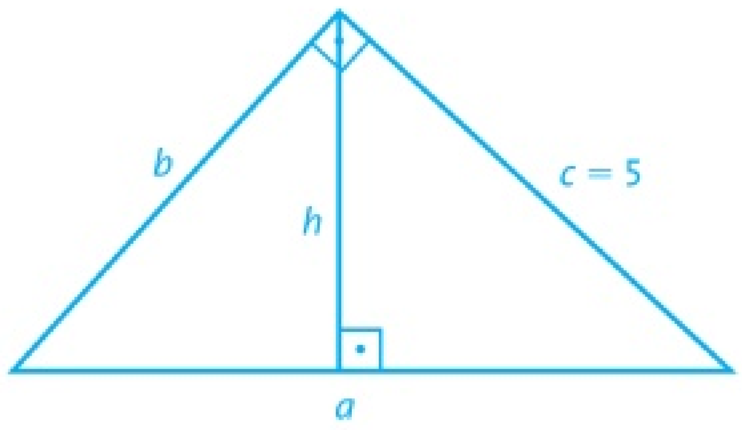
Logo:

$A_{\text{assinalada}} = 6 - 4{,}32 = 1{,}68$

Resposta: alternativa **e**.

8. (PUC-RJ) A área de um triângulo retângulo é 30 cm^2. Sabendo que um dos catetos mede 5 cm, quanto vale a hipotenusa?

a) 5 cm b) 8 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 25 cm

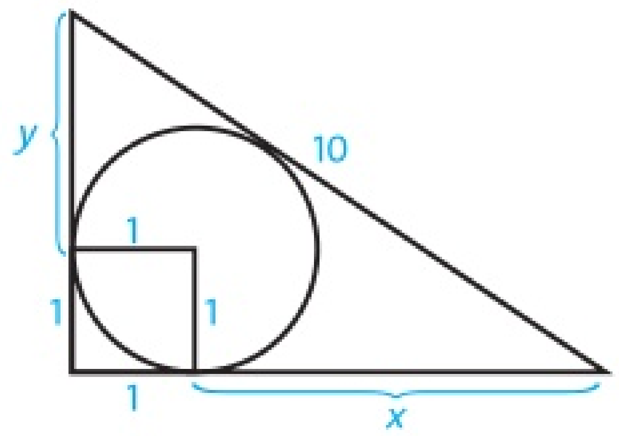


$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{a \cdot h}{2} \Rightarrow 30 = \dfrac{b \cdot c}{2} \Rightarrow 30 = \dfrac{5b}{2} \Rightarrow b = 12$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 25 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$

Resposta: alternativa **d**.

9. (UFSC) Calcule a área, em cm^2, de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 10 cm e cujo raio da circunferência inscrita mede 1 cm.



$(x + y)^2 = (x + 1)^2 + (1 + y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xy = 2(x + y + 1) \Rightarrow xy = \underbrace{x + y}_{10} + 1 = 11$

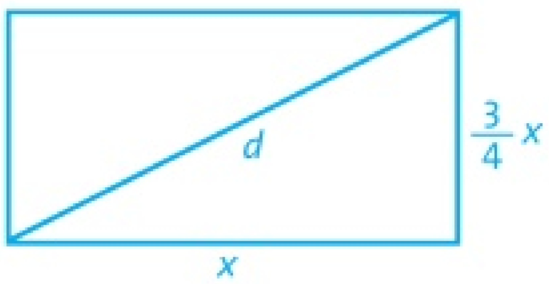
Logo:

$A = \dfrac{(x+1)\cdot(y+1)}{2} = \dfrac{xy + x + y + 1}{2} = \dfrac{11 + 11}{2} = \dfrac{22}{2} = 11$

Resposta: 11 cm^2.

10. (FGV-SP) O monitor de um *notebook* tem formato retangular com a diagonal medindo d. Um lado do retângulo mede $\frac{3}{4}$ do outro. A área do monitor é dada por:

a) $0{,}44d^2$.
b) $0{,}46d^2$.
c) $0{,}48d^2$.
d) $0{,}50d^2$.
e) $0{,}52d^2$.



$d^2 = x^2 + \left(\dfrac{3}{4}x\right)^2 \Rightarrow d^2 = x^2 + \dfrac{9x^2}{16} \Rightarrow 16d^2 = 25x^2 \Rightarrow x = \dfrac{4d}{5}$

Portanto:

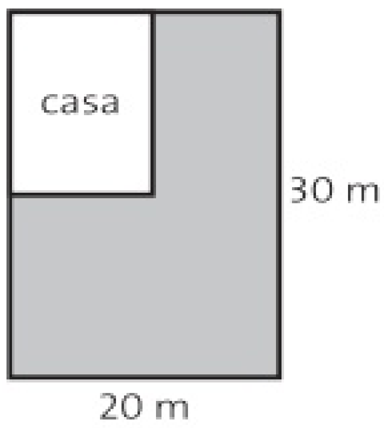
$\dfrac{3}{4}x = \dfrac{3}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{4}d}{5} = \dfrac{3d}{5}$

Logo:

$A_{monitor} = A_{retângulo} = x \cdot \dfrac{3x}{4} = \dfrac{4d}{5} \cdot \dfrac{3d}{5} = \dfrac{12d^2}{25} = 0{,}48d^2$

Resposta: alternativa **c**.

11. (Unifor-CE) Uma casa ocupa a quarta parte de um terreno, como mostra a figura ao lado. O restante do terreno é usado como quintal. O proprietário deseja pavimentar o quintal com certo piso, que é vendido em caixa que comporta 1,5 m^2 de piso. Quantas caixas deverão ser compradas pelo proprietário para pavimentar o quintal?



a) 100
b) 200
c) 250
d) 300
e) 350

$A_{terreno} = 30 \cdot 20 = 600\ m^2$

Como $A_{casa} = \dfrac{1}{4}A_{terreno}$, temos que $A_{quintal} = \dfrac{3}{4}A_{terreno}$.

Logo:

$A_{quintal} = \dfrac{3}{4} \cdot 600 = 450\ m^2$

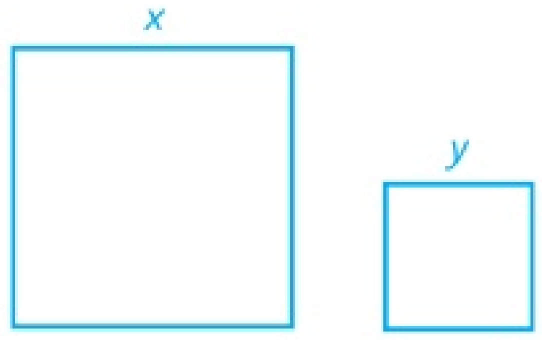
Mas:

$Q_{caixas} = \dfrac{A_{quintal}}{A_{piso}} = \dfrac{450}{1{,}5} \Rightarrow Q_{caixas} = 300$

Resposta: alternativa **d**.

12. (ESPM-SP) Um escritório possui duas salas quadradas cujos lados medem números inteiros de metros. Se a diferença entre suas áreas é de 11 m^2, a soma dessas áreas é igual a:

a) 57 m^2.
b) 59 m^2.
c) 61 m^2.
d) 63 m^2.
e) 65 m^2.



$x^2 - y^2 = 11 \Rightarrow (x + y) \cdot (x - y) = 11$

Como x e $y \in \mathbb{N}$, então:

$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$2x = 12 \Rightarrow x = 6$

Logo, $y = 5$.

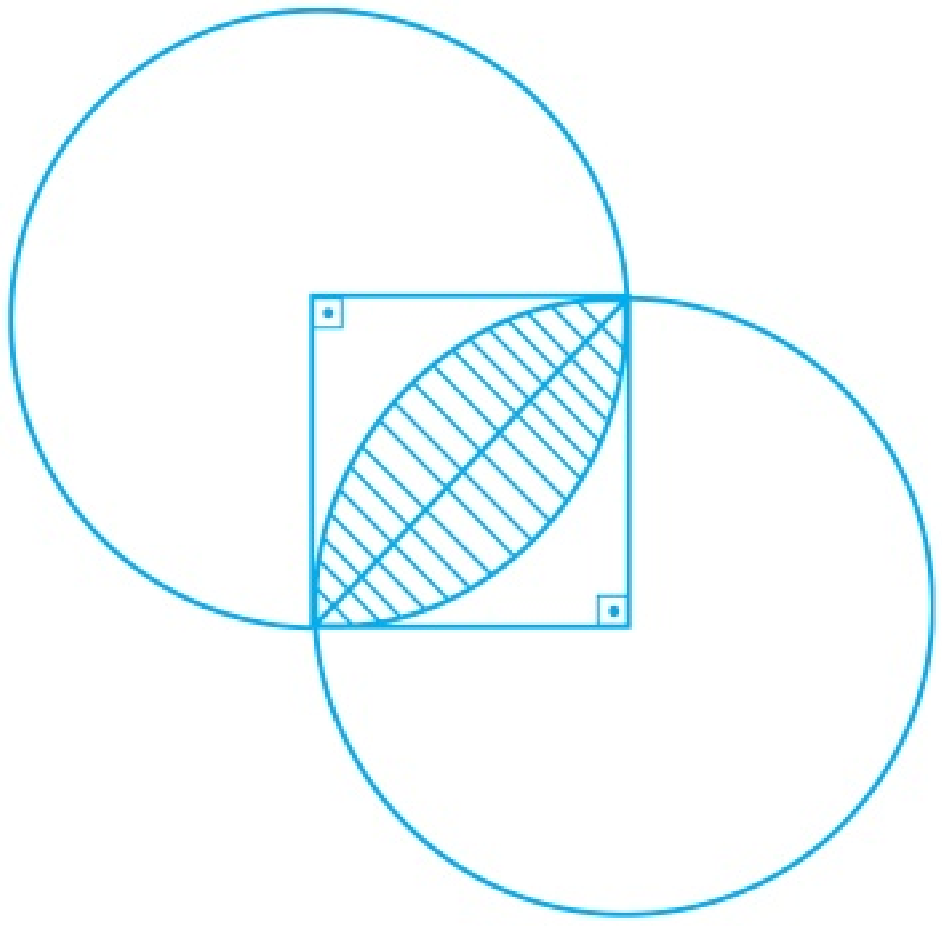
Assim:

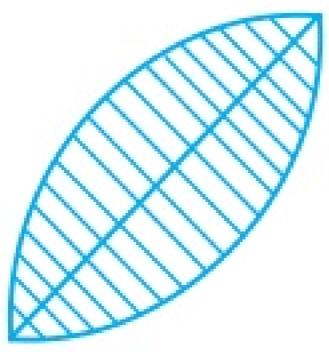
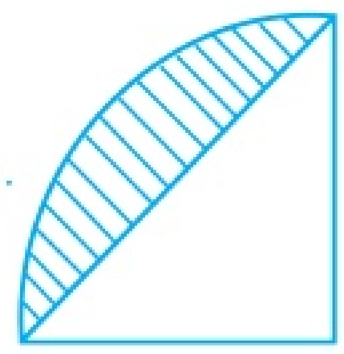
$x^2 + y^2 = 36 + 25 = 61\ m^2$

Resposta: alternativa **c**.

13. (Uece) Dois vértices não consecutivos de um quadrado são respectivamente os centros de dois círculos cuja medida dos raios de cada um deles é 2 m. Se a medida do lado do quadrado é 2 m, então a medida da área, em m^2, da região comum aos dois círculos é:

a) $2\pi - 2$.　　b) $2\pi - 4$.　　c) $4\pi - 2$.　　d) $4\pi - 4$.



 $\Rightarrow$ $2 \cdot$  $= 2(A_{setor} - A_{triângulo})$

$$A_{setor} = \frac{\pi \cdot (2)^2 \cdot 90°}{360°} = \pi$$

$$A_{triângulo} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

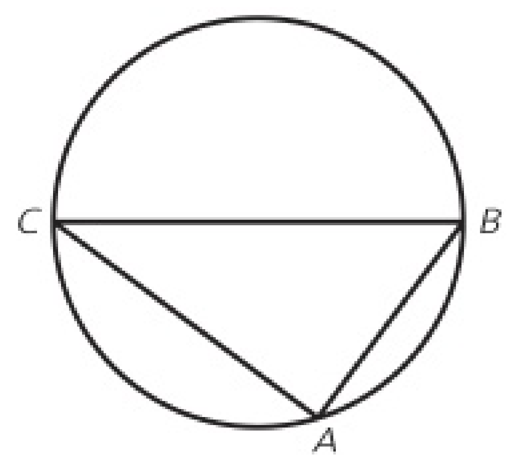
Logo:

$A = 2(\pi - 2) = 2\pi - 4$

Resposta: alternativa **b**.

---

14. (FGV-SP) Na figura abaixo, o ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC inscrito na circunferência é reto. O lado $\overline{AB}$ mede 4, e o lado $\overline{AC}$ mede 5.



A área do círculo da figura é:

a) $9{,}75\pi$.　　b) 10π.　　c) $10{,}25\pi$.　　d) $10{,}50\pi$.　　e) $10{,}75\pi$.

Se o ângulo $\hat{A}$ é reto, então o lado $\overline{BC}$ é o diâmetro da circunferência ($BC = 2r$). Logo:

$BC^2 = 4^2 + 5^2 \Rightarrow BC^2 = 41 \Rightarrow BC = \sqrt{41}$

Mas:

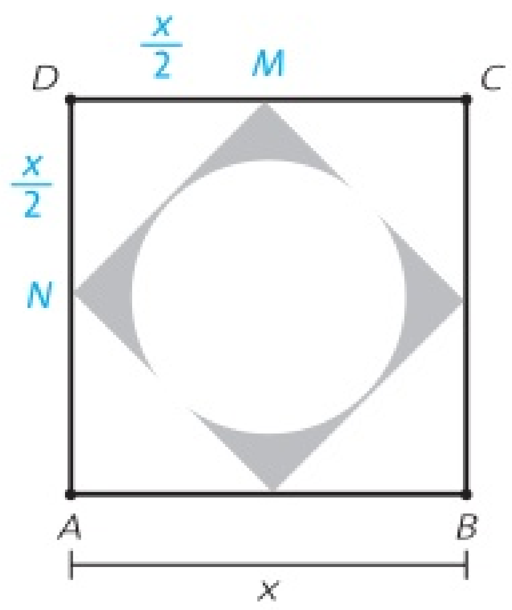
$BC = 2r \Rightarrow \sqrt{41} = 2r \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$

Portanto:

$A_{círculo} = \pi r^2 = \dfrac{41\pi}{4} = 10{,}25\pi$

Resposta: alternativa **c**.

15. (ESCS-DF) Na figura ao lado, o círculo está inscrito no quadrado formado pelos segmentos de extremos nos pontos médios dos lados do quadrado $ABCD$. Se a medida de AB é igual a x, então a expressão que permite calcular, em função de x, a área sombreada é:



a) $\frac{x^2}{2} - \pi \cdot \frac{x^2}{8}$.

b) $\frac{x^2}{2} - \pi \cdot \frac{x^2}{2}$.

c) $2x^2 - \pi x^2$.

d) $x^2 - \pi x^2$.

e) $x^2 - \pi \cdot \frac{x^2}{2}$.

$A_{\text{hachurada}} = A_{\text{quadrado}} - 4A_{\text{triângulo}} - A_{\text{círculo}}$

Mas:

- $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{x^2}{8}$
- $MN^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow MN = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (diâmetro do círculo)

Logo, $r = \frac{x\sqrt{2}}{4}$. Então:

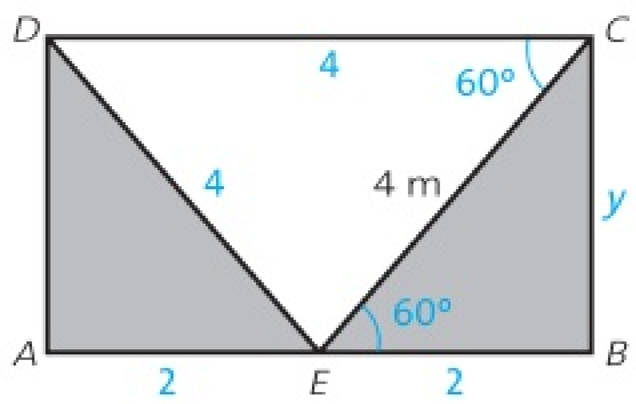
$A_{\text{círculo}} = \frac{\pi x^2}{8}$

Portanto:

$A_{\text{hachurada}} = x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow A_{\text{hachurada}} = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8}$

Resposta: alternativa **a**.

16. (UEPB) A figura seguinte apresenta um retângulo $ABCD$ e um triângulo equilátero ECD.



A área da região sombreada será:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ m².

b) $2\sqrt{3}$ m².

c) $3\sqrt{3}$ m².

d) $5\sqrt{3}$ m².

e) $4\sqrt{3}$ m².

$4^2 = y^2 + 2^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

Logo:

$A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ m²

Resposta: alternativa **e**.

Texto para as questões **17** e **18**.

Planta do Centro de Diagnóstico por Imagens, com destaque do equipamento de ressonância magnética na sala de exames.

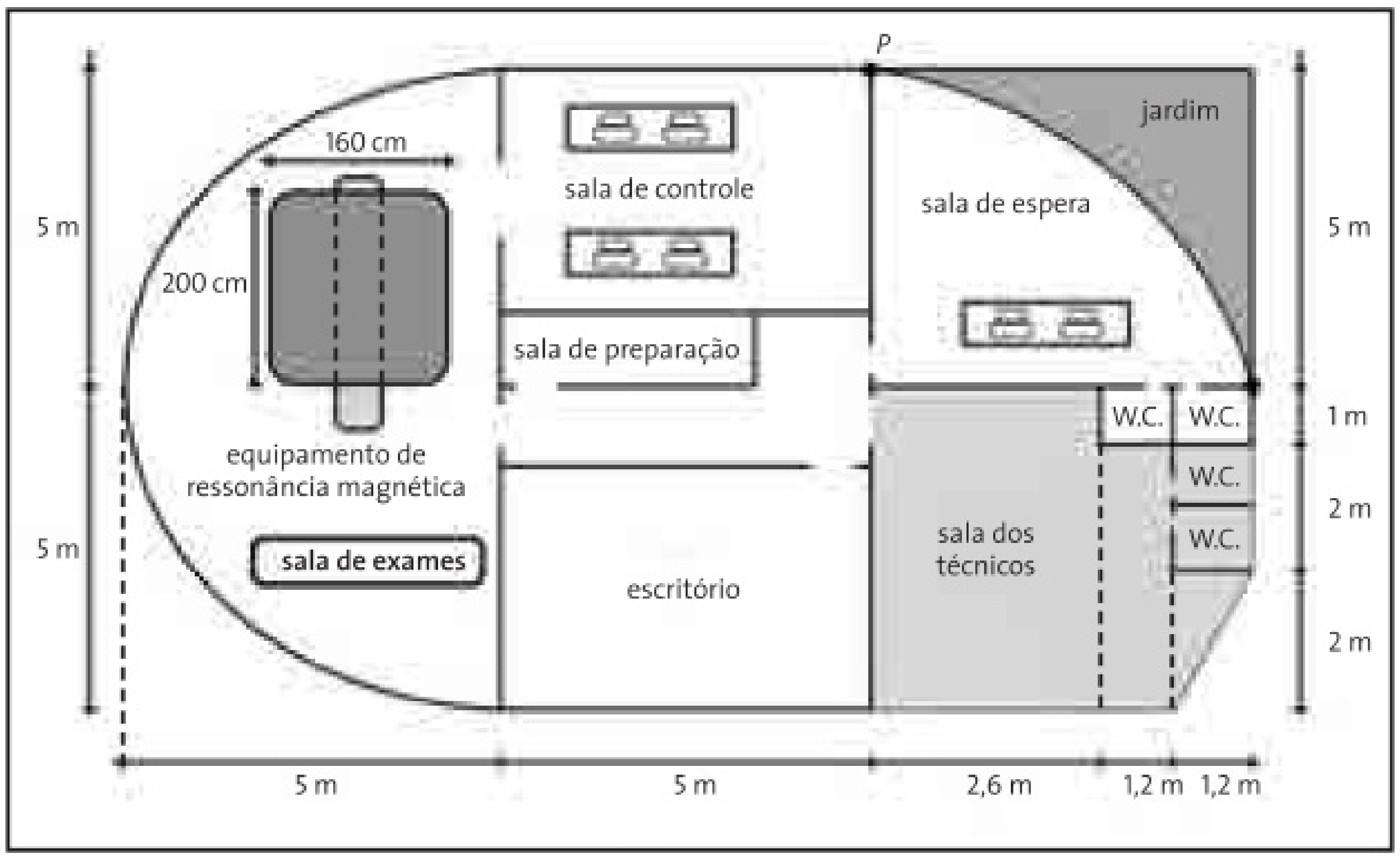


Figura I

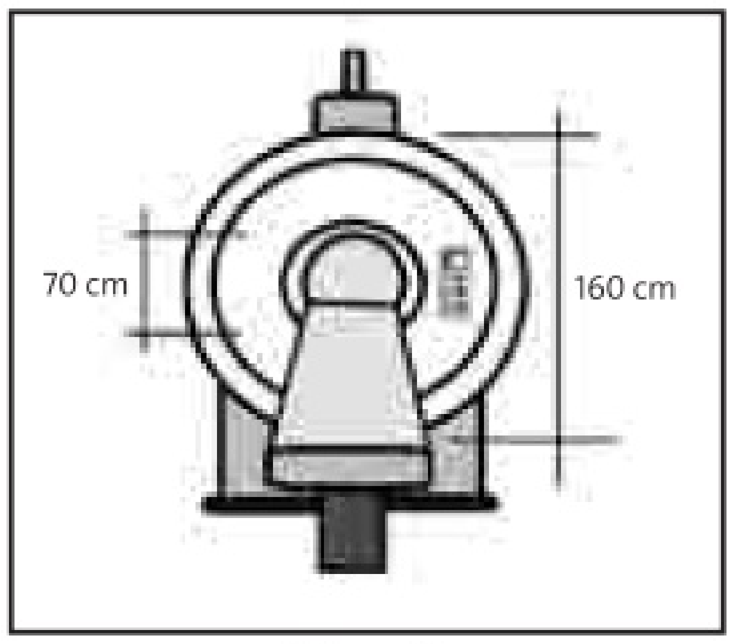


Figura II

Na figura **I**, uma planta de um centro de diagnóstico por imagens (CDI), os desenhos das paredes circulares são semicircunferências de raio igual a 5 m. Na figura **II**, está representado um esquema do equipamento de ressonância magnética instalado na sala de exames. O equipamento, constituído por um tubo circular homogêneo com diâmetro externo de 160 cm e interno de 70 cm e com comprimento de 2 m, é apoiado em uma base e fixado no teto por um suporte e tem como suplemento uma maca. Na figura **II**, a base, o suporte e a maca estão representados em cor cinza.

17. (ESCS-DF) Com base nos dados apresentados no texto e na figura **I**, e sabendo-se que o arco de circunferência, que é a fronteira entre a sala de espera e o jardim, passa pelos vértices P e Q do quadrado de lado 5 m, verifica-se, após os cálculos, que a área do jardim é igual a:

a) $\left(5\pi - \frac{5}{4}\right) m^2$. b) $5(\pi - 5)\ m^2$. c) $25\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) m^2$. d) $5\pi^2\ m^2$. e) $\frac{25}{4}\pi\ m^2$.

$A_{\text{sala de espera}} + A_{\text{jardim}} = 5 \cdot 5 = 25\ m^2$

$A_{\text{sala de espera}} = R^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{25\pi}{4}$

Portanto:

$A_{\text{jardim}} = 25 - \frac{25\pi}{4} = 25\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ m^2$

Resposta: alternativa **c**.

18. (ESCS-DF) Considere que tenha sido colocado piso de porcelanato na sala dos técnicos, não incluídos os banheiros (*w. c.*), ao preço de R$ 35,00 o metro quadrado. Nessa situação, o custo do piso colocado, em reais, desprezando-se a espessura das paredes, foi:

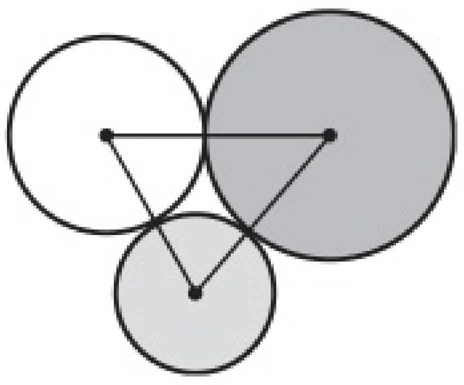
a) inferior a 445.
b) superior a 445 e inferior a 470.
c) superior a 470 e inferior a 490.
d) superior a 490 e inferior a 520.
e) superior a 520.

$A_{sala} = 2{,}6 \cdot 5 = 1{,}2 \cdot 4 + \frac{1{,}2 \cdot 2}{2} \Rightarrow A_{sala} = 19\ m^2$

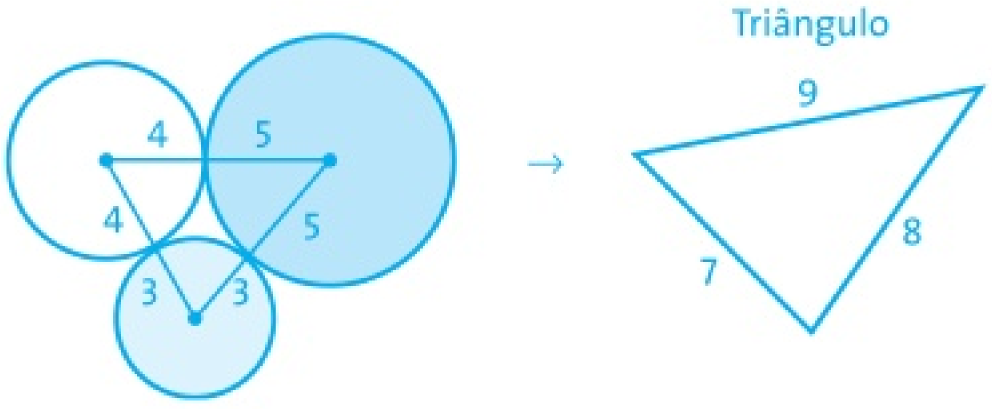
Preço: $19 \cdot 35 = 665$ reais

Resposta: alternativa **e**.

19. (Unifor-CE) Considere três circunferências com raios medindo 5 cm, 4 cm e 3 cm respectivamente. Se elas são traçadas de forma que cada uma delas é tangente exterior às outras duas, como mostra a figura ao lado, então podemos afirmar que o valor da área do triângulo formado pelos centros dessas circunferências é:



a) $2\sqrt{5}$ cm².
b) $8\sqrt{5}$ cm².
c) $12\sqrt{5}$ cm².
d) $2\sqrt{3}$ cm².
e) $5\sqrt{3}$ cm².



• Semiperímetro do triângulo:

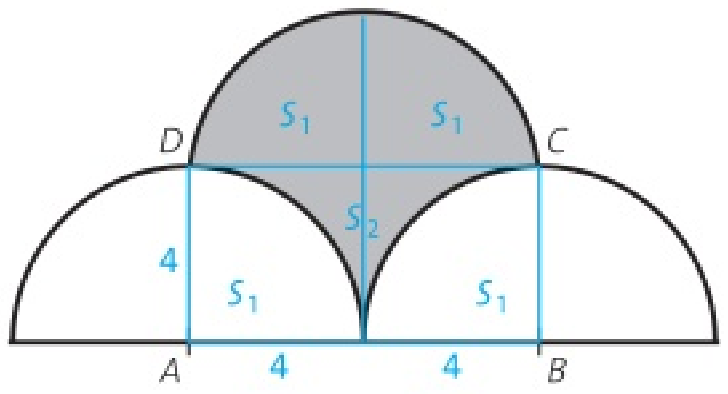
$\frac{24}{2} = 12$

• Área do triângulo:

$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \Rightarrow A = \sqrt{12 \cdot (12 - 3) \cdot (12 - 8) \cdot (12 - 7)} \Rightarrow A = \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Rightarrow A = \sqrt{720} \Rightarrow A = 12\sqrt{5}\ cm^2$

Resposta: alternativa **c**.

20. (Unifacs-BA) A figura representa uma montagem feita com três semicircunferências de raio $r = 4$, simulando nuvens na pintura de um painel.



Sabendo-se que os pontos *A* e *B* são centros de duas dessas semicircunferências e que os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são vértices de um retângulo, conclui-se corretamente que a parte da nuvem pintada de cinza mede, em unidades de área:

01) $32 - 8\pi$. 02) 16. 03) $16 + 4\pi$. 04) 32. 05) $64 - 8\pi$.

$A_{cinza} = A_1 + A_1 + A_2$

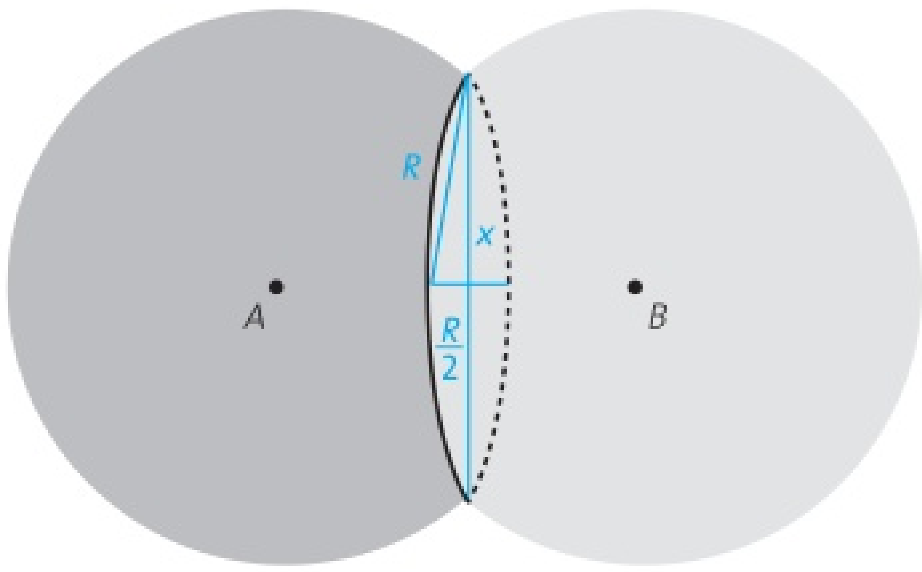
$A_{ABCD} = A_1 + A_1 + A_2 = A_{cinza}$

Logo:

$A_{cinza} = 4 \cdot 8 = 32$

Resposta: alternativa **04**.

21. (Uerj) Na fotografia ao lado, observam-se duas bolhas de sabão unidas. Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio *R*, unidas de tal modo que a distância entre seus centros *A* e *B* é igual ao raio *R*. A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

a) $\frac{\pi R^2}{2}$. b) $\frac{3\pi R^2}{2}$. c) $\frac{3\pi R^2}{4}$. d) $\frac{4\pi R^2}{3}$.

$R^2 = x^2 + \frac{R^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3R^2}{4}$

Logo:

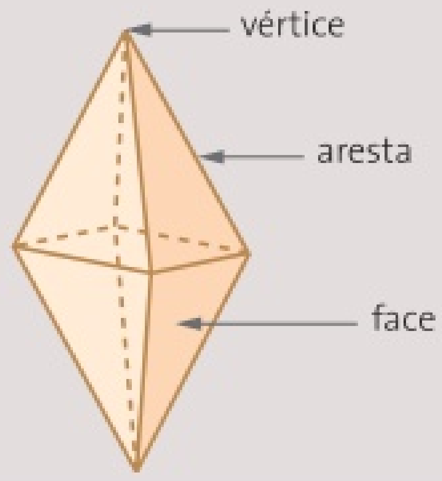
$A = x^2 \cdot \pi \Rightarrow A = \frac{3R^2}{4}\pi$

Resposta: alternativa **c**.

POLIEDROS, PRISMAS E PIRÂMIDES

Poliedros

União de um número finito n ($n \geqslant 4$) de regiões poligonais planas — as faces — e a região do espaço limitado por elas.



Elementos dos poliedros

Face (F)

Região poligonal plana.

Aresta (A)

Lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces.

Vértice (V)

Ponto comum a três ou mais arestas.

Classificação dos poliedros

Convexo

Um poliedro é convexo quando um segmento de reta que liga dois de seus pontos está sempre contido nele.

Não convexo

Um poliedro é não convexo quando um segmento que liga dois de seus pontos nem sempre está totalmente contido nele.

Relação de Euler

Relaciona o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de um poliedro convexo.

$V - A + F = 2$

Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo

$S = (V - 2) \cdot 360°$

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

- Tetraedro ($n = 3$)
- Octaedro ($n = 3$)
- Icosaedro ($n = 3$)
- Cubo ($n = 4$)
- Dodecaedro ($n = 5$)

Propriedade

Considerando um poliedro regular em que n é o número de lados de cada face e p é o número de arestas que concorrem em cada vértice, temos

$2A = nF = pV$.

Poliedros de Platão

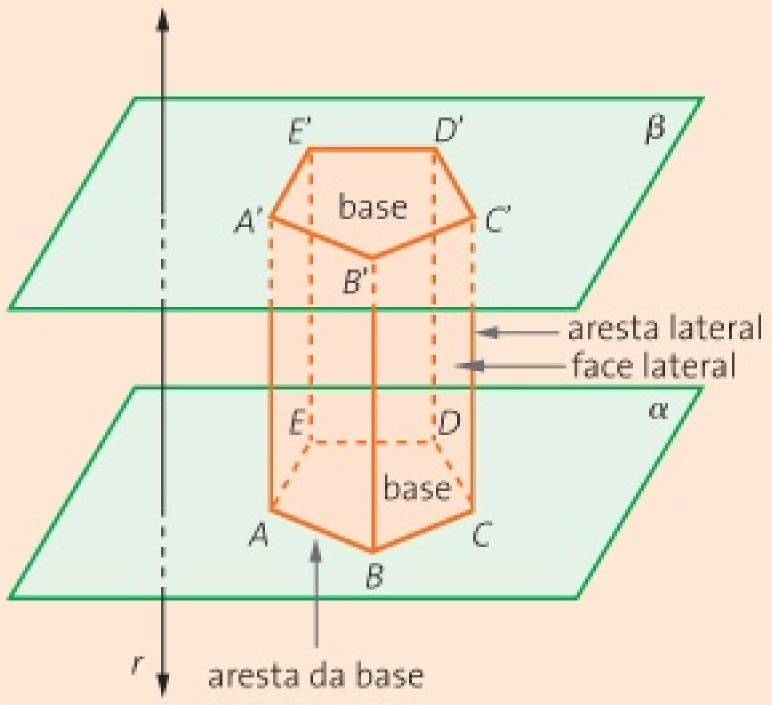
- Todas as faces têm o mesmo número de arestas.
- Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.
- Aplica-se a relação de Euler.

Classes

- Tetraedros
- Hexaedros
- Octaedros
- Dodecaedros
- Icosaedros

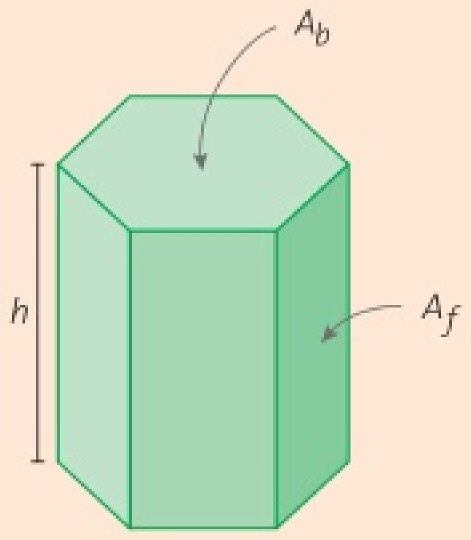
Prismas

Poliedros convexos formados por duas faces congruentes contidas em planos paralelos distintos, chamadas bases, e pelas faces laterais que são paralelogramos determinados, cada um deles, por dois lados correspondentes nas duas bases e dois lados comuns a outras duas faces laterais.



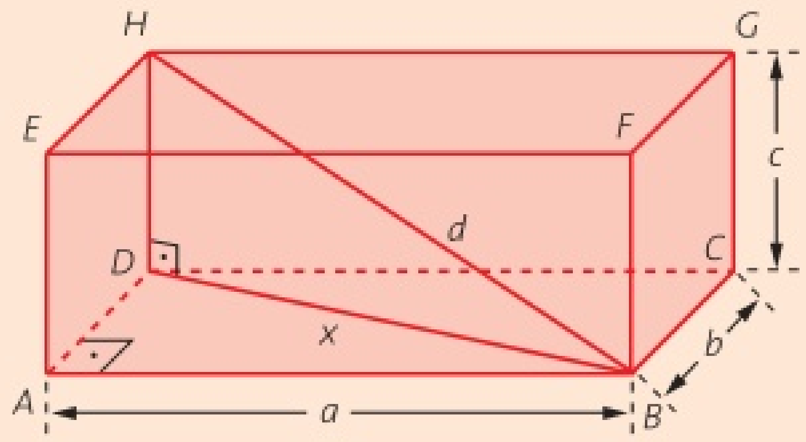
Prisma regular

Prisma reto cuja base é uma região poligonal limitada por um polígono regular.



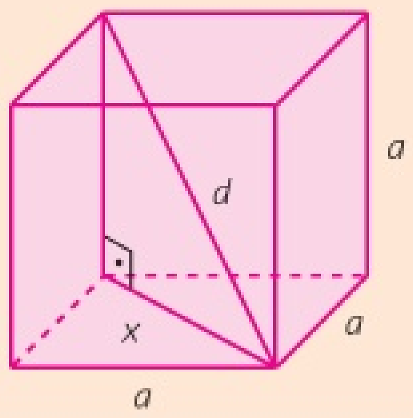
- $\boldsymbol{A_b}$: área da base (polígono de n lados)
- $\boldsymbol{A_f}$: área de uma face lateral (retângulo)
- $\boldsymbol{h}$: altura
- **área lateral**: $A_\ell = n \cdot A_f$
- **área total**: $A_t = A_\ell + 2A_b$
- **volume**: $V = A_b \cdot h$

Paralelepípedo retângulo



- **área total**: $A_t = 2(ab + ac + bc)$
- **volume**: $V = A_b h = abc$
- **diagonal**: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

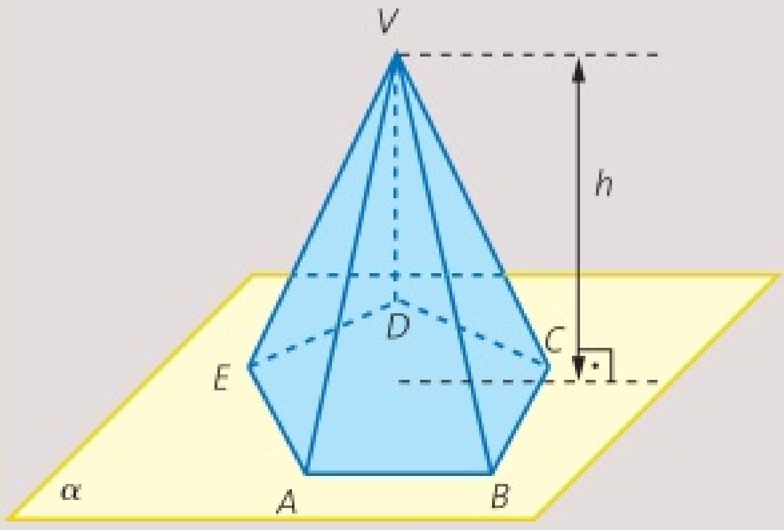
Cubo



- **área total**: $A_t = 6a^2$
- **volume**: $V = A_b h = a^3$
- **diagonal**: $d = a\sqrt{3}$

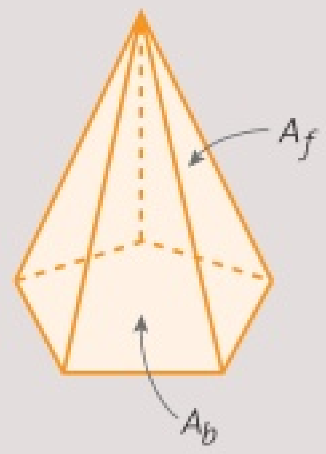
Pirâmides

Poliedros convexos formados por uma face convexa, chamada base, e por faces laterais que são triângulos determinados, cada um deles, por um lado da base e pelo vértice da pirâmide.



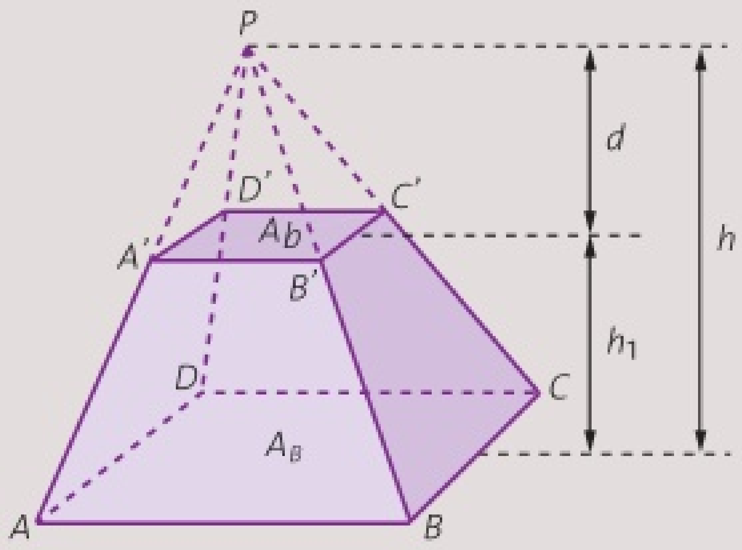
Pirâmide regular

Pirâmide reta cuja base é uma região poligonal limitada por um polígono regular.



- A_b: área da base (polígono de n lados)
- A_f: área de uma face lateral (triângulo)
- h: altura
- **área lateral**: $A_\ell = n \cdot A_f$
- **área total**: $A_t = A_\ell + A_b$
- **volume**: $V = \dfrac{1}{3} A_b h$

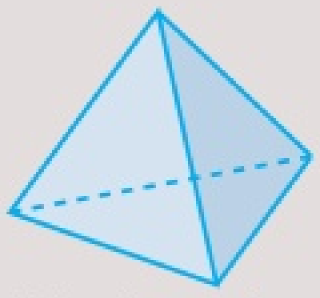
Tronco de pirâmide

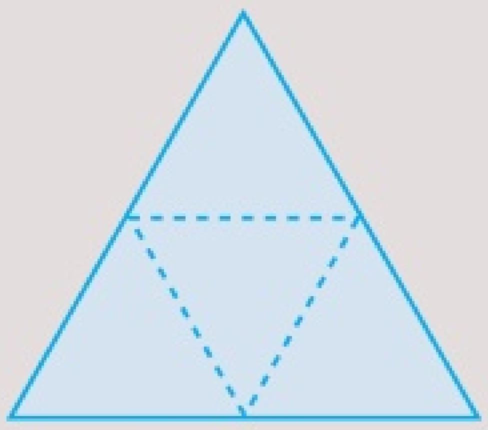


- A_B: área da base maior
- A_b: área da base menor
- h_1: volume do tronco
- **volume do tronco**: $V = \dfrac{h_1}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b\right)$

Caso particular: tetraedro regular

O tetraedro regular é uma pirâmide formada por quatro regiões triangulares congruentes e equiláteras. Nele qualquer face pode ser considerada base.


Tetraedro regular


Planificado

Exercícios

1. (UPE) Um poliedro convexo possui 8 (oito) faces, todas triangulares. Nestas condições, assumindo que tal poliedro exista, o número esperado de vértices para este será:

a) 10. b) 9. c) 8. d) 7. e) 6.

8 faces triangulares → 24 arestas
Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:
$A = \frac{24}{2} = 12$
Logo:
$V + F = A + 2 \Rightarrow V = 12 + 2 - 8 \Rightarrow V = 6$
Resposta: alternativa **e**.

2. (Unirio-RJ) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35. b) 34. c) 33. d) 32. e) 31.

$A = \frac{60 \cdot 3}{2} = 90$
Logo:
$V + F = A + 2 \Rightarrow V = 90 + 2 - 60 \Rightarrow V = 32$
Resposta: alternativa **d**.

3. (PUC-PR) O tetra-hexaedro é um sólido convexo limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. O número de arestas e vértices desse sólido é:

a) $A = 21$ e $V = 13$.
b) $A = 24$ e $V = 16$.
c) $A = 48$ e $V = 40$.
d) $A = 32$ e $V = 24$.
e) $A = 34$ e $V = 24$.

$A_t = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

$A_h = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$

Logo:
$A = 18 + 6 = 24$
Portanto:
- $F = 4 + 6 = 10$
- $V = 24 + 2 - 10 \Rightarrow V = 16$

Resposta: alternativa **b**.

4. (PUC-RS) Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices deste poliedro é:

a) 4. b) 6. c) 8. d) 9. e) 10.

$A_p = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$

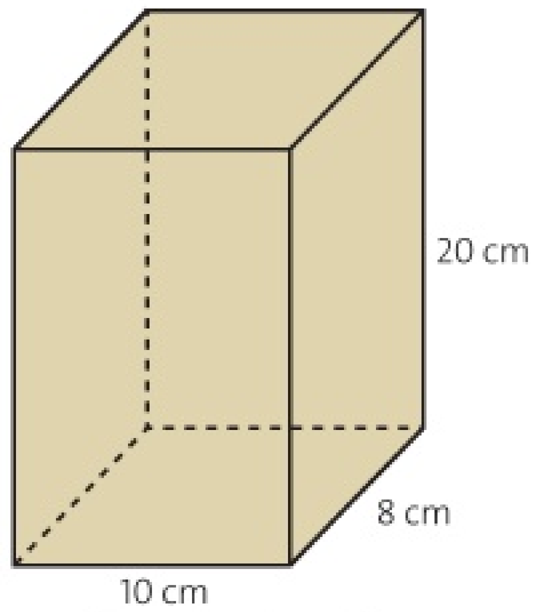
$A_q = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Logo:
$A = 10 + 5 = 15$
Portanto:
- $F = 2 + 5 = 7$
- $V = 15 + 2 - 7 \Rightarrow V = 10$

Resposta: alternativa **e**.

CE_2PMatA_09_066a077.indd 69 5/21/14 1:58 PM

5. (UEA-AM) Certa empresa fabrica xarope de açaí, acondicionado em vasilhames na forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões 8 cm, 10 cm e 20 cm (medidas internas).



(figura fora de escala)

Cada vasilhame custa para a empresa R$ 0,30. O valor exato gasto com vasilhames pela empresa para acondicionar 9 600 cm^3 do xarope é:

a) R$ 0,60. b) R$ 1,20. c) R$ 1,80. d) R$ 12,00. e) R$ 18,00.

O volume, V, da parte interna de cada vasilhame é dado, em cm^3, por:

$V = 10 \cdot 8 \cdot 20 = 1\,600$

Assim, o número x de vasilhames para acondicionar 9 600 cm^3 do xarope é dado por:

$$x = \frac{9\,600}{1\,600} = 6$$

Logo, o valor exato, em reais, gasto com vasilhames pela empresa é dado por:

$6 \cdot 0{,}30 = 1{,}80$

Resposta: alternativa **c**.

6. (Cesgranrio-RJ) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

a) 16. b) 18. c) 24. d) 30. e) 44.

$$A = \frac{6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{2} = \frac{24 + 12 + 20}{2} = 28$$

Logo:

$F = 28 + 2 - 14 \Rightarrow F = 16$

Resposta: alternativa **a**.

7. (PUCC-SP) O poliedro regular que possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces denomina-se:

a) tetraedro.
b) icosaedro.
c) hexaedro.
d) dodecaedro.
e) octaedro.

Resposta: alternativa **d**.

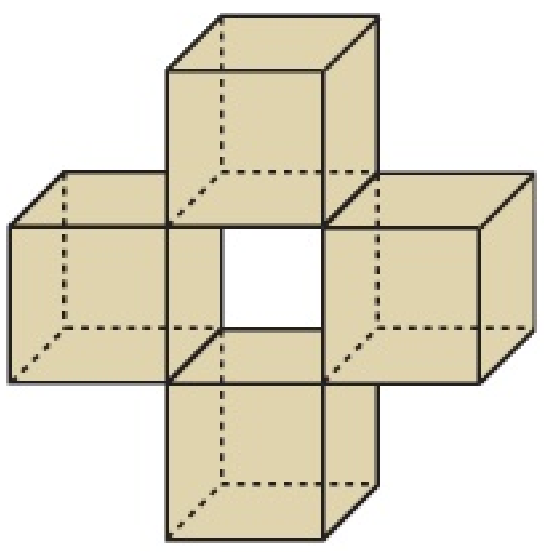
8. (IFSP) Fernando pretende abrir um aquário para visitação pública. Para tanto, pretende construí-lo com a forma de um bloco retangular com 3 m de comprimento, 1,5 m de largura e 2 m de altura. Assim sendo, o volume desse aquário será de:

a) 6,5 m^3.
b) 7,0 m^3.
c) 8,5 m^3.
d) 9,0 m^3.
e) 10 m^3.

$V = 3 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 9$

Resposta: alternativa **d**.

9. (Uerj) Considere a estrutura da figura abaixo como um poliedro de faces quadradas formadas por 4 cubos de arestas iguais, sendo V o número de vértices distintos, F o número de faces distintas e A o número de arestas distintas.



Se V, F e A são, respectivamente, os números de vértices, faces e arestas desse "poliedro", temos que $V + F$ é igual a:

a) $A - 4$.
b) $A + 4$.
c) $A - 2$.
d) $A + 2$.
e) A.

Temos:
$V = 24$
$F = 24$
$A = 44$

Então:
$V + F = A + x \Rightarrow 24 + 24 = 44 + x \Rightarrow x = 48 - 44 \Rightarrow x = 4$

Resposta: alternativa **b**.

10. (ESPM-RJ) Uma parede retangular medindo 3 m de altura por 6 m de comprimento tem uma janela que mede 2 m de comprimento e 1,5 m de altura. Essa parede será revestida com azulejos quadrados de 20 cm de lado. Desprezando-se os vãos entre um azulejo e outro e sabendo-se que cada caixa de azulejos contém 30 peças, o número mínimo de caixas que devem ser compradas é:

a) 13.
b) 10.
c) 9.
d) 15.
e) 11.

Área da parede: $30 \cdot 15 - 10 \cdot 7{,}5 = 375$

Então:

$375 : 30 = 12{,}5$

Logo, 13 caixas.

Resposta: alternativa **a**.

11. (PUC-MG) Um dos quartos de certa residência tem 4 m de comprimento por 3 m de largura e suas paredes têm 3 m de altura. Para se acarpetar o piso, a mão de obra é R$ 300,00 e o material sai por R$ 32,00 o metro quadrado; a pintura do teto e das paredes, contando-se o material necessário e a mão de obra, sai por R$ 8,00 cada metro quadrado. Nessas condições, para se acarpetar o piso e se pintar as paredes e o teto desse quarto, serão necessários:

a) R$ 684,00.
b) R$ 868,00.
c) R$ 1 116,00.
d) R$ 1 210,00.

Piso: $300 + 3 \cdot 4 \cdot 32 = 684$

Então:

$684 + 432 = 1\,116$

Resposta: alternativa **c**.

12. (UFGD-MS) Uma piscina de ladrilhos quadrados tem 6 ladrilhos de profundidade, 16 ladrilhos de largura e 30 ladrilhos de comprimento. Um conjunto de 16 ladrilhos justapostos tem área igual a 1 m². Cada 1 000 litros de água custa R$ 2,36; então, o custo para encher a piscina será de:

a) R$ 206,80.
b) R$ 106,80.
c) R$ 106,20.
d) R$ 104,20.
e) R$ 108,80.

Se 16 ladrilhos = 1 m², então 1 ladrilho = $\frac{1}{6}$ m².

Logo:

$x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ m

Portanto, as dimensões da piscina são:

- $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ m
- $\frac{16}{4} = 4$ m
- $\frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ m

Assim:

$V = \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 4 = 45 \text{ m}^3 = 45\,000 \text{ L}$

Então, o custo para encher a piscina é de:

$45 \cdot 2{,}36 = 106{,}20$

Resposta: alternativa **c**.

13. (IFMG) Uma barra de doce tem forma de um paralelepípedo reto retângulo cuja área total é 208 cm^2. Sabendo-se que suas dimensões são proporcionais aos números 2, 3 e 4, então, o volume da barra, em dm^3 é:

a) 192. b) 19,2. c) 1,92. d) 0,192.

Dimensões: $2x$, $3x$, $4x$.

Então:

$A_t = 2(ab + bc + ac) \Rightarrow 208 = 2(2x \cdot 3x + 3x \cdot 4x + 2x \cdot 4x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 208 = 2(6x^2 + 12x^2 + 8x^2) \Rightarrow 104 = 26x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

Logo, as dimensões são 4 cm, 6 cm e 8 cm.

Portanto:

$V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 \text{ cm}^2 = 0{,}192 \text{ dm}^2$

Resposta: alternativa **d**.

14. (UEPB) Um recipiente cúbico medindo 1 m de lado está totalmente cheio de água. Se no seu interior são lançados 200 cubinhos de aço medindo 4 cm de lado, a quantidade de água, em litros, transbordante, causada pela imersão dos cubinhos é:

a) 12,6 litros.
b) 12,5 litros.
c) 12,8 litros.
d) 13 litros.
e) 12,4 litros.

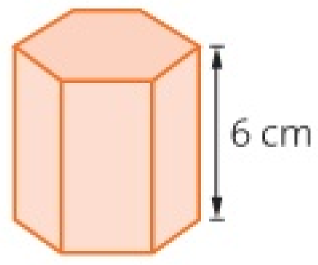
$V_{cubinho} = 4^3 = 64 \text{ cm}^3 = 0{,}064 \text{ L}$

Logo:

$V_{total} = 0{,}064 \cdot 200 = 12{,}8 \text{ L}$

Resposta: alternativa **c**.

15. (UEPB) Se um prisma hexagonal regular de altura 6 cm possui volume igual a $1\,728\sqrt{3}$ cm^3, é verdadeiro afirmar que:



a) a área lateral é igual à metade da área da base.
b) a área lateral é igual à área da base.
c) a área lateral é igual ao dobro da área da base.
d) a área lateral é igual ao quádruplo da área da base.
e) a área lateral é igual ao triplo da área da base.

$V = A_b \cdot h \Rightarrow 1\,728\sqrt{3} = A_b \cdot 6 \Rightarrow A_b = 288\sqrt{3}$

Então:

$\dfrac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = 288\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = 192 \Rightarrow \ell = 8\sqrt{3}$

Logo:

$A_\ell = 6 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 288\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **b**.

16. (IFSP) Em uma gráfica, há uma pilha de papel no formato A4 com 1 m. O papel A4 tem a forma retangular com 21 cm de largura por 30 cm de comprimento. Assim sendo, o volume ocupado pela pilha de papel é de:

a) 630 cm^3.
b) 51 cm^3.
c) 151 cm^3.
d) 51 000 cm^3.
e) 63 000 cm^3.

$V = 21 \cdot 30 \cdot 100 = 63\,000 \text{ cm}^3$

Resposta: alternativa **e**.

17. (Unisc-RS) Uma barra de chocolate, na forma de paralelepípedo retângulo, de dimensões 60 cm, 40 cm e 5 cm, é derretida para fazer chocolate com crocante. Para isso, ao chocolate derretido é acrescentado 25% do seu volume em castanhas, nozes e açúcar caramelizado. Com essa mistura, quantas barrinhas na forma de prismas hexagonais, de aresta da base medindo 2 cm e altura 10 cm, podem ser feitas aproximadamente?
(Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

a) 144
b) 115
c) 114
d) 867
e) 864

$V_{total} = (60 \cdot 40 \cdot 5) \cdot 1{,}25 = 15\,000$

$V_{prisma\ hex.} = \dfrac{6 \cdot 2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = 60\sqrt{3} = 60 \cdot 1{,}73 = 103{,}8$

$M = \dfrac{V_{total}}{V_{prisma}} = \dfrac{15\,000}{103{,}8} \simeq 144$

Resposta: alternativa **a**.

18. (Fuvest-SP) Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é:

a) $2\sqrt{3}$.
b) 4.
c) $3\sqrt{2}$.
d) $3\sqrt{3}$.
e) 6.

Como a aresta do tetraedro é igual à diagonal da face, então:
$a = 1 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Mas a área de uma face do tetraedro é igual à área de uma face do triângulo equilátero de lado $2\sqrt{2}$.

Então:

$A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **a**.

19. (IFPE) Lúcia pediu a seu pai, o Sr. Paulo, para montar um aquário em seu quarto. Os dois foram a uma loja especializada e compraram os equipamentos necessários. As dimensões do aquário eram: 1,2 m de largura, 0,6 m de comprimento e 0,65 m de altura. Depois que o aquário estava com água, o Sr. Paulo percebeu que tinha esquecido de colocar um castelo de pedra para enfeite. Com cuidado, ele colocou o castelo dentro do aquário e percebeu que o nível da água subiu 15 cm. Lembrando-se de suas aulas de Matemática, ele resolveu calcular o volume do castelo. Depois de efetuados os cálculos, ele percebeu que o volume do castelo era, em dm^3:

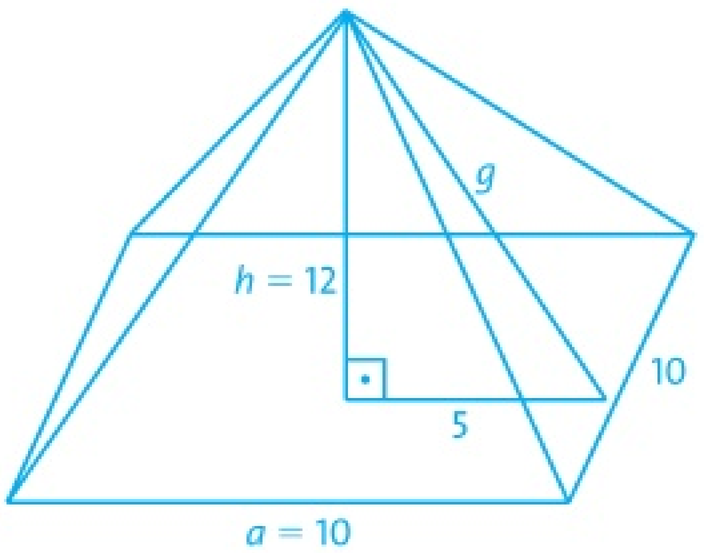
a) 1,08.
b) 10,8.
c) 108.
d) 1 080.
e) 10 800.

$V = 1{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}108\ m^3 = 108\ dm^3$

Resposta: alternativa **c**.

20. (Unifor-CE) Uma pirâmide regular de altura 12 cm tem como base um quadrado de lado 10 cm. Sua área lateral, em centímetros quadrados, é:

a) 360.
b) 260.
c) 180.
d) 100.
e) 65.



$g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 25 + 144 \Rightarrow g = 13\ cm$

Logo:

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{a \cdot g}{2} \Rightarrow A_\ell = \dfrac{4 \cdot 10 \cdot 13}{2} \Rightarrow A_\ell = 260\ cm^2$

Resposta: alternativa **b**.

21. (Udesc) O volume de uma pirâmide reta, cuja base é a face de um cubo de aresta 12 cm, é igual a um nono do volume desse cubo. A altura dessa pirâmide é:

a) 8 cm. c) 5 cm. e) 12 cm.
b) 3 cm. d) 4 cm.

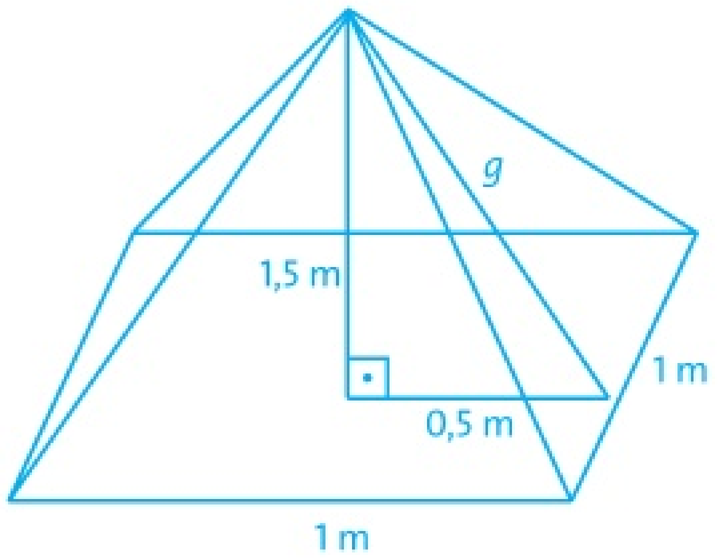
$V_p = \frac{1}{9} V_c \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{9} V_c \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot h = \frac{1}{9} \cdot 12^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{12}{9} \Rightarrow h = 4$ cm

Resposta: alternativa **d**.

22. (UPM-SP) Uma barraca de lona tem forma de uma pirâmide regular de base quadrada com 1 metro de lado e altura igual a 1,5 metro. Das alternativas abaixo, a que indica a menor quantidade suficiente de lona, em m^2, para forrar os quatro lados da barraca é:

a) 2. b) 2,5. c) 4,5. d) 3,5. e) 4.



$g^2 = 0{,}5^2 + 1{,}5^2 \Rightarrow g^2 = 0{,}25 + 2{,}25 \Rightarrow g^2 = 2{,}5 \Rightarrow g = 1{,}58$

Logo:

$A_\ell = 4 \cdot \frac{a \cdot g}{2} = 2ag = 2g \Rightarrow A_\ell \simeq 3{,}16$ m^2

Resposta: alternativa **d**.

23. (FGV-SP) Uma pirâmide cuja base é um quadrado de diagonal igual a $2\alpha\sqrt{2}$ cm tem o mesmo volume de um prisma cuja base é um quadrado de lado α cm. A razão entre as alturas do prisma e da pirâmide é:

a) $\frac{4}{3}$. c) $\frac{1}{3}$. e) 4α.
b) $\frac{3}{2}$. d) $\frac{3}{\alpha}$.

Temos:

$d = 2\alpha\sqrt{2}$

$a_{\text{pirâmide}} = 2\alpha$

$a_{\text{prisma}} = \alpha$

Então:

$\frac{1}{3} \cdot 4\alpha^2 \cdot h_{\text{pirâmide}} = \alpha^2 \cdot h_{\text{prisma}} \Rightarrow \frac{h_{\text{prisma}}}{h_{\text{pirâmide}}} = \frac{4}{3}$

Resposta: alternativa **a**.

24. (FEI-SP) A base de uma pirâmide é um quadrado com 24 cm de perímetro. Sabe-se que a razão entre a medida da altura da pirâmide e a medida da aresta da base é igual a $\frac{2}{3}$. Nestas condições, o volume desta pirâmide é de:

a) 96 cm^3. c) 144 cm^3. e) 36 cm^3.
b) 48 cm^3. d) 28 cm^3.

Como $a = 6$ cm, vem:

$h = \frac{2}{3} \cdot 6 \Rightarrow h = 4$ cm

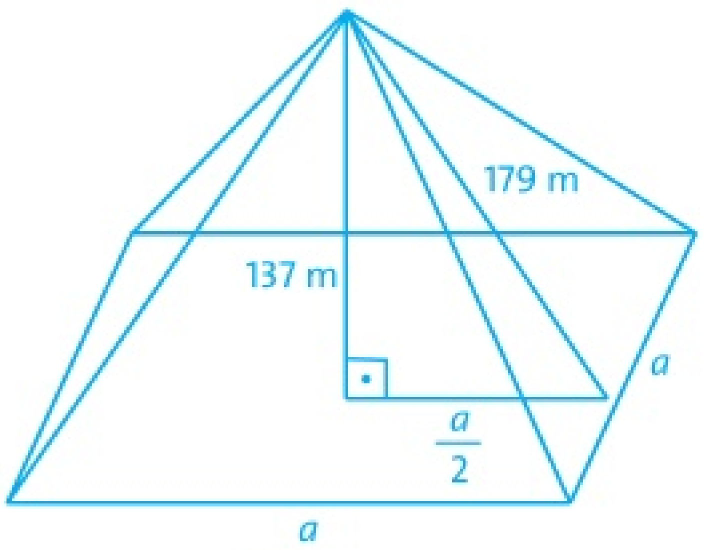
Logo:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow V = 48$ cm^3

Resposta: alternativa **b**.

25. (UFF-RJ) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em m^2, é:

a) 13 272.
b) 26 544.
c) 39 816.
d) 53 088.
e) 79 432.



$179^2 = 137^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 53\,088$

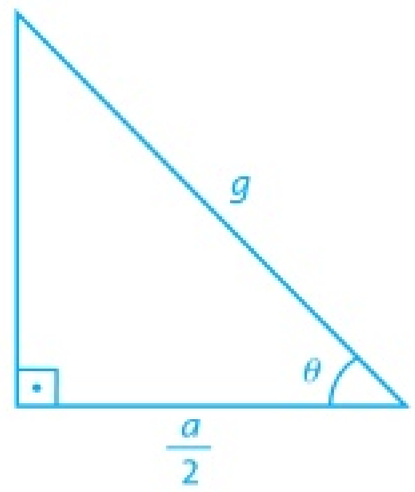
Logo:

$A_b = a^2 \Rightarrow A_b = 53\,088$

Resposta: alternativa **d**.

26. (Insper-SP) Em uma pirâmide quadrangular regular, a área lateral é o dobro da área da base. Nesse caso, cada face lateral forma com o plano da base um ângulo que mede:

a) 15°.
b) 30°.
c) 45°.
d) 60°.
e) 75°.



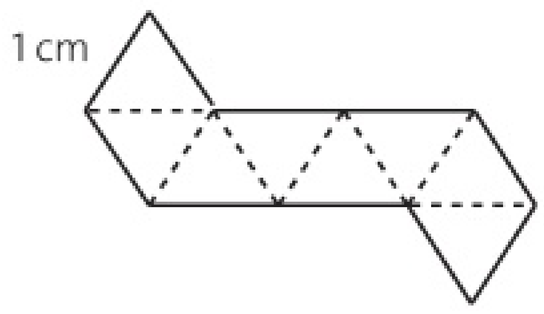
$A_\ell = 2 \cdot A_b \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{a \cdot g}{2} = 2a^2 \Rightarrow a = g$

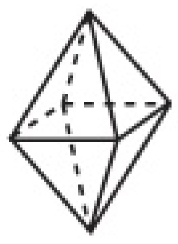
Logo:

$\cos\theta = \frac{\frac{a}{2}}{g} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

Resposta: alternativa **d**.

27. (Ufla-MG) Dobrando a figura plana nas linhas tracejadas, é possível construir um octaedro regular de volume igual a:



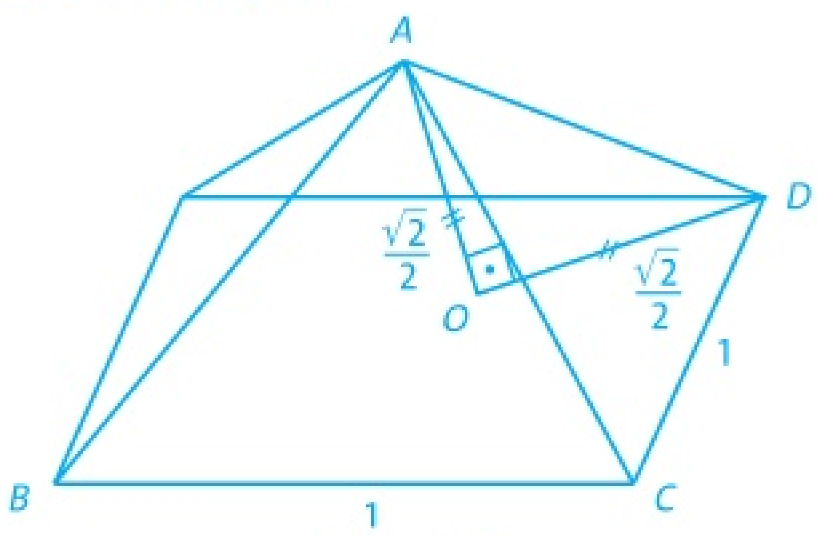


a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm³.
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm³.
c) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ cm³.
d) $\sqrt{3}$ cm³.
e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³.

No octaedro regular, o centro equidista dos 6 vértices. Então:

$OA = OB = OC = OD = ... = \frac{BD}{2}$

Octaedro $= 2V_{\text{pirâmide}}$



$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$V_{\text{octaedro}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Resposta: alternativa **a**.

28. (UFRN) Nas faces de um cubo de aresta L, são coladas pirâmides de altura também L e bases iguais às faces do cubo. O volume do sólido obtido é:

a) $6L^3$. b) $5L^3$. c) $4L^3$. d) $3L^3$.

$V_{total} = V_{cubo} + 6V_{pirâmide} \Rightarrow V_{total} = L^3 + 6\left(L^2 \cdot L \cdot \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{total} = L^3 + 2L^3 \Rightarrow V_{total} = 3L^3$

Resposta: alternativa **d.**

29. (UFSC) Em uma pirâmide quadrangular regular a aresta lateral mede 5 cm e a altura mede 4 cm. O volume, em cm^3, é:

Temos:

$\ell = 5$ cm

$h = 4$ cm

Então:

$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{d^2}{4} + 16 = 25 \Rightarrow d^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow d = 6$ cm

Mas:

$36 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 \Rightarrow V = 24\ cm^3$

Resposta: 24 cm^3.

30. (UEG-GO) Uma barraca de lona, em forma de pirâmide de base quadrada, tem as seguintes medidas: base com 3 metros de lado e laterais triângulos com 2,5 m de altura. A lona utilizada na construção da barraca, nas laterais e na base, perfaz um total de:

a) 9 m^2. b) 15 m^2. c) 20,5 m^2. d) 24 m^2. e) 39 m^2.

Temos:

$a = 3$ m

$g = 2{,}5$ m

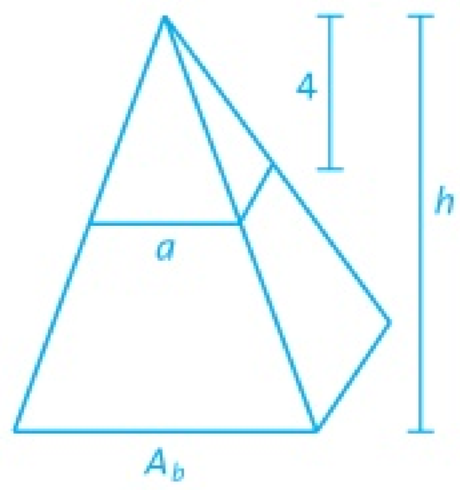
Logo:

$A_{total} = A_B \cdot 4A_{triângulo} \Rightarrow A_{total} = 9 + 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 5}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{total} = 9 + 2 \cdot 7{,}5 \Rightarrow A_{total} = 24\ m^2$

Resposta: alternativa **d.**

31. (UFSC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m^2 de área. A 4 m do vértice traça-se um plano paralelo à base e a seção assim feita tem 64 m^2 de área. Qual a altura da pirâmide?



Se $A_b = 144\ m^2$, então $a_b = 12$ m.

Como $A_{seção} = 64\ m^2$, então $a = 8$ m.

Logo:

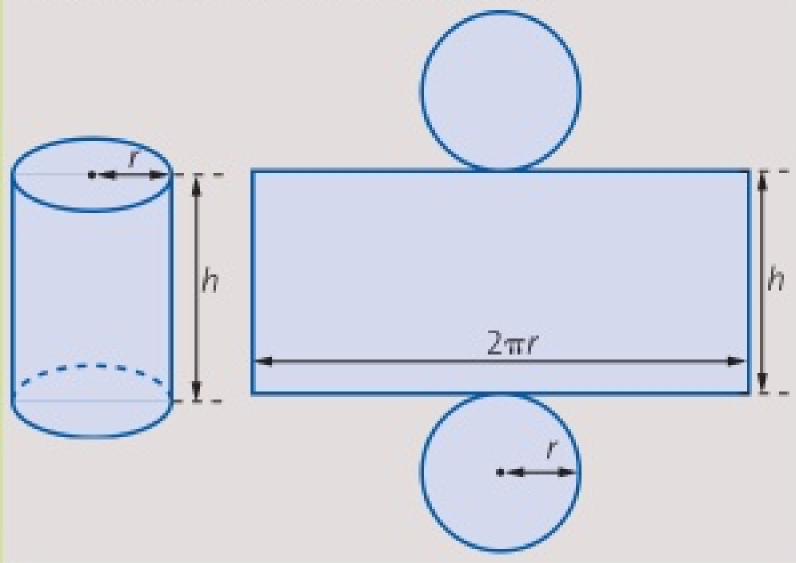
$\frac{4}{h} = \frac{8}{12} \Rightarrow h = 6$ m

Resposta: 6 m.

CORPOS REDONDOS

Cilindro

A superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte não plana, "arredondada", que é sua superfície lateral.



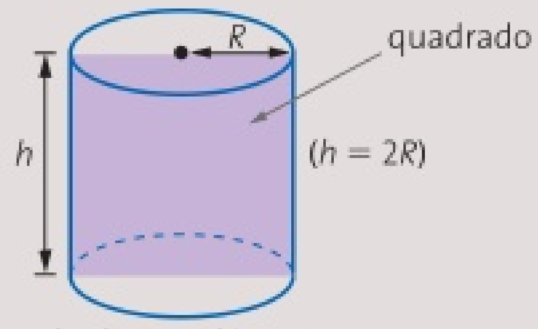
Área da superfície de um cilindro reto

- **área lateral**: $A_\ell = 2\pi rh$
- **área de uma base**: $A_b = \pi r^2$
- **área total**: $A_t = A_\ell + 2A_b = 2\pi r(h + r)$

Volume do cilindro

$V = A_b h = \pi r^2 h$

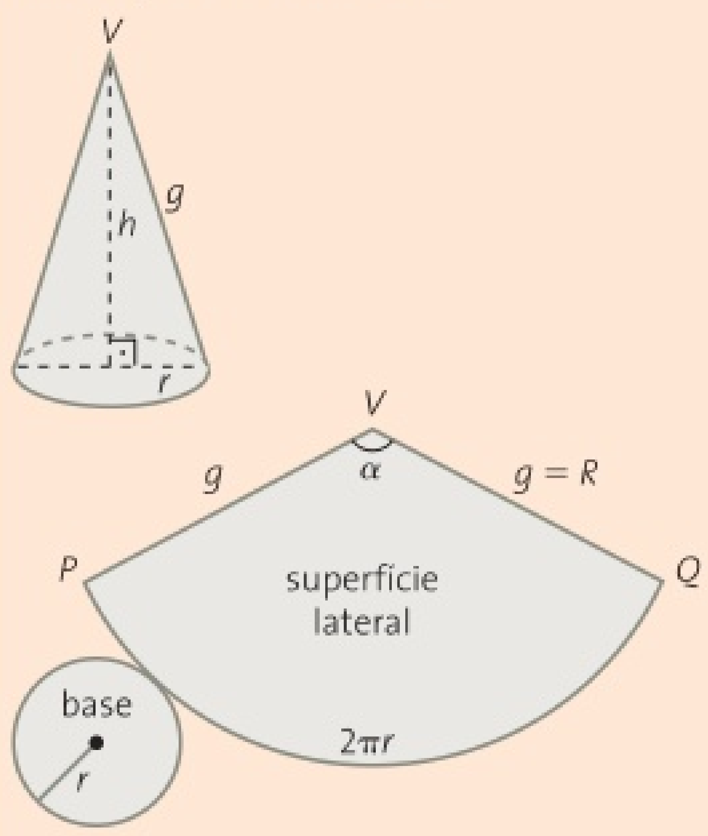
Cilindro equilátero



Cilindro equilátero

Cone

A superfície do cone é formada por uma parte plana, a região circular, que é sua base, e uma parte não plana, "curva", "arredondada", que é sua superfície lateral.



Cálculo da medida da geratriz

$g^2 = h^2 + r^2$

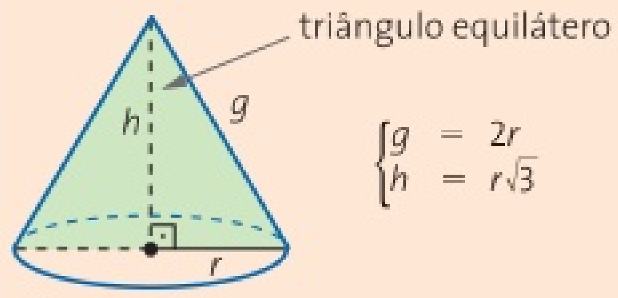
Área da superfície de um cone reto

- **área lateral**: $A_\ell = \pi rg$
- **área da base**: $A_b = \pi r^2$
- **área total**: $A_t = A_\ell + A_b = \pi r(g + r)$

Volume do cone

$$V = \frac{1}{3} A_b h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Cone equilátero

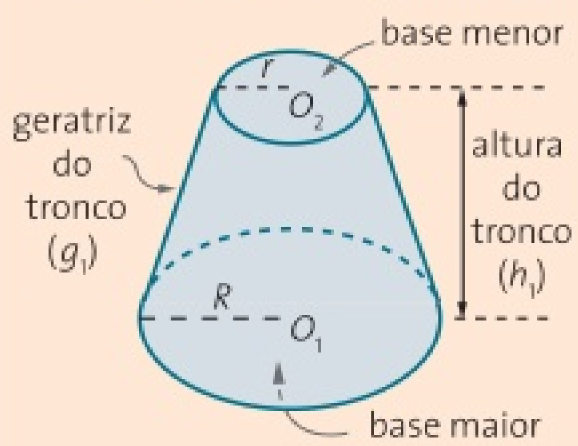


$\begin{cases} g = 2r \\ h = r\sqrt{3} \end{cases}$

Cone equilátero

$g = 2r$

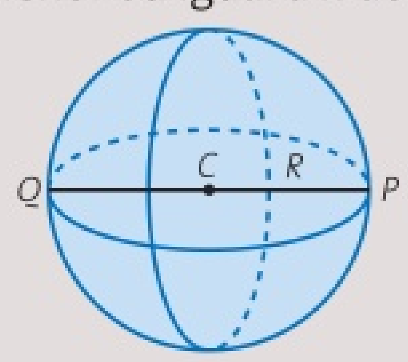
Tronco de cone reto



- **área lateral**: $A_\ell = \pi g_1(R + r)$
- **volume**: $V = \dfrac{\pi h_1}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

Esfera

A esfera de centro C e raio R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto C.



C: centro da esfera
$\overline{CP}$: raio da esfera
$\overline{PQ}$: diâmetro da esfera
R: medida do raio da esfera

Área da superfície esférica

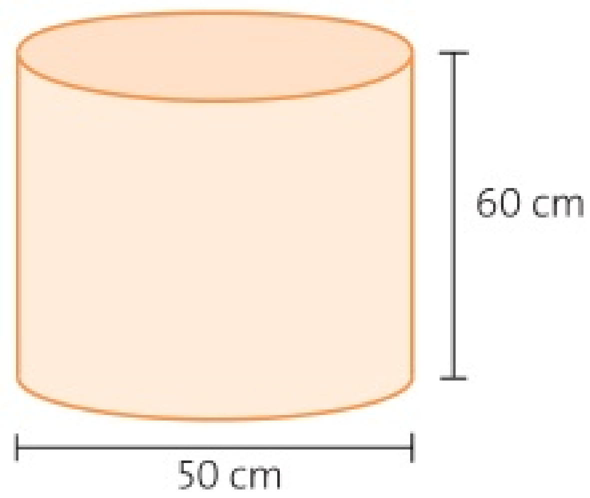
$A = 4\pi R^2$

Volume da esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercícios

1. (IFSC) A lata abaixo deverá ser produzida a partir de uma chapa de metal que possui 0,8 g por centímetro quadrado de área.



Sabendo que essa lata não possui tampa, é correto afirmar que a massa de cada lata desse tipo será de:

a) $2\,900\pi$ g. b) $5\,250\pi$ g. c) $10\,400\pi$ g. d) $13\,000\pi$ g. e) $8\,240\pi$ g.

- Cálculo da área da superfície externa da lata:
  $A = \pi \cdot 252 + 2\pi \cdot 25 \cdot 60 = 625\pi + 3\,000\pi = 3\,625\pi \text{ cm}^2$
- Cálculo da massa da lata:
  $0{,}8 \cdot 3\,625 \cdot \pi = 2\,900\pi$ g

Resposta: alternativa **a**.

2. (UCS-RS) A água colhida por um pluviômetro cilíndrico de 40 cm de diâmetro, durante uma chuva torrencial, é depois colocada em um recipiente também cilíndrico, cuja circunferência da base mede 24π cm. Qual é a altura que a água havia alcançado no pluviômetro, se no recipiente ela alcançou 200 mm de altura?

a) 1,2 cm b) 12 cm c) 3,6 cm d) 7,2 cm e) 72 cm

Seja r o raio da base do recipiente.
Se a circunferência da base do recipiente mede 24π cm, então:
$24\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 12$ cm
Logo, o volume de água transferido para o recipiente é dado por $\pi \cdot 12^2 \cdot 20 \text{ cm}^3$.
Por outro lado, como o diâmetro da base do pluviômetro mede 40 cm, temos que o raio da sua base mede $\frac{40}{2} = 20$ cm.
Portanto, se h é a altura que a água atingiu no pluviômetro, então:
$\pi \cdot 20^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot 20 \Rightarrow h = \frac{144}{20} = 7{,}2$ cm

Resposta: alternativa **d**.

3. (Uece) A superfície lateral de um cone circular reto, quando planificada, torna-se um setor circular de 12 cm de raio com um ângulo central de 120 graus. A medida, em centímetros quadrados, da área da base deste cone é:

a) 144π. b) 72π. c) 36π. d) 16π.

$2\pi \cdot r = \frac{2\pi \cdot 12}{3} \Rightarrow r = 4$

Então:

$A = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow A = 16\pi\ cm^2$

Resposta: alternativa **d**.

4. (IFSC) Dado um copo em forma de cilindro e outro de forma cônica, de mesma base e altura. Se eu encher completamente o copo cônico com água e derramar toda essa água no copo cilíndrico, quantas vezes terei que fazê-lo para encher completamente esse copo?

a) Apenas uma vez.
b) Duas vezes.
c) Três vezes.
d) Uma vez e meia.
e) É impossível saber, pois não se sabe o volume de cada sólido.

$\frac{V_{cilindro}}{V_{cone}} = \frac{A_b \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h} = 3$

Resposta: alternativa **c**.

5. (UEG-GO) Uma coluna de sustentação de determinada ponte é um cilindro circular reto. Sabendo-se que na maquete que representa essa ponte, construída na escala 1 : 100, a base da coluna possui 2 cm de diâmetro e 9 cm de altura, o volume, em m^3 de concreto utilizado na coluna, é:
(Use $\pi = 3{,}14$.)

a) 2,826. b) 28,26. c) 282,6. d) 2 826.

O volume da coluna na maquete é dado por:

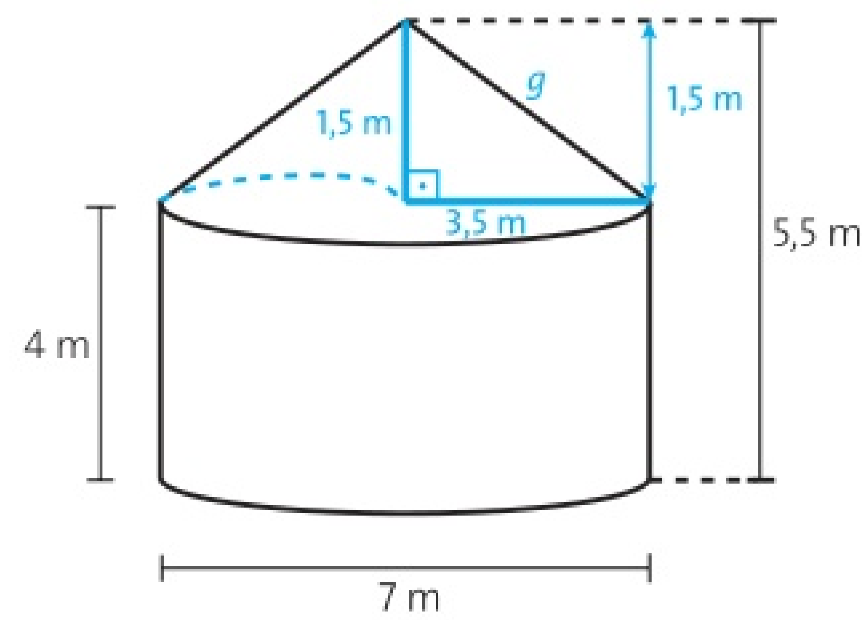
$\pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 9 \simeq 3{,}14 \cdot 1 \cdot 9 = 28{,}26\ cm^3 = 28{,}26 \cdot 10^{-6}\ m^3$

Como a escala da maquete é de 1 : 100, temos que o volume pedido é dado por:

$\frac{28{,}26 \cdot 10^{-6}}{V} = \left(\frac{1}{100}\right)^3 \Rightarrow V = 28{,}26\ cm^3$

Resposta: alternativa **b**.

6. (Unimontes-MG) A figura abaixo representa um galpão de base circular e suas medidas estão nela representadas.



Quantos metros quadrados de telhado, aproximadamente, foram gastos para cobrir esse galpão?

a) 42,5 m^2 b) 41 m^2 c) 42 m^2 d) 41,5 m^2

$g^2 = 1{,}5^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow g = \frac{\sqrt{58}}{2} \simeq 3{,}8$

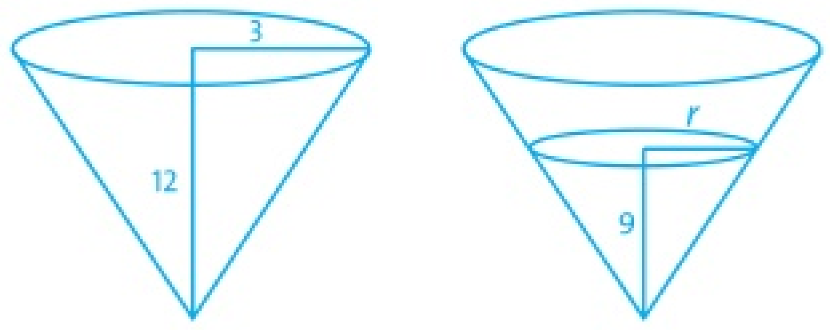
$A_l = \pi g r = 3{,}14 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}8 \simeq 41{,}8$

Resposta: alternativa **c**.

7. (UFCG-PB) Um funil de laboratório, cujo interior está coberto por um filtro de papel, tem o formato de um cone circular reto com 12 cm de altura e 9π cm^2 de área da base. Colocou-se nesse funil uma mistura química a ser filtrada, enchendo-o até a altura de 9 cm. O volume dessa mistura, em cm^3, é de:

a) 24π.
b) 16π.
c) $\dfrac{\pi}{16}$.
d) $\dfrac{243}{16}$.
e) $\dfrac{243\pi}{16}$.

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow 9\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 3$



$\dfrac{r}{3} = \dfrac{9}{12} \Rightarrow r = \dfrac{27}{12} = \dfrac{9}{4}$

Logo:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 \cdot 9 = \dfrac{243\pi}{16}$

Resposta: alternativa **e**.

8. (Ufam) Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Então, o volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido é:
(Use $\pi = 3{,}14$.)

a) 24 000.
b) 12 000.
c) 37 860.
d) 14 000.
e) 37 680.

$d = 6 \text{ m} \Rightarrow r = 3 \text{ m}$

Logo:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}68 \text{ m}^2 \Rightarrow V = 37\,680 \text{ L}$

Resposta: alternativa **e**.

9. (UFRRJ) Na famosa cidade de Sucupira, foi eleito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo". O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:
Obs.: Considere $\pi = 3{,}14$.

a) menor que 50 mil reais.
b) entre 50 e 200 mil reais.
c) entre 200 e 300 mil reais.
d) entre 300 e 400 mil reais.
e) acima de 400 mil reais.

Temos:

$R = 5$ m

Preço: 260,00 reais/m^3

$V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125 \Rightarrow V \simeq 523 \text{ m}^3$

Mas:

$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ m}^2 \text{ —— } 260 \\ 523 \text{ —— } x \end{array}\right. \Rightarrow x = 135\,980 \text{ reais}$

Logo, houve um superfaturamento de 364 020 reais.

Resposta: alternativa **d**.

10. (FGV-SP) Um reservatório tem a forma de uma esfera. Se aumentarmos o raio da esfera em 20%, o volume do novo reservatório, em relação ao volume inicial, aumentará:

a) 60%.
b) 63,2%.
c) 66,4%.
d) 69,6%.
e) 72,8%.

Temos:

$V_i = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$R = r + 0{,}2r \Rightarrow R = 1{,}2r$

Então:

$V_f = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}2r)^3 \Rightarrow V_f = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}2728r^3 \Rightarrow V_f = V_i \cdot 1{,}2728r^3$

Portanto, $\Delta V = 0{,}728$. Então, houve um aumento de 72,8%.

Resposta: alternativa **e**.

11. (UEG-GO) Um fabricante de bolas deseja adquirir uma caixa de forma cúbica para acondicionar uma bola de volume V_b. A razão entre os volumes dessa bola e do menor cubo possível para acondicioná-la é:

a) $\frac{\pi}{4}$.
b) $\frac{\pi}{5}$.
c) $\frac{\pi}{3}$.
d) $\frac{\pi}{6}$.

$V_c = a^3 = (2R)^3 = 8R^3$

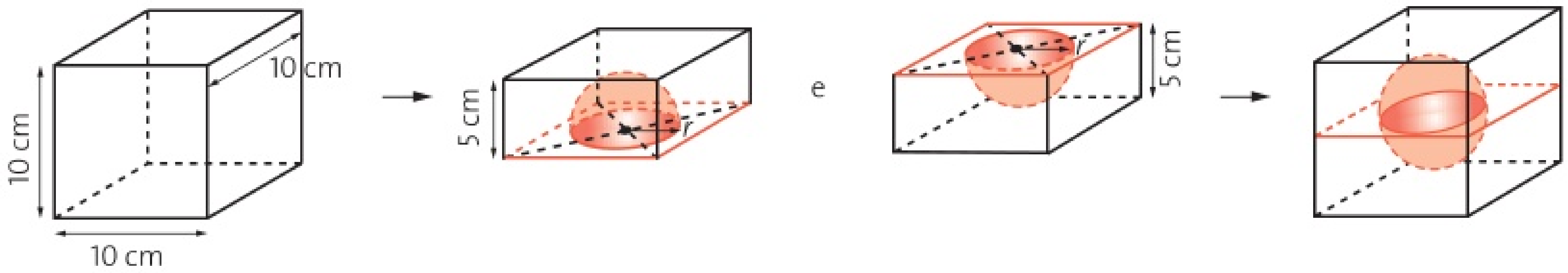
$V_b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Logo:

$\frac{V_b}{V_c} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{8R^3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \frac{1}{8R^3} = \frac{\pi}{6}$

Resposta: alternativa **d**.

12. (Vunesp-SP) Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.



Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm^3 e admitindo $\pi \simeq 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é:

a) 636.
b) 634.
c) 630.
d) 632.
e) 638.

• Volume do porta-joias:

$V = 10^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = 1\,000 - 256 \Rightarrow V = 744 \text{ cm}^3$

• Massa $= 0{,}85 \cdot 744 = 632$

Resposta: alternativa **d**.

13. (UFRN) A figura 1 ao lado representa o Globo Terrestre. Na figura 2, temos um arco AB sobre um meridiano e um arco BC sobre um paralelo, em que AB e BC têm o mesmo comprimento. O comprimento de AB equivale a um oitavo $\left(\frac{1}{8}\right)$ do comprimento do meridiano.

Sabendo que o raio do paralelo mede a metade do raio da Terra e assumindo que a Terra é uma esfera, pode-se afirmar que o comprimento do arco BC equivale a:

Figura 1

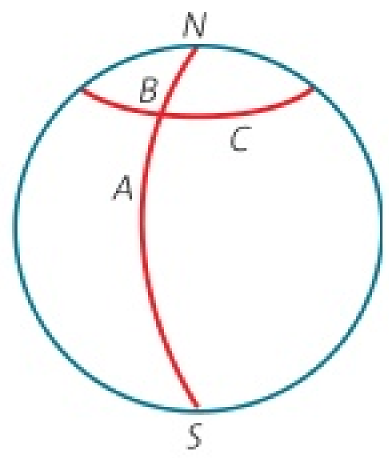


Figura 2

a) metade do comprimento do paralelo.
b) um quarto do comprimento do paralelo.
c) um terço do comprimento do paralelo.
d) um oitavo do comprimento do paralelo.

Um meridiano equivale à metade da circunferência terrestre. Assim, sendo R o raio da Terra, temos:

$$AB = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{8}$$

Se o raio do paralelo é $\frac{R}{2}$, então o comprimento do paralelo é:

$$2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi R$$

Assim:

$$BC = AB = \frac{\pi R}{8}$$

Resposta: alternativa **d**.

14. (Ufal) A cúpula de uma catedral tem a forma de uma semiesfera (sem incluir o círculo da base) com diâmetro medindo 50 m. O exterior da cúpula será restaurado ao custo de R$ 800,00 por metro quadrado. Quanto custará a restauração? Dado: use a aproximação $\pi \simeq 3{,}14$.

a) 3,14 milhões de reais
b) 6,28 milhões de reais
c) 7,28 milhões de reais
d) 8,14 milhões de reais
e) 262 milhões de reais

Temos:
Preço: 800 reais/m^2
$R = 25$ cm
Logo:

$$\frac{A}{2} = \frac{4\pi R^2}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 3\,925 \text{ m}^2$$

$$\begin{array}{lcl} 800 & \text{——} & 1 \\ x & \text{——} & 3\,925 \end{array} \Rightarrow x = 3{,}14 \text{ milhões de reais}$$

Resposta: alternativa **a**.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Princípio fundamental da contagem

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Observação

O produto do número de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

Fatorial

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 1$

Observações

- n é inteiro positivo
- $0! = 1$
- $1! = 1$

Permutação simples

$P_n = n!$

Permutação com repetição

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

Arranjos simples

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinações simples

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Propriedade

$C_{n,p} = C_{n,n-p}$

Números binomiais

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ para } n \geqslant p, n \in \mathbb{N}$$

Propriedades

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Triângulo de Pascal

$$\binom{0}{0} \qquad = 1$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1} \qquad = 1\ 1$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \qquad = 1\ 2\ 1$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \qquad = 1\ 3\ 3\ 1$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \qquad = 1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3} \ \dots \ \binom{n}{n} = 1 \quad \dots \quad n$$

Propriedades

- $\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = n \end{cases}$
- Relação de Stifel: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

Binômio de Newton

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

Termo geral de $(x + y)^n$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

CE_2PMatA_11_084a095.indd 85 5/21/14 2:00 PM

Exercícios

1. (Ufpel-RS) Com o objetivo de manter a democracia e preservar a autonomia escolar, a Secretaria Municipal de Educação de um município realizou eleição para compor as equipes diretivas das escolas. Essas equipes devem ser compostas por um diretor, um vice-diretor e um coordenador. Considerando que, numa determinada escola, um grupo composto por 10 pessoas resolveu participar desse processo e que qualquer uma delas pode ocupar qualquer cargo, é correto afirmar que o número de equipes que se pode formar com esse grupo é:

   a) 210. b) 720. c) 30. d) 140. e) 120.

   $\underset{10}{\underset{\uparrow}{\underline{D}}}\ \underset{9}{\underset{\uparrow}{\underline{VD}}}\ \underset{8}{\underset{\uparrow}{\underline{C}}}$

   Total: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ equipes

   Resposta: alternativa **b**.

2. (PUC-RJ) Rebeca tem uma blusa de cada uma das seguintes cores: branco, vermelho, amarelo, verde e azul. Ela tem uma saia de cada uma das seguintes cores: branco, azul, violeta e cinza. De quantas maneiras Rebeca pode se vestir sem usar blusa e saia da mesma cor?

   a) 14 b) 18 c) 20 d) 21 e) 35

   Vamos fazer todas as combinações e subtrair as de mesma cor de blusa e saia.
   Como Rebeca tem 5 blusas e 4 saias, então:
   $5 \cdot 4 = 20$
   Existem 2 blusas e 2 saias da mesma cor, logo:
   $20 - 2 = 18$ maneiras

   Resposta: alternativa **b**.

3. (Uece) A senha de um cartão eletrônico possui sete caracteres, todos distintos, sendo quatro algarismos e três letras maiúsculas, intercalando algarismos e letras (por exemplo, 5C7X2P8). Sabendo que são disponibilizados 26 letras e 10 algarismos, o número de senhas distintas que podem ser confeccionadas é:

   a) 66 888 000.
   b) 72 624 000.
   c) 78 624 000.
   d) 84 888 000.

   A senha começa com algarismos, pois existe um algarismo a mais. Algarismos e letras se intercalam e não pode haver repetição nem de letras nem de algarismos.
   Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

   $\underset{10}{\underline{A}}\ \underset{26}{\underline{L}}\ \underset{9}{\underline{A}}\ \underset{25}{\underline{L}}\ \underset{8}{\underline{A}}\ \underset{24}{\underline{L}}\ \underset{7}{\underline{A}}$

   $10 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 7 = 78\,624\,000$ senhas

   Resposta: alternativa **c**.

4. (ESPM-SP) Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podemos formar 60 números naturais de 3 algarismos distintos. Desse total, a quantidade dos que são divisíveis por 6 é:

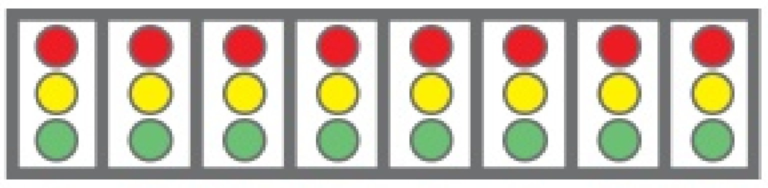
   a) 10. b) 12. c) 5. d) 8. e) 7.

   Para ser divisível por 6, o número deve ser divisível por 2 (par) e por 3 (soma dos algarismos múltiplos de 3), então:
   - terminando em 2: 132; 312; 342; 432;
   - terminando em 4: 234; 324; 354; 534.

   Total: 8 números.

   Resposta: alternativa **d**.

5. (Uerj) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes — vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

- Cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez.
- Qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas.
- Duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

$C_{6,3} \cdot C_{3,2} \cdot P_8^{6,2} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2!}{2!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2} = 1\,680$ mensagens

Resposta: 1 680 mensagens.

6. (ESPM-RS) Usando-se apenas as letras *A*, *B*, *C* e *D* e os algarismos do sistema decimal de numeração, o número de placas de automóveis usadas no Brasil (exemplo: BBA 0557) possíveis de serem formadas é no máximo igual a:

a) 120 000.
b) 240 000.
c) 360 000.
d) 480 000.
e) 640 000.

Como só temos 4 possibilidades de letras e 10 de algarismos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{L_1} & \underline{L_2} & \underline{L_3} & \underline{A_1} & \underline{A_2} & \underline{A_3} & \underline{A_4} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 4 & 4 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 640\,000$ placas.

Resposta: alternativa **e**.

7. (FGV-SP) Usando as letras do conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, quantas senhas de 4 letras podem ser formadas de modo que duas letras adjacentes, isto é, vizinhas, sejam necessariamente diferentes?

a) 7 290
b) 5 040
c) 10 000
d) 6 840
e) 11 220

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\begin{array}{cccc} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 10 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 7\,290$ senhas

Resposta: alternativa **a**.

CE_2PMatA_11_084a095.indd 87 5/21/14 2:00 PM

8. (Unifacs-BA) Para ter acesso a determinado *site* na internet cada pessoa deve cadastrar uma senha numérica de quatro dígitos e, por questão de segurança, recomenda-se que ela seja periodicamente modificada. Para alterar sua senha atual, um indivíduo decide manter os mesmos algarismos das unidades e dos milhares, que são respectivamente iguais a 5 e 9, e continuar essa senha como um número divisível por 3. Assim, o número total de escolhas possíveis para a nova senha é igual a:

01) 26. 02) 27. 03) 32. 04) 33. 05) 38.

Para um número ser divisível por três, a soma de todos os seus algarismos deve ser múltiplo de 3. Assim:

$5xy9$

$x + y + 5 + 9 = x + y + 14$

- Para $x + y + 14 = 15$, temos: $x + y = 1$.
  Então, (0, 1) e (1, 0).
- Para $x + y + 14 = 18$, temos: $x + y = 4$.
  Então, (0, 4); (1, 3); (2, 2); (3, 1); (4, 0).
- Para $x + y + 14 = 21$, temos: $x + y = 7$.
  Então, (0, 7); (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (7, 0).
- Para $x + y + 14 = 24$, temos: $x + y = 10$.
  Então, (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6); (5, 5); (6, 4); (7, 3); (8, 2); (9, 1).
- Para $x + y + 14 = 27$, temos: $x + y = 13$.
  Então, (9, 4); (8, 5); (7, 6); (6, 7); (5, 8); (4, 9).
- Para $x + y + 14 = 30$, temos: $x + y = 16$.
  Então, (9, 7); (8, 8); (7, 9).

Assim, temos 33 senhas diferentes, mas como uma delas é a atual, temos 32 escolhas possíveis para a nova senha.

Resposta: alternativa **03**.

9. (PUC-RS) Nas Olimpíadas PUCRS 2009, foram inscritas 12 equipes de futsal feminino. O número de resultados diferentes para os dois primeiros colocados é:

a) 6. b) 12. c) 66. d) 132. e) 264.

$\underline{1^{\underline{o}}}$ $\underline{2^{\underline{o}}}$

↑ ↑

12 12

Total: $12 \cdot 11 = 132$

Resposta: alternativa **d**.

10. (FGV-SP) Preparando-se para a sua festa de aniversário de sessenta anos, uma senhora quer usar três anéis de cores diferentes nos dedos das mãos, um anel em cada dedo. De quantos modos diferentes pode colocá-los, se não vai pôr nenhum anel nos polegares?

Como não pode pôr nenhum anel nos polegares, restam 8 dedos para 3 anéis. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$\underline{1^{\underline{o}}}$ $\underline{2^{\underline{o}}}$ $\underline{3^{\underline{o}}}$

8 7 6

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Resposta: 336 modos diferentes.

11. (UPM-SP) Os números dos telefones de uma cidade são constituídos de 6 dígitos. Sabendo que o primeiro dígito nunca pode ser zero, e se os números dos telefones passarem a ser de 7 dígitos, o aumento possível na quantidade de telefones será:

a) $81 \cdot 10^3$.
b) $90 \cdot 10^3$.
c) $81 \cdot 10^4$.
d) $81 \cdot 10^5$.
e) $90 \cdot 10^5$.

Inicialmente e após acrescentar mais um dígito, o primeiro algarismo deve ser diferente de zero.

- Inicialmente:
  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5$
- Com 7 dígitos:
  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5 \cdot 10$

Logo, o aumento foi de:
$9 \cdot 10^5 \cdot 10 - 9 \cdot 10^5 = 9 \cdot 10^5 \cdot (10 - 1) = 81 \cdot 10^5$ telefones

Resposta: alternativa **d**.

12. (UFRN) Um fenômeno raro em termos de data ocorreu às 20h02min de 20 de fevereiro de 2002. No caso, 20:02 20/02 2002 forma uma sequência de algarismos que permanece inalterada se reescrita de trás para a frente. A isso denominamos capicua. Desconsiderando as capicuas começadas por zero, a quantidade de capicuas formadas com cinco algarismos não necessariamente diferentes é:

a) 120.
b) 720.
c) 900.
d) 1 000.

O primeiro e o último algarismos devem ser diferentes de zero, logo:

$$\underset{9}{\underset{\uparrow}{\underline{x}}}\ \underset{10}{\underset{\uparrow}{\underline{y}}}\ \underset{10}{\underset{\uparrow}{\underline{z}}}\ \underset{1}{\underset{\uparrow}{\underline{x}}}\ \underset{1}{\underset{\uparrow}{\underline{y}}}$$

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$ capicuas

Resposta: alternativa **c**.

13. (FGV-SP) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:

a) 1 680.
b) 1 344.
c) 720.
d) 224.
e) 136.

O primeiro algarismo deve ser 6. Se o segundo for 7, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\underset{1}{\underset{\uparrow}{\underline{6}}}\ \underset{1}{\underset{\uparrow}{\underline{7}}}\ \underset{8}{\underset{\uparrow}{\underline{\ \ }}}\ \underset{7}{\underset{\uparrow}{\underline{\ \ }}}\ \underset{6}{\underset{\uparrow}{\underline{\ \ }}}$$

$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Como o número 7 pode estar em qualquer uma das 4 posições (2º, 3º, 4º ou 5º algarismo), então, analogamente, temos 336 possibilidades para cada uma. Assim, o total é:

$336 \cdot 4 = 1\,344$

Resposta: alternativa **b**.

14. (UFU-MG) Um programa de computador, utilizando apenas os algarismos 1, 2, 3 e 4, gera aleatoriamente senhas de exatamente dez dígitos. Dentre todas as senhas possíveis geradas por esse programa, a quantidade daquelas em que o algarismo 4 aparece exatamente uma vez é igual a:

a) $4^{10} - 3^9$.
b) $4^{10} - 3^{10}$.
c) $10 \cdot 3^9$.
d) $10 \cdot 4^9$.

Como o número 4 pode aparecer em qualquer uma das dez posições, supondo que ele esteja na primeira posição, temos:
$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9$

Analogamente, em cada posição que o 4 aparece, temos 3^9 possibilidades.

Logo, o total é de $10 \cdot 3^9$.

Resposta: alternativa **c**.

15. (UCS-RS) Em uma prova, as seis primeiras questões eram do tipo C/E, em que o candidato devia optar entre *certo* ou *errado* para sua resposta. Nas outras quatro questões, o candidato devia escolher, entre três alternativas, a verdadeira. Quantas sequências de respostas são possíveis na resolução da prova?

a) $(6 \cdot 2)^2$
b) $(6 \cdot 2) + (4 \cdot 3)$
c) $6^2 \cdot 4^3$
d) 10^{2+3}
e) $2^6 \cdot 3^4$

Para os seis primeiros, cada questão tem 2 opções de resposta e para as quatro últimas existem 3 opções para cada, então temos a resposta: $2^6 \cdot 3^4$ sequências.

Resposta: alternativa **e**.

16. (PUC-RJ) Em uma sorveteria, há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos. De quantas maneiras podemos montar uma casquinha, com dois sabores diferentes, nessa sorveteria?

a) 6 maneiras
b) 7 maneiras
c) 8 maneiras
d) 9 maneiras
e) 10 maneiras

$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!\ 2 \cdot 1} = 6$ maneiras

Resposta: alternativa **a**.

17. (UPM-SP) Um juiz dispõe de 10 pessoas, das quais somente 4 são advogados, para formar um único júri com 7 jurados. O número de formas de compor o júri, com pelo menos um advogado, é:

a) 70.
b) 7^4.
c) 120.
d) 4^7.
e) 140.

Todas as formas possíveis − formas indesejadas (nenhum advogado)

Tirando os quatro advogados, não há como formar o júri de sete pessoas com apenas seis disponíveis, então:

$C_{10,7} - 0 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!\ 3 \cdot 2} = 120$ formas

Resposta: alternativa **c**.

18. (Uece) Dentre um grupo de dez trabalhadores, deseja-se formar comissões, cada uma delas constituída de no mínimo duas pessoas e no máximo cinco pessoas. O número de comissões que podem ser formadas é:

a) 50.
b) 120.
c) 252.
d) 627.

$C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} + \frac{10!}{3! \cdot 7!} + \frac{10!}{4! \cdot 6!} + \frac{10!}{5! \cdot 5!} =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2! \cdot 8!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} +$

$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 45 + 120 + 210 + 252 = 627$ comissões

Resposta: alternativa **d**.

19. (Udesc) Uma turma de 25 alunos precisa escolher 6 representantes. Sabe-se que 28% dos alunos desta turma são mulheres, e que os representantes escolhidos devem ser 3 homens e 3 mulheres. Assim, o número de possibilidades para esta escolha é:

a) 28 560.
b) 851.
c) 13 800.
d) 1 028 160.
e) 5 106.

$0{,}28 \cdot 25 = 7$

Portanto, 7 mulheres.

Na turma temos 7 mulheres e 18 homens. Por combinação, temos:

$C_{7,3} \cdot C_{18,3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{18!}{3! \cdot 15!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 4!} \cdot \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{3 \cdot 2 \cdot 15!} =$

$= 35 \cdot 81 = 28\,560$ possibilidades

Resposta: alternativa **a**.

20. (UFU-MG) O câncer de mama é o segundo tipo de câncer mais comum e o que mais mata mulheres no mundo. Pesquisadores da Universidade de Brasília (UnB) investigam propriedades antitumorais de extratos vegetais produzidos a partir de plantas da Amazônia, como a *Cassia Ocidentalis*. Suponha que no laboratório de farmacologia da UnB trabalhem 10 homens e 4 mulheres. Necessita-se formar uma equipe composta por 4 pessoas para dar continuidade às pesquisas e nela pretende-se que haja pelo menos uma mulher. Nessas condições, o número total de maneiras de se compor a equipe de pesquisadores é igual a:

a) 641.
b) 826.
c) 791.
d) 936.

Todas as formas possíveis − equipes apenas com homens

$C_{14,1} - C_{10,4} = \frac{14!}{4! \cdot 10!} - \frac{10!}{4! \cdot 6!} =$

$= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10!} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = 1\,001 - 210 = 791$

Resposta: alternativa **c**.

21. (Udesc) Doze equipes participarão de um torneio internacional de vôlei; os participantes foram divididos em dois grupos de seis equipes cada. A fase classificatória deste torneio prevê a realização de dois turnos. No primeiro turno, cada equipe jogará contra os adversários do seu próprio grupo e, no segundo, as equipes enfrentarão os times do outro grupo. Ao término da fase de classificação, os dois primeiros colocados de cada grupo avançarão para a fase final, que será disputada em turno único, num só grupo, com cada classificado jogando contra todos os outros times. O time que obtiver a primeira colocação na fase final será declarado campeão do torneio. De acordo com este regulamento, o total de jogos realizados durante o torneio é igual a:

a) 102.
b) 66.
c) 77.
d) 72.
e) 108.

$2 \cdot C_{6,2} + 6 \cdot 6 + C_{4,2} = 2 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} + 36 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$

$= 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} + 36 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 30 + 36 + 6 = 72$

Resposta: alternativa **d**.

22. (Unifor-CE) Em uma *pet-shop*, existem 5 gaiolas dispostas uma ao lado da outra. Em cada uma destas gaiolas, será colocado apenas um dos seguintes animais: 1 cachorro, 1 gato, 1 rato, 1 periquito e 1 canário. De quantas maneiras diferentes poderá ser feita a distribuição destes animais nas gaiolas, de modo que os pássaros fiquem em gaiolas vizinhas?

a) 6
b) 8
c) 24
d) 48
e) 120

$P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$

Resposta: alternativa **d**.

23. (UPE) Seguindo a etiqueta japonesa, um restaurante tipicamente oriental solicita aos seus clientes que retirem seus calçados na entrada do estabelecimento. Em certa noite, 6 pares de sapato e 2 pares de sandália, todos distintos, estavam dispostos na entrada do restaurante, em duas fileiras com quatro pares de calçados cada uma. Se esses pares de calçados forem organizados nessas fileiras de tal forma que as sandálias devam ocupar as extremidades da primeira fila, de quantas formas diferentes podem-se organizar esses calçados nas duas fileiras?

a) 6!
b) $2 \cdot 6!$
c) $4 \cdot 6!$
d) $6 \cdot 6!$
e) 8!

primeira fila · segunda fila $= (2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) =$
$= 2 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot 6!$

Resposta: alternativa **b**.

24. (UPM-SP) Sabendo-se que um anagrama de uma palavra é obtido trocando-se a ordem de suas letras, sem repeti-las, e considerando-se a palavra MACK, a quantidade de anagramas que podem ser formados com duas, três ou quatro letras dessa palavra, sem repetição de letras, é:

a) 60.
b) 64.
c) 36.
d) 48.
e) 52.

$$C_{4,2} \cdot P_2 + C_{4,3} \cdot P_3 + P_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2! + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 3! + 4! =$$
$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 3!}{3!} \cdot 6 + 24 = 12 + 24 + 24 = 60$$

Resposta: alternativa **a**.

25. (FGV-SP) O número de permutações da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O é:

a) 9 400.
b) 9 600.
c) 9 800.
d) 10 200.
e) 10 800.

Que não começam com a letra O são 6 e os que não terminam com a letra O são 5, logo:

$$C_{4,2} \cdot P_8^{6,2} \cdot 5 = 6 \cdot \frac{6!}{2!} \cdot 5 = 30 \cdot \frac{720}{2} = 10\,800$$

Resposta: alternativa **e**.

26. (FGV-SP) Colocando em ordem os números resultantes das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, que posição ocupará o número 35 241?

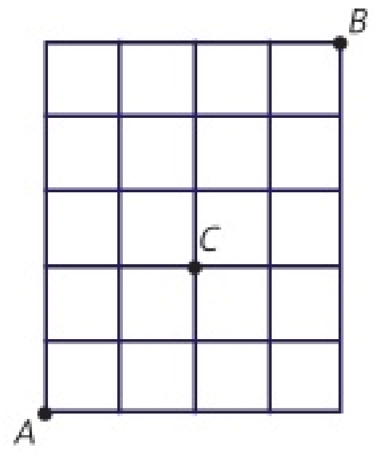
a) 55ª
b) 70ª
c) 56ª
d) 69ª
e) 72ª

Começando com:
- $1 \to P_4 = 24$ $(1 \to 24)$
- $2 \to P_4 = 24$ $(25 \to 48)$

Já temos 48 números.
- $3\ 1 \to P_3 = 6$ $(49 \to 54)$
  $3\ 2 \to P_3 = 6$ $(55 \to 60)$
  $3\ 4 \to P_3 = 6$ $(61 \to 66)$
  $3\ 5 \to P_2 = 2$ $(67 \to 68)$

Temos até o 68º número.
Então:
$3\ 5\ 2\ 1\ 4 \to$ 69º número
$3\ 5\ 2\ 4\ 1 \to$ 70º número
Resposta: alternativa **b**.

27. (Unifacs-BA) Considere-se que os lados dos quadrados, na malha, representam trechos de ruas de uma cidade e que uma pessoa esteja na esquina *A*, de duas dessas ruas tentando chegar a um restaurante na esquina *B*, passando por *C*, pelo menor trajeto possível. Nessas condições, sabendo-se que ela só pode andar ao longo dos lados dos quadrados, pode-se afirmar que o número de caminhos diferentes que podem ser percorridos é:



01) 16. 02) 20. 03) 46. 04) 60. 05) 189.

Considere:

- *D*: para a direita
- *C*: para cima

De *A* até *C*, temos:

D D C C

$P_4^{2,\,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2} = 6$

De *C* até *B*, temos:

D D C C C

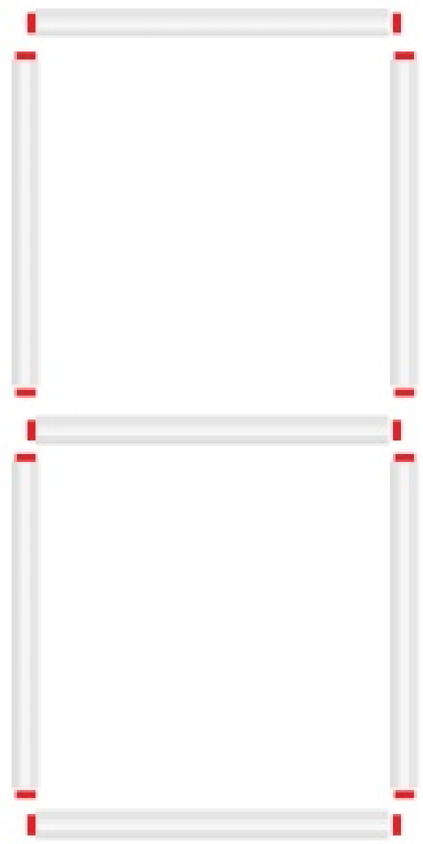
$P_5^{2,\,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 10$

Então:

$6 \cdot 10 = 60$

Resposta: alternativa **04**.

28. (UFRN) A figura ao lado mostra um quadro com sete lâmpadas fluorescentes, as quais podem estar acesas ou apagadas, independentemente umas das outras. Cada uma das situações possíveis corresponde a um sinal de um código. Nesse caso, o número total de sinais possíveis é:



a) 21. b) 42. c) 128. d) 256.

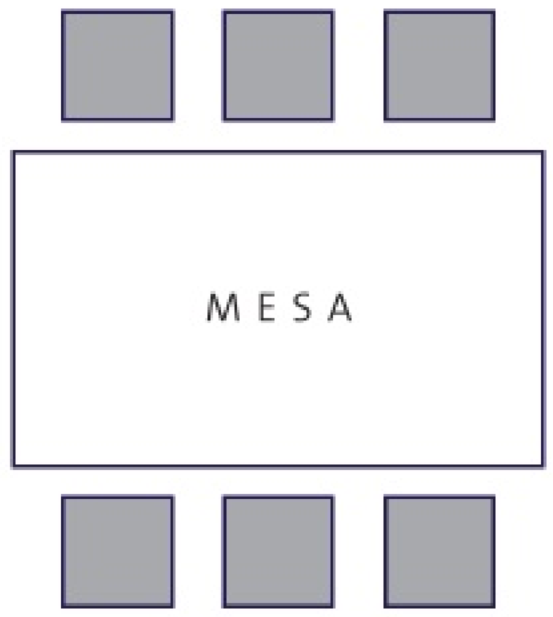
Sabendo que são 7 lâmpadas e cada uma pode estar de 2 formas (acesa ou apagada), temos:

$2^7 = 128$

Resposta: alternativa **c**.

CE_2PMatA_11_084a095.indd 93 5/21/14 2:01 PM

29. (Insper-SP) Em cada ingresso vendido para um *show* de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema ao lado. O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é:



a) 96. b) 120. c) 192. d) 384. e) 720.

De um lado da mesa, há três lugares onde três membros da família se sentarão. Então:

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Do outro lado haverá mais três lugares: dois serão para o casal, um ao lado do outro, e um para o membro restante da família, logo:

$P_2 \cdot 2 = 4$

$24 \cdot 4 = 96$

Como a situação também pode ocorrer do outro lado da mesa, temos a resposta:

$96 \cdot 2 = 192$

Resposta: alternativa **c**.

30. (ITA-SP) Resolva a equação $\binom{15}{x-1} = \binom{15}{2x+1}$.

$$\binom{15}{x-1} = \binom{15}{2x+1} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2 \text{ (não convém)} \\ x - 1 + 2x + 1 = 15 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Resposta: $S = \{5\}$.

31. (Unifor-CE) Por uma das propriedades do triângulo de Pascal, o valor da soma

$$\binom{50}{20} + \binom{50}{21} + \binom{51}{22} + \binom{52}{23} \text{ vale:}$$

a) $\binom{53}{23}$. b) $\binom{52}{21}$. c) $\binom{52}{22}$. d) $\binom{51}{22}$. e) $\binom{51}{21}$.

$$\binom{50}{20} + \binom{50}{21} + \binom{51}{22} + \binom{52}{23} =$$

$$= \binom{51}{21} + \binom{51}{22} + \binom{52}{23} = \binom{52}{22} + \binom{52}{23} = \binom{53}{23}$$

Resposta: alternativa **a**.

32. (UEL-PR) No cálculo de $(x^2 + xy)^{15}$, o termo em que o grau de x é 21 vale:

a) $484x^{21}y^{21}$.
b) $1\,001x^{21}y^9$.
c) $1\,008x^{21}y^8$.
d) $1\,264x^{21}y^9$.
e) $5\,005x^{21}y^9$.

Temos que o termo geral do desenvolvimento de $(x^2 + xy)^{15}$ pode ser dado por:

$$T_{k+1} = \binom{15}{k} \cdot (x^2)^{15-k} \cdot (xy)^k = \binom{15}{k} \cdot (x)^{30-2k} \cdot x^k \cdot y^k = \binom{15}{k} \cdot (x)^{30-k} \cdot y^k, \text{ em que } k \in \{0, 1, 2, ..., 15\}$$

Para obtermos o termo em x^{21} devemos fazer:

$30 - k = 21 \Rightarrow k = 9$

Logo, o termo em que o grau de x é 21 é dado por:

$$T_{10} = \binom{15}{10} \cdot x^{21} \cdot y^9 = \frac{15!}{9! \cdot 6!} \cdot x^{21} \cdot y^9 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^{21} \cdot y^9 = 5\,005x^{21}y^9$$

Resposta: alternativa **e**.

33. (ITA-SP) A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a:

a) $2\,630\sqrt{5}$.
b) $1\,584\sqrt{15}$.
c) $2\,690\sqrt{5}$.
d) $1\,604\sqrt{15}$.
e) $2\,712\sqrt{5}$.

Utilizando o desenvolvimento do binômio de Newton, temos que:

- $(x + y)^5 = x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$
- $(x - y)^5 = x^5y^0 - 5x^4y^1 + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5x^1y^4 - 1x^0y^5$

Assim, obtemos:

$(x + y)^5 - (x - y)^5 = 10x^4y^1 + 20x^2y^3 + 2y^5$

Então:

$(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5 = 10 \cdot (2\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{5} + 20 \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{5})^3 + 2 \cdot (\sqrt{5})^5 =$

$= 10 \cdot 16 \cdot 9 \cdot \sqrt{5} + 20 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 25 \cdot \sqrt{5} = 1\,440\sqrt{5} + 1\,200\sqrt{5} + 50\sqrt{5} = 2\,690\sqrt{5}$

Resposta: alternativa **c**.

PROBABILIDADE

Experimento aleatório
Qualquer experimento cujo resultado depende exclusivamente do **acaso**.

Espaço amostral (Ω)
Conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Evento
Qualquer subconjunto do espaço amostral.

Observações
- Quando um evento é formado apenas por um elemento do espaço amostral, ele é chamado **evento elementar**.
- Quando um evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **evento certo**.
- Quando um evento é vazio, ele é chamado **evento impossível**.
- Quando a intersecção de dois eventos é o conjunto vazio, eles são chamados **eventos mutuamente exclusivos**.

Cálculo de probabilidades

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ou

$$p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Observações
- $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- $p(A) = 0$, o evento A é o evento impossível, e não há possibilidade de que ele venha a ocorrer.
- $p(A) = 1$, o evento A é o evento certo, e há certeza de que ele ocorrerá.
- Quando todos os eventos elementares (subconjuntos unitários) têm a mesma probabilidade de ocorrer, eles são chamados **eventos equiprováveis**.

Probabilidade do evento complementar
Sejam A e $\overline{A}$ eventos complementares, temos:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Probabilidade da união de dois eventos
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Probabilidade condicional

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A / B) \cdot p(B)$$

Eventos independentes
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Observação
Dois eventos A e B são dependentes quando $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$.

Exercícios

1. (UFS-SE) Se sortearmos ao acaso um dia da semana, qual a probabilidade de obtermos um dia cujo nome começa com a letra *S*?

   a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{7}$

   Começando com *S*: segunda-feira, sexta-feira e sábado.

   Então, $P = \frac{3}{7}$.

   Resposta: alternativa **c**.

2. (PUC-RS) Um baralho comum de 52 cartas tem três figuras (valete, dama e rei) de cada um dos quatro naipes (paus, ouros, espadas e copas). Ao se retirar uma carta do baralho, a probabilidade de ser uma carta que apresente figura de paus é:

   a) $\frac{1}{52}$. b) $\frac{3}{52}$. c) $\frac{7}{52}$. d) $\frac{12}{52}$. e) $\frac{13}{52}$.

   No baralho de 52 cartas, só existem 3 figuras de paus.

   Logo, $P = \frac{3}{52}$.

   Resposta: alternativa **b**.

3. (PUC-RS) Considere uma área muito visitada do MCT, Museu de Ciências e Tecnologia da PUC-RS, relacionada a interações vivas.
   Em um recipiente existem 12 aranhas, das quais 8 são fêmeas. A probabilidade de se retirar uma aranha macho para um experimento é:

   a) 4. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{3}$. d) $\frac{1}{2}$. e) $\frac{2}{3}$.

   Se das 12 aranhas 8 são fêmeas, então 4 são machos.

   Logo:

   $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

   Resposta: alternativa **c**.

PUC2009

4. (Unir-TO) Uma determinada fábrica de vassouras produz 120 unidades, sendo 60 no período matutino e 60 no vespertino. Das 60 produzidas no período matutino, cinco apresentaram algum defeito, enquanto das 60 produzidas no período vespertino, seis apresentaram defeito. Com intuito de realizar um controle de qualidade, o gerente da fábrica, no final de cada período, recolhe duas vassouras aleatoriamente. Nesse sentido, a probabilidade de as vassouras recolhidas:

a) serem perfeitas é igual em ambos os períodos.

b) no período da tarde serem perfeitas é maior que 0,9.

c) no período da manhã serem perfeitas é de, aproximadamente, 0,84.

d) no período da manhã serem perfeitas é de, aproximadamente, 0,7.

• No período matutino (vassouras perfeitas):

$P = \frac{55}{60} \cdot \frac{54}{59} \simeq 0{,}84$

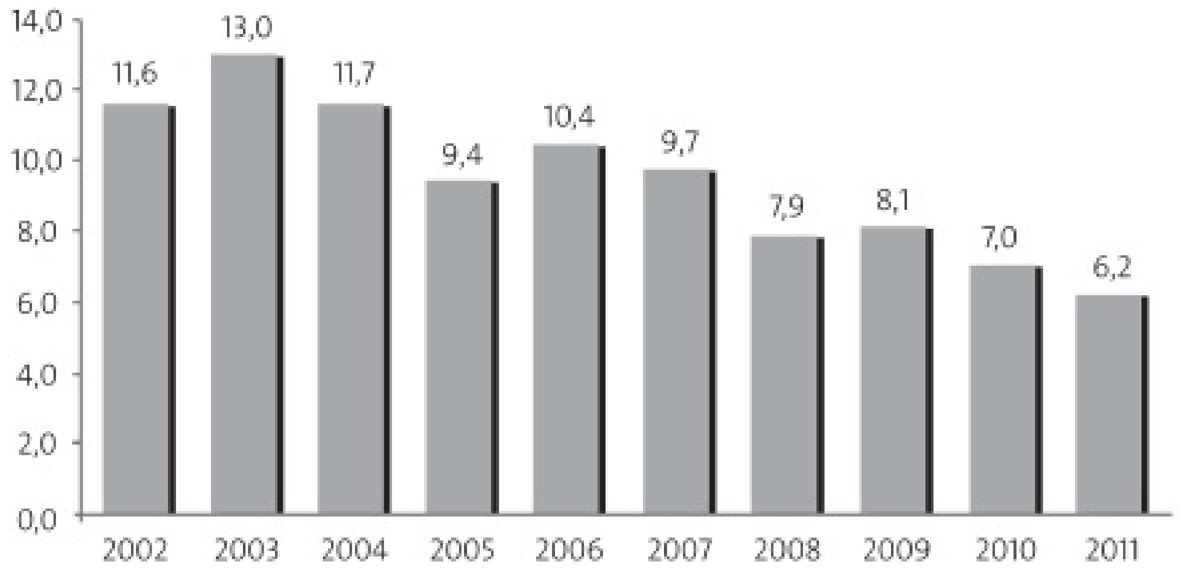
• No período vespertino:

$P = \frac{54}{60} \cdot \frac{53}{59} \simeq 0{,}8$

Resposta: alternativa **c**.

5. (UEG-GO) O gráfico ao lado mostra a evolução da taxa de desemprego nos meses de junho de 2002 a 2011, para o conjunto das seis regiões metropolitanas brasileiras abrangidas pela pesquisa. Escolhendo aleatoriamente um dos anos descritos no gráfico utilizado, a probabilidade de que no ano escolhido a taxa de desemprego, no mês de junho, seja superior a 9,3% é igual a:

a) $\frac{3}{5}$. b) $\frac{1}{6}$. c) $\frac{2}{5}$. d) $\frac{4}{6}$.



Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 12 ago. 2011.

Pelo gráfico, os anos de 2002 a 2007 tiveram taxa superior a 9,3%. Assim:

$P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Resposta: alternativa **a**.

6. (FGV-SP) Em um grupo de 300 pessoas sabe-se que:
   - 50% aplicam dinheiro em poupança;
   - 30% aplicam dinheiro em fundos de investimento;
   - 15% aplicam dinheiro em poupança e fundos de investimento simultaneamente.

   Sorteando uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que ela não aplique em poupança nem em fundos de investimento é:

   a) 0,05. c) 0,35. e) 0,65.
   b) 0,20. d) 0,50.

   Considere:
   A: poupança
   B: fundos de investimento
   Então:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
   $\Rightarrow P(A \cup B) = 50\% + 30\% - 15\% = 65\%$
   Logo, a probabilidade de essa pessoa não aplicar dinheiro em nenhuma das duas formas é de 35% (0,35).
   Resposta: alternativa **c**.

7. (Ufla-MG) Em um espetáculo de dança, há quatro atores e quatro atrizes. Dois dos atores e duas das atrizes trabalham em uma mesma novela. Um sorteio é realizado entre eles para formar os quatro casais. A probabilidade de que, em dois dos casais, os pares trabalhem na mesma novela é:

   a) $\frac{1}{6}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{12}$. d) $\frac{1}{8}$.

   Considere:
   H: homem
   M: mulher
   Para sortear 2 homens e 2 mulheres da mesma novela em qualquer ordem, temos:
   H M H M
   $P = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{2! \cdot 2!} \Rightarrow$
   $\Rightarrow P = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = \frac{1}{6}$
   Resposta: alternativa **a**.

8. (UEMS) Uma concessionária *A* tem em seu estoque 25 carros de um modelo *B*. A tabela abaixo divide os 25 carros disponíveis em tipo de motor e cor.

Motor	Cor			
	Branca	Preta	Prata	Vermelha
1.0	2	2	5	1
1.6	1	1	4	1
2.0	2	2	3	1

   Um carro do modelo *B* foi comprado nessa concessionária. Dado que esse carro é de cor prata, qual a probabilidade que seu motor seja 1.0?

   a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{10}$ c) $\frac{5}{25}$ d) $\frac{5}{22}$ e) $\frac{5}{6}$

   Como sabemos que o carro é prata, o campo amostral é reduzido para 12 carros, sendo 5 com motor 1.0.
   Assim, $P = \frac{5}{12}$.
   Resposta: alternativa **a**.

9. (UFRN) Escolhe-se, aleatoriamente, um número inteiro dentre os números naturais de 1 até 100. A probabilidade de que, pelo menos, um dos dígitos do número escolhido seja 3 é:

   a) $\frac{1}{100}$. b) $\frac{19}{100}$. c) $\frac{15}{100}$. d) $\frac{11}{100}$.

   De 1 a 100 e com algum dígito 3, temos:
   - de 30 a 39 (10 números)
   - 03, 13, 23, 43, 53, 63, 73, 83, 93 (9 números)

   Logo, $P = \frac{19}{100}$.
   Resposta: alternativa **b**.

10. (Uerj) Na tabela abaixo, estão indicados os preços do rodízio de *pizzas* de um restaurante.

Dias da semana	Valor unitário do rodízio (R$)
Segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira	18,50
Sexta-feira, sábado e domingo	22,00

Considere agora outro cliente que escolheu aleatoriamente dois dias de uma mesma semana para comer pizzas nesse sistema de rodízio, pagando também um rodízio em cada dia. Calcule a probabilidade de que o valor total gasto pelo cliente nesses dois dias seja o mínimo possível.

Para o gasto mínimo, ele deve ser em ambos os dias R$ 18,50. O primeiro dia pode ser 4 dentre 7 e o segundo dia 3 dentre 6.

Assim:

$$P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

Resposta: $\frac{2}{7}$.

11. (EsPCEx-SP) A probabilidade de se obter um número divisível por 2 na escolha ao acaso de uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 é:

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{2}{5}$. c) $\frac{3}{4}$. d) $\frac{1}{4}$. e) $\frac{1}{2}$.

Para ser divisível por 2, o número deve ser par.
Logo, sendo par, temos:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 48$

Todas as permutações possíveis: $5! = 120$

Logo:

$$P = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

Resposta: alternativa **b**.

12. (UPE) Para se ter ideia do perfil dos candidatos ao curso de Odontologia em um vestibular, 600 estudantes candidatos a esse curso foram selecionados ao acaso e entrevistados, sendo que, entre esses, 260 eram homens. Descobriu-se que 140 desses homens e 100 das mulheres entrevistadas já estavam cursando o Ensino Superior em outra instituição. Se um dos 600 estudantes entrevistados for selecionado ao acaso, a probabilidade de ele ser uma mulher que, no momento da entrevista, não estava cursando o Ensino Superior é igual a:

a) 0,12.
b) 0,57.
c) 0,40.
d) 0,70.
e) 0,42.

Temos 600 estudantes, dos quais:

- 260 são homens
- 340 são mulheres
- 100 mulheres já cursaram o Ensino Superior

Então, 240 mulheres não estavam cursando o Ensino Superior.

Logo:

$$P = \frac{240}{600} = 0,40$$

Resposta: alternativa **c**.

13. (UPM-SP) Sempre que joga, um time tem probabilidade $\frac{2}{3}$ de vencer uma partida. Em quatro jogos, a probabilidade de esse time vencer, exatamente dois deles, é:

a) $\frac{4}{27}$.

b) $\frac{16}{81}$.

c) $\frac{8}{27}$.

d) $\frac{4}{81}$.

e) $\frac{16}{27}$.

Considere:

V: vencer

P: perder

Então:

$$P = \underset{V}{\frac{2}{3}} \cdot \underset{V}{\frac{2}{3}} \cdot \underset{P}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{P}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} \Rightarrow P = \frac{8}{27}$$

Resposta: alternativa **c**.

14. (UFG-GO) Segundo uma pesquisa realizada no Brasil sobre a preferência de cor de carros, a cor prata domina a frota de carros brasileiros, representando 31%, seguida pela cor preta, com 25%, depois a cinza, com 16% e a branca, com 12%. Com base nestas informações, tomando um carro ao acaso, dentre todos os carros brasileiros de uma dessas quatro cores citadas, qual a probabilidade de ele não ser cinza?

a) $\frac{4}{25}$

b) $\frac{4}{17}$

c) $\frac{17}{25}$

d) $\frac{37}{50}$

e) $\frac{17}{21}$

Para facilitar, podemos tomar as porcentagens como quantidades reais, sem alterar as proporções. Assim, existem 84 carros nessas 4 cores. Logo:

$$P = \frac{68}{84} = \frac{17}{21}$$

Resposta: alternativa **e**.

15. (FASM-SP) O jornal *Folha de S.Paulo*, em 14 de março de 2012, publicou o artigo ao lado sobre cigarros.
Suponha que todos os maços de cigarros de 2010, qualquer que seja a marca, tenham as mesmas dimensões e que em uma caixa seja colocado um maço de cada uma dessas marcas (com sabor ou tradicional). Dos cigarros com sabor, sabe-se que 57,5% são sabor menta e 7,5% sabor canela. Se uma pessoa retirar ao acaso dois maços de cigarros, um após o outro, sem reposição, a probabilidade de sair um maço de cigarros de menta e um de canela, em qualquer ordem, é:

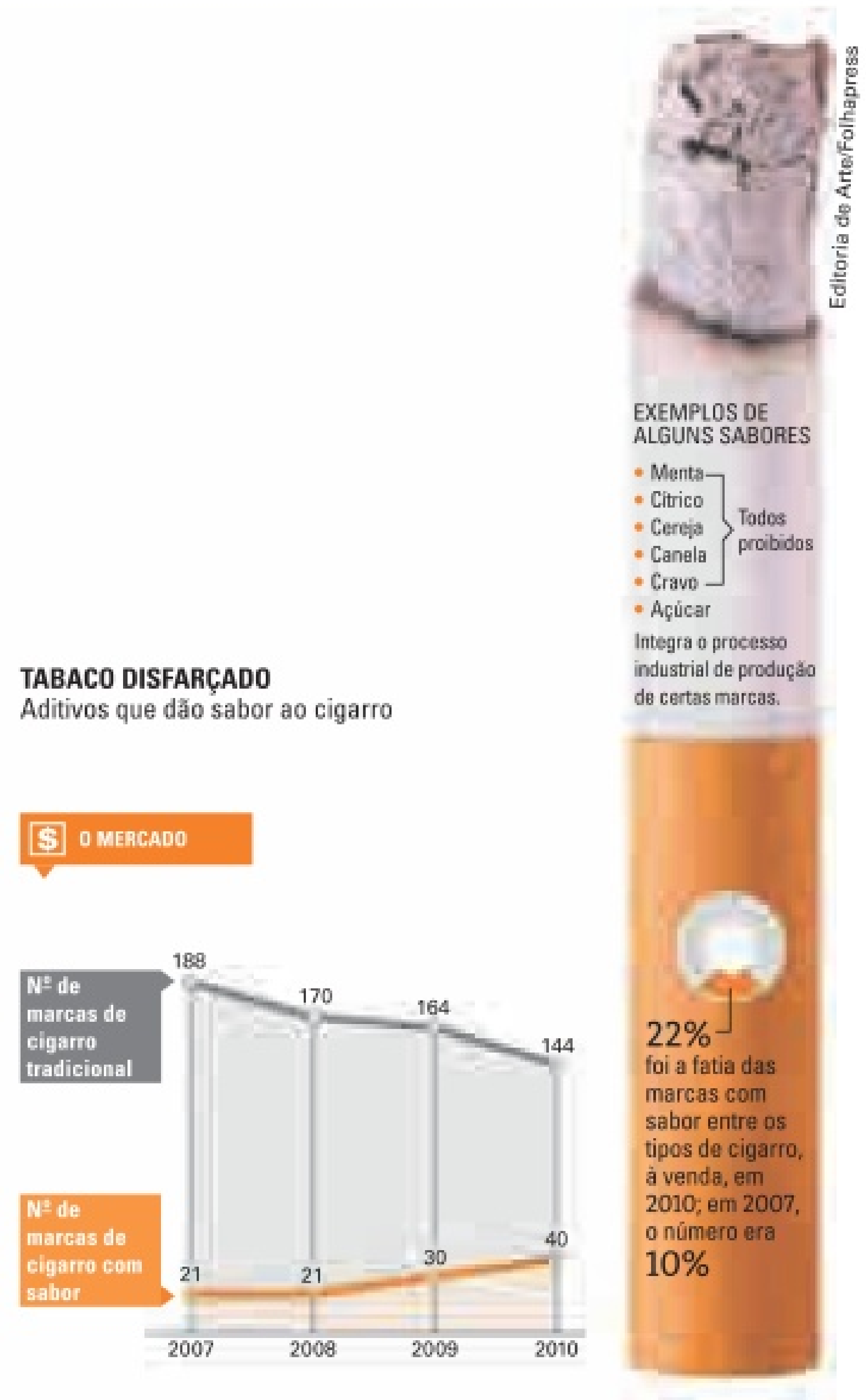
a) $\frac{1}{244}$.

b) $\frac{1}{582}$.

c) $\frac{1}{723}$.

d) $\frac{1}{946}$.

e) $\frac{1}{1230}$.



Dos cigarros com sabor:

- 23 são de menta (0,575 · 40)
- 3 são de canela (0,075 · 40)

Total de cigarros na caixa: 184.

Então, para qualquer ordem:

$$P = \frac{23}{184} \cdot \frac{3}{183} \cdot 2 = \frac{138}{33\,672} = \frac{1}{244}$$

Resposta: alternativa **a**.

16. (FGV-SP) Num departamento de uma empresa há 5 funcionários: Alberto, Bernardo, César, Dolores e Eloísa. Dois funcionários são sorteados simultaneamente para formarem uma comissão. A probabilidade de que Eloísa seja sorteada, e César não, vale:

a) $\frac{3}{10}$.
b) $\frac{4}{11}$.
c) $\frac{5}{12}$.
d) $\frac{6}{13}$.
e) $\frac{7}{14}$.

Considere:

C: César não ser sorteado

E: Eloísa ser sorteada

Então:

$$P = \underset{\substack{E \\ \downarrow}}{\frac{1}{5}} \cdot \underset{\substack{C \\ \downarrow}}{\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{3}{10}$$

Resposta: alternativa **a**.

17. (Uespi) Uma gaveta contém 6 meias azuis e 4 meias pretas. Escolhendo, aleatoriamente, 4 meias da gaveta, qual a probabilidade de elas formarem um par de meias azuis e outro de meias pretas?

a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{1}{7}$
c) $\frac{2}{7}$
d) $\frac{3}{7}$
e) $\frac{1}{5}$

Escolhendo: preta, preta, azul, azul, mas em qualquer ordem, temos:

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \Rightarrow P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} \Rightarrow P = \frac{30}{70} \Rightarrow P = \frac{3}{7}$$

Resposta: alternativa **d**.

18. (FMABC-SP) Em um Posto de pronto atendimento de certo hospital, os jalecos dos médicos plantonistas costumam ficar guardados em um mesmo armário que dispõe de apenas 8 cabides fixos, cada um dos quais pode acomodar um único jaleco. Supondo que, num momento em que todos os cabides desse armário estivessem desocupados, quatro médicos neles pendurassem aleatoriamente seus respectivos jalecos, a probabilidade de que todos os jalecos fiquem juntos, um ao lado do outro, é:

a) $\frac{1}{14}$. b) $\frac{1}{7}$. c) $\frac{3}{14}$. d) $\frac{2}{7}$. e) $\frac{5}{14}$.

• Para todas as formas possíveis:

$J_1\,J_2\,J_3\,J_4$ __ __ __ __

$P_8^4 = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 1\,680$

• Para jalecos juntos:

$(J_1\,J_2\,J_3\,J_4)$ __ __ __ __

$P_5^4 \cdot P_4 = \frac{5!}{4!} \cdot 4! = 120$

Então:

$P = \frac{\text{juntos}}{\text{formas possíveis}} = \frac{120}{1\,680} = \frac{1}{14}$

Resposta: alternativa **a**.

19. (Favip-PE) Se a probabilidade de chover amanhã é de 30%, e o mesmo ocorre com cada um dos dois dias seguintes a amanhã, qual a probabilidade percentual de chover em ao menos um dos três dias?

a) 65,4% b) 65,5% c) 65,6% d) 65,7% e) 65,8%

$P(\text{chover}) = 30\%$

$P(\text{não chover}) = 70\%$

A probabilidade de não chover em nenhum dia é dada por:

$P = 0{,}7^3 = \frac{343}{1\,000}$

A probabilidade de chover em pelo menos um dos três dias é:

$P = 1 - \frac{343}{1\,000} = \frac{657}{1\,000} = 65{,}7\%$

Resposta: alternativa **d**.

20. (UPM-SP) Para um evento literário, 12 mulheres e 14 homens são convidados. A editora patrocinadora irá sortear, sucessivamente, 2 livros, um por convidado. Se todos os convidados têm a mesma chance de serem sorteados, assinale, dentre as alternativas abaixo, o valor mais próximo da probabilidade de que 2 mulheres sejam premiadas.

a) 55% b) 17% c) 20% d) 44% e) 24%

$$P = \underset{\text{1ª mulher}}{\frac{12}{26}} \cdot \underset{\text{2ª mulher}}{\frac{11}{25}} = \frac{132}{650} \simeq 20\%$$

Resposta: alternativa **c**.

21. (ITA-SP) Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade de o alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a:

a) $\frac{2}{9}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{4}{9}$. d) $\frac{5}{9}$. e) $\frac{2}{3}$.

A probabilidade de cada atirador não acertar é $\frac{2}{3}$. Então, a probabilidade de ambos errarem é:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

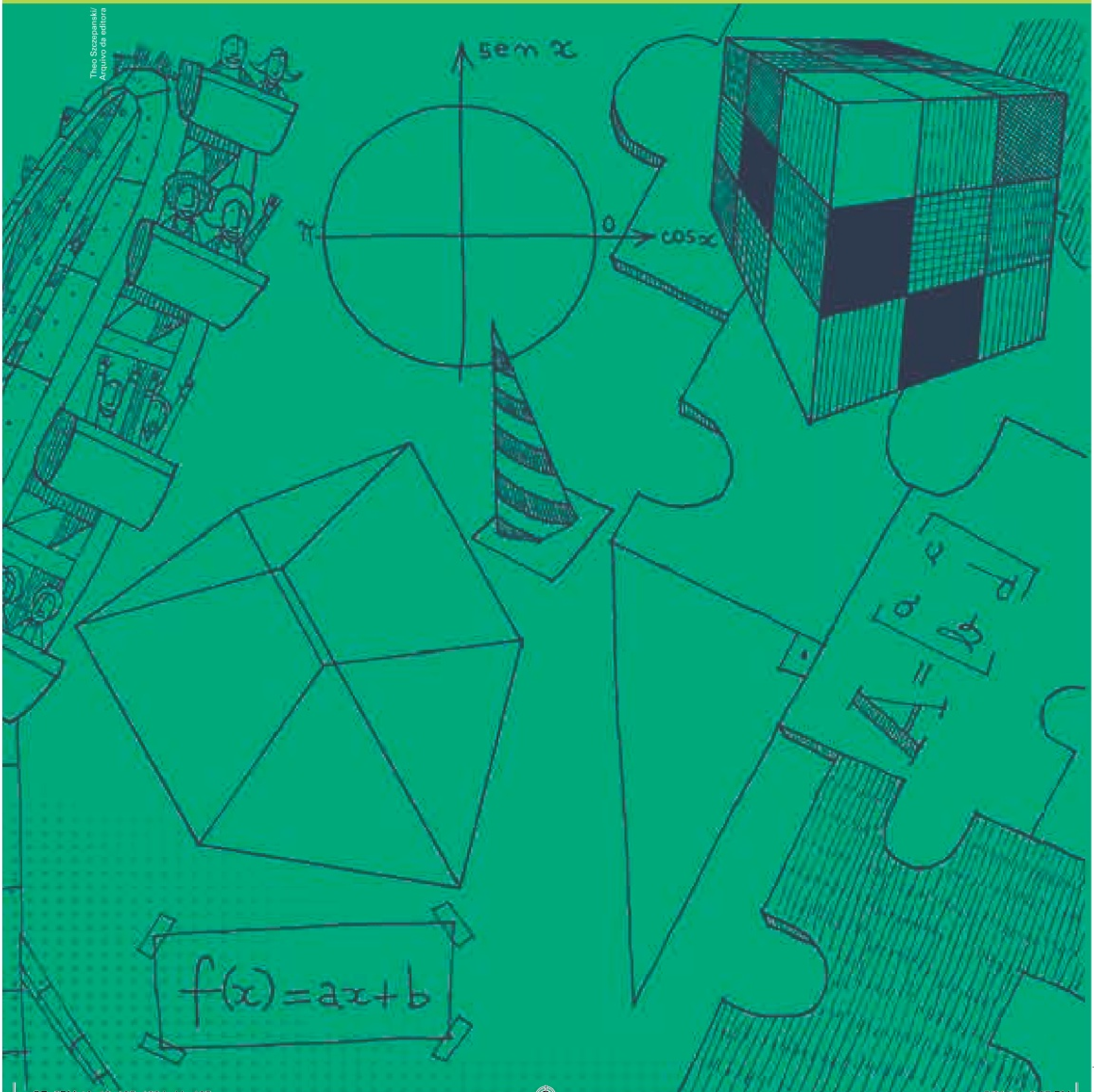
A probabilidade de pelo menos um acertar é:

$$P = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Resposta: alternativa **d**.

Desafio

Theo Szczepanski/
Arquivo da editora



1. (OBM) Se $0° < x < 90°$ e $\cos x = \frac{1}{4}$, podemos afirmar que:

a) $30° < x < 40°$.
b) $40° < x < 50°$.
c) $50° < x < 60°$.
d) $60° < x < 75°$.
e) $75° < x < 90°$.

Considere que o valor do cos θ diminui quando θ cresce de 0° a 90°, então:

$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}258 > \frac{1}{4}$

Se $\cos x = \frac{1}{4}$, então:

$\cos x = \frac{1}{4} < 0{,}258 = \cos 75° \Rightarrow \cos x < \cos 75°$

Como $0° < x < 90°$, temos:

$0 < \cos x < \cos 75° \Rightarrow \cos 90° < \cos x < \cos 75° \Rightarrow 90° > x > 75° \Rightarrow 75° < x < 90°$

Resposta: alternativa **e**.

2. (OBM) Uma potência perfeita é um número inteiro da forma a^b, a e b inteiros, $b > 1$. Seja $f(n)$ a maior potência perfeita que não excede n. Por exemplo, $f(7) = 4$, $f(8) = 8$ e $f(99) = 81$. Sorteando ao acaso um número inteiro k com $1 \leqslant k \leqslant 100$, qual a probabilidade de $f(k)$ ser um quadrado perfeito?

a) 64%
b) 72%
c) 81%
d) 90%
e) 96%

Ao sortearmos um número inteiro k com $1 \leqslant k \leqslant 100$, temos um espaço amostral com 100 elementos.
Além disso, as potências perfeitas de 1 a 100 que não são quadrados perfeitos são: 8, 27 e 32.
Então, para $1 \leqslant k \leqslant 100$, temos:

- $f(k) = 8 \rightarrow k = 8$
- $f(k) = 27 \rightarrow k = 27, 28, 29, 30, 31$
- $f(k) = 32 \rightarrow k = 32, 33, 34, 35$

Assim, $f(k)$ é quadrado perfeito para $100 - (1 + 5 + 4) = 90$ valores de k. Portanto:

$P = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 90\%$

Resposta: alternativa **d**.

3. (OBM) De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?

a) 330 b) 348 c) 512 d) 676 e) 900

Para distribuirmos as 10 bolas brancas, de modo que cada uma das cinco caixas tenha quantidades diferentes, devemos ter uma caixa sem bolas brancas e as demais devem conter, respectivamente, 2, 3 e 4 bolas brancas.

Falta, então, distribuirmos as bolas vermelhas. Considere a caixa i, aquela que está com i bolas brancas no momento quando ela receber x_i bolas vermelhas. Então, $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, em que x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 são inteiros não negativos e $x_0 \geq 1$.

Para descobrirmos o número de soluções inteiras não negativas dessa equação, fazemos:

$x_0 = y_0 + 1 \Rightarrow y_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

Percebendo que cada solução dessa equação corresponde a uma única maneira de distribuirmos as bolas e respeitando as restrições impostas pelo enunciado, há uma bijeção entre os dois conjuntos. Portanto:

$$\binom{7+5-1}{4} = \binom{11}{4} = 330$$

Resposta: alternativa **a**.

4. (OBM) Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas, nem 4 nos milhares?

a) Menos de 1 000.
b) Mais de 1 000 e menos de 2 000.
c) Mais de 2 000 e menos de 3 000.
d) Mais de 3 000 e menos de 4 000.
e) Mais de 4 000.

Considere:

A = {números de quatro algarismos distintos que possuem o 4 na casa dos milhares}
B = {números de quatro algarismos distintos que possuem o 3 na casa das centenas}
C = {números de quatro algarismos distintos que possuem o 2 na casa das dezenas}
D = {números de quatro algarismos distintos que possuem o 1 na casa das unidades}
E = {números de quatro algarismos distintos}

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$n(E) = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$

Mas, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos:

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) +$
$+ n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$

Então:

- $n(A) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
- $n(B) = n(C) = n(D) = 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$
- $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = 8 \cdot 7 = 56$
- $n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 7 \cdot 7 = 49$
- $n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = 7$
- $n(B \cap C \cap D) = 6$
- $n(A \cap B \cap C \cap D) = 1$

Logo:

$n(A \cup B \cup C \cup D) = (504 + 3 \cdot 448) - (3 \cdot 56 + 3 \cdot 49) + (3 \cdot 7 + 6) - 1 = 1\,559$

Portanto:

$4\,536 - 1\,559 = 2\,977$

Resposta: alternativa **c**.

5. (OBM) Um painel luminoso é formado por 10 círculos grandes. Dentro de cada círculo há quatro lâmpadas: uma amarela, uma verde, uma vermelha e uma azul. De quantos modos podemos acender o painel de modo que pelo menos uma lâmpada de cada cor fique acesa? Cada círculo pode ter de zero a quatro lâmpadas acesas, ou seja, é permitido duas lâmpadas acesas no mesmo círculo.

a) $(2^{10} - 1) \cdot 4$ b) $(2^4 - 1) \cdot 10$ c) $2^{10} - 1$ d) $2^4 - 1$ e) $2^{10} - 2^4$

Sendo 10 lâmpadas de cada cor, cada uma delas pode ficar acesa ou apagada.
Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{10}$ modos distintos de deixá-las acesas ou apagadas
Logo, há $2^{10} - 1$ maneiras distintas de deixar pelo menos uma delas acesa, ou seja, das 2^{10} possibilidades, excluímos aquela em que todas as 10 lâmpadas de uma determinada cor estão todas apagadas.
Mas há quatro cores possíveis. Então, novamente pelo princípio multiplicativo, temos:
$(2^{10} - 1) \cdot (2^{10} - 1) \cdot (2^{10} - 1) \cdot (2^{10} - 1) = (2^{10} - 1)^4$

Resposta: alternativa **a**.

6. (OBM) Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo embaralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: "Que estranho, não tenho nenhuma carta de espadas". Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?

a) $\dfrac{39!}{26!\,52!}$ b) $\dfrac{26!}{13!\,39!}$ c) $\dfrac{39!\,39!}{26!\,52!}$ d) $\dfrac{26!\,26!}{13!\,39!}$ e) $\dfrac{39!\,13!}{52!}$

O número de maneiras distintas de distribuirmos 13 cartas para cada um, de modo que Arnaldo não tenha recebido nenhuma carta de espadas é:

$$\binom{39}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13} = \frac{39!}{26!\,13!} \cdot \frac{39!}{26!\,13!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} \cdot \frac{13!}{0!\,13!} = \frac{(39!)^2}{26!\,(13!)^4}$$

Cada um dos binomiais representa o número de maneiras distintas de escolhermos as cartas de Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo, respectivamente. Mas o número de maneiras distintas de distribuirmos as 52 cartas sem que Arnaldo e Bernaldo não recebam nenhuma carta de espadas é:

$$\binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13} = \frac{39!}{26!\,13!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} \cdot \frac{13!}{0!\,13!} = \frac{39!\,26!}{(13!)^5}$$

Portanto:

$$P = \frac{\dfrac{39!\,26!}{(13!)^5}}{\dfrac{(39!)^2}{26!\,(13!)^4}} = \frac{26!\,26!}{13!\,39!}$$

Resposta: alternativa **d**.

7. (OBM) O maior inteiro positivo n tal que $(2\,011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$ é:

a) 3. b) 4. c) 5. d) 6. e) 7.

É necessário perceber que $y!$ é divisível por $x!$ se, e somente se, $x \leqslant y$. Assim, se $(2\,011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$, tomando $x = (n!)!$ e $y = 2\,011!$, temos:

$x \leqslant y \Rightarrow (n!)! \leqslant 2\,011! \Rightarrow n! \leqslant 2\,011$

Mas:

$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5\,040!...$

Então, $n = 6$ é o maior número natural para o qual $n! \leqslant 2\,011$ e o menor número natural para o qual $((n!)!)!$ divide $(2\,011!)!$.

Resposta: alternativa **d**.

8. (OBM) Dizemos que duas retas ou segmentos de retas são reversas quando não existe um plano que contém ambas as retas ou segmentos de retas. De quantas maneiras podemos escolher três arestas de um cubo de modo que quaisquer duas dessas arestas são reversas?

a) 6 b) 8 c) 12 d) 24 e) 36

Sejam x, y e z três arestas do cubo, onde quaisquer duas arestas são reversas. Pela simetria do cubo, podemos inicialmente escolher qualquer uma das arestas do cubo, de 12 modos distintos. Uma vez escolhida a aresta x, a aresta y pode ser escolhida de quatro modos diferentes e, finalmente escolhidas as arestas x e y, existe apenas um modo de escolher a aresta z. Assim, pelo princípio multiplicativo, podemos escolher as arestas x, y e z de 48 formas distintas:

$12 \cdot 4 = 48$

Escolhidas três determinadas arestas, x, y e z, temos:

(x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y) e (z, y, x)

Mas qualquer uma das seis permutações acima corresponde, na verdade, a apenas uma maneira de escolher 3 arestas do cubo de modo que elas sejam reversas duas a duas. Portanto:

$\frac{48}{6} = 8$

Resposta: alternativa **b**.

9. (OBM) Quantos números inteiros e positivos menores do que 1 000 000 existem cujos cubos terminam em 1?

a) 1 000 b) 10 000 c) 50 000 d) 100 000 e) 500 000

Para que o cubo de um número natural tenha o seu cubo terminado em 1 é preciso que o próprio número termine em 1.

Assim, basta determinar quantos naturais entre 1 e 1 000 000 têm o 1 como algarismo das unidades:

- com um algarismo: apenas o 1;
- com dois algarismos: 9 (fixando-se o 1 na casa das unidades e escolhendo um algarismo para as dezenas);
- com três algarismos: $9 \cdot 10 = 90$;
- com quatro algarismos: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$;
- com cinco algarismos: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$;
- com seis algarismos: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$.

Portanto:

$1 + 9 + 90 + 900 + 9\,000 + 90\,000 = 100\,000$

Resposta: alternativa **d**.

10. (OBM) Há 1 002 balas de banana e 1 002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Seja p a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor e seja q a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes. Quanto vale a diferença entre p e q?

a) 0 b) $\frac{1}{2\,004}$ c) $\frac{1}{2\,003}$ d) $\frac{2}{2\,003}$ e) $\frac{1}{1001}$

A probabilidade p de retirarmos duas balas do mesmo sabor é dada por:

$p = P(\text{banana e banana ou maçã e maçã}) = P(\text{banana e banana}) + P(\text{maçã e maçã}) = \frac{1002}{2\,004} \cdot \frac{1001}{2\,003} + \frac{1002}{2\,004} \cdot \frac{1001}{2\,003} =$

$= \frac{1002 \cdot 1001 + 1002 \cdot 1001}{2\,004 \cdot 2\,003} = \frac{2 \cdot 1002 \cdot 1001}{2\,004 \cdot 2\,003} = \frac{1001}{2\,003}$

Já a probabilidade q de que as duas balas sejam de sabores diferentes é dada por:

$q = P(\text{banana e maçã ou maçã e banana}) = P(\text{banana e maçã}) + P(\text{maçã e banana}) = \frac{1002}{2\,004} \cdot \frac{1002}{2\,003} + \frac{1002}{2\,004} \cdot \frac{1002}{2\,003} =$

$= \frac{2 \cdot 1002^2}{2\,004 \cdot 2\,003} = \frac{1002}{2\,003}$

Portanto:

$q - p = \frac{1002}{2\,003} - \frac{1001}{2\,003} = \frac{1}{2\,003}$

Resposta: alternativa **c**.

---

11. (OBM) Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2 006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

a) $\frac{1}{2^{2\,006}}$ b) $\frac{1}{2\,006}$ c) $\frac{1}{2\,007}$ d) $\frac{1}{2\,006 \cdot 2\,007}$ e) $\frac{2\,006}{2\,007}$

Durante os 2 006 dias houve apenas divisões das amebas vermelhas, com as seguintes probabilidades:

- 1º dia: $p = \frac{1}{2}$;
- 2º dia: supondo que no 1º dia foi a ameba vermelha que se dividiu, há 3 amebas: a vermelha e a amarela originais e a nova vermelha, que nasceu da primeira. Assim, a probabilidade de que aquela que irá se dividir novamente será vermelha é $p = \frac{2}{3}$;
- 3º dia: supondo que uma ameba vermelha dividiu-se no 2º dia, existem 4 amebas: a vermelha e a amarela originais e as 2 novas vermelhas, que nasceram no 2º e 3º dias. Assim, neste dia, a probabilidade de ser uma ameba vermelha aquela que irá se dividir novamente é $p = \frac{3}{4}$;
- nº dia: dado que, após n dias, há apenas uma ameba amarela e n amebas vermelhas, a probabilidade de uma ameba vermelha se duplicar é $p = \frac{n}{n+1}$.

Então:

$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2\,006}{2\,007} = \frac{1}{2\,007}$

Resposta: alternativa **c**.

12. (OBM) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1, dispostos em linhas com ordem crescente em cada uma delas e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1: 1
Linha 2: 3 5
Linha 3: 7 9 11
Linha 4: 13 15 17 19
⋮

Em qual linha aparecerá o 2 013?

a) 45 b) 46 c) 62 d) 63 e) 64

Na linha 1, aparece 1 elemento; na linha 2, aparecem 2; na linha 3, aparecem 3; ... ; na linha n aparecerão, então, n elementos.
Além disso, os números que aparecem nas diversas linhas são os números naturais ímpares e consecutivos a partir do 1. Assim, ao escrevermos até o final da linha n a quantidade de números ímpares escritos será:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Mas o número 2 013 é o 1 007º número ímpar. Logo:

$\frac{n(n+1)}{2} = 1\,007 \Rightarrow n \simeq 44$

Então, para $n = 44$ temos:

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{44 \cdot (44+1)}{2} = 990$

Então, o último elemento da linha 44 é o 990º número ímpar, que é 1 979. A próxima linha, que é a linha 45, terá 45 números ímpares, sendo o primeiro o 1 981 e o último, 2 069. Portanto:

$1\,981 + (45 - 1) \cdot 2 = 2\,069$

Logo:

$1\,981 < 2\,013 < 2\,069$

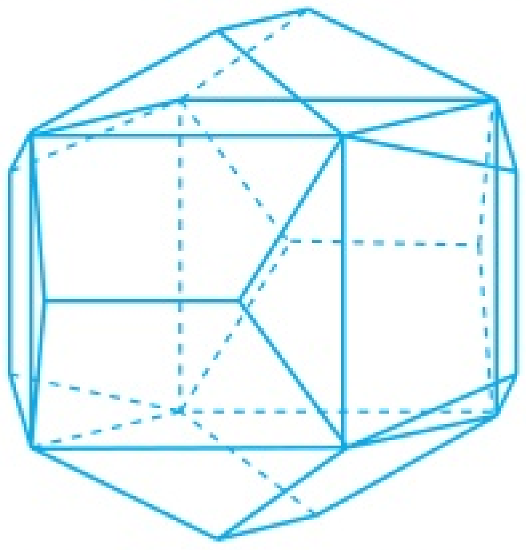
Resposta: alternativa **a**.

---

13. (OBM) Oito dos vértices de um dodecaedro regular de aresta 1 são vértices de um cubo. Qual é o volume desse cubo?

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ d) $1+\sqrt{5}$ e) $2+\sqrt{5}$

A figura abaixo ilustra um cubo com 8 vértices em comum com um dodecaedro:



A aresta do cubo é exatamente a diagonal de uma das faces do dodecaedro (que é um pentágono regular. Sendo x a medida de uma das diagonais de um pentágono regular de lado 1; pelo teorema de Ptolomeu no quadrilátero, temos $x^2 = x + 1$. Então, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Como o volume de um cubo de aresta x é $V = x^3$, multiplicando a igualdade $x^2 = x + 1$ por x, obtemos:

$x^3 = x^2 + x = (x+1)x$

Assim:

$V = x^3 = (x+1)x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{4}\left(3 + 3\sqrt{5} + \sqrt{5} + 5\right) = \frac{1}{4}\left(8 + 4\sqrt{5}\right) = 2 + \sqrt{5}$

Resposta: alternativa **e**.

14. (OBM) José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se no dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?

Sendo m_n, a_n e c_n as probabilidades de que no dia n ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente, temos:

- $m_1 = 1$
- $a_1 = c_1 = 0$

Como ele nunca usa os mesmos óculos que usou no dia anterior, no dia $n + 1$ as probabilidades m_{n+1}, a_{n+1} e c_{n+1} serão dadas por:

- $m_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n$
- $a_{n+1} = \frac{1}{2} m_n + \frac{1}{2} c_n$
- $c_{n+1} = \frac{1}{2} m_n + \frac{1}{2} a_n$

Mas, $a_{n+1} + c_{n+1} + m_{n+1} = 1$. Logo:

$$\begin{cases} a_{n+1} + c_{n+1} + m_{n+1} = 1 \\ m_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}a_n \end{cases} \Rightarrow m_{n+1} = \frac{1 - m_n}{2}$$

Portanto:

$$m_n = \frac{1 - (-2)^{2-n}}{2} \Rightarrow m_{31} = \frac{1 + 2^{-29}}{2}$$

Resposta: $p = \frac{1 + 2^{-29}}{2}$.

---

15. (OBM) Cinco inteiros positivos a, b, c, d, e maiores que 1 satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{cases} a(b + c + d + e) = 128 \\ b(a + c + d + e) = 155 \\ c(a + b + d + e) = 203 \\ d(a + b + c + e) = 243 \\ e(a + b + c + d) = 275 \end{cases}$$

Quanto vale a soma $a + b + c + d + e$?

a) 9 b) 16 c) 25 d) 36 e) 49

Considere:

$b(a + c + d + e) = 155 = 5 \cdot 31$

Mas a, b, c, d e e são inteiros positivos e 5 e 31 são números primos, então:

- $b = 5$;
- $a + b + c + d + e = 31$.

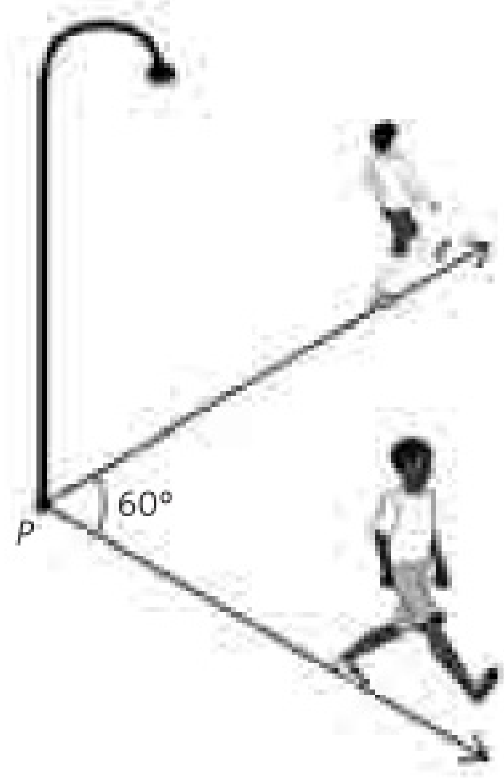
Portanto:

$a + b + c + d + e = b + (a + c + d + e) = 5 + 31 = 36$

Resposta: alternativa **d**.

16. (Obmep) Dois amigos partem ao mesmo tempo do ponto P e se afastam em direções que formam um ângulo de 60°, conforme mostra a figura ao lado. Eles caminham em linha reta, ambos com velocidade de 6 km/h. Qual será a distância entre eles 1 minuto após a partida?

a) 80 m b) 90 m c) 95 m d) 100 m e) 105 m



Após 1 minuto, a distância percorrida é:

$d = \frac{6\ \text{km}}{1\ \text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{60} = \frac{1}{10}\ \text{km} = 100\ \text{m}$

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$d^2 = 100^2 + 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \cos 60° \Rightarrow d = 100\ \text{m}$

Outra alternativa seria simplesmente perceber que o triângulo formado pelo ponto P e pelas posições ocupadas pelos dois amigos 1 minuto após a saída é um triângulo equilátero de lado 100 m. Portanto, a distância entre os dois amigos 1 minuto após a saída é de 100 m.

Resposta: alternativa **d**.

17. (Obmep) Uma formiguinha quer sair do ponto A e ir até o ponto B da figura I andando apenas pelos lados dos quadradinhos na horizontal ou na vertical para baixo, sem passar duas vezes pelo mesmo lado. A figura II mostra um possível trajeto da formiguinha.

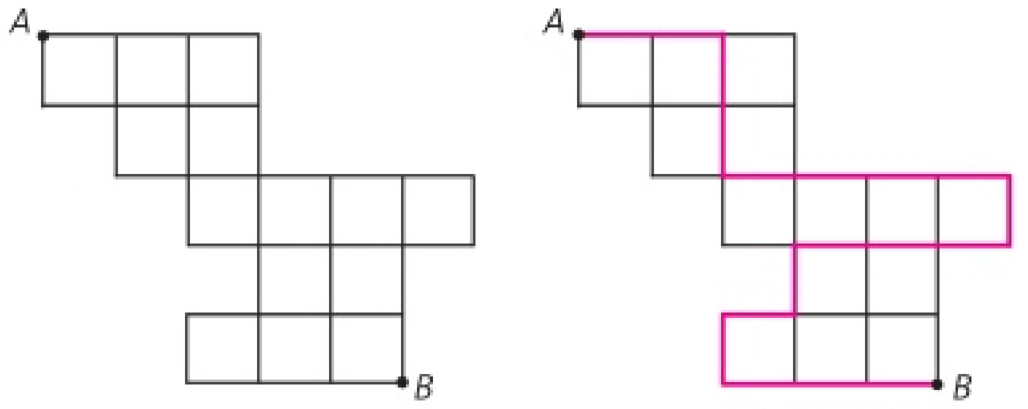


Figura I Figura II

De quantas maneiras ela pode ir de A até B?

a) 120 b) 240 c) 360 d) 480 e) 720

Para a formiguinha descer da linha de cima (ponto A) para a linha imediatamente abaixo existem 4 possibilidades. Para descer para as próximas linhas a partir daí, há, então, 5, 3 e 4 possibilidades, respectivamente.

Além disso, uma vez escolhido o caminho, o local por onde ela descerá para a linha seguinte fica univocamente determinado. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas para a formiguinha sair do ponto A para o ponto B, respeitando as restrições impostas pelo enunciado, é:

$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 720$

Resposta: alternativa **e**.

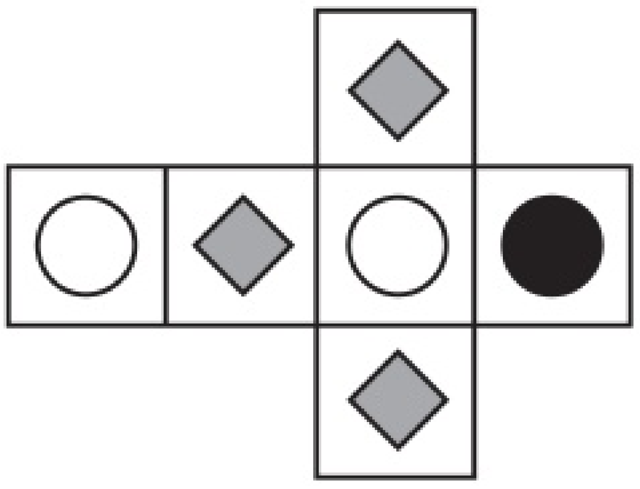
18. (Obmep) Brasil e Argentina participam de um campeonato internacional de futebol no qual competem oito seleções. Na primeira rodada serão realizadas quatro partidas, nas quais os adversários são escolhidos por sorteio. Qual é a probabilidade de Brasil e Argentina se enfrentarem na primeira rodada?

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{7}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{4}$

Se imaginarmos um dos dois times (o Brasil, por exemplo) em um dos quatro jogos, a probabilidade de que o seu adversário seja a Argentina é $\frac{1}{7}$.

Resposta: alternativa **b**.

19. (Obmep) Um dado foi construído usando a planificação da figura ao lado. Qual é a probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes?



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{31}{36}$

Podemos obter dois dos seguintes resultados diferentes:

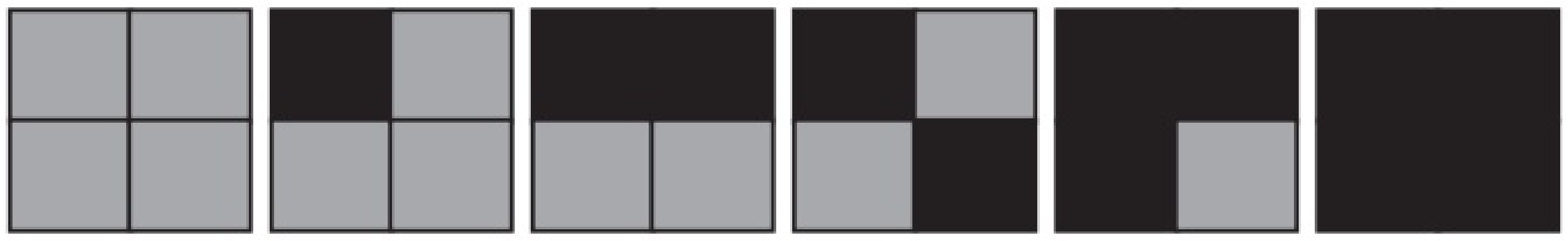
- (bola preta, bola branca): $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$
- (bola branca, bola preta): $p = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$
- (bola branca, losango): $p = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$
- (losango, bola branca): $p = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36}$
- (bola preta, losango): $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$
- (losango, bola preta): $p = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$

Portanto:

$p = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

Resposta: alternativa **b**.

20. (OCM-PB) Usando duas cores é possível pintar um quadrado 2×2 de apenas 6 maneiras diferentes mostradas abaixo usando as cores cinza e preta:



De quantas maneiras diferentes podemos pintar o quadrado da mesma forma, com 3 cores diferentes?

a) 6 b) 9 c) 12 d) 18 e) 24

Se dispusermos de 3 cores diferentes *A*, *B* e *C* teremos 3 combinações de 2 cores: *A* e *B* ou *A* e *C* ou ainda *B* e *C*.
Como com 2 cores distintas há 6 pinturas possíveis, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:
$3 \cdot 6 = 18$ modos distintos de pintar um quadrado 2×2.

Resposta: alternativa **d**.

21. (OMRN) A Mega-sena consiste de um jogo promovido pela Caixa Econômica Federal onde um apostador, quando faz uma aposta simples, escolhe aleatoriamente seis entre os números de 01 a 60, conforme ilustra o cartão de apostas ao lado.
A cada sorteio a Caixa Econômica Federal sorteia exatamente (aleatoriamente) 6 dos 60 possíveis números. Diante do exposto existem $\binom{60}{6} = 50\,063\,860$ possibilidades de sorteio.
Acertar a sena com uma única aposta simples seria tão difícil quanto apostar que num lançamento de n moedas honestas uma pessoa apostasse que todas sairiam com cara voltadas para cima. Sabendo que $\log 2 = 0{,}30$ e que $\log 50\,063\,860 = 7{,}5$, podemos afirmar que n é igual a:

Banco-OMRN/2013

a) 25. b) 23. c) 19. d) 17. e) 31.

Ao lançarmos n moedas aleatoriamente, a probabilidade de que saia cara em todos os lançamentos é:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Queremos que essa probabilidade seja a mesma de acertar no jogo da sena com apenas uma aposta simples, ou seja, $P = \dfrac{1}{50\,063\,860}$. Assim:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{50\,063\,860} \Rightarrow 2^n = 50\,063\,860$$

Aplicando logaritmos (decimais), temos:

$$2^n = 50\,063\,860 \Rightarrow \log 2^n = \log 50\,063\,860 \Rightarrow n \cdot \log 2 = \log 50\,063\,860 \Rightarrow n \cdot 0{,}30 = 7{,}5 \Rightarrow n = \frac{7{,}5}{0{,}30} = 25$$

Resposta: alternativa **a**.

22. (OPM-PB) Uma pequena loja confecciona cubos de papelão com faces coloridas. As cores das faces dos cubos são diferentes. Se a loja dispõe de 06 (seis) cores, quantos cubos distintos ela pode produzir?

Se as faces dos cubos fossem numeradas, teríamos:

$6! = 720$

Mas dois cubos são considerados distintos apenas quando um não puder ser obtido a partir de outro apenas por movimentos rígidos (rotações e/ou translações).

Ao observar a face superior de cada uma das 720 configurações sobre um plano horizontal, podemos girar o cubo de 4 formas diferentes, de modo que a face voltada para cima permaneça a mesma e isso pode ser repetido para cada uma das 6 faces. Assim, cada pintura verdadeiramente distinta foi contada $4 \cdot 6 = 24$ vezes.

Portanto, o número de modos distintos de pintarmos o cubo com faces indistinguíveis é:

$$\frac{720}{24} = 30$$

Resposta: 30.

23. (OPM-PB) Senhor Ptolomeu estava no centro da cidade e precisou ligar para um amigo. Daí, percebeu que seu celular estava com a bateria descarregada e resolveu ligar usando um telefone público. Mas não lembrava o último algarismo do número do telefone de seu amigo. Se ele só tem duas unidades, qual a probabilidade de que ele consiga conversar com seu amigo, tentando ligar do telefone público?

O Sr. Ptolomeu pode conseguir falar com seu amigo logo na primeira chamada ou apenas na segunda. Como o sistema de numeração decimal possui 10 algarismos e o Sr. Ptolomeu não sabe apenas o último, a probabilidade de que ele consiga telefonar logo na primeira tentativa é:

$$p = \frac{1}{10}$$

Mas a probabilidade de que ele erre a primeira ligação e acerte apenas a segunda é:

$$p = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9}$$

Portanto:

$$p = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Resposta: $\frac{1}{5}$.

24. (OPM-SP)

a) Escreva o termo geral do desenvolvimento de $\left(\sqrt{5} + \sqrt[3]{13}\right)^7$.

b) Determine os termos racionais no desenvolvimento do binômio anterior.

a) $T_{p+1} = \binom{7}{p} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{7-p} \cdot \left(\sqrt[3]{13}\right)^{p} = \binom{7}{p} \cdot 5^{\frac{7-p}{2}} \cdot 13^{\frac{p}{3}}$

b) $\binom{7}{p}$ é inteiro para todo natural $0 \leqslant p \leqslant 7$, se o termo $T_{p+1} = \binom{7}{p} 5^{\frac{7-p}{2}} \cdot 13^{\frac{p}{3}}$ for racional, isto é, quando os expoentes $\frac{7-p}{2}$ e $\frac{p}{3}$ forem inteiros, o que ocorre quando p é ímpar, múltiplo de 3 e $0 \leqslant p \leqslant 7$, logo: $p = 3$.

Portanto, o único termo racional do desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{5} + \sqrt[3]{13}\right)^7$ é:

$$T_{3+1} = \binom{7}{3} \cdot 5^{\frac{7-3}{2}} \cdot 13^{\frac{3}{3}} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 5^2 \cdot 13^1 = 11\,375$$

25. (OPM-PB) Mostre que para todo inteiro $n > 1$, $n + 1$ divide $\binom{2n}{n}$.

Se n é um número inteiro maior que 1, temos:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)! \cdot n!}{(n+1)n! \cdot n(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{n \cdot (2n)!}{(n+1)n!\,n!} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[1 - \frac{n}{n+1}\right] = \binom{2n}{n}\left[\frac{n+1-n}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Como $\binom{2n}{n}$ e $\binom{2n}{n-1}$ são números inteiros, $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ também é inteiro, pois é a diferença de dois inteiros. Logo:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Então, se $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ é inteiro, isso significa que o inteiro $n > 1$, e $n + 1$ divide $\binom{2n}{n}$.

26. (OMRN) Uma sala de aula tem 30 estudantes: 15 rapazes e 15 garotas. As cadeiras da sala são arrumadas em 5 filas e 6 colunas. Pretende-se sentar os estudantes de modo que nenhum rapaz esteja imediatamente em frente, imediatamente atrás ou imediatamente ao lado de outro rapaz. O mesmo deve ocorrer entre as garotas. De quantos modos os estudantes podem ocupar as cadeiras da sala?

Considere as cadeiras da sala como um tabuleiro de xadrez, onde as cadeiras sejam alternadamente brancas e pretas e os estudantes do mesmo sexo devem sentar em cadeiras de mesma cor. Uma vez escolhidas a cor das cadeiras para os rapazes, existem 15! maneiras de colocá-los nas cadeiras de mesma cor. O mesmo acontece com as garotas. Portanto:
$2 \cdot (15!)^2$

Resposta: $2 \cdot (15!)^2$

27. (Omerj) Após passar por diversas etapas em um programa de auditório, Larissa foi convidada para sortear o seu prêmio (um carro zero quilômetro). O sorteio é realizado com uma roleta circular, dividida em 6 setores de mesma área: três estão marcados como “Carro”, dois como “Perde” e um como “Gire novamente”. Para descobrir qual prêmio ganhará, Larissa deve girar a roleta.
Se a roleta parar em “Carro”, Larissa ganha o carro; se ela parar em “Perde”, Larissa volta para casa sem nada; se a roleta parar em “Gire novamente”, ela deve girar a roleta outra vez (não há limite no número de repetições permitidas). Qual é a probabilidade de Larissa ganhar o carro?

Seja p a probabilidade de Larissa ganhar o carro.
A probabilidade de que ela ganhe o carro na primeira rodada é $\frac{3}{6}$ e a probabilidade de que ela consiga a oportunidade de girar a roleta novamente é $\frac{1}{6}$.
Assim, a probabilidade p de Larissa ganhar o carro é:

$$p = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot p \Rightarrow p = \frac{3}{5}$$

Desse modo, Larissa ganha o carro na primeira rodada ou a roleta para em “gire novamente” e ela tira o carro algum momento após isso.
Outra maneira de calcular a probabilidade p de Larissa ganhar o carro pode ser calculada assim:
Na primeira rodada, ela pode ganhar o carro ou apenas a chance de girar novamente a roleta, indo para mais uma rodada. Na rodada seguinte, o mesmo pode acontecer, e assim sucessivamente. Portanto:

$$p = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \ldots = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{3}{5}$$

Resposta: $\frac{3}{5}$.

---

28. (OMRN) Paulinho arremessa aleatoriamente uma moeda comum onde numa face possui “cara” e na outra “coroa”, por várias vezes. A cada lançamento ele anota o resultado num papel e ele promete parar a brincadeira quando ocorrerem duas “caras” consecutivas. Qual a probabilidade de que Paulinho faça exatamente 10 lançamentos até parar com a brincadeira?

Em 10 lançamentos de uma mesma moeda existem 2^{10} resultados possíveis.
Seja A_i o resultado obtido no i-ésimo lançamento da moeda, queremos determinar o número de resultados possíveis em que $A_9 = A_{10} =$ cara, sem que haja duas caras consecutivas em $A_1 A_2 A_3 \ldots A_8 A_9$, uma vez que queremos que o processo termine exatamente após o 10º lançamento.
Assim, devemos ter $A_8 =$ coroa. Caso contrário, teríamos $A_8 = A_9 =$ cara, e o jogo acabaria imediatamente após o 9º lançamento da moeda.
Como já sabemos que os três últimos resultados devem ser, respectivamente, coroa, cara, cara, precisamos, então, determinar quantas sequências de 7 lançamentos não possuem duas caras consecutivas. Assim, seja $x - n$ o número de sequências de tamanho n em que não aparecem duas caras em posições consecutivas, temos dois tipos de sequências possíveis:

- as que começam por (cara, coroa); seguida por uma sequência de $n - 2$ termos, em que não aparecerão duas caras consecutivas.
- as que começam por coroa; seguida por uma sequência de $n - 1$ termos em que não aparecerão duas caras consecutivas.

Logo, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Então:

- Se $n = 1$, teríamos apenas duas possibilidades: cara ou coroa ($x_1 = 2$).
- Se $n = 2$, teríamos 3 possibilidades: (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa) ($x_2 = 3$).

Como $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, os primeiros termos da sequência são (2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...). Então, $x_7 = 34$.
Há, portanto, 34 sequências de 7 lançamentos que não possuem duas caras consecutivas. Sendo assim:

$$p = \frac{34}{1024} = \frac{17}{512}$$

Resposta: $p = \frac{17}{512}$.

29. (OPM-PB) Mostre que $4 \cos 20° - \dfrac{1}{\cos 80°}$ é um número inteiro.

$$4 \cos 20° - \frac{1}{\cos 80°} = \frac{4 \cdot \cos 20° \cdot \cos 80° - 1}{\cos 80°}$$

Mas $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos (x + y) + \cos (x - y)]$. Assim, para $x = 80°$ e $y = 10°$, temos:

$$4 \cdot \cos 80° \cdot \cos 20° = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos (80° + 20°) + \cos (80° - 20°)] = 2 [\cos 100° + \cos 60°] = 2 \cos 100° + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cos 100° + 1$$

Portanto:

$$4 \cos 20° - \frac{1}{\cos 80°} = \frac{4 \cdot \cos 20° \cdot \cos 80° - 1}{\cos 80°} \Rightarrow 4 \cos 20° - \frac{1}{\cos 80°} = \frac{2 \cdot \cos 100° + 1}{\cos 80°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cos 20° - \frac{1}{\cos 80°} = \frac{2 \cos 100°}{\cos 80°} = \frac{2(-\cos 80°)}{\cos 80°} = -2$$

30. (Omerj) Dado que $(\text{sen } 1°) \cdot (\text{sen } 3°) \cdot (\text{sen } 5°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 89°) = \dfrac{1}{2^n}$, determine n.

No primeiro membro da expressão $(\text{sen } 1°) \cdot (\text{sen } 3°) \cdot (\text{sen } 5°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 89°) = \frac{1}{2^n}$, aparecem os senos dos ângulos cujas medidas são os números ímpares de 1 a 89.

Vamos, então, "completar" o primeiro membro da expressão acima colocando os senos dos ângulos de 1° a 89°, cujas medidas são dadas pelos números pares de 2° até 88°. Assim:

$$(\text{sen } 1°) \cdot (\text{sen } 3°) \cdot (\text{sen } 5°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 89°) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow (\text{sen } 1°) \cdot (\text{sen } 3°) \cdot (\text{sen } 5°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 89°) \cdot \frac{(\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 4°) \cdot (\text{sen } 6°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 88°)}{(\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 4°) \cdot (\text{sen } 6°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 88°)} = \frac{1}{2^n}$$

Reorganizando as ordens dos fatores, temos:

$$\frac{(\text{sen } 1°) \cdot (\text{sen } 89°) \cdot (\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 88°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 44°) \cdot (\text{sen } 46°) \cdot (\text{sen } 45°)}{(\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 4°) \cdot (\text{sen } 6°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 88°)} = 2^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\text{sen } 1°) \cdot (\cos 1°) \cdot (\text{sen } 2°) \cdot (\cos 2°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 44°) \cdot (\cos 44°) \cdot (\text{sen } 45°)}{(\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 4°) \cdot (\text{sen } 6°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 88°)} = 2^{-n}$$

Lembrando que:

$$\text{sen } (2x) = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \Rightarrow \text{sen } x \cos x = \frac{1}{2} \text{ sen } (2x)$$

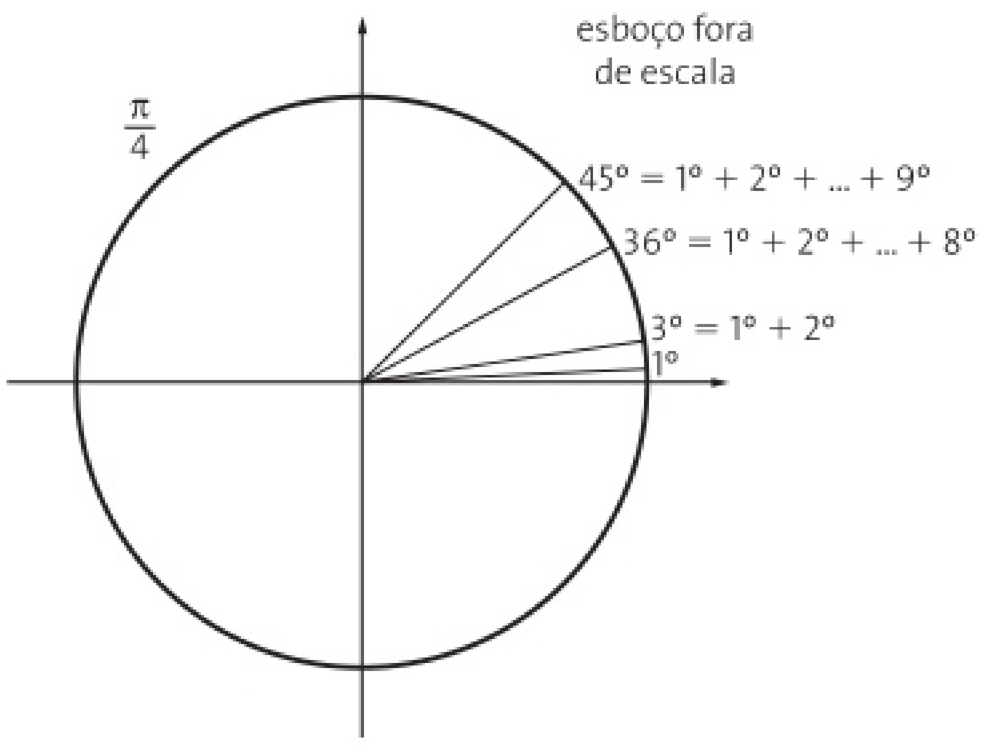
vem:

$$\frac{(\text{sen } 1°) \cdot (\cos 1°) \cdot (\text{sen } 2°) \cdot (\cos 2°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 44°) \cdot (\cos 44°) \cdot (\text{sen } 45°)}{(\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 4°) \cdot (\text{sen } 6°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 88°)} = 2^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot (\text{sen } 2°) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\text{sen } 4°) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos 88°) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{(\text{sen } 2°) \cdot (\text{sen } 4°) \cdot (\text{sen } 6°) \cdot \ldots \cdot (\text{sen } 88°)} = 2^{-n} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{44} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{-44} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-44,5} = 2^n \Rightarrow n = 44,5$$

Resposta: $n = 44,5$.

31. (OPM-SP) Observando a figura ao lado, mostre que: $(\text{sen } 1°) + (\text{sen } 2°) + \ldots + (\text{sen } 9°) < \frac{\pi}{4}$.



Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } x < x$, temos:

- $\text{sen } 1° = \text{sen } \frac{\pi}{180} < \frac{\pi}{180}$
- $\text{sen } 2° = \text{sen } \frac{2\pi}{180} < \frac{2\pi}{180}$
- $\text{sen } 3° = \text{sen } \frac{3\pi}{180} < \frac{3\pi}{180}$

⋮

- $\text{sen } 9° = \text{sen } \frac{9\pi}{180} < \frac{9\pi}{180}$

Adicionando membro a membro as desigualdades acima, obtemos:

$\text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots + \text{sen } 9° < \frac{\pi}{180} + \frac{2\pi}{180} + \frac{3\pi}{180} + \ldots + \frac{9\pi}{180} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots + \text{sen } 9° < \frac{\pi}{180}(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \Rightarrow \text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots + \text{sen } 9° < \frac{\pi}{180} \cdot 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots + \text{sen } 9° < \frac{\pi}{4}$

32. (OMRN) Prove que $1 - \text{cotg } 23° = \frac{2}{1 - \text{cotg } 22°}$.

$1 - \text{cotg } 23° = \frac{2}{1 - \text{cotg } 22°} \Rightarrow (1 - \text{cotg } 23°) \cdot (1 - \text{cotg } 22°) = 2$

Vamos mostrar que $(1 - \text{cotg } 23°) \cdot (1 - \text{cotg } 22°) = 2$.

Assim:

$(1 - \text{cotg } 23°) \cdot (1 - \text{cotg } 22°) = 1 - (\text{cotg } 23° + \text{cotg } 22°) + \text{cotg } 23° \cdot \text{cotg } 22°$

Mas:

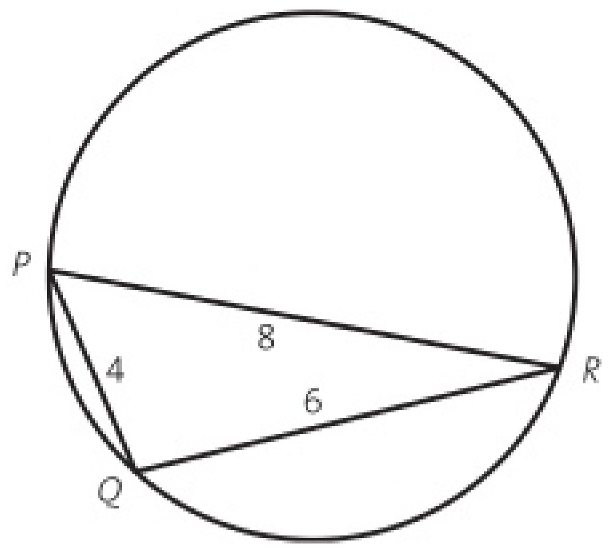
$23° + 22° = 45° \Rightarrow \text{cotg } (23° + 22°) = \text{cotg } 45° \Rightarrow \frac{\text{cotg } 23° \cdot \text{cotg } 22° - 1}{\text{cotg } 23° + \text{cotg } 22°} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{cotg } 23° \cdot \text{cotg } 22° - 1 = \text{cotg } 23° + \text{cotg } 22° \Rightarrow -(\text{cotg } 23° + \text{cotg } 22°) + \text{cotg } 23° + \text{cotg } 22° = 1$

Então:

$(1 - \text{cotg } 23°) \cdot (1 - \text{cotg } 22°) = 1 - \underbrace{(\text{cotg } 23° + \text{cotg } 22°) + \text{cotg } 23° \cdot \text{cotg } 22°}_{1} = 1 + 1 = 2$

33. (OIM-ING) Um círculo de vértices P, Q e R está inscrito numa circunferência, conforme ilustra a figura ao lado. Se $PQ = 4$ cm, $QR = 6$ cm e $PR = 8$ cm, qual a medida do raio do círculo indicado na figura?



a) $\frac{16}{15}\sqrt{15}$ cm b) $\frac{1}{2}\sqrt{16}$ cm c) 10 cm d) $4\sqrt{6}$ cm e) 18 cm

A medida da área de um triângulo de lados a, b e c pode ser obtida da seguinte forma:

$A_{\triangle} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ e R é a medida do raio da circunferência circunscrita.

Mas:

$$p = \frac{4+6+8}{2} = 9$$

Então:

$$A_{\triangle} = \sqrt{9 \cdot (9-4) \cdot (9-6) \cdot (9-8)} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = 3\sqrt{15}$$

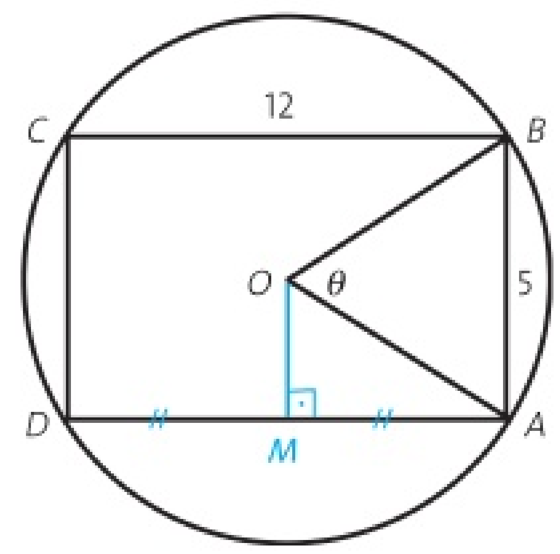
Logo:

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{2} = 3\sqrt{15} \Rightarrow R = \frac{16}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

Resposta: alternativa **a**.

---

34. (OIM-ING) O retângulo $ABCD$ está inscrito num círculo como ilustra a figura ao lado. Sabendo que $AB = 5$, $BC = 12$ e med$(B\hat{O}A) = \theta$. Podemos afirmar que sen θ é igual a:



a) $\frac{120}{169}$. b) $\frac{60}{169}$. c) $\frac{5}{13}$. d) $\frac{10}{13}$. e) $\frac{12}{13}$.

Ligando-se o ponto O com o ponto M, médio do segmento AB, temos:

$$\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{6} = \frac{5}{12}$$

Assim:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2}}{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{169}$$

Resposta: alternativa **a**.

35. (USAMO) Quantas soluções possui a equação sen $(2\,002 \cdot x)$ = sen $(2\,003 \cdot x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$?

$\text{sen}\,(2\,002 \cdot x) = \text{sen}\,(2\,003 \cdot x) \Rightarrow 2\,003x = 2\,002 + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Então:

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant 2k\pi \leqslant 2\pi \Rightarrow \dfrac{0}{2\pi} \leqslant \dfrac{2k\pi}{2\pi} \leqslant \dfrac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow 0 \leqslant k \leqslant 1$

Como $k \in \mathbb{Z}$, $k = 0$ ou $k = 1$.

Resposta: Duas soluções.

36. (OIM-CAN) Sabendo que sen α + sen β + sen $\gamma = 0$, determine:

$$S = \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma}\right)^{2\,008} + \left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\gamma}\right)^{2\,008} + \left(\frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}\right)^{2\,008}.$$

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = -\text{sen}\,\gamma \\ \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\gamma = -\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma = -\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

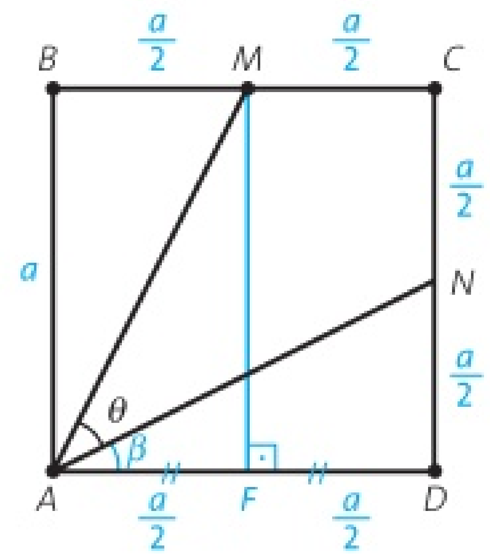
Assim:

$$S = \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma}\right)^{2\,008} + \left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\gamma}\right)^{2\,008} + \left(\frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}\right)^{2\,008} = \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{-\text{sen}\,\alpha}\right)^{2\,008} + \left(\frac{\text{sen}\,\beta}{-\text{sen}\,\beta}\right)^{2\,008} + \left(\frac{\text{sen}\,\gamma}{-\text{sen}\,\gamma}\right)^{2\,008} =$$

$$= (-1)^{2\,008} + (-1)^{2\,008} + (-1)^{2\,008} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Resposta: $S = 3$.

37. (AHSME) *ABCD* é um quadrado e *M* e *N* são pontos médios de *BC* e *CD*, respectivamente. Então:



a) $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$.

c) $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

d) $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$.

e) $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{5}$.

Temos:

- no triângulo *AMF*: $\text{tg}\,(\theta + \beta) = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$
- no triângulo *ADN*: $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$

Então:

$$\text{tg}\,(\theta + \beta) = 2 \Rightarrow \frac{\text{tg}\,\theta + \frac{1}{2}}{1 - \text{tg}\,\theta \cdot \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \text{tg}\,\theta + \frac{1}{2} = 2 - \text{tg}\,\theta \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{3}{4}$$

Mas:

- $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{tg}\,\theta}$

Logo:

$$\text{sen}^2\,\theta + \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{tg}\,\theta}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\theta + \frac{16}{9} \cdot \text{sen}^2\,\theta = 1 \Rightarrow \frac{25}{9} \cdot \text{sen}^2\,\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\theta = 1 - \frac{25}{9} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$$

Resposta: alternativa **b**.

38. (AIME) Resolva o sistema $\begin{cases} 2a + b + c + d + e = 6 \\ a + 2b + c + d + e = 12 \\ a + b + 2c + d + e = 24 \\ a + b + c + 2d + e = 48 \\ a + b + c + d + 2e = 96 \end{cases}$.

Adicionando as equações, obtemos:

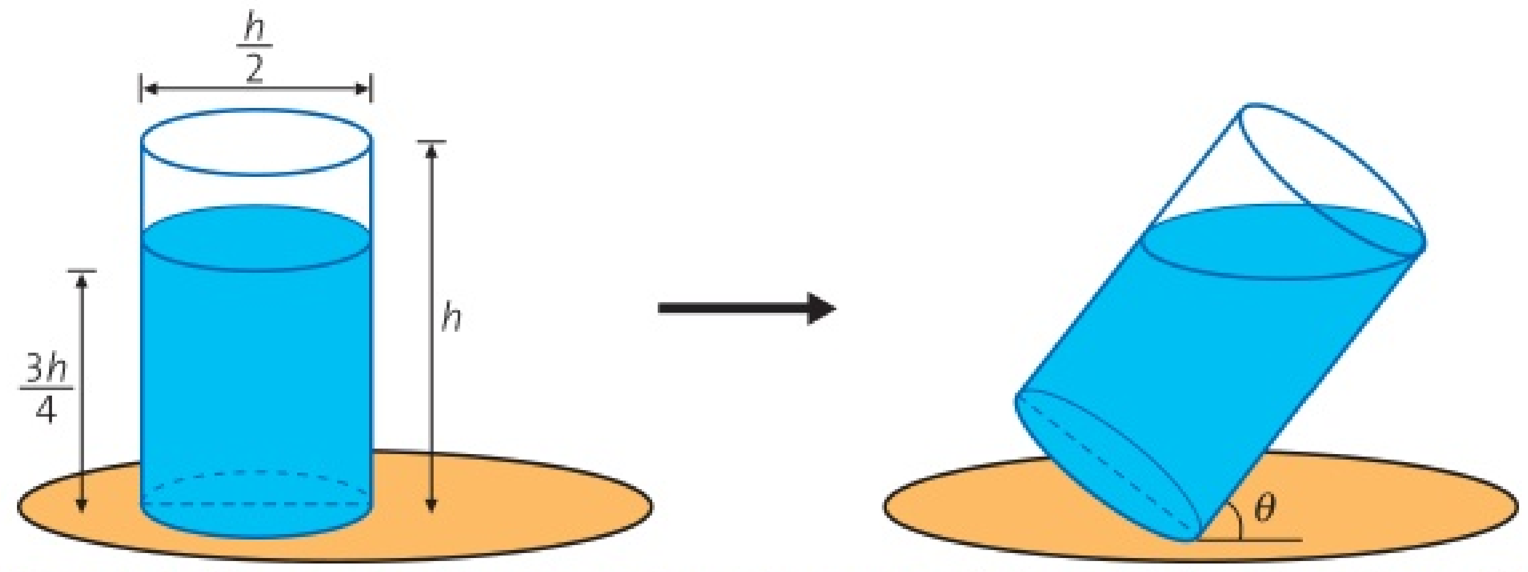
$6 \cdot (a + b + c + d + e) = 186 \Rightarrow a + b + c + d + e = 31$

Então:

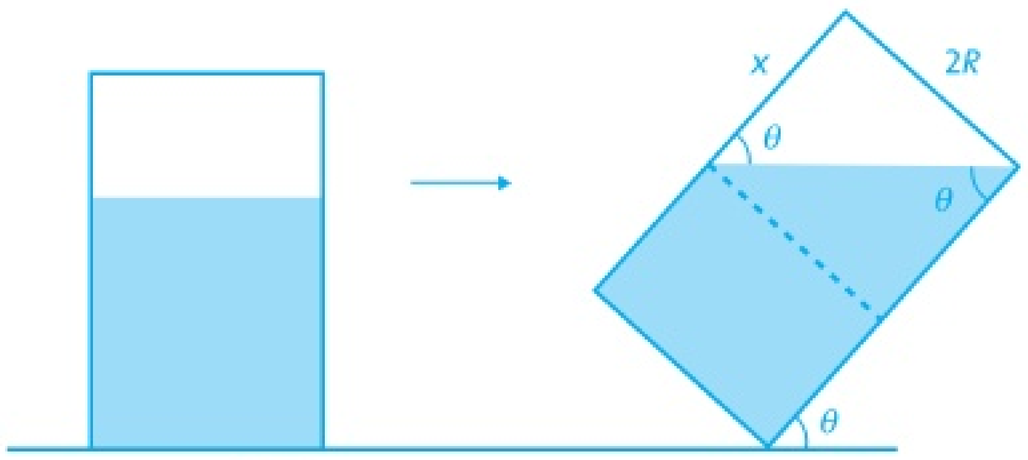
$$\begin{cases} 2a + b + c + d + e = 6 \\ a + 2b + c + d + e = 12 \\ a + b + 2c + d + e = 24 \\ a + b + c + 2d + e = 48 \\ a + b + c + d + 2e = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + (a + b + c + d + e) = 6 \\ b + (a + b + c + d + e) = 12 \\ c + (a + b + c + d + e) = 24 \\ d + (a + b + c + d + e) = 48 \\ e + (a + b + c + d + e) = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 - 31 = -25 \\ b = 12 - 31 = -19 \\ c = 24 - 31 = -7 \\ d = 48 - 31 = 17 \\ e = 96 - 31 = 65 \end{cases}$$

Resposta: $S = \{(-25, -19, -7, 17, 65)\}$.

39. (RPM) Um copo cilíndrico de altura h e diâmetro $\frac{h}{2}$ tem água até uma altura $\frac{3h}{4}$. Calcule o ângulo de inclinação do copo, com relação à horizontal, de modo que a queda de água seja iminente.



Quando inclinamos o recipiente, a parte vazia corresponde à metade do volume de um cilindro de altura x e cuja base tem raio R, que é igual à medida do raio da base do cilindro maior, conforme ilustra a figura abaixo:



Assim, $\text{tg}\,\theta = \frac{2R}{x}$.

Além disso, o volume da parte vazia nas duas situações é o mesmo. Quando o cilindro está na posição vertical, o volume da parte vazia corresponde ao volume de um cilindro de raio da base R e altura $\frac{h}{4}$, ou seja, $V = \pi R^2 \cdot \frac{h}{4}$.

Já no cilindro inclinado o volume da parte vazia corresponde à metade do volume de um cilindro de raio da base R e altura x, ou seja: $V = \pi R^2 x$.

Então:

$$\frac{1}{2}\pi R^2 x = \pi R^2 \cdot \frac{h}{4} \Rightarrow x = \frac{h}{2}$$

Portanto:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{2R}{x} = \frac{2R}{\frac{h}{2}} = \frac{4R}{h}$$

Finalmente, pelo enunciado, o diâmetro da base corresponde à metade da altura do cilindro original, ou seja:

$$2R = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 4R$$

Portanto:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{4R}{h} = \frac{4R}{4R} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

Resposta: $\theta = 45°$.

Vestibular em foco

Trigonometria em triângulos quaisquer

1. b
2. a) 3, 5 e 7.
   b) $\theta = 120°$
3. c
4. a
5. a
6. c
7. e
8. a
9. c
10. c
11. d
12. a

Ciclo trigonométrico e funções trigonométricas

1. 02
2. a
3. d
4. c
5. e
6. d
7. e
8. e
9. b
10. a
11. b
12. d
13. c
14. a
15. d
16. b

Relações trigonométricas

1. a
2. e
3. b
4. 15
5. c
6. a
7. b
8. d
9. a
10. b

Matrizes

1. a
2. e
3. e
4. e
5. b
6. c
7. c
8. b
9. d
10. d
11. *AB*

Determinantes

1. e
2. e
3. c
4. d
5. a
6. b
7. b
8. b
9. a
10. d

Sistemas lineares

1. d
2. a
3. d
4. b
5. c
6. d
7. d
8. c
9. 05
10. b

Circunferência

1. a
2. a
3. c
4. b
5. a
6. a
7. b
8. a
9. b
10. d
11. a

Áreas: medidas de superfície

1. b
2. d
3. a
4. d
5. d
6. c
7. e
8. d
9. 11 cm^2
10. c
11. d
12. c
13. b
14. c
15. a
16. e
17. c
18. e
19. c
20. 04
21. c

Poliedros, prismas e pirâmides

1. e
2. d
3. b
4. e

5. c
6. a
7. d
8. d
9. b
10. a
11. c
12. c
13. d
14. c
15. b
16. e
17. a
18. a
19. c
20. b
21. d
22. d
23. a
24. b
25. d
26. d
27. a
28. d
29. 24 cm^3
30. d
31. 6 m

Corpos redondos

1. a
2. d
3. d
4. c
5. b
6. c
7. e
8. e
9. d
10. e
11. d
12. d
13. d
14. a

Análise combinatória

1. b
2. b
3. c
4. d
5. 1 680 mensagens.
6. e
7. a
8. 03
9. d
10. 336 modos diferentes.
11. d
12. c
13. b
14. c
15. e
16. a
17. c
18. d
19. a
20. c
21. d
22. d
23. b
24. a
25. e
26. b
27. 04
28. c
29. c
30. $S = \{5\}$
31. a
32. e
33. c

Probabilidade

1. c
2. b
3. c
4. c
5. a
6. c
7. a
8. a
9. b
10. $\frac{2}{7}$
11. b
12. c
13. c
14. e
15. a
16. a
17. d
18. a
19. d
20. c
21. d

Desafio

1. e
2. d
3. a
4. c
5. a
6. d
7. d
8. b
9. d
10. c
11. c
12. a
13. e
14. $p = \frac{1 + 2^{-29}}{2}$
15. d
16. d
17. e
18. b
19. b
20. d
21. a
22. 30
23. $\frac{1}{5}$
24. a) $T_{p+1} = \binom{7}{p} \cdot 5^{\frac{7-p}{2}} \cdot 13^{\frac{p}{3}}$

b) 11 375

26. $2 \cdot (15!)^2$
27. $\frac{3}{5}$
28. $p = \frac{17}{512}$
30. $n = 44{,}5$
33. a
34. a
35. Duas soluções.
36. $S = 3$
37. b
38. $S = \{(-25, -19, -7, 17, 65)\}$
39. $\theta = 45°$

Significado das siglas

AHSME	American High School Mathematics Examination (Exame Norte-americano de Matemática do Ensino Médio)
Aime	American Invitational Mathematics Examination (Exame Norte-americano de seleção de Matemática)
Cesgranrio-RJ	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
ESCS-DF	Escola Superior de Ciências da Saúde (Distrito Federal)
EsPCEx-SP	Escola Preparatória de Cadetes do Exército (São Paulo)
ESPM-RJ	Escola Superior de Propaganda e Marketing (Rio de Janeiro)
ESPM-RS	Escola Superior de Propaganda e Marketing (Rio Grande do Sul)
ESPM-SP	Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
Fasm-SP	Faculdade Santa Marcelina (São Paulo)
Fatec-SP	Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
Favip-PE	Faculdade do Vale do Ipojuca (Caruaru, Pernambuco)
FEI-SP	Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FFFCMPA-RS	Fundação Faculdade Federal de Ciências Médicas de Porto Alegre (Rio Grande do Sul)
FGV-SP	Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
FMABC-SP	Faculdade de Medicina do ABC (São Paulo)
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
IFMG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
IFPE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IFSC	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Insper-SP	Instituto de Ensino e Pesquisa (São Paulo)
ITA-SP	Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCM-PB	Olimpíada Campinense de Matemática (Paraíba)
OIM-ING	Olimpíada Internacional de Matemática (Inglaterra)
OIM-CAN	Olimpíada Internacional de Matemática (Canadá)
Omerj	Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
OMRN	Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte
OPM-PB	Olimpíada Pessoense de Matemática (Paraíba)
OPM-SP	Olimpíada Paulista de Matemática (São Paulo)
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUCC-SP	Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)
RPM	Revista do Professor de Matemática
UCS-RS	Universidade de Caxias do Sul (Rio Grande do Sul)
Udesc	Universidade do Estado de Santa Catarina
UEA-AM	Universidade do Estado do Amazonas

Uece	Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO	Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
UEMS	Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UEPG-PR	Universidade Estadual de Ponta Grossa (Paraná)
Uerj	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Uesc-BA	Universidade Estadual de Santa Cruz (Bahia)
Uespi	Universidade Estadual do Piauí
Ufal	Universidade Federal de Alagoas
Ufam	Universidade Federal do Amazonas
UFC-CE	Universidade Federal do Ceará
UFCG-PB	Universidade Federal de Campina Grande (Paraíba)
Ufes	Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ	Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
UFGD-MS	Universidade Federal da Grande Dourados (Rio Grande do Sul)
UFG-GO	Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG	Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
Ufla-MG	Universidade Federal de Lavras (Minas Gerais)
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
Ufpel-RS	Universidade Federal de Pelotas (Rio Grande do Sul)
UFRGS-RS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFS-SE	Universidade Federal de Sergipe
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
Ufscar-SP	Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFSM-RS	Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFTM-MG	Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Minas Gerais)
UFU-MG	Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UFV-MG	Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
Uneb-BA	Universidade do Estado da Bahia
Unesp-SP	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP	Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicid-SP	Universidade Cidade de São Paulo
Unifacs-BA	Universidade Salvador (Bahia)
Unifesp	Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE	Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unimontes-MG	Universidade de Montes Claros (Minas Gerais)
Unirg-TO	Universidade Regional de Gurupi (Tocantins)
Unirio-RJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
Unisc-RS	Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
UPE	Universidade de Pernambuco
UPM-SP	Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
USAMO	USA Mathematical Olympiad (Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos da América)
USS-RJ	Universidade Severino Sombra (Rio de Janeiro)
Vunesp-SP	Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

PROJETO
MÚLTIPLO

Os Cadernos de Estudo do **Projeto Múltiplo** foram elaborados para auxiliar o estudante a revisar os conteúdos abordados e verificar sua aprendizagem, trazendo quadros-resumo dos principais assuntos e centenas de questões de vestibulares e de olimpíadas. Na área de Língua Portuguesa, as questões de vestibulares são seguidas da seção “O desafio da redação”.

editora ática

ISBN 978-85-08-16706-7

9 788508 167067