Coleção
SCHAUM

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

2ª edição

Elliot Mendelson

A preparação para o Cálculo passo a passo

Perfeito para estudo e revisão da matéria

Cerca de 1500 problemas complementares com as respostas

MAIS DE 30 MILHÕES DE EXEMPLARES VENDIDOS NO MUNDO

Bookman®

M537i Mendelson, Elliot
Introdução ao cálculo / Elliot Mendelson ; tradução Adonai Schlup Sant'Anna. – 2. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2007.
384 p. : il. p&b ; 28 cm. – (Coleção Schaum)

ISBN 978-85-60031-53-5 ou 85-60031-53-7

1. Matemática – Cálculo. I. Título.

CDU 51-3

Catalogação na publicação: Júlia Angst Coelho – CRB 10/1712

ELLIOT MENDELSON, Ph.D.
Professor de Matemática
Queens College
City University of New York

Teoria e Problemas de
INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

2ª Edição

Tradução:
Adonai Schlup Sant'Anna
Pós-Doutorado em Física Teórica pela Stanford University – EUA
Pesquisador visitante da University of South Carolina – EUA
Doutor em Filosofia pela Universidade de São Paulo
Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Obra originalmente publicada sob o título
Schaum's Outline of Theory and Problems of Beginning Calculus, 2nd Edition
ISBN 007-041733-4

Capa: *Rogério Grilho*

Leitura final: *Rachel Garcia Valdez*

Supervisão editorial: *Denise Weber Nowaczyk*

Editoração eletrônica: *Laser House*

ELLIOT MENDELSON é professor de Matemática no Queens College da City University of New York. Também lecionou na University of Chicago, na Columbia University e na University of Pennsylvania, foi membro da Society of Fellows da Harvard University. É autor de vários livros, incluindo *Boolean Algebra and Switching Circuits*, da Coleção Schaum. Sua principal área de pesquisa é lógica matemática e teoria de conjuntos.

Em memória dos meus pais, Joseph e Helen

Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

SÃO PAULO
Av. Angélica, 1.091 – Higienópolis
01227-100 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Apresentação à Edição Brasileira

Elliott Mendelson é autor de um importante livro de lógica matemática, ainda hoje usado em cursos avançados de matemática e ciência da computação do mundo inteiro. Perceber que um pesquisador e autor deste calibre é capaz de escrever um texto tão introdutório como o presente livro e tão apropriado para estudantes que estão começando um curso superior nas áreas de ciências exatas e tecnológicas é uma surpresa e um grande prazer. Muito raramente pessoas de excepcional formação, como o autor, demonstram interesse em escrever livros introdutórios. Comumente o ensino que antecede a pós-graduação é subestimado, tratado como se exigisse uma carga menor de conhecimento. Isso é falso. Escrever sobre cálculo diferencial e integral para alunos que estão começando um curso superior, de forma que os mesmos entendam o conteúdo sem se deterem em preciosismos, é uma tarefa que só pode ser realizada por alguém que domine amplamente o tema e, ainda assim, consiga assumir um compromisso de didática. Mendelson cumpre esses dois papéis muito bem. O leitor pode se considerar um privilegiado por ter acesso, em língua portuguesa, a um texto de tanto valor. Nosso idioma normalmente é desvalorizado. Muitos livros de excepcional qualidade jamais foram traduzidos e provavelmente jamais o serão. Mesmo autores que escrevem originalmente em nosso idioma encontram dificuldades para conseguir publicar suas contribuições com o apoio de editoras que contam com eficiente serviço de distribuição. E este livro é uma pequena flor que consegue se destacar neste difícil mercado editorial. Espero que exemplos como este sejam cada vez mais seguidos.

Ao leitor, parabéns pela escolha.

Adonai S. Sant'Anna

Prefácio

Esta obra é limitada àquilo que é essencial ao cálculo. Ela cuidadosamente desenvolve, *passo a passo*, os princípios de derivação e integração a partir dos quais todo o cálculo é edificado. O livro é adequado tanto para revisão quanto para um curso auto-suficiente de cálculo elementar.

O autor tem percebido que muitas das dificuldades que os estudantes encontram no cálculo são devido a deficiências em álgebra e cálculos aritméticos, e que ênfase é dada nesses assuntos sempre que necessários. Grande esforço foi empreendido – especialmente no que se refere à composição dos problemas resolvidos – para facilitar a introdução do iniciante no cálculo. Há também cerca de 1500 problemas complementares (com uma lista completa de respostas no final do livro).

Disciplinas de cálculo em cursos técnicos também podem ser beneficiadas com este livro.

Esta segunda edição apresenta melhoramentos:

1. Um grande número de problemas foi acrescentado pensando-se na disponibilidade de calculadoras gráficas. Tais problemas são precedidos pela notação $\boxed{\text{CG}}$. A solução desses problemas não é necessária para a compreensão do texto, de modo que os estudantes que não têm uma calculadora gráfica não serão seriamente prejudicados (a não ser que o uso de uma calculadora gráfica facilite sua compreensão dos conteúdos).

2. A abordagem de vários tópicos foi expandida:

(*a*) O Método de Newton é agora assunto de toda uma seção. A disponibilidade de calculadoras torna muito mais fácil lidar com problemas concretos por meio desse método.

(*b*) Maior atenção é dada, e mais problemas são apresentados, sobre técnicas de aproximação numérica para integração, como a regra trapezoidal, a regra de Simpson e a regra do ponto médio.

(*c*) A regra da cadeia tem agora uma demonstração completa esboçada em um exercício.

3. A exposição foi simplificada em vários pontos e um número substancial de problemas novos foi acrescentado.

O autor deseja agradecer ao editor da primeira edição, David Beckwith, ao editor da segunda edição, Arthur Biderman, e à supervisora editorial, Maureen Walker.

ELLIOT MENDELSON

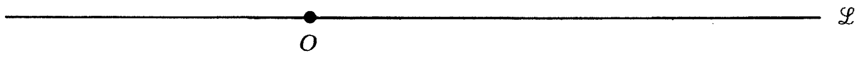
Sumário

Capítulo 1

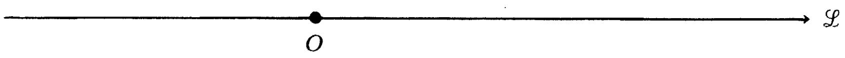
Sistemas de Coordenadas em uma Reta

1.1 AS COORDENADAS DE UM PONTO

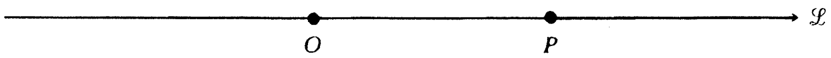
Seja $\mathscr{L}$ uma reta. Escolha um ponto O sobre a reta e chame esse ponto de *origem*.



Agora escolha uma direção ao longo de $\mathscr{L}$; digamos, a direção da esquerda para a direita no diagrama.

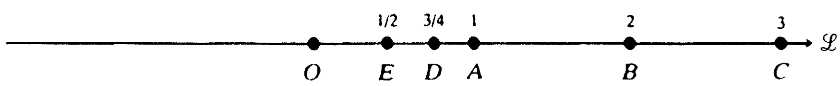


Para todo ponto P à direita da origem O, faça a *coordenada* de P como a distância entre O e P.



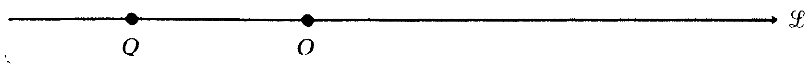
(É evidente que, para especificar uma distância, é necessário primeiramente estabelecer uma unidade de distância arbitrariamente escolhida designando-se o número 1 para a distância entre dois pontos escolhidos.)

No diagrama

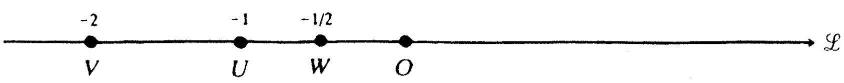


a distância $\overline{OA}$ é arbitrada como 1, de modo que a coordenada de A é 1. O ponto B está duas unidades distante de O; portanto, B tem coordenada 2. Todo número real positivo r é a coordenada de um único ponto de $\mathscr{L}$ à direita da origem O; a saber, daquele ponto à direita de O cuja distância a O é r.

Para todo ponto Q sobre $\mathscr{L}$ à esquerda da origem O,



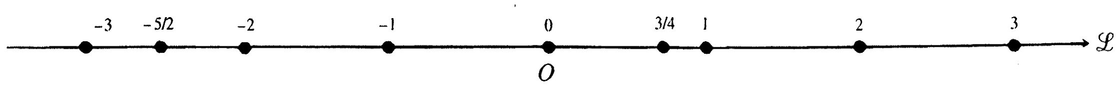
designamos um número real negativo como sua coordenada; o número $-\overline{QO}$, o negativo da distância entre Q e O. Por exemplo, no diagrama



o ponto U é considerado como uma distância de uma unidade da origem O; portanto, a coordenada de U é -1. O ponto W tem coordenada $-\frac{1}{2}$, o que significa que a distância $\overline{WO}$ é $\frac{1}{2}$. Obviamente, todo número real negativo é a coordenada de um único ponto de $\mathscr{L}$ à esquerda da origem.

Para a origem O é designado o número 0 como sua coordenada.

Essa correspondência de números reais com os pontos da reta $\mathscr{L}$ é chamada de *sistema de coordenadas* sobre $\mathscr{L}$.



Escolher uma origem diferente, uma direção diferente ao longo da reta ou uma unidade diferente de distância resultaria em um sistema de coordenadas diferente.

1.2 VALOR ABSOLUTO

Para qualquer número real b define-se o *valor absoluto* $|b|$ como a magnitude de b; ou seja,

$$|b| = \begin{cases} b & \text{se } b \geq 0 \\ -b & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

Em outras palavras, se b é um número positivo ou zero, seu valor absoluto $|b|$ é o próprio b. Mas se b é negativo, seu valor absoluto $|b|$ é o número positivo correspondente $-b$.

Exemplos

$$|3| = 3 \qquad \left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \qquad |0| = 0 \qquad |-2| = 2 \qquad \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Propriedades do Valor Absoluto

Observe que qualquer número r e seu oposto $-r$ têm o mesmo valor absoluto,

$$|r| = |-r| \tag{1.1}$$

Um importante caso especial de (*1.1*) resulta escolhendo-se $r = u - v$ e lembrando que $-(u - v) = v - u$,

$$|u - v| = |v - u| \tag{1.2}$$

Se $|a| = |b|$, então a e b são o mesmo número ou a e b são opostos um do outro,

$$|a| = |b| \quad \text{implica} \quad a = \pm b \tag{1.3}$$

Além disso, como $|a|$ é a ou $-a$, e $(-a)^2 = a^2$,

$$|a|^2 = a^2 \tag{1.4}$$

Substituindo a em (*1.4*) por ab resulta

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2|b|^2 = (|a||b|)^2$$

de onde, sendo o valor absoluto não negativo,

$$|ab| = |a||b| \tag{1.5}$$

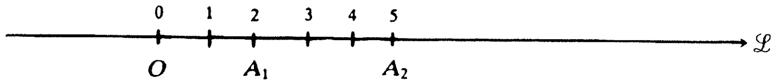
Valor Absoluto e Distância

Considere um sistema de coordenadas sobre uma reta $\mathscr{L}$ e sejam A_1 e A_2 pontos de $\mathscr{L}$ com coordenadas a_1 e a_2. Então,

$$|a_1 - a_2| = \overline{A_1A_2} = \text{distância entre } A_1 \text{ e } A_2 \tag{1.6}$$

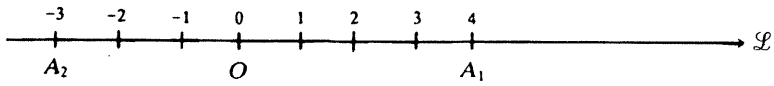
Exemplos

(*a*)



$$|a_1 - a_2| = |2 - 5| = |-3| = 3 = \overline{A_1A_2}$$

(*b*)



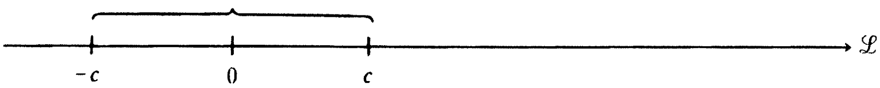
$$|a_1 - a_2| = |4 - (-3)| = |4 + 3| = |7| = 7 = \overline{A_1A_2}$$

Um caso especial de (*1.6*) é muito importante. Se a for a coordenada de A, então

$$|a| = \text{distância de } A \text{ à origem} \tag{1.7}$$

Observe que, para qualquer número positivo c,

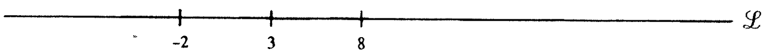
$$|u| \leq c \quad \text{é equivalente a} \quad -c \leq u \leq c \tag{1.8}$$



Exemplo $|u| \leq 3$ se, e somente se, $-3 \leq u \leq 3$.

Analogamente, $$|u| < c \quad \text{é equivalente a} \quad -c < u < c \tag{1.9}$$

Exemplo Para conseguir uma forma mais simples para a condição $|x - 3| < 5$, substitua u por $x - 3$ em (*1.9*), obtendo $-5 < x - 3 < 5$. Somando 3, temos $-2 < x < 8$. De um ponto de vista geométrico, observe que $|x - 3| < 5$ é equivalente a dizer que a distância entre o ponto A que tem a coordenada x e o ponto que tem a coordenada 3 é menor que 5.



Segue imediatamente da definição de valor absoluto que, para quaisquer dois números a e b,

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad \text{e} \qquad -|b| \leq b \leq |b|$$

(De fato, $a = |a|$ ou $a = -|a|$.) Somando as desigualdades, obtemos

$$(-|a|) + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$
$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

e assim, de (*1.8*), com $u = a + b$ e $c = |a| + |b|$,

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.10}$$

A desigualdade (*1.10*) é conhecida como a *desigualdade triangular*. Em (*1.10*) o sinal < é usado se, e somente se, a e b tiverem sinais opostos.

Exemplo $|3 + (-2)| = |1| = 1$, mas $|3| + |-2| = 3 + 2 = 5$.

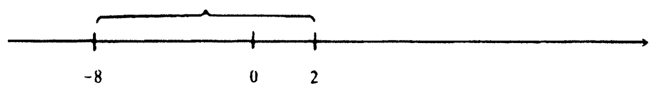
Problemas Resolvidos

1.1 Lembrando que $\sqrt{u}$ sempre denota a raiz quadrada *não negativa* de u, (*a*) calcule $\sqrt{3^2}$; (*b*) calcule $\sqrt{(-3)^2}$; (*c*) Mostre que $\sqrt{x^2} = |x|$. (*d*) Por que a fórmula $\sqrt{x^2} = x$ não é sempre verdadeira?

(*a*) $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$. (*b*) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. (*c*) De acordo com (*1.4*), $x^2 = |x|^2$; logo, uma vez que $|x| \geq 0$, $\sqrt{x^2} = |x|$. (*d*) Pelo item (*c*), $\sqrt{x^2} = |x|$, mas $|x| = x$ é falso quando $x < 0$. Por exemplo, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$..

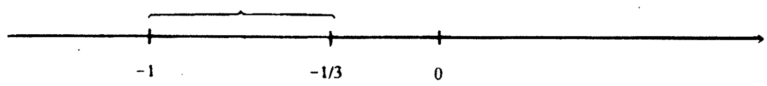
1.2 Resolva $|x+3| \leq 5$; ou seja, encontre todos os valores de x para os quais a relação dada vale.

De (*1.8*), $|x+3| \leq 5$ se, e somente se, $-5 \leq x+3 \leq 5$. Subtraindo 3, $-8 \leq x \leq 2$.



1.3 Resolva $|3x+2| < 1$.

De (*1.9*), $|3x+2| < 1$ é equivalente a $-1 < 3x+2 < 1$. Subtraindo 2, obtemos a relação equivalente $-3 < 3x < -1$. Isso é equivalente, ao dividir por 3, a $-1 < x < -\frac{1}{3}$.

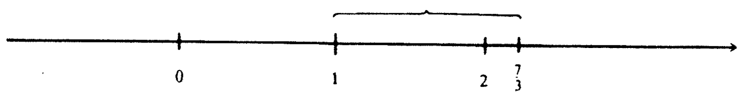


1.4 Resolva $|5-3x| < 2$.

De acordo com (*1.9*), $-2 < 5-3x < 2$. Subtraindo 5, $-7 < -3x < -3$. Dividindo por -3, $\frac{7}{3} > x > 1$.

REVISÃO DE ÁLGEBRA Multiplicar ou dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo *inverte* a desigualdade: se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

Para perceber isso, observe que $a < b$ implica em $b - a > 0$. Logo, $(b-a)\,c < 0$, já que o produto de um número positivo por um número negativo é negativo. Assim, $bc - ac < 0$, ou $bc < ac$.



1.5 Resolva
$$\frac{x+4}{x-3} < 2 \qquad (1)$$

Não podemos simplesmente multiplicar ambos os lados por $x-3$, pois não sabemos se $x-3$ é positivo ou negativo.

Caso 1: $x-3 > 0$. Multiplicando (*1*) por essa quantidade positiva mantém a desigualdade:

$$\begin{aligned} x+4 &< 2x-6 \\ 4 &< x-6 && \text{[subtraindo } x\text{]} \\ 10 &< x && \text{[adicionando } 6\text{]} \end{aligned}$$

Portanto, se $x > 3$, (*1*) vale se, e somente se, $x > 10$.

Caso 2: $x-3 < 0$. Multiplicando (*1*) por essa quantidade negativa inverte a desigualdade:

$$\begin{aligned} x+4 &> 2x-6 \\ 4 &> x-6 && \text{[subtraindo } x\text{]} \\ 10 &> x && \text{[adicionando } 6\text{]} \end{aligned}$$

Portanto, se $x < 3$, (*1*) vale se, e somente se, $x < 10$. Mas $x < 3$ implica que $x < 10$. Logo, quando $x < 3$, (*1*) é verdadeira.

Dos casos 1 e 2, (*1*) vale para $x > 10$ e para $x < 3$.

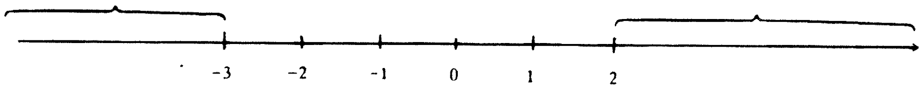
1.6 Resolva $(x-2)(x+3) > 0$.

Um produto é positivo se, e somente se, ambos os fatores possuem o mesmo sinal.

Caso 1: $x-2>0$ e $x+3>0$. Então, $x>2$ e $x>-3$. Mas essas são equivalentes a $x>2$ apenas, uma vez que $x>2$ implica em $x>-3$.

Caso 2: $x-2<0$ e $x+3<0$. Então, $x<2$ e $x<-3$, que são equivalentes a $x<-3$, já que $x<-3$ implica em $x<2$.

Portanto, $(x-2)(x+3)>0$ vale quando $x>2$ ou $x<-3$.

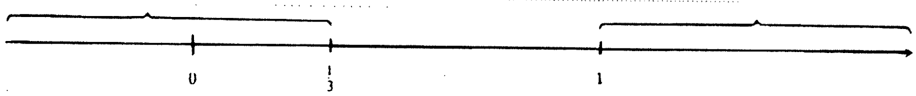


1.7 Resolva $|3x-2| \geq 1$.

Vamos resolver a negação da relação dada, $|3x-2|<1$. De acordo com *(1.9)*,

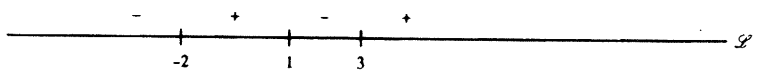
$$\begin{aligned} -1 < 3x - 2 &< 1 \\ 1 < 3x &< 3 \qquad \text{[somando 2]} \\ \tfrac{1}{3} < x &< 1 \qquad \text{[dividindo por 3]} \end{aligned}$$

Logo, a solução de $|3x-2| \geq 1$ é $x \leq \frac{1}{3}$ ou $x \geq 1$.



1.8 Resolva $(x-3)(x-1)(x+2) > 0$.

Os pontos cruciais são $x=3$, $x=1$ e $x=-2$, onde o produto é zero. Quando $x>3$, os três fatores são positivos e o produto é positivo. Quando passamos da direita para a esquerda, através de $x=3$, o fator $(x-3)$ muda de positivo para negativo, e assim o produto será negativo entre 1 e 3. Quando passamos da direita para a esquerda através de $x=1$, o fator $(x-1)$ muda de positivo para negativo, e assim o produto muda novamente de negativo para positivo ao longo do intervalo de $x=-2$ a $x=1$. Finalmente, quando passamos da direita para a esquerda através de $x=-2$, o fator $(x+2)$ muda de positivo para negativo, e assim o produto fica negativo para todo $x<-2$.



Portanto, a solução consiste de todos os x tais que $x>3$ ou $-2<x<1$.

Problemas Complementares

1.9 (*a*) Para que tipo de número u, $|u|=-u$? (*b*) Quais valores de x que $|3-x|$ é igual a $x-3$? (*c*) Para quais valores de x que $|3-x|$ é igual a $3-x$?

1.10 (*a*) Resolva $|2x+3|=4$. (*b*) Resolva $|5x-7|=1$. (*c*) CG Resolva o item (*a*) fazendo o gráfico de $y_1=|2x+3|$ e $y_2=4$. O mesmo para o item (*b*).

1.11 Resolva: (*a*) $|x-1|<1$ (*b*) $|3x+5| \leq 4$ (*c*) $|x+4|>2$

(*d*) $|2x-5| \geq 3$ (*e*) $|x^2-10| \leq 6$ (*f*) $\left|\frac{x}{2}+3\right|<1$

(*g*) CG Cheque suas respostas aos itens (*a*)-(*f*) graficamente.

1.12 Calcule: (*a*) $\frac{x}{x+5}<1$ (*b*) $\frac{x-7}{x+3}>2$ (*c*) $\left|\frac{1}{x}-2\right|<4$

(*d*) $\left|1+\frac{3}{x}\right|>2$ (*e*) $1<3-2x<5$ (*f*) $3 \leq 2x+1<4$

(*g*) CG Cheque suas respostas aos itens (*a*)-(*f*) graficamente.

1.13 Resolva: (*a*) $x(x+2) > 0$ (*b*) $(x-1)(x+4) < 0$ (*c*) $x^2 - 6x + 5 > 0$
(*d*) $x^2 + 7x - 8 < 0$ (*e*) $x^2 < 3x + 4$ (*f*) $x(x-1)(x+1) > 0$
(*g*) $(2x+1)(x-3)(x+7) < 0$

(*h*) CG Confira suas respostas aos itens (*a*)-(*g*) graficamente.

[*Sugestões*: No item (*c*), fatore; no item (*f*), use o método do Problema 1.8.]

1.14 Mostre que se $b \neq 0$, então $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$. [*Sugestão*: Use (*1.5*)]

1.15 Prove que: (*a*) $|a^2| = |a^2|$ (*b*) $|a^3| = |a^3|$ (*c*) Generalize os resultados dos itens (*a*) e (*b*).

1.16 Resolva: (*a*) $|2x-3| = |x+2|$ (*b*) $|7x-5| = |3x+4|$ (*c*) $2x-1 = |x+7|$
(*d*) CG Confira suas respostas aos itens (*a*)-(*c*) graficamente.

1.17 Resolva: (*a*) $|2x-3| < |x+2|$ [*Sugestão*: Considere os três casos $x \geq \frac{3}{2}$, $-2 \leq x < \frac{3}{2}$, $x < -2$.]
(*b*) $|3x-2| \leq |x-1|$ (*c*) CG Cheque suas soluções para os itens (*a*) e (*b*) graficamente.

1.18 (*a*) Prove: $|a-b| \geq ||a| - |b||$. [*Sugestão*: Use a desigualdade triangular para provar que $|a| \leq |a-b| + b$ e $|b| \leq |a-b| + |a|$.]
(*b*) Prove: $|a-b| \leq |a| + |b|$

1.19 Determine se $\sqrt{a^4} = a^2$ vale para todos os números reais a.

1.20 É verdade que $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$ sempre implica em $a < b$?

1.21 Sejam O, I, A, B, C, D pontos sobre uma reta, com coordenadas respectivas 0, 1, 4, –1, $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{3}$. Desenhe um diagrama mostrando esses pontos e determine: $\overline{IA}, \overline{AI}, \overline{OC}, \overline{BC}, \overline{IB}, +\overline{BD}, \overline{ID}, \overline{IB} + \overline{BC}, \overline{IC}$.

1.22 Sejam A e B pontos com coordenadas a e b. Determine b se: (*a*) $a = 7$, B está à direita de A, e $|b-a| = 3$; (*b*) $a = -1$, B está à esquerda de A, e $|b-a| = 4$; (*c*) $a = -2$, $b < 0$, e $|b-a| = 3$.

1.23 Prove: (*a*) $a < b$ é equivalente a $a + c < b + c$.

ÁLGEBRA $a < b$ significa que $b - a$ é positivo. A soma e o produto de dois números positivos são positivos, o produto de dois números negativos é positivo e o produto de um número positivo com um negativo é negativo.

(*b*) Se $0 < c$, então $a < b$ é equivalente a $ac < bc$ e a $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

1.24 Demonstre (*1.6*). [*Sugestão*: Considere três casos: (*a*) A_1 e A_2 sobre o eixo positivo x ou na origem; (*b*) A_1 e A_2 no eixo x negativo ou na origem; (*c*) A_1 e A_2 em lados opostos em relação à origem.]

Capítulo 2

Sistemas de Coordenadas em um Plano

2.1 AS COORDENADAS DE UM PONTO

Estabeleceremos uma correspondência entre os pontos de um plano e pares de números reais. Escolha duas retas perpendiculares no plano da Fig. 2-1. Vamos considerar, para fins de simplicidade, que uma das retas é horizontal e a outra vertical. A reta horizontal será chamada de eixo x e a reta vertical de eixo y.

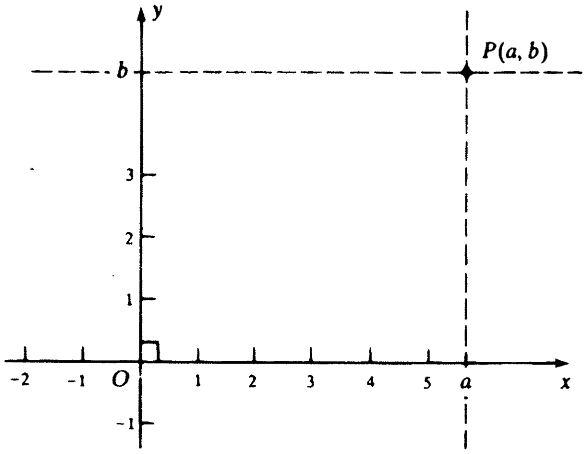


Fig. 2-1

A seguir escolha um sistema de coordenadas sobre o eixo x e um sobre o eixo y. A origem para ambos os sistemas de coordenadas é assumido como sendo o ponto O, onde os eixos se intersectam. O eixo x é orientado da esquerda para a direita, o eixo y de baixo para cima. A parte do eixo x com coordenadas positivas é chamado *eixo x positivo*, e a parte do eixo y com coordenadas positivas, *eixo y positivo*.

Tome qualquer ponto P no plano. Considere a reta vertical que passa pelo ponto P, e seja a a coordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo x. Esse número a é chamado de *coordenada x* de P (ou a *abscissa* de P). Agora considere a reta horizontal que passa por P, e seja b a coordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo y. O número b é chamado de *coordenada y* de P (ou a *ordenada* de P). Todo ponto tem um único par (a,b) de coordenadas associado ao mesmo.

Exemplos Na Fig. 2-2, as coordenadas de vários pontos estão indicadas. Limitamo-nos a coordenadas inteiras somente por simplicidade.

Reciprocamente, todo par (a,b) de números reais é associado com um único ponto no plano.

Exemplos No sistema de coordenadas da Fig. 2-3, para encontrar o ponto tendo as coordenadas (3,2), comece na origem O, mova três unidades para a *direita* e então duas unidades para *cima*. Para definir o ponto com coordenadas (–2,4), comece na origem O, mova duas unidades para a *esquerda* e então quatro unidades para *cima*. Para encontrar o ponto com coordenadas (–1,–3), comece na origem, mova uma unidade para a *esquerda* e então três unidades para *baixo*.

Dado um sistema de coordenadas, o plano inteiro, exceto os pontos sobre os eixos coordenados, pode ser dividido em quatro partes iguais chamadas de *quadrantes*. Todos os pontos com ambas as coordenadas positivas formam o primeiro quadrante, quadrante I, no canto superior direito (ver Fig. 2-4). O quadrante II consiste de todos os pontos com coordenada x negativa e coordenada y positiva; os quadrantes III e IV são também mostrados na Fig. 2-4.

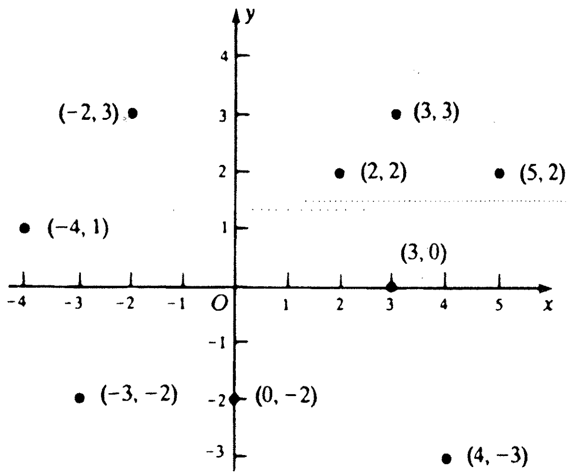


Fig. 2-2

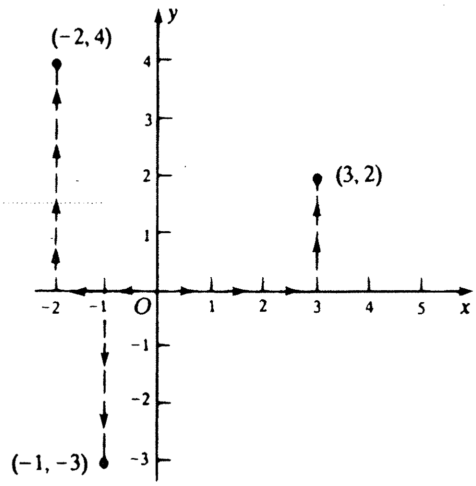


Fig. 2-3

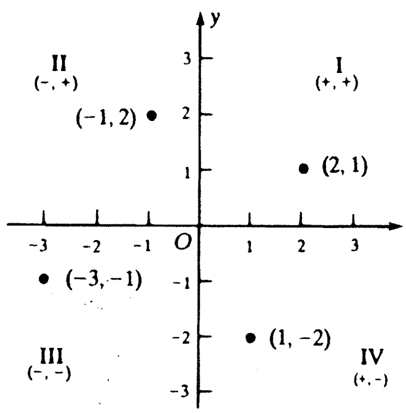


Fig. 2-4

Os pontos que têm coordenadas da forma $(0,b)$ são precisamente os pontos sobre o eixo y. Os pontos que têm coordenadas $(a,0)$ são os pontos sobre o eixo x.

Se um sistema de coordenadas é dado, é comum se referir ao ponto com coordenadas (a,b) simplesmente como "o ponto (a,b)". Portanto, pode-se dizer: "O ponto (1,0) pertence ao eixo x".

2.2 A FÓRMULA DA DISTÂNCIA

Sejam P_1 e P_2 pontos com coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em um dado sistema de coordenadas (Fig. 2-5). Queremos deduzir uma fórmula para a distância $\overline{P_1P_2}$.

Seja R o ponto onde a reta vertical que passa por P_2 intersecta a reta horizontal que passa por P_1. Evidentemente, a coordenada x de R é x_2, a mesma de P_2; e a coordenada y de R é y_1, a mesma de P_1. Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1R}^2 + \overline{P_2R}^2$$

Mas se A_1 e A_2 são as projeções de P_1 e P_2 sobre o eixo x, os segmentos P_1R e A_1A_2 são lados opostos de um retângulo. Logo, $\overline{P_1R} = \overline{A_1A_2}$. Mas $\overline{A_1A_2} = |x_1 - x_2|$, de acordo com (*1.6*). Assim, $\overline{P_1R} = |x_1 - x_2|$. Da mesma forma, $\overline{P_2R} = |y_1 - y_2|$. Conseqüentemente,

$$\overline{P_1P_2}^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

donde

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.1}$$

[Equação (*2.1*) é chamada de *fórmula da distância*.] O leitor deve verificar que essa fórmula também vale quando P_1 e P_2 estão na mesma reta horizontal ou na mesma reta vertical.

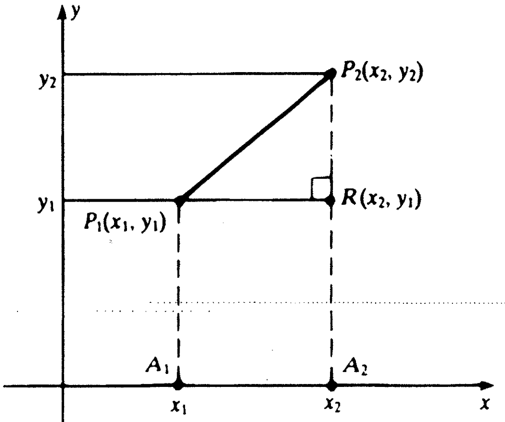


Fig. 2-5

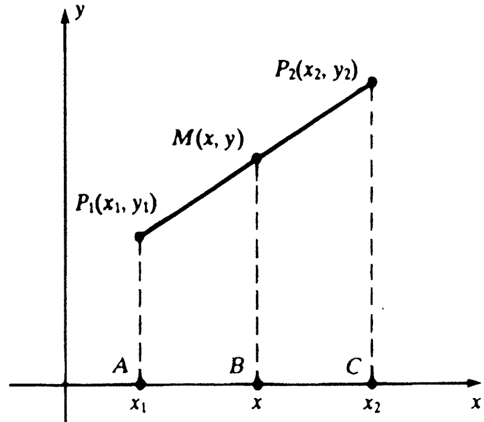


Fig. 2-6

Exemplos

(*a*) A distância entre (3,8) e (7,11) é

$$\sqrt{(3-7)^2 + (8-11)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

(*b*) A distância entre (4,–3) e (2,7) é

$$\begin{aligned} \sqrt{(4-2)^2 + (-3-7)^2} &= \sqrt{2^2 + (-10)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} \\ &= \sqrt{4 \cdot 26} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{26} = 2\sqrt{26} \end{aligned}$$

ÁLGEBRA Para quaisquer números positivos u e v, $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\,\sqrt{v}$, já que $(\sqrt{u}\,\sqrt{v})^2 = (\sqrt{u})^2(\sqrt{v})^2 = uv$.

(*c*) A distância entre qualquer ponto (a,b) e a origem (0,0) é $\sqrt{a^2 + b^2}$.

2.3 AS FÓRMULAS DE PONTO MÉDIO

Novamente considerando dois pontos arbitrários $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ deduziremos as coordenadas (x, y) do ponto médio M do segmento P_1P_2 (Fig. 2-6). Sejam A, B e C as projeções perpendiculares de P_1, M e P_2 sobre o eixo x. As coordenadas de A, B e C são x_1, x, x_2, respectivamente. Uma vez que as retas P_1A, MB e P_2C são paralelas, as razões $\overline{P_1M}/\overline{MP_2}$ e $\overline{AB}/\overline{BC}$ são iguais. Mas $\overline{P_1M} = \overline{MP_2}$; logo, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Como $\overline{AB} = x - x_1$ e $\overline{BC} = x_2 - x$,

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x_2 - x \\ 2x &= x_1 + x_2 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

(O mesmo resultado é obtido quando P_2 está à esquerda de P_1, caso no qual $\overline{AB} = x_1 - x$ e $\overline{BC} = x - x_2$.)
Da mesma forma, $y = (y_1 + y_2)/2$. Portanto, as coordenadas do ponto médio M são determinadas pelas *fórmulas do ponto médio*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{2.2}$$

Em palavras, as coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas das extremidades.

Exemplos

(*a*) O ponto médio do segmento que conecta (1,7) e (3,5) é $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = (2, 6)$.

(*b*) O ponto médio entre (–2, 5) e (3, 3) é $\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

Problemas Resolvidos

2.1 Determine se o triângulo com vértices A (–1,2), B (4,7), C (–3,6) é isósceles.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{[-1-(-3)]^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{[4-(-3)]^2 + (7-6)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, o triângulo é isósceles.

2.2 Determine se o triângulo com vértices A(–5, –3), B (–7, 3), C (2, 6) é um triângulo retângulo.

Use (*2.1*) para calcular os quadrados dos lados,

$$\overline{AB}^2 = (-5+7)^2 + (-3-3)^2 = 2^2 + (-6)^2 = 4 + 36 = 40$$
$$\overline{BC}^2 = (-7-2)^2 + (3-6)^2 = 81 + 9 = 90$$
$$\overline{AC}^2 = (-5-2)^2 + (-3-6)^2 = 49 + 81 = 130$$

Como $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, ΔABC é um triângulo retângulo com ângulo reto em B.

GEOMETRIA A recíproca do teorema de Pitágoras é verdadeira também: Se $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ no ΔABC, então $\measuredangle ABC$ é um ângulo reto.

2.3 Prove, usando coordenadas, que o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices.

Considere a origem de um sistema de coordenadas localizado no ângulo reto C; faça o eixo positivo x conter o lado CA e o eixo positivo y o lado CB [ver Fig. 2-7(*a*)].

O vértice A tem coordenadas $(b, 0)$, onde $b = \overline{CA}$; e o vértice B tem coordenadas $(0, a)$, onde $a = \overline{BC}$. Seja M o ponto médio da hipotenusa. Pelas fórmulas do ponto médio (*2.2*), as coordenadas de M são $(b/2, a/2)$.

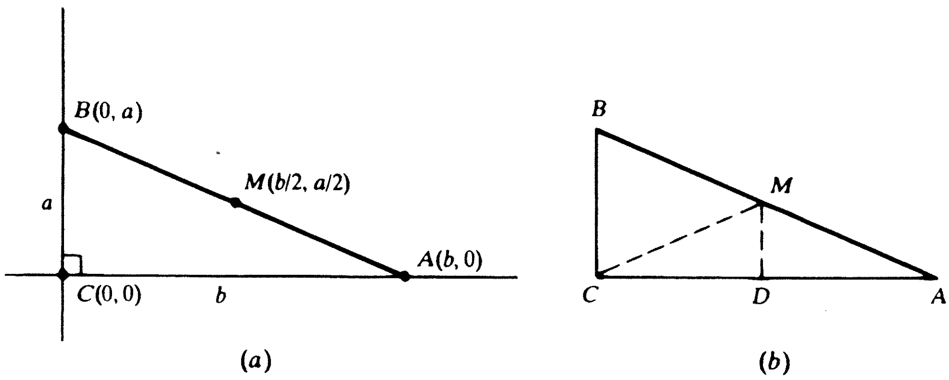


Fig. 2-7

Mas pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

e pela fórmula da distância (*2.1*),

$$\overline{MC} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

ÁLGEBRA Para quaisquer números positivos u, v,

$$\sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \sqrt{v} = \sqrt{\frac{u}{v} \cdot v} = \sqrt{u} \qquad \text{e assim} \qquad \sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Logo, $\overline{MA} = \overline{MC}$. [Para uma prova geométrica mais simples, ver Fig. 2-7(*b*); MD e BC são paralelos.]

Problemas Complementares

2.4 Na Fig. 2-8, encontre as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F.

2.5 Desenhe um sistema de coordenadas e marque os pontos que têm as seguintes coordenadas: $(1, -1)$, $(4, 4)$, $(-2, -2)$, $(3, -3)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(-4, 1)$.

2.6 Determine a distância entre os pontos: (*a*) $(2, 3)$ e $(2, 8)$; (*b*) $(3, 1)$ e $(3, -4)$; (*c*) $(4, 1)$ e $(2, 1)$; (*d*) $(-3, 4)$ e $(5, 4)$.

2.7 Desenhe o triângulo com vértices $A(4, 7)$, $B(4, -3)$ e $C(-1, 7)$ e determine sua área.

2.8 Se $(-2, -2)$, $(-2, 4)$ e $(3, -2)$ são três vértices de um retângulo, encontre o quarto vértice.

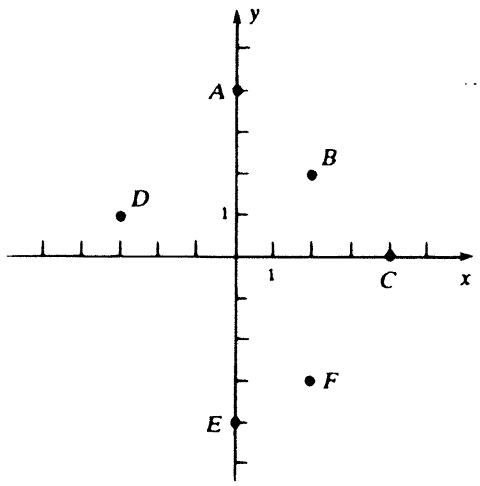


Fig. 2-8

2.9 Se os pontos $(3, 1)$ e $(-1, 0)$ são vértices opostos de um retângulo cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, encontre os outros dois vértices.

2.10 Se $(2, -1)$, $(5, -1)$ e $(3, 2)$ são três vértices de um paralelogramo, quais são as possíveis coordenadas do quarto vértice?

2.11 Determine as coordenadas de um ponto sobre a reta que passa pelo ponto $(2, 4)$ e é paralela ao eixo y.

2.12 Obtenha a distância entre os pontos: (*a*) $(2, 6)$ e $(7, 3)$; (*b*) $(3, -1)$ e $(0, 2)$; (*c*) $(4, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{4}, 3)$.

2.13 Determine se os três pontos dados são vértices de um triângulo isósceles ou de um triângulo retângulo (ou de ambos). Encontre a área de cada triângulo retângulo.

(*a*) $(-1, 2), (3, -2), (7, 6)$ (*b*) $(4, 1), (1, 2), (3, 8)$ (*c*) $(4, 1), (1, -4), (-4, -1)$

2.14 Encontre o valor de k tal que $(3, k)$ é eqüidistante de $(1, 2)$ e $(6, 7)$.

2.15 (*a*) Os três pontos $A(1, 0)$, $B(\frac{7}{2}, 4)$ e $C(7, 8)$ são colineares (isto é, pertencem à mesma reta)? [*Sugestão*: Se A, B, C formam um triângulo, a soma de dois lados, $\overline{AB} + \overline{BC}$, deve ser maior que o terceiro lado, AC. Se B está entre A e C em uma reta, $(\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC})$.]

(*b*) Os três pontos $A(-5, -7)$, $B(0, -1)$ e $C(10, 11)$ são colineares?

2.16 Determine o ponto médio dos segmentos de reta com as seguintes extremidades: (*a*) $(1, -1)$ e $(7, 5)$; (*b*) $(\frac{3}{2}, 4)$ e $(1, 0)$; (*c*) $(\sqrt{2}, 1)$ e $(5, 3)$.

2.17 Determine o ponto (a, b) tal que $(3, 5)$ é o ponto médio do segmento de reta que conecta (a, b) e $(1, 2)$.

2.18 Prove, pelo uso de coordenadas, que o segmento de reta que conecta os pontos médios de dois lados de um triângulo tem metade do comprimento do terceiro lado.

Capítulo 3

Gráficos de Equações

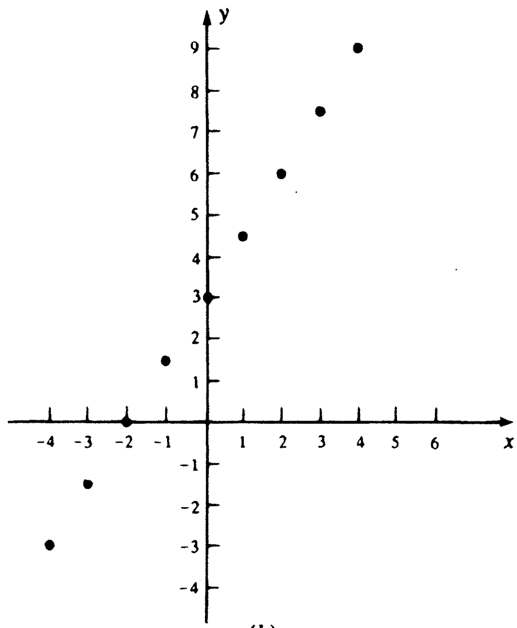
Considere a seguinte equação envolvendo as variáveis x e y:

$$2y - 3x = 6 \qquad (i)$$

Observe que o ponto (2,6) satisfaz a equação; isto é, quando x é substituído pela coordenada x 2 e y é substituído pela coordenada y 6, o lado esquerdo, $2y - 3x$, assume o valor do lado direito, 6. O *gráfico* de (i) consiste de todos os pontos (a,b) que satisfazem a equação quando x é substituído por a e y for substituído por b. Fazemos uma tabela com alguns pontos que satisfazem (i) na Fig. 3-1(a), e indicamos esses pontos na Fig. 3-1(b). Parece que todos esses pontos pertencem a uma reta. De fato, será mostrado mais tarde que o gráfico (i) na verdade é uma reta.

x	y
4	9
3	15/2
2	6
1	9/2
0	3
−1	3/2
−2	0
−3	−3/2
−4	−3

(a)



(b)

Fig. 3-1

Em geral, o *gráfico* de uma equação envolvendo x e y como únicas variáveis consiste de todos os pontos (x,y) que satisfazem a equação.

Exemplos

(*a*) Alguns pontos do gráfico de $y = x^2$ são determinados na Fig. 3-2(*a*) e mostrados na Fig. 3-2(*b*). Esses pontos sugerem que o gráfico se parece com aquilo que seria obtido preenchendo-se a curva tracejada. Esse gráfico é do tipo conhecido como uma *parábola.*

(*b*) O gráfico da equação $xy = 1$ é chamado de *hipérbole*. Como mostrado na Fig. 3-3(*b*), o gráfico se divide em duas partes separadas. Os pontos sobre a hipérbole ficam cada vez mais próximos dos eixos e mais afastados da origem.

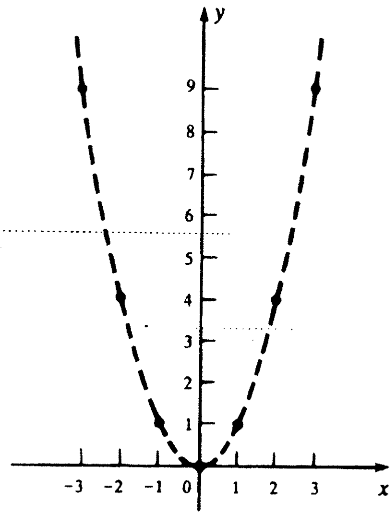
(*c*) O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

é uma curva fechada, chamada de *elipse* (ver Fig. 3-4).

x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
−1	1
−2	4
−3	9

(*a*)

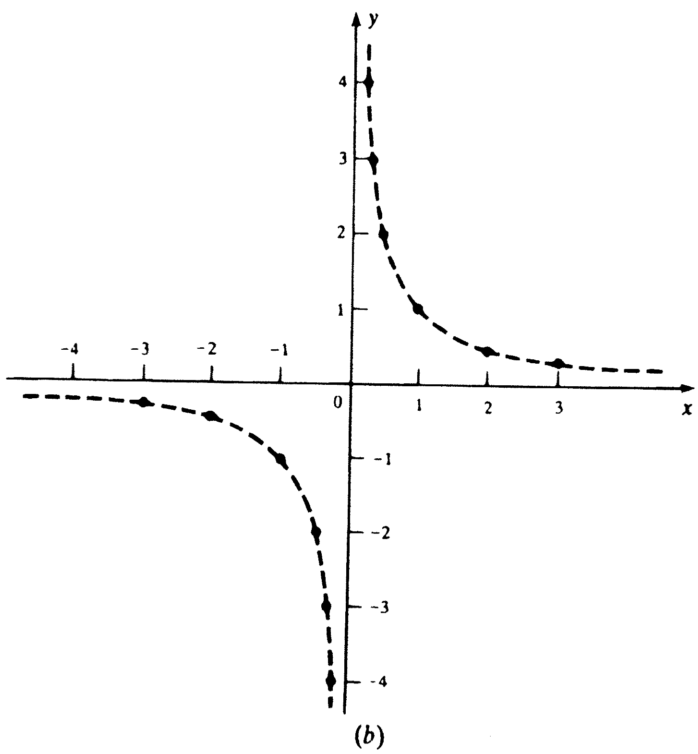


(*b*)

Fig. 3-2

x	y
3	1/3
2	1/2
1	1
1/2	2
1/3	3
1/4	4
−1/4	−4
−1/3	−3
−1/2	−2
−1	−1
−2	−1/2
−3	−1/3

(*a*)

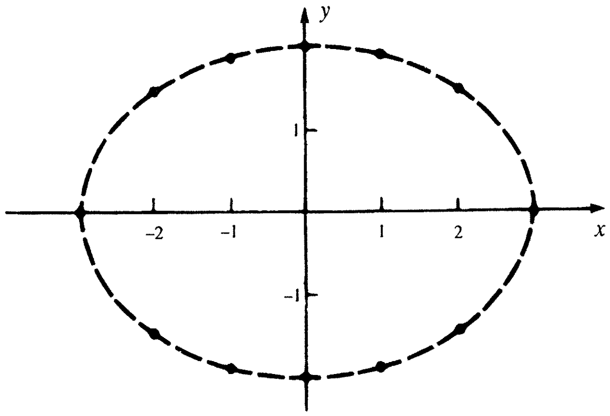


(*b*)

Fig. 3-3

x	y
3	0
2	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{5} \approx \pm 1{,}5$
1	$\pm\frac{4}{3}\sqrt{2} \approx \pm 1{,}9$
0	± 2
−1	$\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}$
−2	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{5}$
−3	0

(*a*)



(*b*)

Fig. 3-4

Círculos

Para um ponto $P(x, y)$ estar sobre o círculo de centro $C(a, b)$ e raio r, a distância $\overline{PC}$ deve ser r (Fig. 3-5). Mas, de acordo com (*2.1*),

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

A *equação canônica*, $\overline{PC}^2 = r^2$, do círculo com centro (a, b) e raio r é então

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{3.1}$$

Para um círculo centrado na origem, (*3.1*) fica simplesmente

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3.2}$$

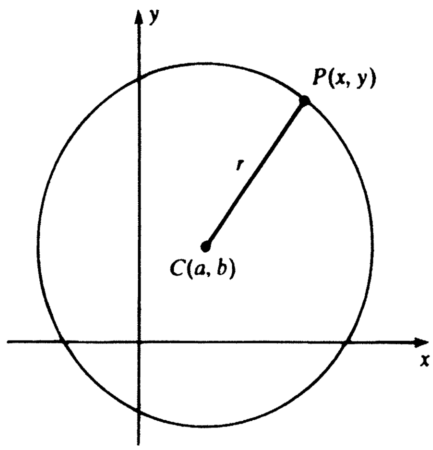


Fig. 3-5

Exemplos

(*a*) O círculo com centro (1, 2) e raio 3 tem a equação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

(*b*) O círculo com centro (−1, 4) e raio 6 tem a equação

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 36$$

(*c*) O gráfico da equação $(x-3)^2+(y-7)^2=16$ é um círculo com centro (3,7) e raio 4.

(*d*) O gráfico da equação $x^2+(y+2)^2=1$ é um círculo com centro (0, –2) e raio 1.

Algumas vezes a equação de um círculo aparecerá em uma forma não canônica. Por exemplo, a equação

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \qquad (ii)$$

é equivalente a

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4 \qquad (iii)$$

ÁLGEBRA Use as fórmulas $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$ e $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$ para expandir o lado esquerdo de (*iii*).

Se uma equação como (*ii*) é dada, existe um método simples para descobrir a equação canônica equivalente da forma (*iii*) e portanto encontrar o centro e o raio do círculo. Esse método depende de *completar os quadrados*; ou seja, substituir as quantidades x^2+Ax e y^2+By pelas quantidades iguais

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4} \quad \text{e} \quad \left(y+\frac{B}{2}\right)^2-\frac{B^2}{4}$$

Exemplo Vamos determinar o gráfico da equação

$$x^2+y^2+4x-2y+1=0$$

Completando os quadrados, substitua x^2+4x por $(x+2)^2-4$ e y^2-2y por $(y-1)^2-1$,

$$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1+1=0$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2=4$$

Essa é a equação de um círculo com centro (–2, 1) e raio 2.

Problemas Resolvidos

3.1 Obtenha o gráfico: (*a*) da equação $x=2$; (*b*) da equação $y=-3$.

(*a*) Os pontos que satisfazem a equação $x=2$ são da forma $(2, y)$, onde y pode ser qualquer número. Esses pontos formam uma reta vertical [Fig. 3-6(*a*)].

(*b*) Os pontos que satisfazem $y=-3$ são da forma $(x, -3)$, onde x é qualquer número. Esses pontos formam uma reta horizontal [Fig. 3-6(*b*)].

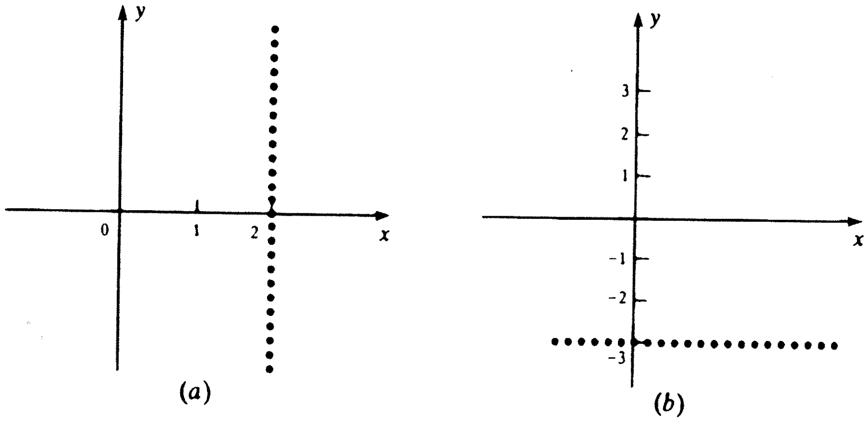


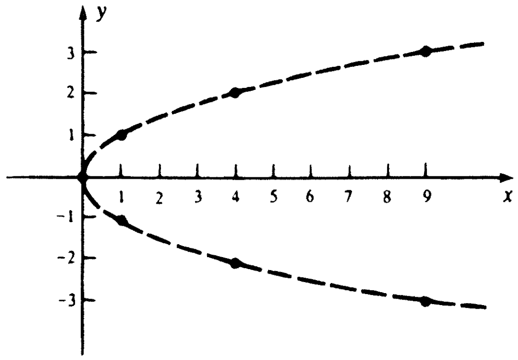
Fig. 3-6

3.2 Construa o gráfico da equação $x=y^2$.

Desenhar vários pontos sugere a curva mostrada na Fig. 3-7. Essa curva é uma parábola, a qual pode ser obtida do gráfico de $y=x^2$ (Fig. 3-2) trocando as coordenadas x e y.

x	y
0	0
1	± 1
4	± 2
9	± 3

(*a*)



(*b*)

Fig. 3-7

3.3 Identifique os gráficos de:

(*a*) $3x^2 + 3y^2 - 6x - y + 1 = 0$ (*b*) $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 80 = 0$

(*c*) $x^2 + y^2 + 20x - 4y + 120 = 0$

(*a*) Primeiro, divida ambos os lados por 3,

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

Complete os quadrados,

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{36} = 0$$

ou

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = 1 + \frac{1}{36} - \frac{1}{3} = \frac{36}{36} + \frac{1}{36} - \frac{12}{36} = \frac{25}{36}$$

Logo, o gráfico é um círculo com centro $(1, \frac{1}{6})$ e raio $\frac{5}{6}$.

(*b*) Complete os quadrados,

$$(x-4)^2 + (y+8)^2 + 80 - 16 - 64 = 0 \quad \text{ou} \quad (x-4)^2 + (y+8)^2 = 0$$

Já que $(x-4)^2 \geq 0$ e $(y+8)^2 \geq 0$, devemos ter $x - 4 = 0$ e $y + 8 = 0$. Portanto, o gráfico consiste de um único ponto $(4, -8)$.

(*c*) Complete os quadrados

$$(x+10)^2 + (y-2)^2 + 120 - 100 - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+10)^2 + (y-2)^2 = -16$$

Essa equação não admite solução, uma vez que o lado esquerdo é sempre não-negativo. Logo, o gráfico consiste de ponto nenhum ou, como costuma-se dizer, o gráfico é o *conjunto vazio*.

3.4 Deduza a equação canônica do círculo centrado em $C(1, -2)$ e que passa pelo ponto $P(7, 4)$.

O raio do círculo é a distância

$$\overline{CP} = \sqrt{(7-1)^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

Logo, a equação canônica é $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 72$.

3.5 Obtenha os gráficos de: (*a*) $y = x^2 + 2$; (*b*) $y = x^2 - 2$; (*c*) $y = (x-2)^2$; (*d*) $y = (x+2)^2$.

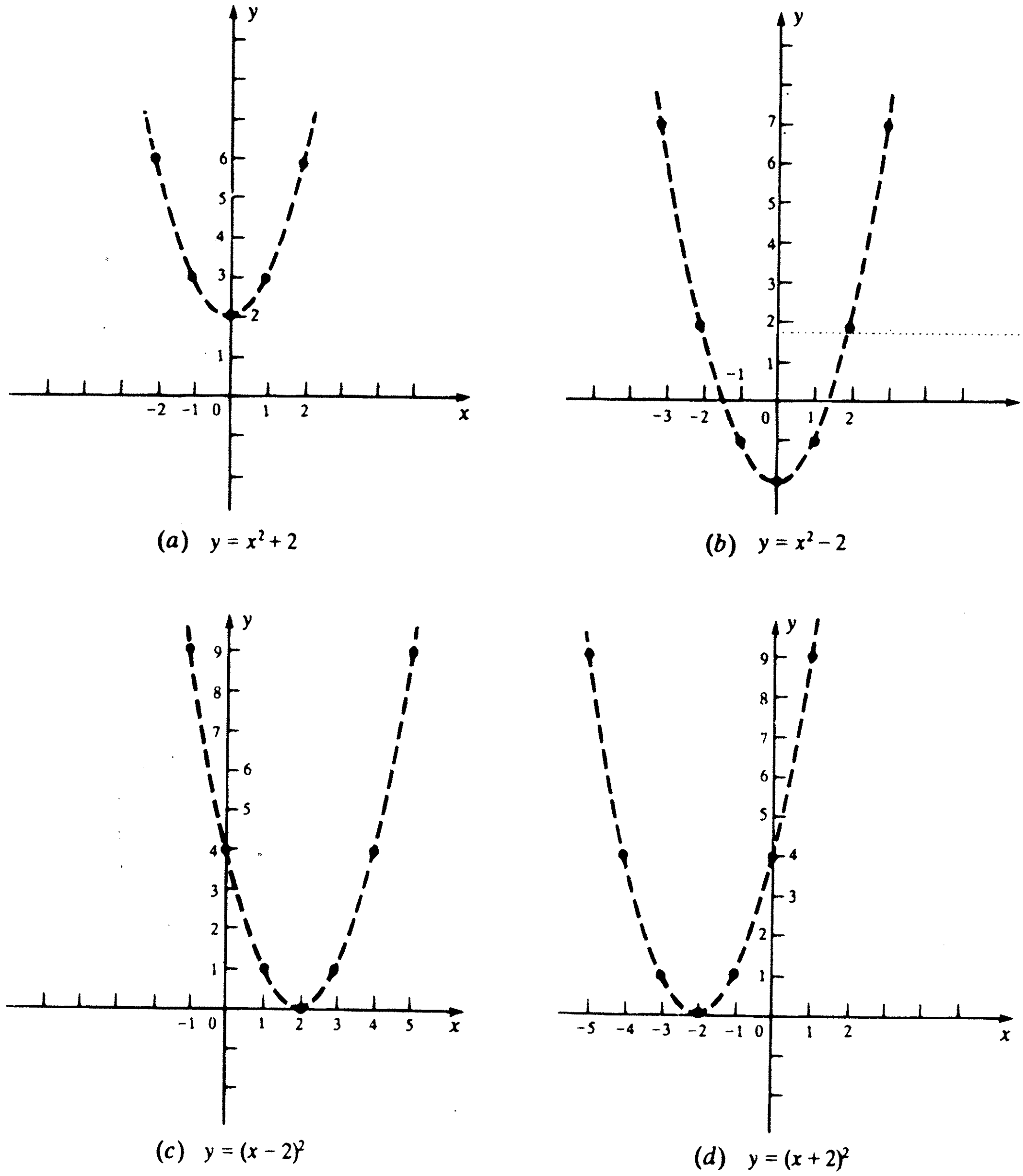
(*a*) O gráfico de $y = x^2 + 2$ é conseguido a partir do gráfico de $y = x^2$ (Fig. 3-2) subindo cada ponto duas unidades na direção vertical [ver Fig. 3-8(*a*)].

(*b*) O gráfico de $y = x^2 - 2$ é obtido a partir do gráfico de $y = x^2$ descendo cada ponto duas unidades [ver Fig. 3-8(*b*).

(*c*) O gráfico de $y = (x-2)^2$ é conseguido a partir do gráfico de $y = x^2$ movendo cada ponto do último duas unidades para a direita [ver Fig. 3-8(*c*)]. Para perceber isso, considere que (a, b) pertence a $y = (x-2)^2$. Então $b = (a-2)^2$. Logo, o ponto $(a-2, b)$ satisfaz $y = x^2$ e, portanto, pertence ao gráfico de $y = x^2$. Mas (a, b) é obtido movendo-se $(a-2, b)$ duas unidades para a direita.

(*d*) O gráfico de $y = (x+2)^2$ é conseguido a partir do gráfico de $y = x^2$ movento cada ponto duas unidades para a esquerda [ver Fig. 3-8(*d*)]. A argumentação é a mesma do item (*c*).

Os itens (*c*) e (*d*) podem ser generalizados como se segue. Se c é um número positivo, o gráfico da equação $F(x-c, y) = 0$ é obtido do gráfico de $F(x, y) = 0$ movendo-se cada ponto do segundo gráfico c unidades para a direita. O gráfico de $F(x+c, y) = 0$ é obtido do gráfico de $F(x, y) = 0$ movendo-se cada ponto do segundo gráfico c unidades para a esquerda.



(*a*) $y = x^2 + 2$ (*b*) $y = x^2 - 2$

(*c*) $y = (x-2)^2$ (*d*) $y = (x+2)^2$

Fig. 3-8

3.6 Encontre os gráficos de: (*a*) $x = (y-2)^2$; (*b*) $x = (y+2)^2$.

(*a*) O gráfico de $x = (y-2)^2$ é obtido subindo o gráfico de $x = y^2$ [Fig. 3-7(*b*)] duas unidades [ver Fig. 3-9(*a*)]. O argumento é análogo àquele do Problema 3.5(*c*).

(*b*) O gráfico de $x = (y+2)^2$ é obtido descendo o gráfico de $x = y^2$ duas unidades [ver Fig. 3-9(*b*)].

Esses dois resultados podem ser generalizados da seguinte maneira. Se c é um número positivo, o gráfico da equação $F(x, y-c) = 0$ é obtido do gráfico de $F(x, y) = 0$ movendo-se cada ponto do segundo gráfico c unidades para cima.O gráfico de $F(x, y+c) = 0$ é obtido do gráfico de $F(x, y) = 0$ movendo-se cada ponto do segundo gráfico c unidades para baixo.

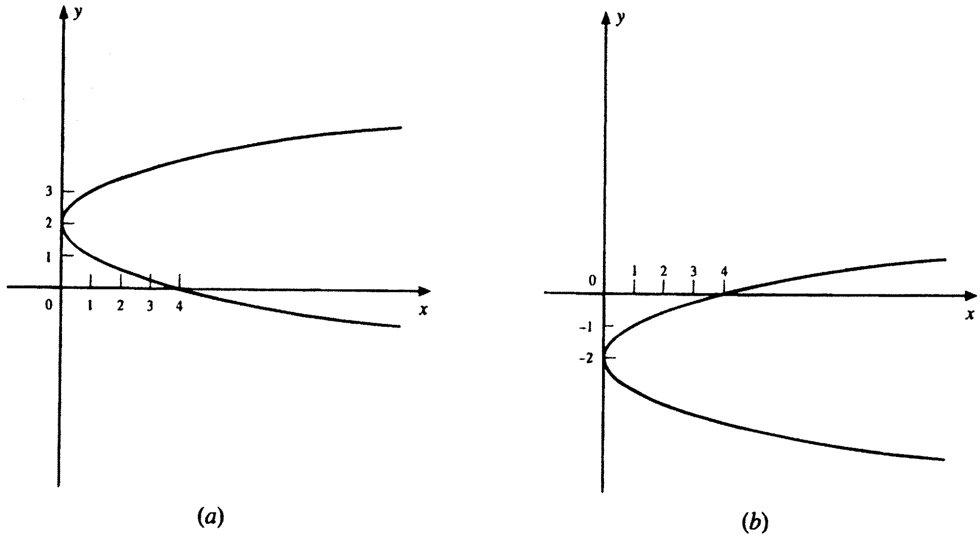


Fig. 3-9

3.7 Determine os gráficos de: (*a*) $y = (x-3)^2 + 2$; (*b*) $y(x-2) = 1$.

(*a*) Pelos Problemas 3.5 e 3.6 o gráfico é obtido movendo-se a parábola $y = x^2$ três unidades para a direita e duas unidades para cima [ver Fig. 3-10(*a*)].

(*b*) Pelo Problema 3.5, o gráfico é obtido movendo-se a hipérbole $xy = 1$ (Fig. 3-3) duas unidades para a direita [ver Fig. 3-10(*b*)].

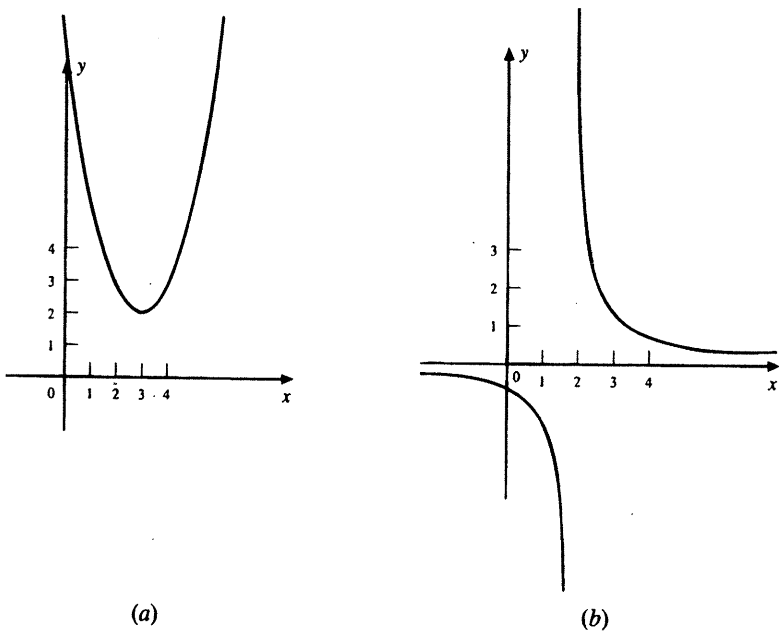


Fig. 3-10

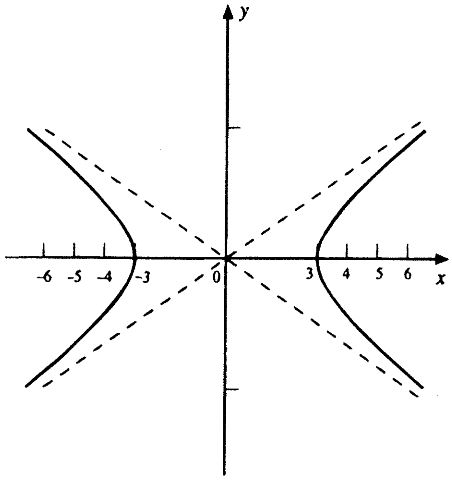
3.8 Desenhe os gráficos de: (*a*) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; (*b*) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

(*a*) Se $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, então $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} + 1 \geq 1$. Assim, $\frac{x^2}{9} \geq 1$ e, portanto, $|x| \geq 3$. Logo, não existem pontos (x, y) no gráfico dentro do conjunto infinito $-3 < x < 3$. Ver Fig. 3-11(*b*) para um esboço do gráfico, que é uma parábola.

(*b*) Permutando x e y no item (*a*), obtemos a hipérbole na Fig. 3-12.

x	y
± 3	0
± 4	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{7} \sim 1{,}8$
± 5	$\pm\frac{8}{3}$
± 6	$\pm 2\sqrt{3} \sim 3{,}5$

(*a*)



(*b*)

Fig. 3-11

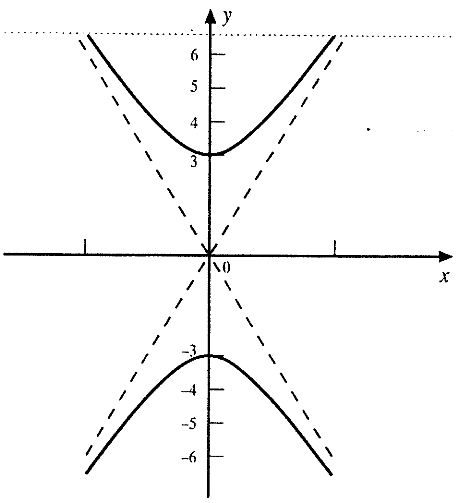


Fig. 3-12

Problemas Complementares

3.9 Desenhe os gráficos das seguintes equações:

(*a*) $3y - x = 6$ (*b*) $3y + x = 6$ (*c*) $x = -1$

(*d*) $y = 4$ (*e*) $y = x^2 - 1$ (*f*) $y = \dfrac{1}{x} + 1$

(*g*) $y = x$ (*h*) $y = -x$ (*i*) $y^2 = x^2$

(*j*) $\boxed{\text{CG}}$ Confira suas respostas com uma calculadora gráfica.

3.10 Em um único diagrama, desenhe os gráficos de:

(*a*) $y = x^2$ (*b*) $y = 2x^2$ (*c*) $y = 3x^2$ (*d*) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ (*e*) $y = \dfrac{1}{3}x^2$

(*f*) $\boxed{\text{CG}}$ Confira suas respostas com uma calculadora gráfica.

3.11 (*a*) Desenhe o gráfico de $y = (x - 1)^2$. (Inclua todos os pontos com $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.) Como esse gráfico se relaciona com o gráfico de $y = x^2$? $\boxed{\text{CG}}$ Confira com uma calculadora gráfica.

(*b*) Desenhe o gráfico de $y = \dfrac{1}{x - 1}$. $\boxed{\text{CG}}$ Confira com uma calculadora gráfica.

(*c*) Desenhe o gráfico de $y = (x + 1)^2$. Como esse gráfico está relacionado com o de $y = x^2$? $\boxed{\text{CG}}$ Confira com uma calculadora gráfica.

(*d*) Desenhe o gráfico de $y = \dfrac{1}{x+1}$. $\boxed{\text{CG}}$ Confira com uma calculadora gráfica.

3.12 Esboce os gráficos das seguintes equações. $\boxed{\text{CG}}$ Confira suas respostas com uma calculadora gráfica.

(*a*) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (*b*) $4x^2 + y^2 = 4$ (*c*) $x^2 - y^2 = 1$

(*d*) $y = x^3$ (*e*) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$ (*f*) $xy = 2$

[*Sugestão*: Os itens (*c*) e (*f*) são hipérboles. Faça o item (*e*) a partir do item (*a*).]

3.13 Obtenha uma equação cujo gráfico consiste de todos os pontos $P(x, y)$ cujas distâncias ao ponto $F(0, p)$ é igual à sua distância $\overline{PQ}$ da reta horizontal $y = -p$ (p é um número positivo fixo). (Ver Fig. 3-13.)

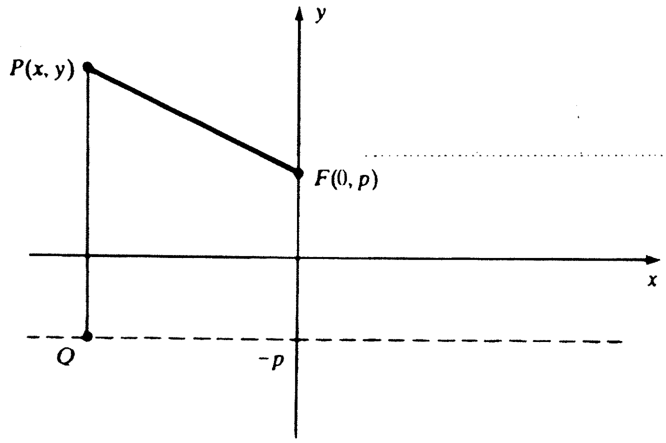


Fig. 3-13

3.14 Encontre as equações canônicas dos círculos satisfazendo as condições dadas: (*a*) centro (4, 3), raio 1; (*b*) centro (–1, 5), raio $\sqrt{2}$; (*c*) centro (0, 2), raio 4; (*d*) centro (3, 3), raio $3\sqrt{2}$; (*e*) centro (4, –1) e passa por (2, 3); (*f*) centro (1, 2) e passa pela origem.

3.15 Identifique os gráficos das seguintes equações:

(*a*) $x^2 + y^2 - 12x + 20y + 15 = 0$ (*b*) $x^2 + y^2 + 30y + 29 = 0$

(*c*) $x^2 + y^2 + 3x - 2y + 4 = 0$ (*d*) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

(*e*) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ (*f*) $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 36$

3.16 (*a*) O Problema 3.3 sugere que o gráfico da equação $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ é um círculo, um ponto ou o conjunto vazio. Prove isso.

(*b*) Obtenha uma condição para os números D, E e F que é equivalente ao gráfico de um círculo. [*Sugestão*: Complete os quadrados.]

3.17 Determine a equação canônica de um círculo que passa pelos seguintes pontos. (*a*) (3, 8), (9, 6) e (13, –2); (*b*) (5, 5), (9, 1) e (0, $\sqrt{10}$). [*Sugestão*: Escreva a equação na forma não canônica $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ e então substitua os valores de x e y dados pelos três pontos. Resolva as três equações resultantes isolando D, E e F.]

3.18 Para qual ou quais valores de k o círculo $(x - k)^2 + (y - 2k)^2$ passa pelo ponto (1, 1)?

3.19 Obtenha as equações canônicas dos círculos de raio 3 que são tangentes a ambas as retas $x = 4$ e $y = 6$.

3.20 Quais são as coordenadas do(s) centro(s) do(s) círculo(s) de raio 5 que passa(m) pelos pontos (–1, 7) e (–2, 6)?

Capítulo 4

Retas

4.1 COEFICIENTE ANGULAR

Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são dois pontos sobre uma reta $\mathscr{L}$, o número m definido pela equação

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

é chamado de *coeficiente angular* de $\mathscr{L}$. O coeficiente angular mede a "inclinação" de $\mathscr{L}$. É a razão entre a diferença $y_2 - y_1$ nas coordenadas y e a diferença $x_2 - x_1$ nas coordenadas x. Isso é igual à razão $\overline{RP_2}/\overline{P_1R}$ na Fig. 4-1(a).

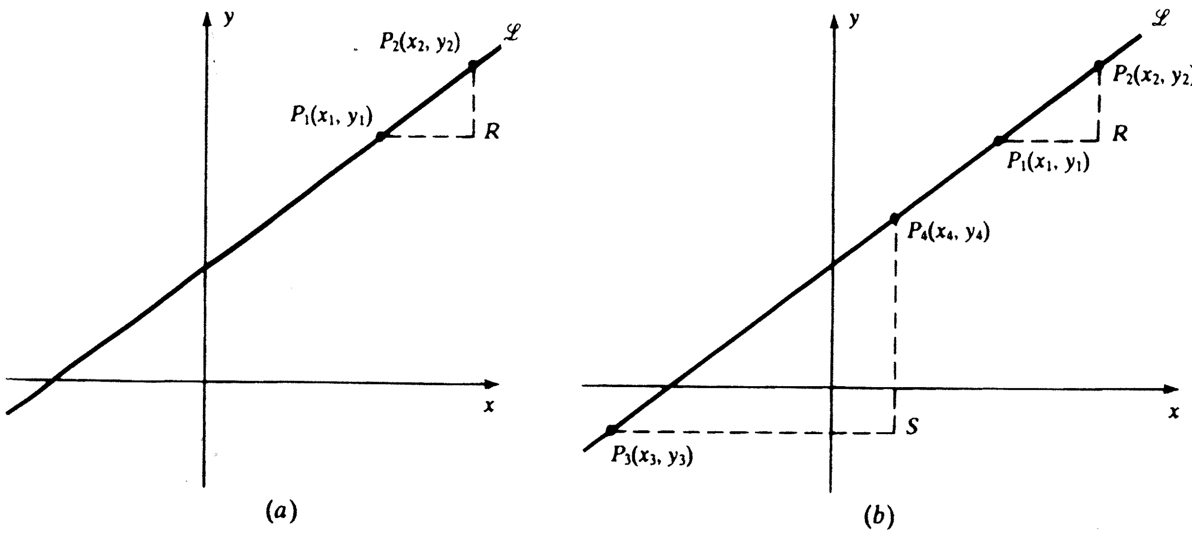


Fig. 4-1

Observe que o valor m do coeficiente angular não depende do par de pontos P_1, P_2 selecionados. Se outro par $P_3(x_3, y_3)$ e $P_4(x_4, y_4)$ for escolhido, o mesmo valor de m é obtido. De fato, na Fig. 4-1(b), o $\Delta P_3 P_4 S$ é semelhante ao $\Delta P_1 P_2 R$.

GEOMETRIA Os ângulos em R e S são ângulos retos, e os ângulos em P_1 e P_3 são iguais, pois são ângulos correspondentes determinados pela reta $\mathscr{L}$ que intersecta as retas paralelas P_1R e P_3S. Logo, o $\Delta P_3 P_4 S$ é semelhante ao $\Delta P_1 P_2 R$ porque dois ângulos do primeiro triângulo são iguais a dois ângulos correspondentes do segundo triângulo.

Conseqüentemente, já que os lados correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais

$$\frac{\overline{RP_2}}{\overline{P_1R}} = \frac{\overline{SP_4}}{\overline{P_3S}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

ou seja, o coeficiente angular definido por P_1 e P_2 é o mesmo coeficiente angular definido por P_3 e P_4.

Exemplo Na Fig. 4-2, o coeficiente angular da reta que conecta os pontos (1,2) e (3,5) é

$$\frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Observe que quando um ponto da reta move-se duas unidades para a direita, move-se três unidades para cima. Note também que a ordem na qual os pontos são considerados não tem influência sobre o coeficiente angular:

$$\frac{2-5}{1-3} = \frac{-3}{-2} = 1.5$$

Em geral,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

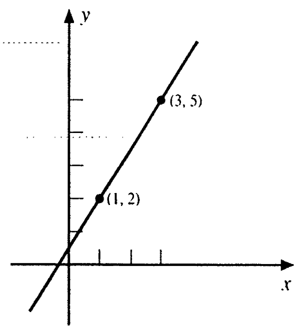


Fig. 4-2

O coeficiente angular de uma reta pode ser positivo, zero ou negativo. Vejamos o que o sinal do coeficiente angular indica.

(i) Considere uma reta $\mathscr{L}$ que se estende para cima e para a direita. Da Fig. 4-3(a), vemos que $y_2 > y_1$; logo, $y_2 - y_1$. Além disso, $x_2 > x_1$ e, por isso, $x_2 - x_1 > 0$. Portanto,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$$

O coeficiente angular de $\mathscr{L}$ é positivo.

(ii) Considere uma reta $\mathscr{L}$ que se estende para baixo e para a direita. Da Fig. 4-3(b), vemos que $y_2 < y_1$; logo, $y_2 - y_1 < 0$. Mas $x_2 > x_1$, assim $x_2 - x_1 > 0$. Logo,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$$

O coeficiente angular de $\mathscr{L}$ é negativo.

(iii) Considere uma reta horizontal $\mathscr{L}$. Da Fig. 4-3(c), $y_1 = y_2$, portanto, $y_2 - y_1 = 0$. Como $x_2 > x_1$, $x_2 - x_1 > 0$. Logo,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

O coeficiente angular de $\mathscr{L}$ é zero.

(iv) Considere uma reta vertical $\mathscr{L}$. Da Fig. 4-3(d), $y_2 > y_1$, de modo que $y_2 - y_1 > 0$. Mas $x_2 = x_1$, de forma que $x_2 - x_1 = 0$. Portanto, a expressão

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

não é definida. *O conceito de coeficiente angular não é definido para* $\mathscr{L}$. (Algumas vezes expressamos essa situação dizendo que o coeficiente angular de $\mathscr{L}$ é infinito.)

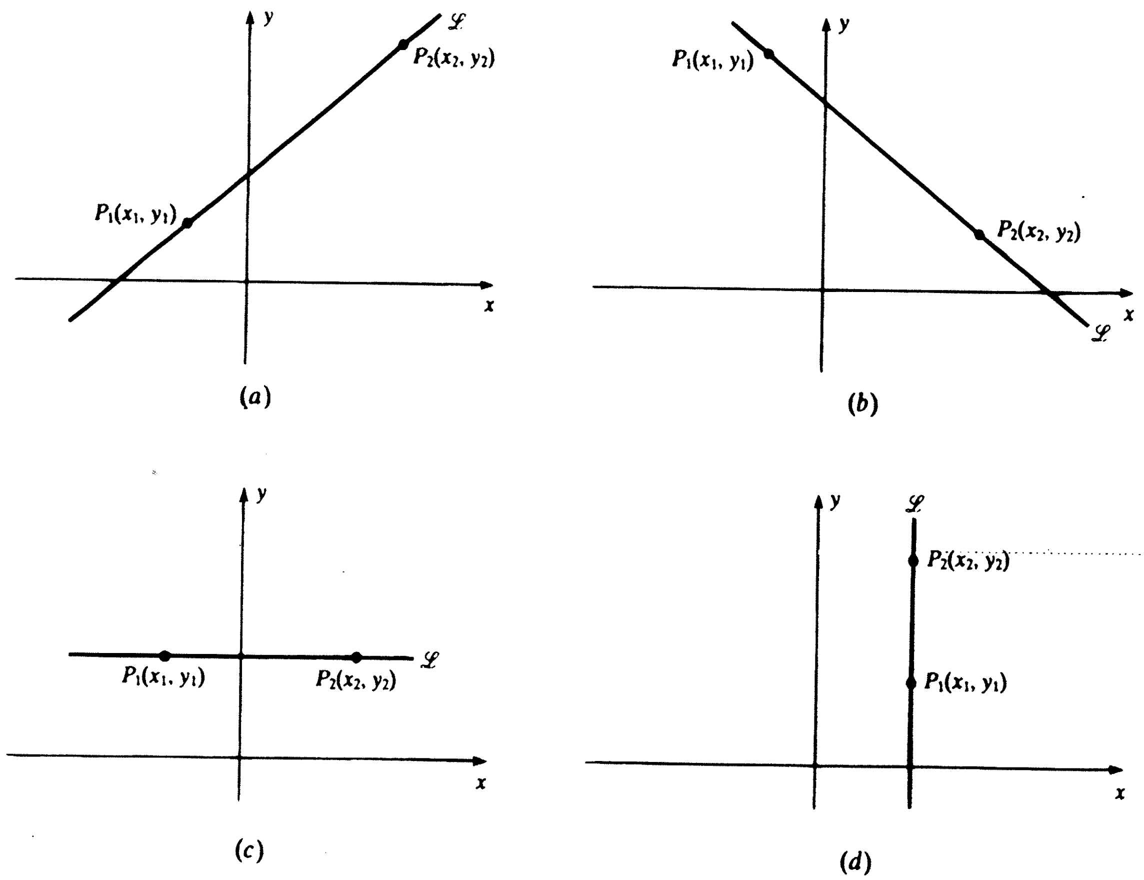


Fig. 4-3

Agora vejamos como o coeficiente angular varia com a "inclinação" da reta. Primeiro consideremos retas com coeficientes angulares positivos, passando por um ponto fixo $P_1(x_1, y_1)$. Tal reta é mostrada na Fig. 4-4. Considere outro ponto, $P_2(x_2, y_2)$, de $\mathscr{L}$ tal que $x_2 - x_1 = 1$. Então, pela definição, o coeficiente angular m é igual à distância $\overline{RP_2}$. Mas quando a inclinação da reta aumenta, $\overline{RP_2}$ cresce indefinidamente [ver Fig. 4-5(*a*)]. Logo, o coeficiente angular de $\mathscr{L}$ cresce de 0 (quando $\mathscr{L}$ é horizontal) até $+\infty$ (quando $\mathscr{L}$ é vertical). Por analogia, quando uma reta com coeficiente angular negativo torna-se mais inclinada, o coeficiente angular decresce de 0 (quando a reta é horizontal) até $-\infty$ (quando a reta é vertical) [ver Fig. 4-5(*b*)].

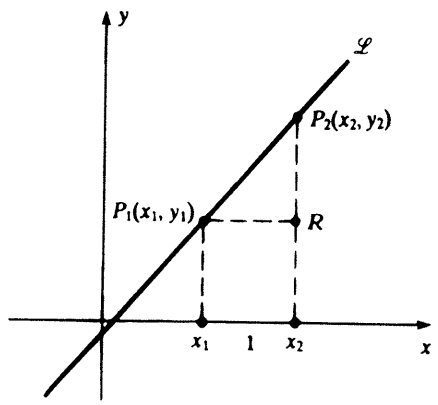


Fig. 4-4

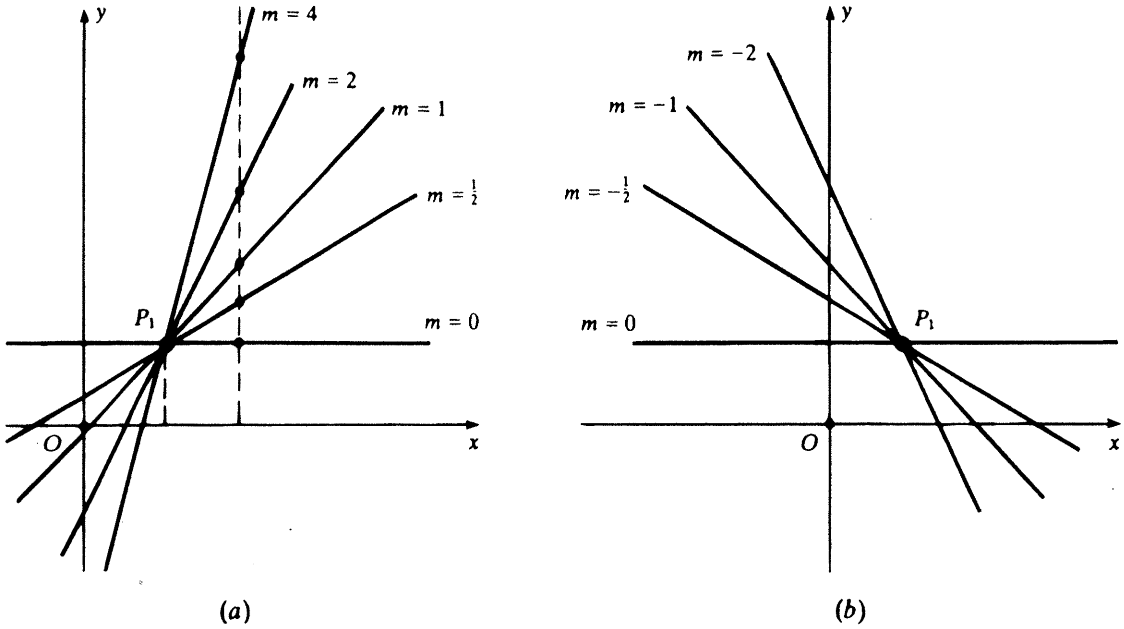


Fig. 4-5

4.2 EQUAÇÕES DE UMA RETA

Considere uma reta $\mathscr{L}$ que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e tem coeficiente angular m [Fig. 4-6(*a*)]. Para qualquer outro ponto $P(x, y)$ da reta, o coeficiente angular m é, por definição, a razão entre $y - y_1$ e $x - x_1$. Logo,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \tag{4.1}$$

Por outro lado, se $P(x, y)$ não está na reta $\mathscr{L}$ [Fig. 4-6(*b*)], então o coeficiente angular $(y - y_1)$ da reta $(x - x_1)$ é diferente do coeficiente angular m de $\mathscr{L}$, de forma que (*4.1*) não vale. A equação (*4.1*) pode se reescrita como

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{4.2}$$

Observe que (*4.2*) é também satisfeita pelo ponto (x_1, y_1). Assim, um ponto (x, y) pertence à reta $\mathscr{L}$ se, e somente se, satisfaz (*4.2*); isto é, $\mathscr{L}$ é o gráfico de (*4.2*). A equação (*4.2*) é chamada de *equação ponto-angular* da reta $\mathscr{L}$.

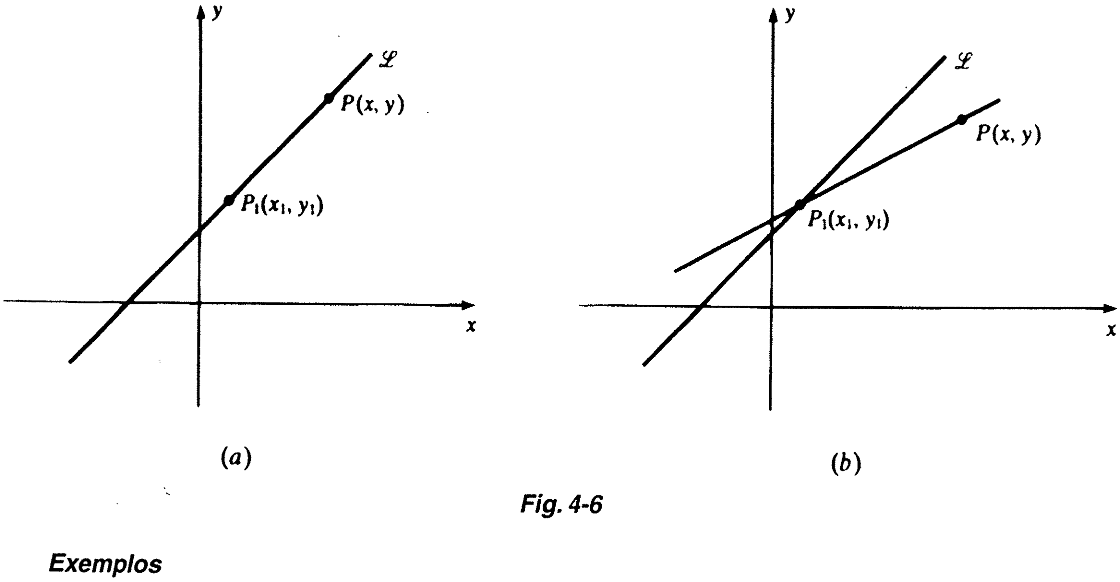


Fig. 4-6

Exemplos

(*a*) A equação ponto-angular da reta que passa pelo ponto (1, 3) com coeficiente angular 5 é

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

(*b*) Seja $\mathcal{L}$ a reta que passa pelos pontos (1, 4) e (–1, 2). O coeficiente angular de $\mathcal{L}$ é

$$m = \frac{4-2}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, duas equações ponto-angular de $\mathcal{L}$ são

$$y - 4 = x - 1 \qquad \text{e} \qquad y - 2 = x + 1$$

A equação (*4.2*) é equivalente a

$$y - y_1 = mx - mx_1 \qquad \text{ou} \qquad y = mx + (y_1 - mx_1)$$

Seja b *o* número $y_1 - mx_1$. Então, a equação fica

$$y = mx + b \tag{4.3}$$

Quando $x = 0$, (*4.3*) resulta no valor $y = b$. Logo, o ponto $(0, b)$ pertence a $\mathcal{L}$. Portanto, b é a coordenada y do ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta o eixo y (ver Fig. 4-7). O número b é chamado de *intercepto* y de $\mathcal{L}$, e (*4.3*) é chamada de *equação reduzida* de $\mathcal{L}$.

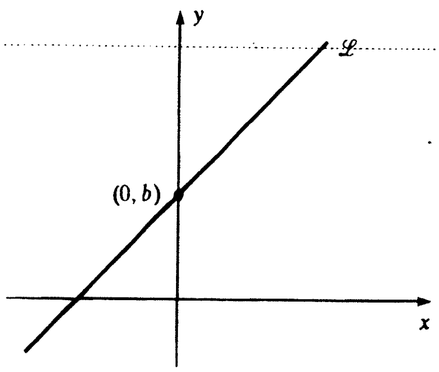


Fig. 4-7

Exemplo Seja $\mathcal{L}$ a reta que passa pelos pontos (1, 3) e (2, 5). Seu coeficiente angular m é

$$\frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Sua equação reduzida deve ter a forma $y = 2x + b$. Uma vez que o ponto (1, 3) pertence à reta $\mathcal{L}$, (1, 3) deve satisfazer a equação

$$3 = 2(1) + b$$

Assim, $b = 1$, o que nos dá $y = 2x + 1$ como a equação reduzida da reta.

Um método alternativo é escrever uma equação ponto-angular

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

donde

$$y - 3 = 2x - 2$$
$$y = 2x + 1$$

4.3 RETAS PARALELAS

Considere que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são retas paralelas, não verticais, e sejam P_1 e P_2 os pontos onde $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ cortam o eixo y [ver Fig. 4-8(*a*)]. Assuma que R_1 está uma unidade à direita de P_1 e R_2 uma unidade a direita de P_2. Sejam Q_1 e Q_2 as interseções das retas verticais que passam por R_1 e R_2 com $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Logo, $\Delta P_1 R_1 Q_1$ é congruente ao $\Delta P_2 R_2 Q_2$.

GEOMETRIA Use o teorema da congruência do caso ALA (ângulo-lado-ângulo). $\measuredangle R_1 = \measuredangle R_2$ já que ambos os ângulos são retos,

$$\overline{P_1R_1} = \overline{P_2R_2} = 1$$

$\measuredangle P_1 = \measuredangle P_2$, uma vez que $\measuredangle P_1$ e $\measuredangle P_2$ são formados por pares de retas paralelas.

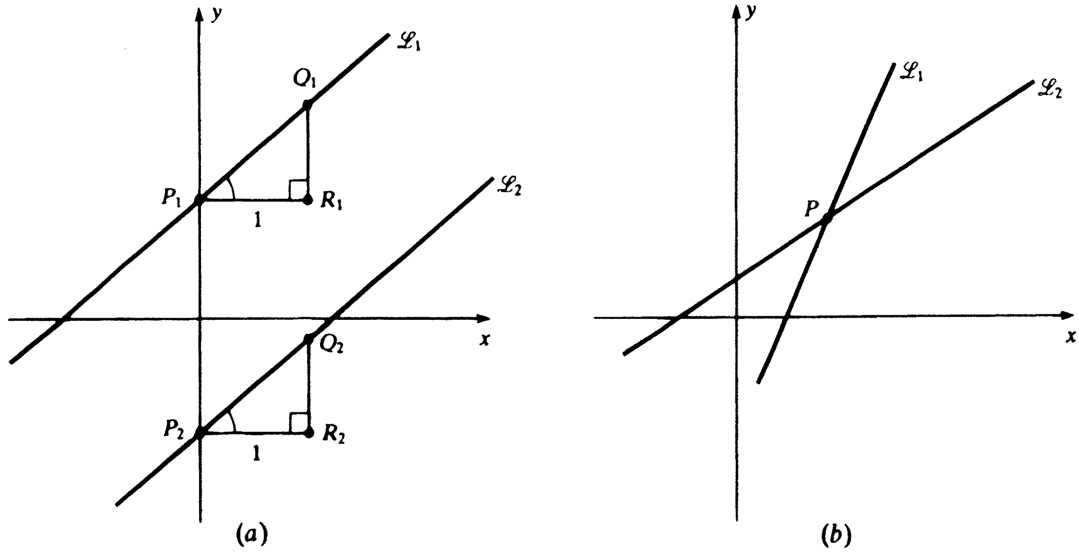


Fig. 4-8

Logo, $\overline{R_1Q_1} = \overline{R_2Q_2}$ e

$$\text{coeficiente angular de } \mathscr{L}_1 = \frac{\overline{R_1Q_1}}{1} = \frac{\overline{R_2Q_2}}{1} = \text{coeficiente angular de } \mathscr{L}_2$$

Portanto, *retas paralelas têm coeficientes angulares iguais.*

Reciprocamente, se diferentes retas $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ não são paralelas, então seus coeficientes angulares devem ser diferentes. Pois se $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ se encontram no ponto P [ver Fig. 4-8(*b*)] e seus coeficientes angulares são iguais, então $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ deveriam ser a mesma reta. Portanto, provamos que:

Teorema 4.1: Duas retas distintas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.

Exemplo Determine uma equação da reta $\mathscr{L}$ que passa por (3, 2) e é paralela à reta $\mathscr{M}$ que tem equação $3x - y = 2$. A reta $\mathscr{M}$ tem equação reduzida $y = 3x + 2$. Logo, o coeficiente angular de $\mathscr{M}$ é 3, e o coeficiente angular da reta paralela $\mathscr{L}$ também deve ser 3. A equação reduzida de $\mathscr{L}$ deve então ser da forma $y = 3x + b$. Já que (3, 2) pertence a $\mathscr{L}$, $2 = 3(3) + b$, ou seja $b = -7$. Portanto, a equação reduzida de $\mathscr{L}$ é $y = 3x - 7$. Uma equação equivalente é $3x - y = 7$.

4.4 RETAS PERPENDICULARES

Teorema 4.2: Duas retas não-verticais são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1. Logo, se o coeficiente angular de uma das retas é m, o coeficiente angular da outra é o inverso recíproco $-1/m$.

Para uma demonstração, ver Problema 4.5.

Problemas Resolvidos

4.1 Obtenha o coeficiente angular da reta que tem a equação $5x - 2y = 4$. Desenhe a reta e determine se os pontos (10,23) e (6,12) estão sobre a mesma.

Isole y na equação,

$$y = \frac{5}{2}x - 2$$

Portanto, temos a equação na forma reduzida; o coeficiente angular é $\frac{5}{2}$ e o intercepto y é -2. A reta passa pelo ponto (0, -2). Para desenhar a reta, necessitamos de outro ponto sobre a mesma. Substitua x por 2 em (*1*), obtendo $y = 3$. Logo, (2, 3) é um ponto da reta (ver Fig. 4-9). (Poderíamos ter determinado outros pontos substituindo valores diferentes de 2 em x.) Para testar se (10, 23) está na reta, substitua x por 10 e y por 23 e veja se a equação $5x - 2y = 4$ vale. Os dois lados são iguais; logo (10, 23) pertence à reta. Um teste semelhante mostra que (6, 12) não está sobre a reta.

4.2 Encontre uma equação da reta $\mathscr{L}$ que é a mediatriz do segmento que conecta os pontos $A(-1, 1)$ e $B(4, 3)$ (ver Fig. 4-10).

$\mathscr{L}$ deve passar pelo ponto médio M do segmento AB. Pela fórmula do ponto médio, as coordenadas de M são $(\frac{3}{2}, 2)$. O coeficiente angular da reta que conecta A e B é

$$\frac{3-1}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$$

Logo, pelo Teorema 4.2, o coeficiente angular de $\mathscr{L}$ é

$$-\frac{1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$$

A equação ponto-angular de $\mathscr{L}$ é $y - 2 = -\frac{5}{2}(x - \frac{3}{2})$.

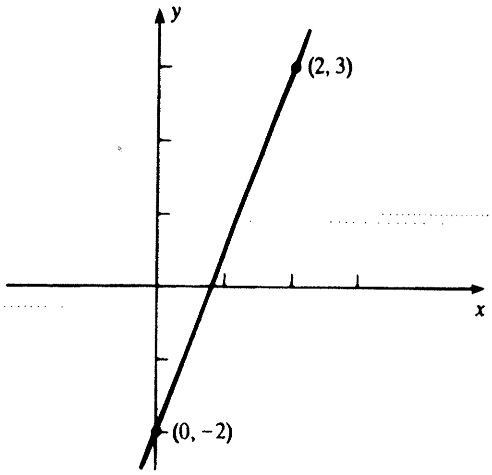


Fig. 4-9

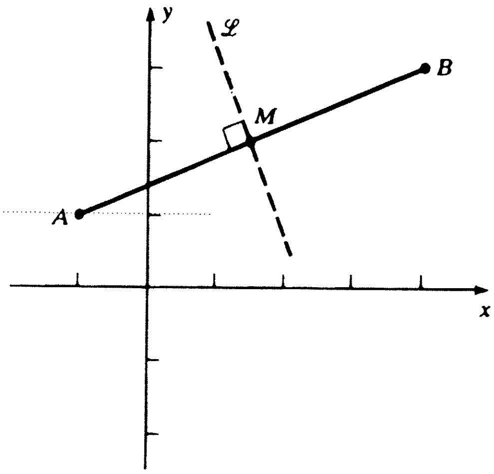


Fig. 4-10

4.3 Determine se os pontos $A(-1, 6)$, $B(5, 9)$ e $C(7, 10)$ são colineares; isto é, se tais pontos estão sobre a mesma reta.

A, B, C serão colineares se, e somente se, a reta AB é a mesma reta AC, o que é equivalente a dizer que o coeficiente angular de AB é igual ao coeficiente angular de AC.

Os coeficientes angulares de AB e AC são

$$\frac{9-6}{5-(-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{10-6}{7-(-1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo, A, B, C são colineares.

4.4 Prove usando coordenadas que as diagonais de um losango (um paralelogramo cujos lados são iguais) são perpendiculares entre si.

Represente o losango como na Fig. 4-11. (Como sabemos que a coordenada x de D é $v + u$?) Então o coeficiente angular da diagonal AD é

$$m_1 = \frac{w-0}{v+u-0} = \frac{w}{v+u}$$

e o coeficiente angular da diagonal BC é

$$m_2 = \frac{w-0}{v-u} = \frac{w}{v-u}$$

Logo,

$$m_1 m_2 = \left(\frac{w}{v+u}\right)\left(\frac{w}{v-u}\right) = \frac{w^2}{v^2-u^2}$$

Já que $ABCD$ é um losango, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Mas $\overline{AB} = u$ e $\overline{AC} = \sqrt{v^2+w^2}$. Assim,

$$\sqrt{v^2+w^2} = u \qquad \text{ou} \qquad v^2 + w^2 = u^2 \qquad \text{ou} \qquad w^2 = u^2 - v^2$$

Conseqüentemente, $$m_1m_2 = \frac{w^2}{v^2 - u^2} = \frac{u^2 - v^2}{v^2 - u^2} = -1$$

e, pelo Teorema 4.2, as retas AD e BC são perpendiculares.

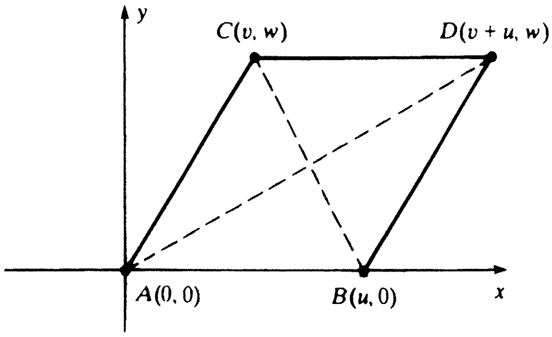


Fig. 4-11

4.5 Demonstre o Teorema 4.2.

Assuma que $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ são retas perpendiculares não-verticais com respectivos coeficientes angulares m_1 e m_2. Mostraremos que $m_1m_2 = -1$.

Seja $\mathscr{L}_1^*$ a reta que passa pela origem O e é paralela a $\mathscr{L}_1$, e seja $\mathscr{L}_2^*$ a reta que passa pela origem e é paralela a $\mathscr{L}_2$ [ver Fig. 4-12(a)]. Como $\mathscr{L}_1^*$ é paralela a $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2^*$ é paralela a $\mathscr{L}_2$, o coeficiente angular de $\mathscr{L}_1^*$ é m_1 e o coeficiente angular de $\mathscr{L}_2^*$ é m_2 (pelo Teorema 4.1). Além disso $\mathscr{L}_1^*$ é perpendicular a $\mathscr{L}_2^*$ uma vez que $\mathscr{L}_1$ é perpendicular a $\mathscr{L}_2$. Seja R o ponto de $\mathscr{L}_1^*$ com coordenada x 1, e seja Q o ponto de $\mathscr{L}_2^*$ com coordenada x 1 [ver Fig. 4-12(b)]. A equação reduzida da reta de $\mathscr{L}_1^*$ é $y = m_1x$, e assim a coordenada y de R é m_1 uma vez que sua coordenada x é 1. Analogamente, a coordenada y de Q é m_2. Pela fórmula de distância,

$$\overline{OQ} = \sqrt{(1-0)^2 + (m_2 - 0)^2} = \sqrt{1 + m_2^2}$$
$$\overline{OR} = \sqrt{(1-0)^2 + (m_1 - 0)^2} = \sqrt{1 + m_1^2}$$
$$\overline{QR} = \sqrt{(1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2} = \sqrt{(m_2 - m_1)^2}$$

Pelo teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo QOR,

$$\overline{QR}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2$$
$$(m_2 - m_1)^2 = (1 + m_2^2) + (1 + m_1^2)$$
$$m_2^2 - 2m_2m_1 + m_1^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2$$
$$-2m_1m_2 = 2$$
$$m_1m_2 = -1$$

Reciprocamente, assuma que $m_1m_2 = -1$, onde m_1m_2 são os coeficientes angulares das retas $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$. Então $\mathscr{L}_1$ não é paralela a $\mathscr{L}_2$. (Do contrário, pelo Teorema 4.1, $m_1^2 = -1$, o que contradiz o fato de que um quadrado nunca é negativo). Faça $\mathscr{L}_1$ intersectar $\mathscr{L}_2$ no ponto P (ver Fig. 4-13). Seja $\mathscr{L}_3$ a reta que passa por P e é perpendicular a $\mathscr{L}_1$. Se m_3 é o coeficiente angular de $\mathscr{L}_3$, então, pelo que temos mostrado,

$$m_1m_3 = -1 = m_1m_2 \qquad \text{ou} \qquad m_3 = m_2$$

Como $\mathscr{L}_2$ e $\mathscr{L}_3$ passam por P e têm o mesmo coeficiente angular, elas devem coincidir. Portanto, $\mathscr{L}_1$ é perpendicular a $\mathscr{L}_3$, $\mathscr{L}_1$ é perpendicular a $\mathscr{L}_2$.

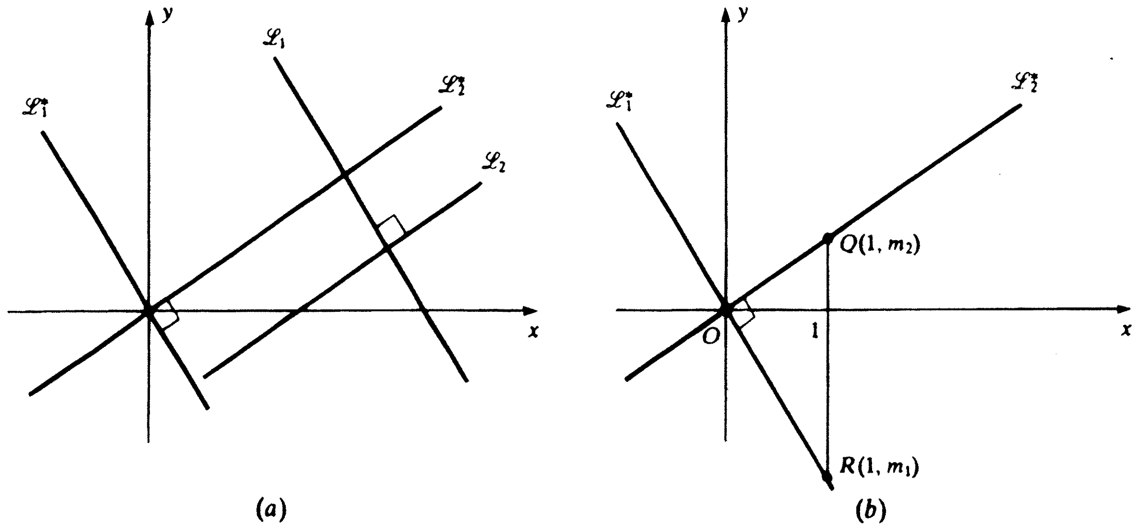


Fig. 4-12

4.6 Mostre que a reta $y = x$ forma um ângulo de 45° com o eixo positivo x (isto é, $\measuredangle POQ$ na Fig. 4-14 mede 45°).

Seja P o ponto sobre a reta $y = x$ com coordenadas (1, 1). Projete uma perpendicular PQ sobre o eixo positivo x. Então, $\overline{PQ} = 1$ e $\overline{OQ} = 1$. Logo, $\measuredangle OPQ = \measuredangle OQP$, já que eles são os ângulos da base do triângulo isósceles QPO. Uma vez que $\measuredangle OQP$ 90°,

$$\measuredangle OPQ + \measuredangle QOP = 180° - \measuredangle OQP = 180° - 90° = 90°$$

Como $\measuredangle OQP = \measuredangle QOP$, cada um deles mede 45°.

4.7 Esboce o gráfico da equação $|x| + |y| = 1$

Considere cada quadrante separadamente. No primeiro quadrante, $|x| = x$ e $|y| = y$. Logo, a equação fica $x + y = 1$; isto é, $y = -x + 1$. Isso resulta na reta com coeficiente angular -1 e intercepto y 1. Essa reta intersecta o eixo x em (1,0). Portanto, no primeiro quadrante nosso gráfico consiste do segmento de reta que conecta (1,0) e (0,1) (ver Fig. 4-15). No segundo quadrante, onde x é negativo e y é positivo, $|x| = -x$ e $|y| = y$, e nossa equação fica $-x + y = 1$ ou $y = x + 1$. Isso resulta na reta com coeficiente angular 1 e intercepto y 1, que passa pelos pontos (−1, 0) e (0, 1). Logo, no segundo quadrante, temos o segmento definido por esses dois pontos. Da mesma forma, no terceiro quadrante, obtemos o segmento que conecta (−1, 0) e (0, − 1) e, no quarto quadrante, o segmento que liga (0, −1) e (1, 0).

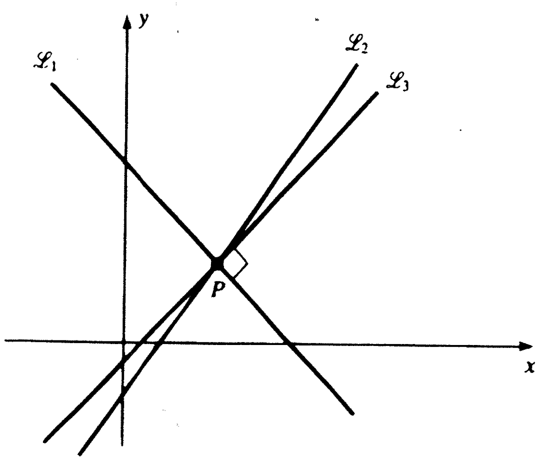


Fig. 4-13

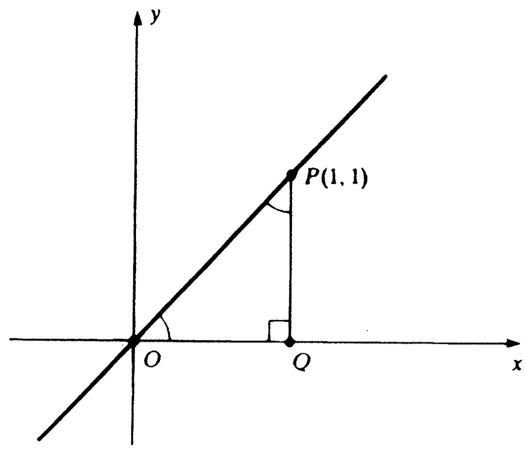


Fig. 4-14

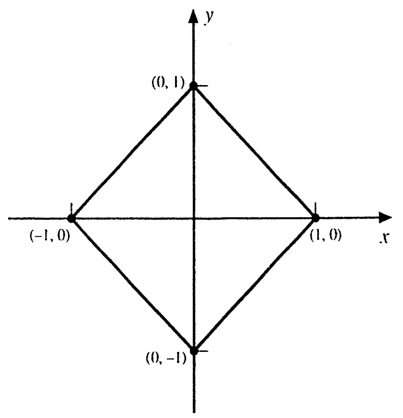


Fig. 4-15

Problemas Complementares

4.8 Obtenha uma equação ponto-angular da reta que contém cada um dos seguintes pares de pontos: (*a*) (2, 5) e (−1, 4); (*b*) (1, 4) e a origem; (*c*) (7, −1) e (− 1, 7).

4.9 Determine a equação reduzida da reta: (*a*) que passa pelos pontos (−2, 3) e (4, 8); (*b*) que tem coeficiente angular 2 e intercepto $y - 1$; (*c*) que conecta os pontos (0, 2) e (3, 0); (*d*) que passa pelo ponto (1, 4) e é paralela ao eixo x; (*e*) que passa por (1, 4) e sobe cinco unidades para cada unidade que cresce em x; (*f*) que passa por (5, 1) e diminui três unidades para cada unidade que cresce em x; (*g*) que passa por (−1, 4) e é paralela à reta com equação $3x + 4y = 2$; (*h*) que passa pela origem e é paralela à reta com equação $y = 1$; (*i*) que passa por (1, 4) e é perpendicular à reta com equação $5x + 2y = 1$; (*j*) que passa pela origem e é perpendicular à reta com equação $5x + 2y = 1$; (*k*) que passa por (4, 3) e é perpendicular à reta com equação $x = 1$; (*l*) que passa pela origem e bissecta o ângulo entre o eixo positivo x e o eixo positivo y.

4.10 Encontre os coeficientes angulares e interceptos y das retas dadas pelas seguintes equações. Também encontre as coordenadas de um ponto diferente de (0, b) em cada reta.

(*a*) $y = 5x + 4$ (*b*) $7x - 4y = 8$ (*c*) $y = 2x - 4$ (*d*) $y = 2$ (*e*) $\frac{y}{4} + \frac{x}{3} = 1$

4.11 Se o ponto (2, k) pertence à reta com coeficiente angular $m = 3$ que passa pelo ponto (1, 6), determine k.

4.12 O ponto (−1, −2) pertence à reta que passa pelos pontos (4, 7) e (5, 9)?

4.13 (*a*) Use coeficientes angulares para determinar se os pontos $A(4,1)$, $B(7, 3)$ e $C(3, 9)$ são os vértices de um triângulo retângulo.

(*b*) Utilize coeficientes angulares para mostrar que $A(5, 4)$, $B(-4, 2)$, $C(-3, -3)$ e $D(6, -1)$ são vértices de um paralelogramo.

(*c*) Sob quais condições os pontos $A(u, v + w)$, $B(v, u + w)$ e $C(w, u + v)$ estão sobre a mesma reta?

(*d*) Determine k de modo que os pontos $A(7, 5)$, $B(-1, 2)$ e $C(k, 0)$ sejam os vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto em B.

4.14 Determine se as retas dadas são paralelas, perpendiculares ou nenhuma das duas.

(*a*) $y = 5x - 2$ e $y = 5x + 3$ (*b*) $y = x + 3$ e $y = 2x + 3$ (*c*) $4x - 2y = 7$ e $10x - 5y = 1$
(*d*) $4x - 2y = 7$ e $2x + 4y = 1$ (*e*) $7x + 3y = 6$ e $3x + 7y = 14$

4.15 A temperatura normalmente é medida em graus Fahrenheit ou graus Celsius. A relação entre temperaturas em Fahrenheit e Celsius é dada por uma equação linear. O ponto de congelamento da água é 0° Celsius ou 32° Fahrenheit, e o ponto de ebulição da água é 100° Celsius ou 212° Fahrenheit. (*a*) Deduza uma equação que forneça a temperatura Fahrenheit y em termos da temperatura Celsius x. (*b*) Qual é a temperatura que é a mesma em ambas as escalas?

4.16 Para quais valores de k que a reta $kx + 5y = 2k$: (a) terá intercepto y 4; (b) terá coeficiente angular 3; (c) passará pelo ponto (6,1); (d) será perpendicular à reta $2x - 3y = 1$?

4.17 Um triângulo tem vértices $A(1, 2)$, $B(8, 0)$, $C(5, 3)$. Encontre equações (a) da mediana de A ao ponto médio do lado oposto; (b) da altura de B ao lado oposto; (c) da mediatriz do lado AB.

4.18 Desenhe a reta determinada pela equação $4x - 3y = 15$. Descubra se os pontos (12, 9) e (6, 3) pertencem a essa reta.

4.19 (a) Prove que qualquer equação linear $ax + yb = c$ é a equação de uma reta, assumindo que a e b não são zero. [*Sugestão*: Considere separadamente os casos $b \neq 0$ e $b = 0$.]

(b) Demonstre que qualquer reta é o gráfico de uma equação linear. [*Sugestão*: Considere separadamente o caso no qual a reta é vertical e o caso em que a reta não é vertical.]

(c) Prove que duas retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são paralelas se, e somente se, $a_1b_2 = a_2b_1$. (Quando $a_1 \neq 0$ e $b_1 \neq 0$, a última condição é equivalente a $a_2/a_1 = b_2/b_1$.)

4.20 Se a reta $\mathscr{L}$ tem a equação $3x + 2y - 4 = 0$, prove que um ponto $P(x, y)$ está acima de $\mathscr{L}$ se, e somente se, $3x + 2y - 4 > 0$.

4.21 Se a reta $\mathscr{M}$ tem a equação $3x - 2y - 4 = 0$, demonstre que um ponto $P(x, y)$ está abaixo de $\mathscr{M}$ se, e somente se, $3x - 2y - 4 > 0$.

4.22 (a) Use duas desigualdades para definir o conjunto de todos os pontos acima da reta $4x + 3y - 9 = 0$ e à direita da reta $x = 1$. Desenhe um diagrama indicando o conjunto.

(b) CG Use uma calculadora gráfica para testar sua resposta ao item (a).

4.23 (a) A companhia líder de aluguel de carros, Heart, cobra 30 dólares por dia e 15 cents por milha por um carro. A segunda companhia, Bird, cobra 32 dólares por dia e 12 cents por milha para o mesmo tipo de carro. Se você espera dirigir x milhas por dia, para quais valores de x custaria menos se alugar o carro da Heart?

(b) CG Resolva o item (a) usando uma calculadora gráfica.

4.24 Represente os gráficos das seguintes equações: (a) $|x| - |y| = 1$; (b) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$;

(c) CG Use uma calculadora gráfica para resolver o item (b).

4.25 Demonstre os seguintes teoremas geométricos usando coordenadas.

(a) A figura obtida conectando os pontos médios de lados consecutivos de qualquer quadrilátero é um paralelogramo.

(b) As alturas de qualquer triângulo se encontram em um ponto comum.

(c) Um paralelogramo com diagonais perpendiculares é equilátero (um losango).

(d) Se duas medianas de um triângulo são iguais, o triângulo é isósceles.

(e) Um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. [*Sugestão*: Para os itens (a), (b) e (c), escolha sistemas de coordenadas como na Fig. 4-16.]

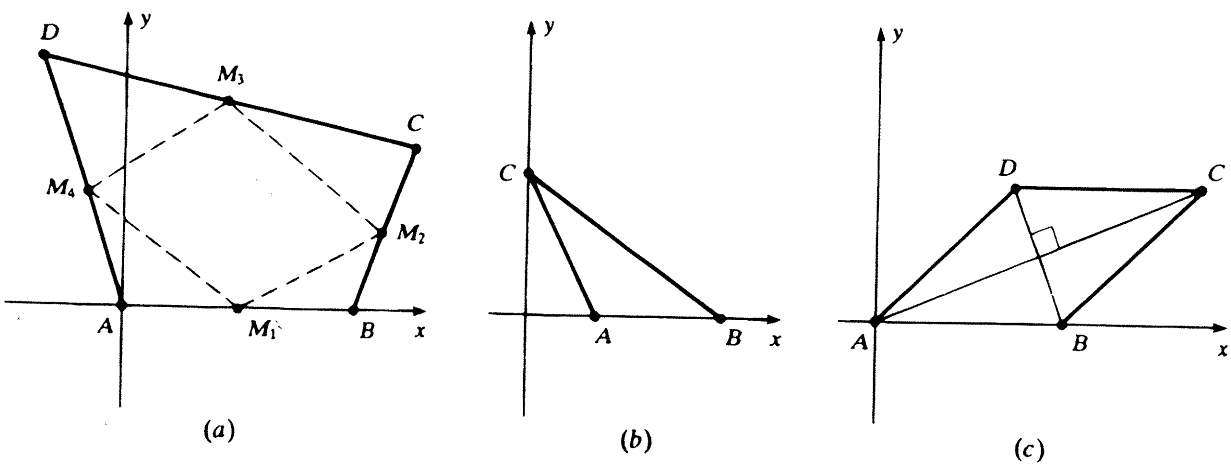


Fig. 4-16

4.26 Descreva geometricamente as famílias das seguintes retas, onde m e b são números reais quaisquer:

$$(a) \quad y = mx + 2 \qquad (b) \quad y = 3x + b$$

4.27 O *intercepto* x de uma reta $\mathscr{L}$ é definido como sendo a coordenada x do único ponto onde $\mathscr{L}$ intersecta o eixo x. Portanto, é o número a tal que $(a, 0)$ pertence a $\mathscr{L}$.

(a) Quais retas não têm intercepto x?

(b) Obtenha os interceptos de (i) $2x - 3y = 4$, (ii) $x + 7y = 14$, (iii) $5x - 13y = 1$, (iv) $x = 3$, (v) $y = 1$.

(c) Se a e b são intercepto x e intercepto y de uma reta, mostre que

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

é uma equação da reta.

(d) Se (2) é uma equação de uma reta, mostre que a é o intercepto x e b é o intercepto y.

4.28 No triângulo com vértices $A(3, 1)$, $B(2, 7)$ e $C(4, 10)$ obtenha a equação reduzida: (a) da altura de A ao lado BC; (b) da mediana de B ao lado AC; (c) da mediatriz do lado AB.

Capítulo 5

Interseções de Gráficos

A *interseção* de dois gráficos consiste dos pontos que os gráficos têm em comum. Esses pontos podem ser obtidos resolvendo simultaneamente as equações que determinam os gráficos.

Exemplos

(*a*) Para encontrar a interseção das retas $\mathscr{L}$ e $\mathscr{M}$ determinadas por

$$\mathscr{L}: \quad 4x - 3y = 15 \qquad \mathscr{M}: \quad 3x + 2y = 7$$

multiplique a primeira equação por 2 e a segunda por 3,

$$8x - 6y = 30$$
$$9x + 6y = 21$$

Agora y tem os coeficientes -6 e 6 nas duas equações, e somamos as equações para eliminar y,

$$17x = 51 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{51}{17} = 3$$

Da equação para $\mathscr{M}$, quando $x = 3$, $3(3) + 2y = 7$. Logo,

$$9 + 2y = 7 \qquad \text{ou} \qquad 2y = -2 \qquad \text{ou} \qquad y = -1$$

Portanto, o único ponto de interseção é $(3, -1)$ (ver Fig. 5-1).

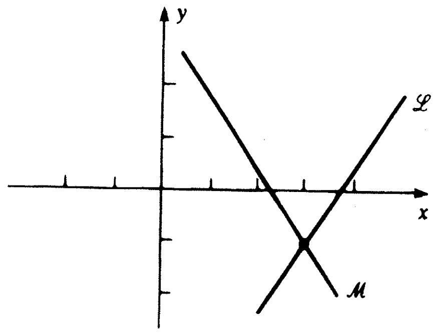


Fig. 5-1

(*b*) Encontrar a interseção entre a reta $\mathscr{L}$: $y = 2x + 1$ e o círculo $(x-1)^2 + (y+1)^2$. Devemos resolver o sistema

$$y = 2x + 1 \qquad (1)$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16 \qquad (2)$$

A partir de (*1*), substitua y por $2x + 1$ em (*2*),

$$(x-1)^2 + (2x+2)^2 = 16$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (4x^2 + 8x + 4) = 16$$
$$5x^2 + 6x + 5 = 16$$
$$5x^2 + 6x - 11 = 0$$
$$(5x + 11)(x - 1) = 0$$

Logo, $5x + 11 = 0$ ou $x - 1 = 0$; isto é, $x = -11/5 = -2{,}2$ ou $x = 1$. De (1), quando $x = 1$, $y = 3$; e quando $x = -2$, 2, $y = -3$, 4. Portanto, existem dois pontos de interseção, (1, 3) e (–2,2; –3,4), como indicado na Fig. 5-2.

(*c*) Para encontrar a interseção da reta $y = x + 2$ com a parábola $y = x^2$, resolvemos o sistema

$$y = x + 2 \qquad (3)$$
$$y = x^2 \qquad (4)$$

De (*4*), substitua y por x^2 em (*3*)

$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Logo, $x - 2 = 0$ ou $x + 1 = 0$; isto é, $x = 2$ ou $x = -1$. De (*3*) ou (*4*), quando $x = 2$, $y = 4$; e quando $x = -1$, $y = 1$. Portanto, os pontos de interseção são (2, 4) e (–1, 1) (ver Fig. 5-3).

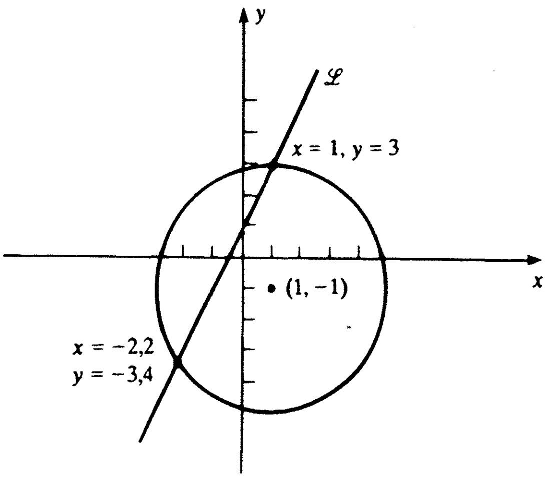


Fig. 5-2

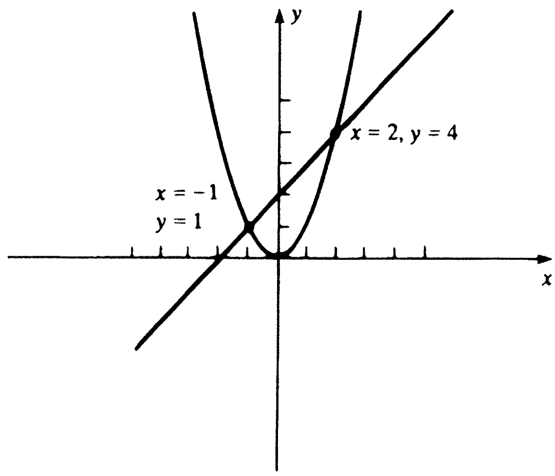


Fig. 5-3

Problemas Resolvidos

5.1 Determine a interseção das retas

$$\mathscr{L}: \; 3x - 3y = 1 \qquad \mathscr{M}: \; 4x + 2y = 3$$

Devemos resolver o sistema

$$3x - 3y = 1$$
$$4x + 2y = 3$$

Para eliminar y, multiplique a primeira equação por 2 e a segunda por 3,

$$6x - 6y = 2$$
$$12x + 6y = 9$$

some as duas equações,

$$18x = 11 \qquad \text{ou} \qquad x = \tfrac{11}{18}$$

Substitua x por $\tfrac{11}{18}$ na primeira equação,

$$3\left(\frac{11}{18}\right) - 3y = 1$$

$$\frac{11}{6} - 1 = 3y$$

$$\frac{5}{6} = 3y$$

$$\frac{5}{18} = y$$

Assim, o ponto de interseção é $(\tfrac{11}{18}, \tfrac{5}{18})$.

5.2 Obtenha a interseção da reta $\mathscr{L}$: $y = x + 3$ com a elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Para resolver o sistema de duas equações, substitua y por $x + 3$ (como dado pela equação de $\mathscr{L}$) na equação da elipse,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(x+3)^2}{4} = 1$$

Multiplique por 36 para eliminar os denominadores,

$$4x^2 + 9(x+3)^2 = 36$$
$$4x^2 + 9(x^2 + 6x + 9) = 36$$
$$4x^2 + 9x^2 + 54x + 81 = 36$$
$$13x^2 + 54x + 45 = 0$$

ÁLGEBRA As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pela *fórmula quadrática*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De acordo com a fórmula quadrática,

$$x = \frac{-54 \pm \sqrt{(54)^2 - 4(13)(45)}}{2(13)} = \frac{-54 \pm \sqrt{2916 - 2340}}{26} = \frac{-54 \pm \sqrt{576}}{26} = \frac{-54 \pm 24}{26}$$

Logo,

$$x = \frac{-54 + 24}{26} = -\frac{30}{26} = -\frac{15}{13} \qquad \text{e} \qquad y = x + 3 = -\frac{15}{13} + \frac{39}{13} = \frac{24}{13}$$

ou

$$x = \frac{-54 - 24}{26} = \frac{-78}{26} = -3 \qquad \text{e} \qquad y = x + 3 = -3 + 3 = 0$$

Os dois pontos de interseção são mostrados na Fig. 5-4.

Observe que poderíamos ter resolvido $13x^2 + 54x + 45 = 0$ fatorando o lado esquerdo,

$$(13x + 15)(x + 3) = 0$$

Contudo, tal fatorização é às vezes difícil de conseguir, sendo que a fórmula quadrática pode ser aplicada automaticamente.

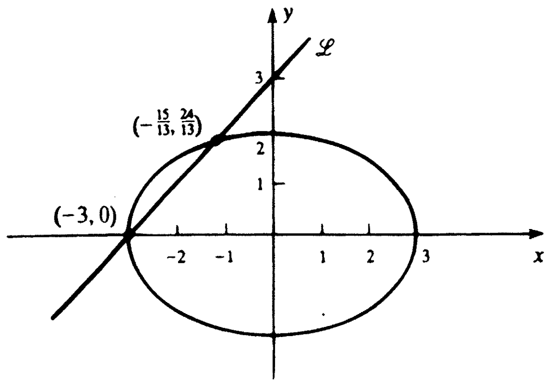


Fig. 5-4

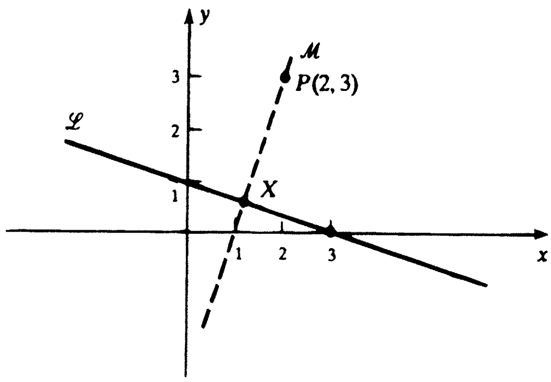


Fig. 5-5

5.3 Obtenha a distância perpendicular do ponto $P(2, 3)$ à reta $\mathscr{L}$: $3y + x = 3$.

Considere que a perpendicular de P a $\mathscr{L}$ intercepte $\mathscr{L}$ no ponto X (ver Fig. 5-5). Se pudermos determinar as coordenadas de X, então a distância $\overline{PX}$ pode ser calculada pela fórmula da distância (*2.1*). Mas X é a interseção da reta $\mathscr{L}$ com a reta $\mathscr{M}$ que passa por P e é perpendicular a $\mathscr{L}$. A equação reduzida de $\mathscr{L}$ é

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

o que mostra que o coeficiente angular de $\mathscr{L}$ é $-\frac{1}{3}$. Portanto, pelo Teorema 4.2, o coeficiente angular de $\mathscr{M}$ é $-1/-\frac{1}{3} = 3$, de modo que uma equação ponto-angular de $\mathscr{M}$ é

$$y - 3 = 3(x - 2)$$

Isolando y, obtemos a equação reduzida de $\mathscr{M}$,

$$y - 3 = 3x - 6 \qquad \text{ou} \qquad y = 3x - 3$$

Agora, resolva o sistema

$$\mathscr{L}: 3y + x = 3 \qquad \mathscr{M}: y = 3x - 3$$

Da segunda equação, substitua y por $3x - 3$ na primeira equação,

$$\begin{aligned} 3(3x - 3) + x &= 3 \\ 9x - 9 + x &= 3 \\ 10x &= 12 \\ x &= \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Da equação para $\mathscr{M}$, quando $x = \frac{6}{5}$,

$$y = 3\left(\frac{6}{5}\right) - 3 = \frac{18}{5} - 3 = \frac{3}{5}$$

Logo, o ponto X tem coordenadas $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ e

$$\overline{PX} = \sqrt{\left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{160}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{16}\sqrt{10}}{5} = \frac{4\sqrt{10}}{5} = 0{,}8\sqrt{10}$$

Use a aproximação $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ (o símbolo $\approx$ significa "é aproximadamente igual a") para obter

$$\overline{PX} \approx 0{,}8(3{,}16) \approx 2{,}53$$

Problemas Complementares

5.4 Encontre as interseções dos seguintes pares de gráficos e esboce-os.

(*a*) As retas $\mathcal{L}$: $x - 2y = 2$ e $\mathcal{M}$: $3x + 4y = 6$

(*b*) As retas $\mathcal{L}$: $4x + 5y = 10$ e $\mathcal{M}$: $5x + 4y = 8$

(*c*) A reta $x + y = 8$ e o círculo $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

(*d*) A reta $y = 8x - 6$ e a parábola $y = 2x^2$

(*e*) As parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

(*f*) A parábola $x = y^2$ e o círculo $x^2 + y^2 = 6$

(*g*) Os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

(*h*) A reta $y = x - 3$ e a hipérbole $xy = 4$

(*i*) O círculo de raio 3 centrado na origem e a reta que passa pela origem e tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$

(*j*) As retas $2x - y = 1$ e $4x - 2y = 3$

5.5 $\boxed{\text{CG}}$ Resolva o problema 5.4, itens (*a*)-(*j*), usando uma calculadora gráfica.

5.6 (*a*) Usando o método empregado no Problema 5.3, mostre que uma fórmula para a distância do ponto $P(x_1, y_1)$ à reta $\mathcal{L}$: $Ax + By + C = 0$ é

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(*b*) Determine a distância do ponto (0,3) à reta $x - 2y = 2$.

5.7 Seja x o número de milhões de libras de carne que os fazendeiros oferecem para venda por semana. Seja y o número de dólares por libra que compradores estão dispostos a pagar pela carne. Assuma que a *equação de suprimento* da carne é

$$y = 0{,}02x + 0{,}25$$

isto é, $0{,}02x + 0{,}25$ é o preço por libra que os fazendeiros estão dispostos a vender a x milhões de libras de carne por semana. Assuma também que a *equação de demanda* para a carne é

$$y = -0{,}025x + 2{,}5$$

isto é, $-0{,}025x + 2{,}5$ é o preço por libra que os compradores estão dispostos a pagar por x milhões de libras de carne. Determine a interseção dos gráficos das equações de estoque e demanda. Esse ponto (x, y) indica o suprimento x no qual o preço de venda é igual àquilo que o comprador está disposto a pagar.

5.8 Encontre o centro e o raio do círculo que passa pelos pontos $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ e $C(6, 0)$. [*Sugestão*: O centro é a interseção das mediatrizes de dois lados quaisquer do ΔABC.]

5.9 Encontre as equações das retas que passam pela origem e que são tangentes ao círculo com centro em (3,1) e raio 3. [*Sugestão*: Uma tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de contato. Por essa razão o teorema de Pitágoras pode ser usado para dar uma segunda equação para as coordenadas do ponto de contato.]

5.10 Encontre as coordenadas do ponto sobre a reta $y = 2x + 1$ que é eqüidistante de (0, 0) e (5, –2).

Capítulo 6

Simetria

6.1 SIMETRIA EM RELAÇÃO A UMA RETA

Dois pontos P e Q são denominados *simétricos em relação a uma reta* $\mathscr{L}$ se P e Q são imagens espelhadas relativamente a $\mathscr{L}$. Mais precisamente, o segmento PQ é perpendicular a $\mathscr{L}$ no ponto A tal que $\overline{PA} = \overline{QA}$ (ver Fig. 6-1).

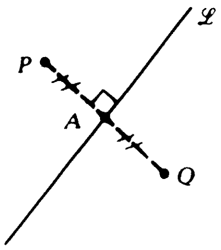


Fig. 6-1

(i) Se $Q(x,y)$ é simétrico ao ponto P em relação ao eixo y, então P é $(-x,y)$ [ver Fig. 6-2(a)].
(ii) Se $Q(x,y)$ é simétrico ao ponto P em relação ao eixo x, então P é $(x,-y)$ [ver Fig. 6-2(b)]

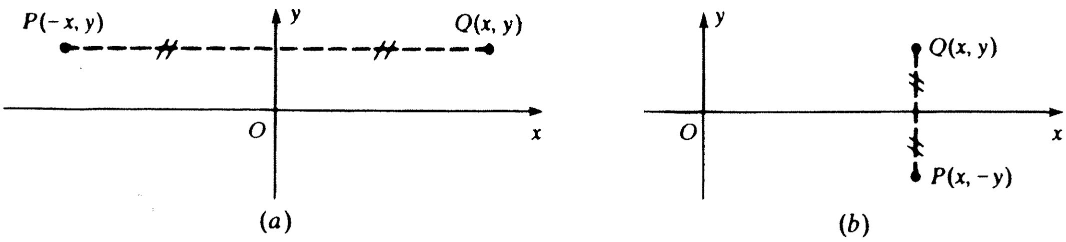


Fig. 6-2

Um gráfico é denominado *simétrico em relação a uma reta* $\mathscr{L}$ se, para qualquer ponto P sobre o gráfico, o ponto Q que é simétrico a P em relação a $\mathscr{L}$ pertence também ao gráfico. $\mathscr{L}$ é então chamada de *eixo de simetria* do gráfico. Ver Fig. 6-3.

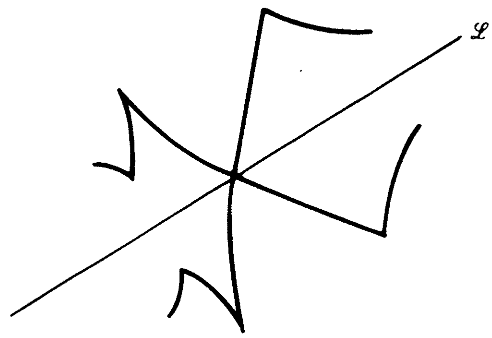


Fig. 6-3

Considere o gráfico de uma equação $f(x, y) = 0$. Então, de (i) acima, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y se, e somente se, $f(x, y) = 0$ implica em $f(-x, y) = 0$. E, de (ii) acima, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x se, e somente se, $f(x, y) = 0$ implica em $f(x, -y) = 0$.

Exemplos

(*a*) O eixo y é um eixo de simetria da parábola $y = x^2$ [ver Fig. 6-4(*a*)]. Se $y = x^2$, então $y = (-x)^2$. O eixo x não é um eixo de simetria dessa parábola. Embora $(1, 1)$ esteja sobre a parábola, $(1, -1)$ não pertence à mesma.

(*b*) A elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ [ver Fig. 6-4(*b*)] tem os eixos x e y como eixos de simetria. Pois se $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, então

$$\frac{(-x)^2}{4} + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{x^2}{4} + (-y)^2 = 1$$

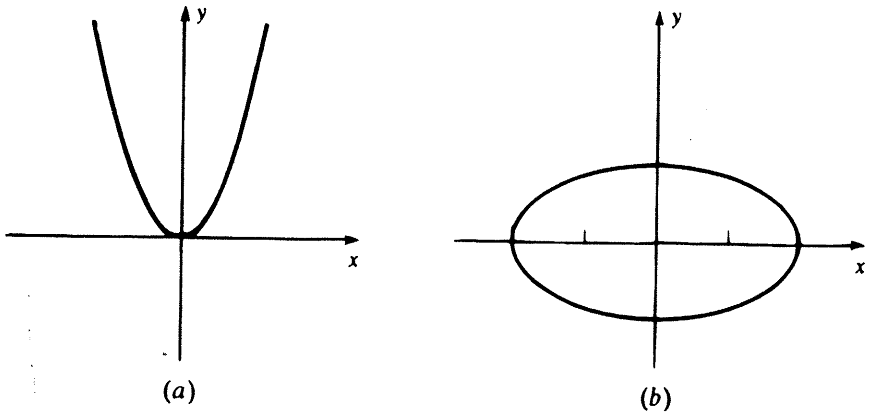


Fig. 6-4

6.2 SIMETRIA EM RELAÇÃO A UM PONTO

Dois pontos P e Q são ditos *simétricos em relação a um ponto A* se A é o ponto médio do segmento de reta PQ [ver Fig. 6-5(*a*)].

O ponto Q simétrico ao ponto $P(x, y)$ em relação à origem tem coordenadas $(-x, -y)$. [Na Fig. 6-5(*b*), o ΔPOR é congruente ao ΔQOS. Logo, $\overline{OR} = \overline{OS}$ e $\overline{RP} = \overline{SQ}$.]

Simetria de um gráfico em relação a um ponto é definida da maneira esperada. Em particular, um gráfico $\mathscr{G}$ é dito ser *simétrico em relação à origem* se, sempre que um ponto P pertencer a $\mathscr{G}$, o ponto Q simétrico a P em relação à origem também pertence a $\mathscr{G}$. O gráfico de uma equação $f(x, y) = 0$ é simétrico em relação à origem se, e somente se, $f(x, y) = 0$ implica em $f(-x, -y) = 0$.

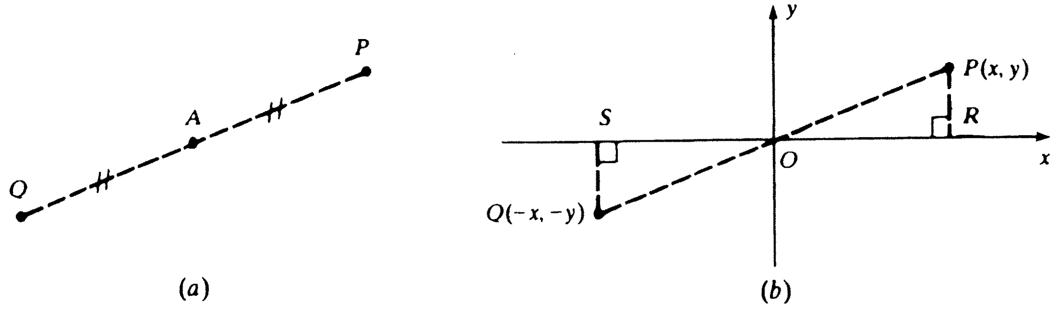


Fig. 6-5

Exemplos

(*a*) A elipse representada na Fig. 6-4(*b*) é simétrica em relação à origem porque

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{implica em} \quad \frac{(-x)^2}{4} + (-y)^2 = 1$$

(*b*) A hipérbole $xy = 1$ (ver Fig. 6-6) é simétrica em relação à origem pois, se $xy = 1$, então $(-x)(-y) = 1$.

(*c*) Se $y = ax$, então $-y = a(-x)$. Portanto, qualquer reta que passa pela origem é simétrica em relação à origem.

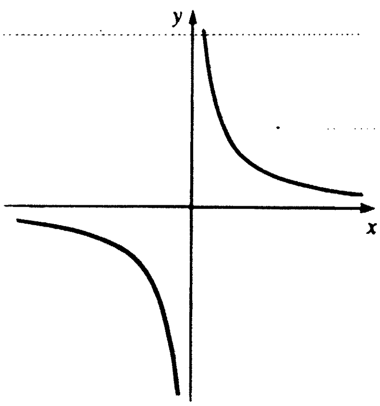


Fig. 6-6

Problemas Resolvidos

6.1 Determine se a reta $y = -x$ (ver Fig. 6-7) é simétrica em relação: (*a*) ao eixo *x*; (*b*) ao eixo *y*; (*c*) à origem.

(*a*) A reta não é simétrica em relação ao eixo *x*, pois, $(-1, 1)$ pertence à reta, mas $(-1, -1)$, o reflexo de $(-1, 1)$ no eixo *x*, não pertence à reta.

(*b*) A reta não é simétrica em relação ao eixo *y*, pois $(-1, 1)$ está na reta, mas $(1, 1)$ o reflexo de $(-1, 1)$ no eixo *y*, não está na reta.

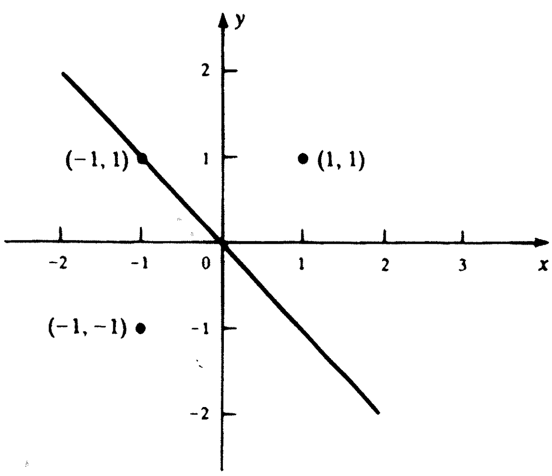


Fig. 6-7

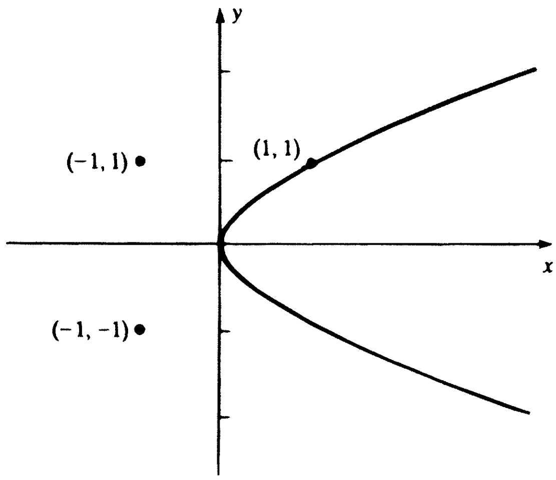


Fig. 6-8

(*c*) A reta é simétrica em relação à origem, de acordo com o exemplo (*c*) acima.

6.2 Determine se a parábola $x = y^2$ (ver Fig. 6-8) é simétrica em relação: (*a*) ao eixo *x*; (*b*) ao eixo *y*; (*c*) à origem

(*a*) A parábola é simétrica em relação ao eixo *x*, uma vez que $x = y^2$ implica em $x = (-y)^2$.

(*b*) Não é simétrica em relação ao eixo *y*, uma vez que (1, 1) pertence à parábola, mas (– 1, 1) não pertence.

(*c*) Não é simétrica em relação à origem, pois (1, 1) está sobre a parábola, mas (– 1, – 1) não está.

6.3 Mostre que se o gráfico de uma equação $f(x, y) = 0$ é simétrico em relação a ambos os eixos *x* e *y*, então é simétrico em relação à origem. (No entanto, a recíproca é falsa, como mostrado no Problema 6.1.)

Considere que $f(x, y) = 0$; devemos provar que $f(-x, -y) = 0$. Como $f(x,y) = 0$ e o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, $f(x, -y) = 0$. Então, já que $f(x, -y) = 0$ e o gráfico é simétrico em relação ao eixo y, $f(-x, -y) = 0$.

6.4 Sejam os pontos *P* e *Q* simétricos em relação à reta $\mathscr{L}$: $y = x$. Se *P* tem coordenadas (*a*, *b*), mostre que *Q* tem coordenadas (*b*, *a*).

Seja *Q* com coordenadas (*u*, *v*) e seja *B* o ponto de interseção de $\mathscr{L}$ com a reta *PQ* (ver Fig. 6-9). *B* bissecta *PQ*; logo suas coordenadas são dadas por (*2.2*) como

$$\left(\frac{a+u}{2}, \frac{b+v}{2}\right)$$

da qual se deduz, já que *B* está sobre $\mathscr{L}$,

$$\frac{b+v}{2} = \frac{a+u}{2}$$
$$b + v = a + u$$
$$v - u = a - b \qquad (1)$$

Além disso, as retas perpendiculares *PQ* e $\mathscr{L}$ têm os respectivos coeficientes angulares

$$\frac{b-v}{a-u} \quad \text{e} \quad 1$$

de modo que, pelo Teorema 4.2,

$$\left(\frac{b-v}{a-u}\right)(1) = -1$$
$$b - v = u - a$$
$$b + a = v + u$$
$$v + u = a + b \qquad (2)$$

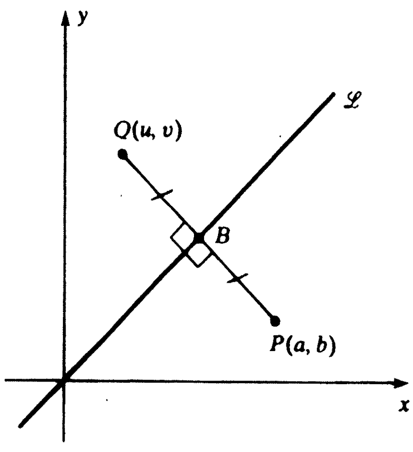


Fig. 6-9

Para resolver (*1*) e (*2*) simultaneamente isolando *u* e *v*, primeiro some as duas equações, resultando $2v = 2a$, ou $v = a$. Então subtraia (*1*) de (*2*), resultando $2u = 2b$, ou $u = b$. Portanto, *Q* tem coordenadas (*b*, *a*).

6.5 Se o gráfico de $3x^2 + xy = 5$ é refletido no eixo *y* (isto é, cada ponto do gráfico é substituído pelo seu ponto simétrico em relação ao eixo *y*), obtenha uma equação do novo gráfico.

Um ponto (*x*, *y*) pertence ao novo gráfico se, e somente se, (– *x*, *y*) está sobre o gráfico original; isto é, se, e somente se, $3(-x)^2 + (-x)y = 5$. Isso é equivalente a $3x^2 - xy = 5$. Observe que a nova equação é conseguida a partir da antiga equação substituindo *x* por $-x$.

Problemas Complementares

6.6 Determine se os gráficos das seguintes equações são simétricos em relação ao eixo x, ao eixo y, à origem, ou nenhum desses casos.

(*a*) $y = -x^2$ (*b*) $y = x^3$ (*c*) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(*d*) $x^2 + y^2 = 5$ (*e*) $(x-1)^2 + y^2 = 9$ (*f*) $y = (x-1)^2$

(*g*) $3x^2 - xy + y^2 = 4$ (*h*) $y = \frac{x+1}{x}$ (*i*) $y = (x^2+1)^2 - 4$

(*j*) $y = x^4 - 3x^2 + 5$ (*k*) $y = -x^5 + 7x$ (*l*) $y = (x-2)^3 + 1$

6.7 Obtenha uma equação da nova curva quando:

(*a*) O gráfico de $x^2 - xy + y^2 = 1$ é refletido pelo eixo x.
(*b*) O gráfico de $y^3 - xy^2 + x^3 = 8$ é refletido pelo eixo y.
(*c*) O gráfico de $x^2 - 12x + 3y = 1$ é refletido pela origem.
(*d*) A reta $y = 3x + 1$ é refletida pelo eixo y.
(*e*) O gráfico de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ é refletido pelo eixo x.

Capítulo 7

Funções e seus Gráficos

7.1 A NOÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Dizer que uma quantidade y é uma *função* de alguma outra quantidade x significa, em linguagem comum, que o valor de y depende do valor de x. Por exemplo, o volume V de um cubo é uma função do comprimento s de uma aresta. De fato, a dependência de V sobre s pode ser feita precisa através da fórmula $V = s^3$. Tal associação específica de um número s^3 com um número dado s é o que os matemáticos usualmente chamam de função.

Na Fig. 7-1, representamos uma função f como algum tipo de processo no qual um número x produz um número $f(x)$; o número x é chamado de *argumento* de f e o número $f(x)$ é chamado de *valor* de f para o argumento x.

Exemplos

(a) A função raiz quadrada associa cada número real não-negativo x com o valor $\sqrt{x}$; ou seja, o único número real não-negativo y tal que $y^2 = x$.

(b) A função dobro g associa cada número real x o valor $2x$. Logo, $g(3) = 6$, $g(-1) = -2$, $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

O *gráfico* de uma função f consiste de todos os pontos (x, y) tais que $y = f(x)$. Portanto, o gráfico de f é o gráfico da equação $y = f(x)$.

Exemplos

(a) Considere a função f tal que $f(x) = x + 1$ para todo x. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $y = x + 1$. Isso é uma reta, com coeficiente angular 1 e intercepto y 1 (ver Fig. 7-2).

(b) O gráfico da função f tal que $f(x) = x^2$ para todo x consiste de todos os pontos (x, y) tais que $y = x^2$. Isso é a parábola da Fig. 3-2.

(c) Considere a função f tal que $f(x) = x^3$ para todo x. Na Fig. 7-3(a), indicamos alguns poucos pontos no gráfico, o qual é esboçado na Fig. 7-3(b).

Os números x para os quais uma função f produz um valor $f(x)$ formam uma coleção de números, chamada de *domínio* de f. Por exemplo, o domínio da função raiz quadrada consiste de todos os números reais não negativos;

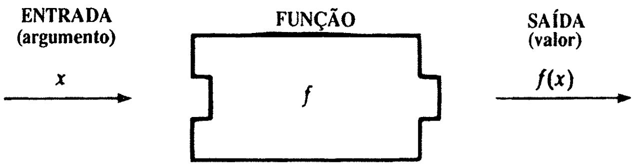


Fig. 7-1

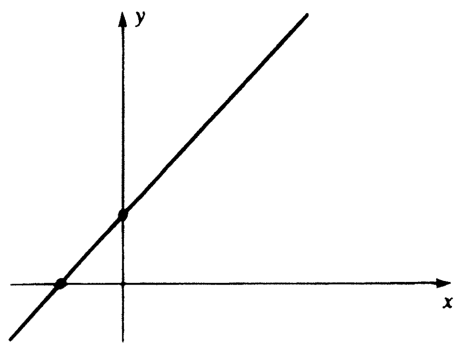
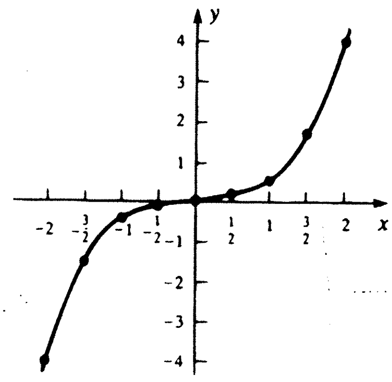


Fig. 7-2

x	y
0	0
1/2	1/8
1	1
3/2	27/8
2	8
−1/2	−1/8
−1	−1
−3/2	−27/8
−2	−8

(*a*)



(*b*)

Fig. 7-3

a função não é definida para argumentos negativos. Por outro lado, o domínio da função dobro consiste de todos os números reais.

Os números que são os valores de uma função formam a *imagem* da função.

O domínio e a imagem de uma função f freqüentemente podem ser determinados com facilidade observando o gráfico de f. O domínio consiste de todas as coordenadas x de pontos do gráfico, e a imagem consiste de todas as coordenadas y de pontos do gráfico.

Exemplos

(*a*) A imagem da função raiz quadrada consiste de todos os números reais não negativos. De fato, para cada número real não negativo y existe algum número real x tal que $\sqrt{x} = y$; a saber, o número y^2.

(*b*) A imagem da função dobro consiste de todos os números reais. De fato, para todo número real y existe um número real x tal que $2x = y$, a saber $y/2$.

(*c*) Considere a função valor absoluto h definida por $h(x) = |x|$. O domínio consiste de todos os números reais, mas a imagem é constituída de todos os números reais não negativos. O gráfico é mostrado na Fig. 7-4. Quando $x \geq 0$, $y = |x|$ é equivalente a $y = x$, a equação da reta que passa pela origem e com coeficiente angular 1. Quando $x < 0$, $y = |x|$ é equivalente a $y = -x$, a equação da reta que passa pela origem e com coeficiente angular −1. A projeção perpendicular de todos os pontos do gráfico sobre o eixo y mostra que a imagem consiste de todos os y tais que $y \geq 0$.

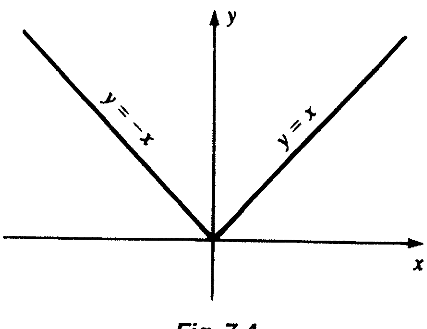


Fig. 7-4

(*d*) Considere a função g definida pela fórmula $g(x) = \sqrt{1 - x}$, sempre que essa fórmula fizer sentido. Aqui o valor $\sqrt{1 - x}$ é definido somente quando $1 - x \geq 0$; isto é, somente quando $x \leq 1$. Assim, o domínio de g consiste de todos os números reais x tais que $x \leq 1$. É um pouco mais difícil obter a imagem de g. Considere um número real y; ele pertencerá à imagem de g se pudermos determinar algum número x tal que $y = \sqrt{1 - x}$. Como $\sqrt{1 - x}$

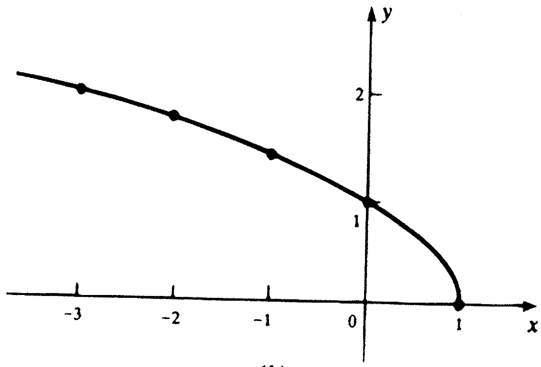
não pode ser negativo (pela definição da função raiz quadrada), devemos limitar nossa atenção ao y não-negativo. Mas se $y = \sqrt{1 - x}$, então $y^2 = 1 - x$, e, por esse motivo, $x = 1 - y^2$. De fato, quando $x = 1 - y^2$, então

$$\sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - (1 - y^2)} = \sqrt{y^2} = y$$

A imagem de g portanto consiste de todos os números reais não-negativos. Isso está claro a partir do gráfico de g [ver Fig. 7-5(*b*)]. O gráfico é a metade superior da parábola $x = 1 - y^2$.

x	y
1	0
0	1
-1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$
-2	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$
-3	2

(*a*)



(*b*)

Fig. 7-5

(*e*) Uma função pode ser definida "por casos". Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 + x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Aqui o valor $f(x)$ é determinado por duas fórmulas diferentes. A primeira fórmula se aplica quando x é negativo, e a segunda quando $0 \leq x \leq 1$. O domínio consiste de todos os números x tais que $x \leq 1$. A imagem acaba sendo todos os números reais positivos. Isso pode ser percebido na Fig. 7-6, na qual a projeção do gráfico sobre o eixo y corresponde a todos os y tais que $y > 0$.

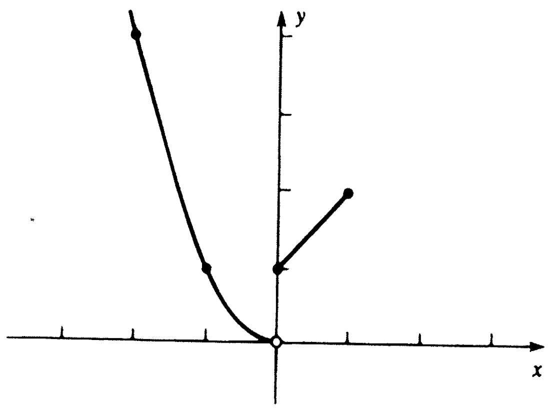


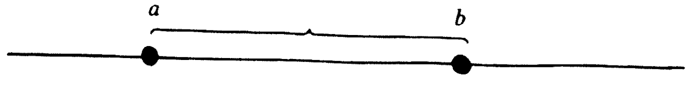
Fig. 7-6

Observação: Em muitos tratamentos para os fundamentos da matemática, uma função é identificada com seu gráfico. Em outras palavras, uma função é definida como um conjunto f de pares ordenados tal que f não contém dois pares (a, b) e (a, c) com $b \neq c$. Então "$y = f(x)$" significa dizer que "(x, y) pertence a f". No entanto, esse tratamento obscurece a idéia intuitiva de uma função.

7.2 INTERVALOS

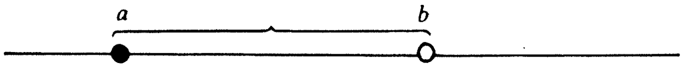
Ao se lidar com os domínios e as imagens de funções, intervalos de números ocorrem tão freqüentemente que é conveniente introduzir notação e terminologia especiais para eles.

Intervalo fechado: $[a,b]$ consiste de todos os números x tais que $a \leq x \leq b$.
Os pontos em negrito sobre a reta em a e b significam que a e b estão incluídos no intervalo fechado $[a,b]$.

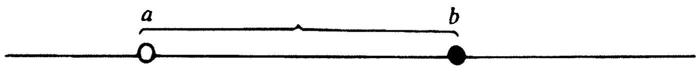


Intervalo aberto: (a, b) consiste de todos os números x tais que $a < x < b$.
Os pontos abertos sobre a reta em a e b indicam que as extremidades a e b não estão incluídas no intervalo aberto (a, b).

Intervalos semi-abertos: $[a, b)$ consiste de todos os números x tais que $a \leq x < b$.



$(a, b]$ consiste de todos os números x tais que a $< x \leq b$.



Exemplo Considere a função f tal que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, sempre que essa fórmula fizer sentido. O domínio de f consiste de todos os números x tais que

$$1 - x^2 \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Para determinar a imagem de f, observe que, quando x varia de -1 a 0, x^2 varia de 1 a 0, $1 - x^2$ varia de 0 a 1 e $\sqrt{1 - x^2}$ também varia de 0 a 1. Da mesma forma, quando x varia de 0 a 1, $\sqrt{1 - x^2}$ varia de 1 a 0. Logo, a imagem de f é o intervalo fechado $[0,1]$. Isso é confirmado observando o gráfico da equação $\sqrt{1 - x^2}$ na Fig. 7-7. É um semicírculo. De fato, o círculo $x^2 + y^2 = 1$ é equivalente a

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad \text{ou} \qquad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

O valor da função f corresponde à escolha do sinal + e fornece a metade superior do círculo.

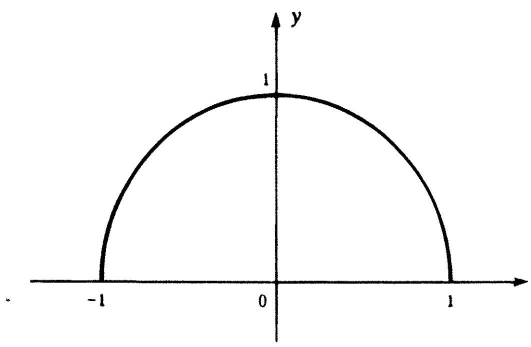
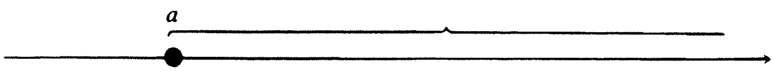


Fig. 7-7

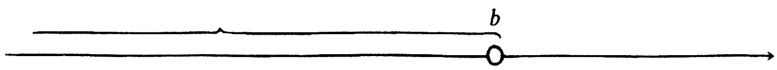
Algumas vezes lidamos com intervalos que são ilimitados de um lado.
$[a, \infty)$ é constituído de todo x tal que $a \leq x$.



$[a, \infty)$ é constituído de todo x tal que $a < x$.

$(-\infty, b]$ é constituído de todo x tal que $x \leq b$.

$(-\infty, b)$ é constituído de todo x tal que $x < b$.



Exemplo A imagem da função cujo gráfico está na Fig. 7-6 é $(0, \infty)$. O domínio da função representada na Fig. 7-5(*b*) é $(-\infty, 1]$.

7.3 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Uma função f é chamada *par* se, para qualquer x no domínio de f, $-x$ está também no domínio de f e $f(-x) = f(x)$.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = x^2$ para todo x. Então

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

e assim f é par.

(*b*) Seja $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$ para todo x. Então

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 2 = 3x^4 - 5x^2 + 2 = f(x)$$

Portanto, f é par. Mais genericamente, uma função que é definida para todo x e envolve somente potências pares de x é uma função par.

(*c*) Seja $f(x) = x^3 + 1$ para todo x. Então

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

Mas $-x^3 + 1$ não é igual a $x^3 + 1$, exceto quando $x = 0$. Logo, f não é par.

Uma função f é par se, e somente se, o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y. Pois a simetria significa que para qualquer ponto $(x, f(x))$ sobre o gráfico, o reflexo $(-x, f(x))$ também está no gráfico; em outras palavras, $f(-x) = f(x)$ (ver Fig. 7-8).

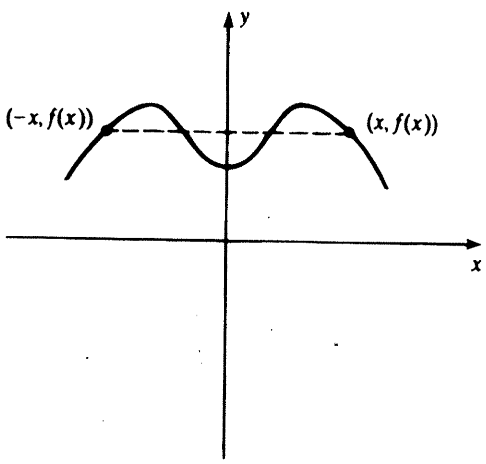


Fig. 7-8

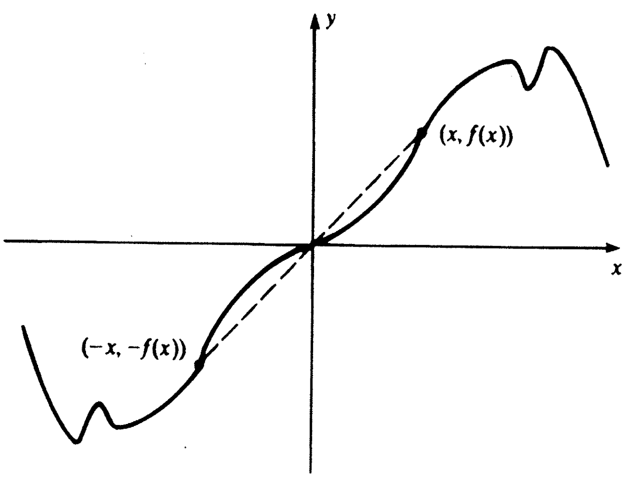


Fig. 7-9

Uma função f é chamada de *ímpar* se, para qualquer x no domínio de f, $-x$ está também no domínio de f e $f(-x) = -f(x)$.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = x^3$ para todo x. Então,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Portanto, f é ímpar.

(*b*) Seja $f(x) = 4x$ para todo x. Então,

$$f(-x) = 4(-x) = -4x = -f(x)$$

Logo, f é ímpar.

(*c*) Seja $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$ para todo x. Então,

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = 3(-x^5) - 2(-x^3) - x \\ &= -3x^5 + 2x^3 - x = -(3x^5 - 2x^3 + x) = -f(x) \end{aligned}$$

Portanto, f é ímpar. Mais genericamente, se $f(x)$ é definida como um polinômio que envolve somente potências ímpares de x (e não há termo constante), então $f(x)$ é uma função ímpar.

(*d*) A função $f(x) = x^3 + 1$, que foi mostrada acima como não sendo par, também não é ímpar. De fato,

$$f(1) = (1)^3 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{mas} \quad -f(-1) = -[(-1)^3 + 1] = -[-1 + 1] = 0$$

Uma função f é ímpar se, e somente se, o gráfico de f é simétrico em relação à origem. Pois a simetria significa que para qualquer ponto $(x, f(x))$ sobre o gráfico, o ponto refletido $(-x, -f(x))$ também está no gráfico; isto é, $f(-x) = -f(x)$ (ver Fig. 7-9).

7.4 REVISÃO DE ÁLGEBRA: ZEROS DE POLINÔMIOS

Funções definidas por polinômios são tão importantes no cálculo que é essencial revisar certos fatos básicos que dizem respeito a polinômios.

Definição: Para qualquer função f, um *zero* ou *raiz* de f é um número r tal que $f(r) = 0$.

Exemplos

(*a*) 3 é uma raiz do polinômio $2x^3 - 4x^2 - 8x + 6$, pois

$$2(3)^3 - 4(3)^2 - 8(3) + 6 = 2(27) - 4(9) - 24 + 6 = 54 - 36 - 24 + 6 = 0$$

(*b*) 5 é um zero de $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x + 2}$ porque

$$\frac{(5)^2 - 2(5) - 15}{5 + 2} = \frac{25 - 10 - 15}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

Teorema 7.1: Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinômio com coeficientes inteiros (isto é, os números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são inteiros), e se r é um inteiro que é uma raiz de f, então r deve ser um divisor do termo constante a_0.

Exemplo Pelo Teorema 7.1, qualquer raiz inteira de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ deve estar entre os divisores de 6, que são $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 6. Por substituição, descobre-se que $1, -2$ e 3 são raízes.

Teorema 7.2: Um número r é uma raiz do polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se, e somente se, $f(x)$ for divisível pelo polinômio $x - r$.

Exemplos

(*a*) Considere o polinômio $f(x) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20$. Pelo Teorema 7.1, qualquer raiz inteira deve ser um divisor de 20; isto é, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$, ou ± 20. Cálculos revelam que 2 é uma raiz. Logo (Teorema 7.2), $x - 2$ deve dividir $f(x)$; realizamos a divisão na Fig. 7-10(*a*). Já que $f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 10)$, as demais raízes são obtidas resolvendo

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

Aplicando a fórmula quadrática (ver Problema 5.2),

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(10)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Portanto, as outras duas raízes de $f(x)$ são os números complexos $1 + 3\sqrt{-1}$ e $1 - 3\sqrt{-1}$.

(*b*) Determinar as raízes de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$. As raízes inteiras (se existirem) devem ser divisores de 9: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. 1 não é uma raiz, mas -1 é. Logo, $f(x)$ é divisível por $x + 1$ [ver Fig. 7-10(*b*)]. As outras raízes de $f(x)$ devem ser as raízes de $x^2 - 6x + 9$. Porém, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Portanto, -1 e 3 são as raízes de $f(x)$; 3 é chamada de *raiz dupla* porque $(x - 3)^2$ é um fator de $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 14x - 20 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 10 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + 14x - 20 & \\
2x^2 - 4x & \\ \cline{1-1}
10x - 20 & \\
-10x + 20 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

(*a*)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 5x^2 + 3x + 9 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 & x^2 - 6x + 9 \\ \cline{1-1}
-6x^2 + 3x + 9 & \\
6x^2 + 6x & \\ \cline{1-1}
9x + 9 & \\
-9x - 9 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

(*b*)

Fig. 7-10

Teorema 7.3: (*Teorema Fundamental da Álgebra*): Se raízes repetidas são contadas, então todo polinômio de grau n tem exatamente n raízes.

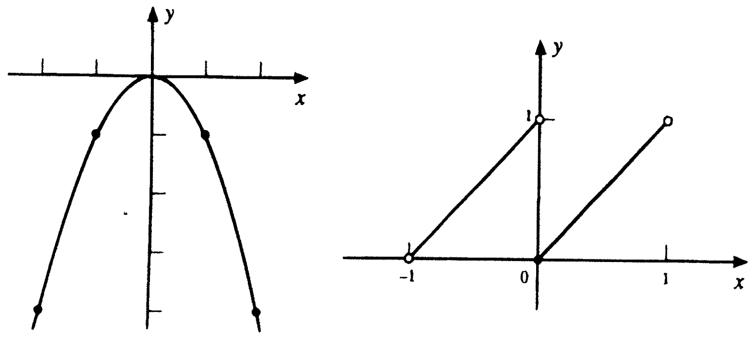
Exemplo No exemplo (*b*) acima, o polinômio $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ de grau 3 tem duas raízes, -1 e 3, mas 3 é uma raiz repetida de multiplicidade 2 e, por essa razão, é contada duas vezes.

Já que as raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais ocorrem aos pares, $a \pm b\sqrt{-1}$, o polinômio pode ter somente um número par (possivelmente zero) de raízes complexas. Portanto, um polinômio de grau ímpar deve ter pelo menos uma raiz *real.*

Problemas Resolvidos

7.1 Encontre o domínio e a imagem da função f tal que $f(x) = -x^2$.

Como $-x^2$ é definido para todo número real x, o domínio de f consiste de todos os números reais. Para determinar a imagem, observe que $x^2 \geq 0$ para todo x e, por esse motivo, $-x^2 \leq$ para todo x. Todo número não positivo y aparece como um valor $-x^2$ para um argumento adequado x; a saber, para o argumento $x = \sqrt{-y}$ (e também para o argumento $x = -\sqrt{-y}$). Portanto, a imagem de f é $(-\infty, 0]$. Isso pode ser percebido mais facilmente observando o gráfico de $y = -x^2$ [ver Fig. 7-11(*a*)].



(*a*) (*b*)

Fig. 7-11

7.2 Determine o domínio e a imagem da função f definida por

$$
f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}
$$

O domínio de f consiste de todo x tal que $-1 < x < 0$ ou $0 \leq x < 1$. Isso corresponde ao intervalo aberto $(-1, 1)$. A imagem de f é facilmente encontrada a partir do gráfico na Fig. 7-11(*b*), cuja projeção sobre o eixo y é o intervalo semi-aberto $[0, 1)$.

7.3 Defina $f(x)$ como o maior inteiro menor ou igual a x; esse valor é usualmente denotado por $[x]$. Determine o domínio e a imagem, e desenhe o gráfico de f.

Como $[x]$ é definida para todo x, o domínio é o conjunto de todos os números reais. A imagem de f consiste de todos os inteiros. Parte do gráfico é mostrada na Fig. 7-12. Consiste de uma seqüência de intervalos horizontais unitários semi-abertos. (Uma função cujo gráfico é formado por segmentos horizontais é chamada de *função degrau.*)

7.4 Considere a função f definida pela fórmula

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

sempre que essa fórmula fizer sentido. Obtenha o domínio e a imagem e desenhe o gráfico de f.

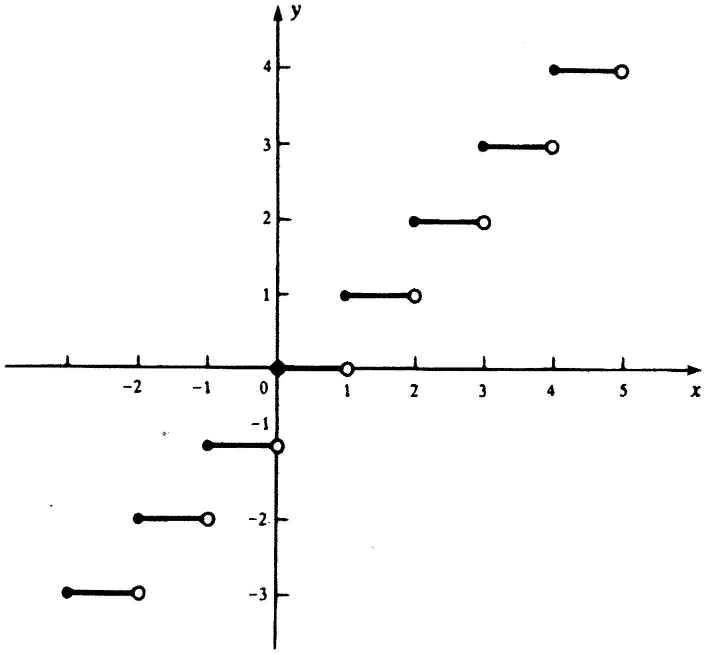


Fig. 7-12

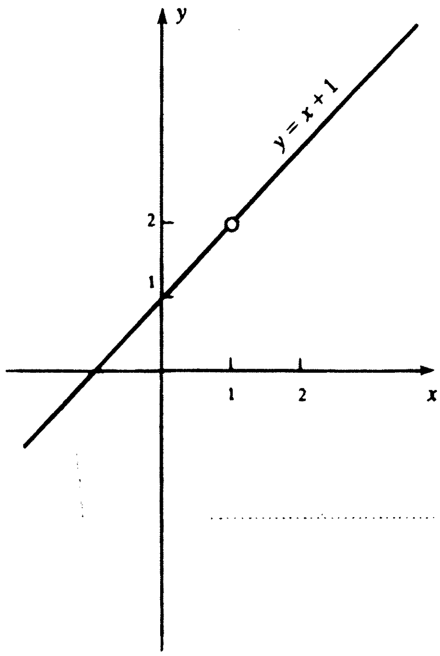


Fig. 7-13

A fórmula faz sentido sempre que o denominador $x - 1$ não é 0. Logo, o domínio de f é o conjunto de todos os números reais diferentes de 1. Mas $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ e assim

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

Portanto, o gráfico de $f(x)$ é o mesmo de $y = x + 1$, exceto que o ponto correspondente a $x = 1$ não aparece (ver Fig. 7-13). Portanto, a imagem consiste de todos os números reais, exceto 2.

7.5 (*a*) Mostre que um conjunto de pontos no plano xy é o gráfico de alguma função de x se, e somente se, o conjunto intersecta toda reta vertical no máximo em um ponto (*teste da reta vertical*).

(*b*) Determine se os conjuntos de pontos indicados na Fig. 7-14 são gráficos de funções.

(*a*) Se um conjunto de pontos é o gráfico de uma função f, o conjunto consiste de todos os pontos (x, y), tais que $y = f(x)$. Se (x_0, u) e (x_0, v)) são pontos de interseção do gráfico com a reta vertical $x = x_0$, então $u = f(x_0)$ e $v = f(x_0)$. Logo, $v = u$, e os pontos são idênticos. Reciprocamente, se um conjunto $\mathscr{A}$ de pontos intersecta cada reta vertical no máximo em um ponto, defina uma função f como se segue. Se $\mathscr{A}$ intersecta a reta $x = x_0$ em algum ponto (x_0, w) faça $f(x_0) = w$. Então $\mathscr{A}$ é o gráfico de f.

(*b*) (i) e (iv) não são gráficos de funções, já que eles intersectam certas retas verticais em mais de um ponto.

7.6 Seja $f(x) = x^2 + 2x - 1$ para todo x. Calcule:

(*a*) $f(2)$ (*b*) $f(-2)$ (*c*) $f(-x)$ (*d*) $f(x + 1)$

(*e*) $f(x - 1)$ (*f*) $f(x + h)$ (*g*) $f(x + h) - f(x)$ (*h*) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Em cada caso, substituimos os argumentos especificados em todas as ocorrências de x na fórmula para $f(x)$.

(*a*) $f(2) = (2)^2 + 2(2) - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

(*b*) $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$

(*c*) $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1$

(*d*) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) - 1 = (x^2 + 2x + 1) + 2x + 2 - 1 = x^2 + 4x + 2$

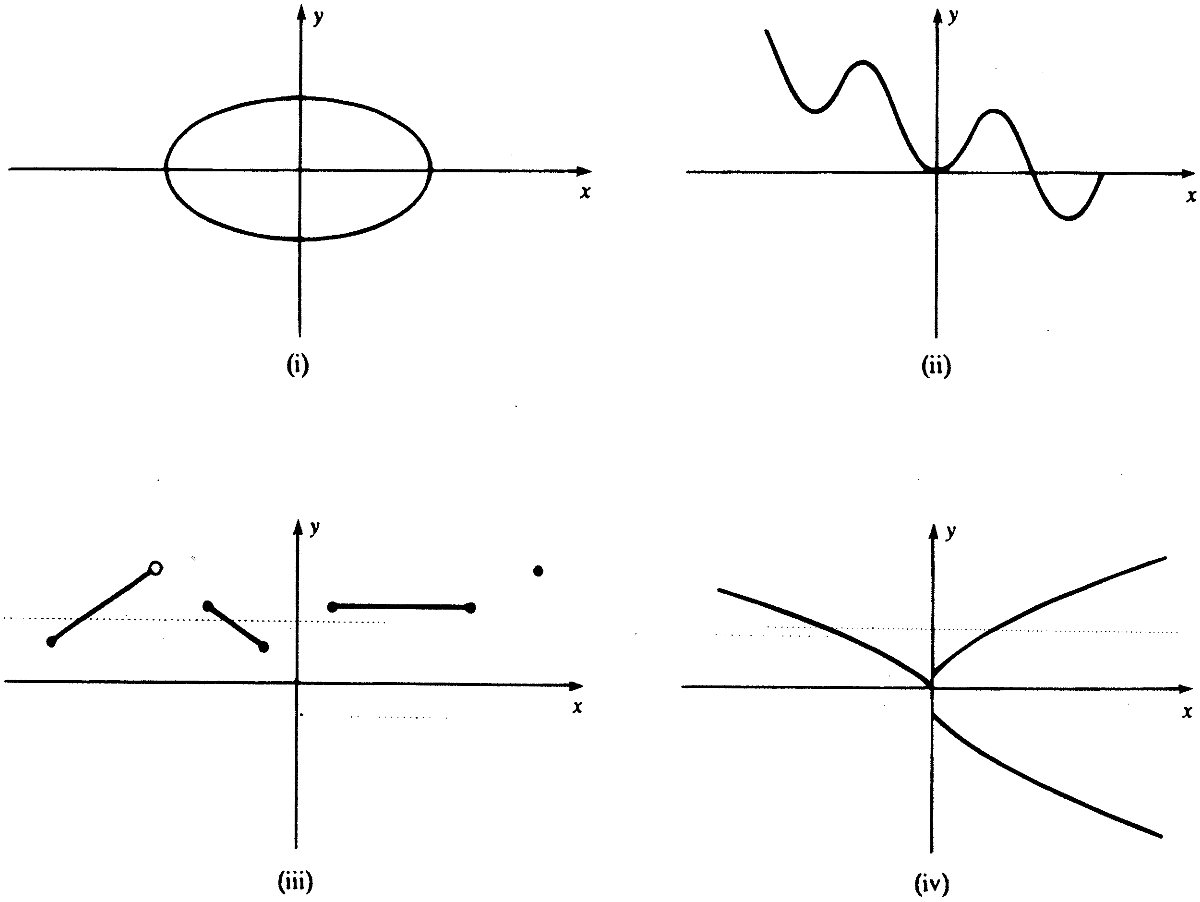


Fig. 7-14

(*e*) $f(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) - 1 = (x^2 - 2x + 1) + 2x - 2 - 1 = x^2 - 2$

(*f*) $f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) - 1 = (x^2 + 2hx + h^2) + 2x + 2h - 1$
$= x^2 + 2hx + 2x + h^2 + 2h - 1$

(*g*) Usando o resultado do item (*f*),

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x^2 + 2hx + 2x + h^2 + 2h - 1) - (x^2 + 2x - 1) \\ &= x^2 + 2hx + 2x + h^2 + 2h - 1 - x^2 - 2x + 1 \\ &= 2hx + h^2 + 2h \end{aligned}$$

(*h*) Usando o resultado do item (*g*),

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2hx + h^2 + 2h}{h} = \frac{h(2x + h + 2)}{h} = 2x + h + 2$$

7.7 Encontre todas as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 20$.

As raízes inteiras (se existirem) devem ser divisores de 20: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$. Cálculos mostram que 4 é uma raiz. Assim, $x - 4$ deve ser um fator de $f(x)$ (ver Fig. 7-15).

Para determinar as raízes de $x^2 - 4x + 5$ use a fórmula quadrática

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Logo, existem uma raiz real, 4, e duas raízes complexas, $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 8x^2 + 21x - 20 & x - 4 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 4x^2 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{1-1}
-4x^2 + 21x - 20 & \\
4x^2 - 16x & \\ \cline{1-1}
5x - 20 & \\
-5x + 20 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Fig. 7-15

Problemas Complementares

7.8 Encontre o domínio e a imagem, e desenhe os gráficos, das funções determinadas pelas seguintes fórmulas (para todos os argumentos x para os quais as fórmulas fazem sentido):

(*a*) $h(x) = 4 - x^2$ (*b*) $G(x) = -2\sqrt{x}$ (*c*) $H(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $J(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

(*d*) $U(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ (*e*) $V(x) = |x - 1|$ (*f*) $f(x) = [2x]$

(*g*) $g(x) = \left[\dfrac{x}{3}\right]$ (*h*) $h(x) = \dfrac{1}{x}$ (*i*) $F(x) = \dfrac{1}{x-1}$

(*j*) $H(x) = -\dfrac{1}{2}x^3$ (*k*) $J(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ (*l*) $U(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{para } x \le 1 \\ 5x - 3 & \text{para } x > 1 \end{cases}$

(*m*) $f(1) = -1$, $f(2) = 3$, $f(4) = -1$ (*n*) $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ (*o*) $H(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 2 \\ 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(*p*) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (*q*) $g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \le -1 \\ 2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ (*r*) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \ne 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

(*s*) $Z(x) = x - [x]$ (*t*) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

7.9 $\boxed{\text{CG}}$ Confira suas respostas ao Problema 7.8, itens (*a*)-(*j*), (*n*), (*p*), (*s*) e (*t*) usando uma calculadora gráfica.

7.10 Na Fig. 7-16, determine quais conjuntos de pontos são gráficos de funções.

7.11 Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico consista de todos os pontos (x, y) tais que (*a*) $x^3y - 2 = 0$; (*b*) $x = \dfrac{1 + y}{1 - y}$; (*c*) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$. Em cada caso especifique o domínio de f.

7.12 Para cada uma das seguintes funções, especifique o domínio e a imagem, usando a notação de intervalo sempre que possível. [*Sugestão*: $\boxed{\text{CG}}$ Nos itens (*a*), (*b*) e (*e*) use uma calculadora gráfica para indicar a solução.]

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ (*b*) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (*c*) $h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \le x \end{cases}$

(*d*) $F(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ x - 2 & \text{se } 3 < x < 4 \end{cases}$ (*e*) $G(x) = |x| - x$

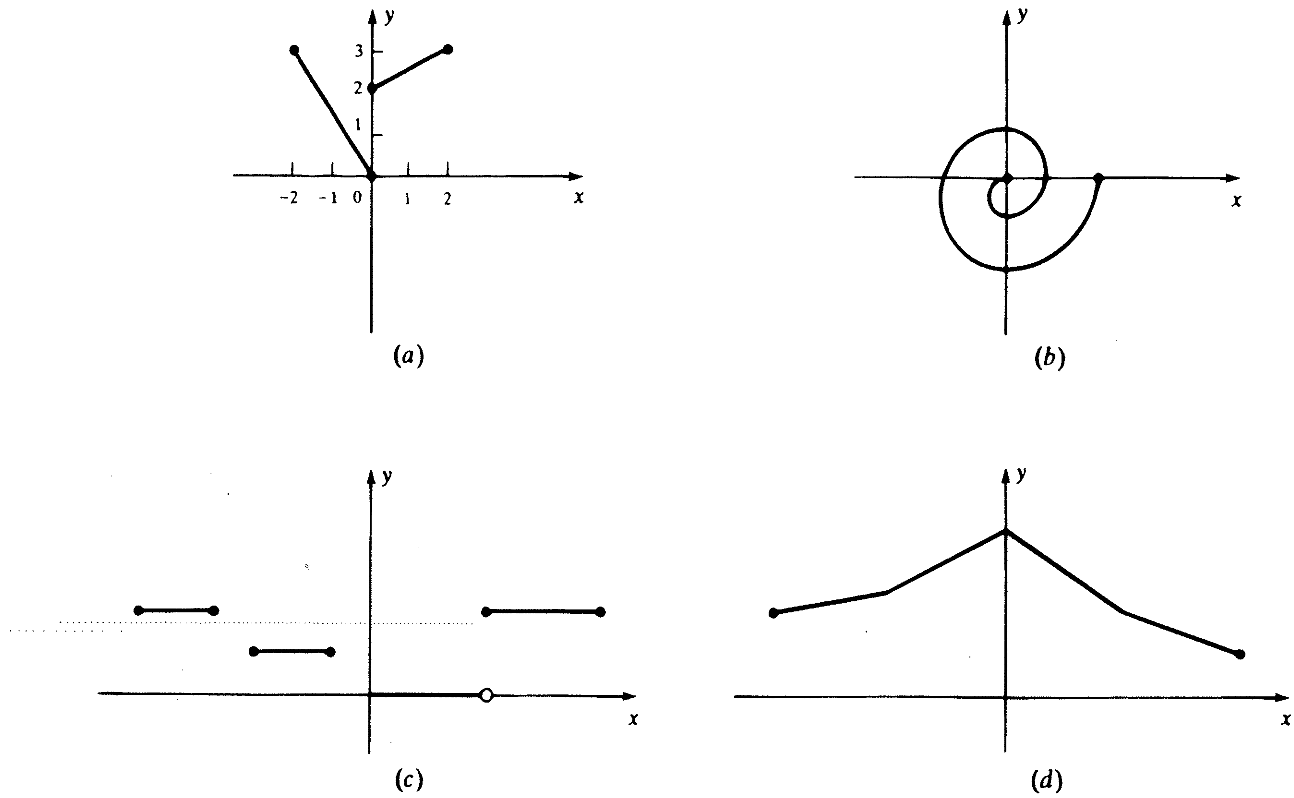


Fig. 7-16

7.13 (*a*) Sejam $f(x) = x - 4$ e $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4} & \text{se } x \neq -4 \\ k & \text{se } x = -4 \end{cases}$.

Determine k de modo que $f(x) = g(x)$ para todo x.

(*b*) Sejam $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} \quad g(x) = x - 1$

Por que está errado afirmar que f e g são a mesma função?

7.14 Em cada um dos seguintes casos, defina uma função que tem o conjunto dado $\mathscr{D}$ como seu domínio e o conjunto dado $\mathscr{R}$ como sua imagem: (*a*) $\mathscr{D} = (0, 1)$ e $\mathscr{R} = (0, 2)$; (*b*) $\mathscr{D} = [0, 1)$ e $\mathscr{R} = [-1, 4)$; (*c*) $\mathscr{D} = [0, \infty)$ e $\mathscr{R} = \{0, 1\}$; (*d*) $\mathscr{D} = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$ [isto é, $(-\infty, 1)$ junto com, $(1, 2)$] e $\mathscr{R} = (1, \infty)$.

7.15 Para cada uma das funções no Problema 7.8, determine se o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo x, ao eixo y, à origem, ou nenhum desses casos.

7.16 Para cada uma das funções no Problema 7.8, determine se a função é par, ímpar ou nem par e nem ímpar.

7.17 (*a*) Se f é uma função par e $f(0)$ é definida, necessariamente $f(0) = 0$?

(*b*) Se f é uma função ímpar e $f(0)$ é definida, necessariamente $f(0) = 0$?

(*c*) Se $f(x) = x^2 + kx + 1$ para todo x e se f é uma função par, determine k.

(*d*) Se $f(x) = x^3 - (k - 2)x^2 + 2x$ para todo x e se f é uma função ímpar, determine k.

(*e*) Existe uma função f que é par e ímpar?

7.18 Calcule a expressão $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para as seguintes funções:

(*a*) $f(x) = x^2 - 2x$ (*b*) $f(x) = x + 4$ (*c*) $f(x) = x^3 + 1$
(*d*) $f(x) = \sqrt{x}$ (*e*) $f(x) = \sqrt{x} - 5x$ (*f*) $f(x) = |x|$

7.19 Encontre todas as raízes reais dos seguintes polinômios:

(*a*) $x^4 - 10x^2 + 9$ (*b*) $x^3 + 2x^2 - 16x - 32$ (*c*) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24$
(*d*) $x^3 - 2x^2 + x - 2$ (*e*) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$ (*f*) $x^3 - 5x - 2$ (*g*) $x^3 - 4x^2 - 2x + 8$

7.20 Quantas raízes reais pode ter o polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ se os coeficientes a, b, c, d são números reais e $a \neq 0$?

7.21 (*a*) Se $f(x) = (x + 3)(x + k)$ e o resto é 16 quando $f(x)$ é dividido por $x - 1$, obtenha k.
(*b*) Se $f(x) = (x + 5)(x - k)$ e o resto é 28 quando $f(x)$ é dividido por $x - 2$, determine k.

ÁLGEBRA A divisão de um polinômio $f(x)$ por outro polinômio $g(x)$ resulta na equação

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

na qual $q(x)$ (o quociente) e $r(x)$ (o resto) são polinômios, sendo $r(x)$ igual a 0 ou de grau menor que $g(x)$. Em particular, para $g(x) = x - a$, temos

$$f(x) = (x - a)q(x) + r = (x - a)q(x) + f(a)$$

isto é, *o resto, quando $f(x)$ é dividido por $x - a$, é exatamente $f(a)$.*

7.22 Se os zeros de uma função $f(x)$ são 3 e -4, quais são os zeros da função $g(x) = f(x/3)$?

7.23 Se $f(x) = 2x^3 + Kx^2 + Jx - 5$, e se $f(2) = 3$ e $f(-2) = -37$, qual é o valor de $K + J$?

(i) 0 (ii) 1 (iii) -1 (iv) 2 (v) indeterminado

7.24 Expresse o conjunto de soluções de cada desigualdade abaixo em termos de intervalos:

(*a*) $2x + 3 < 9$ (*b*) $5x + 1 \geq 6$ (*c*) $3x + 4 \leq 5$ (*d*) $7x - 2 > 8$
(*e*) $3 < 4x - 5 < 7$ (*f*) $-1 \leq 2x + 5 < 9$ (*g*) $|x + 1| < 2$ (*h*) $|3x - 4| \leq 5$
(*i*) $\dfrac{2x - 5}{x - 2} < 1$ (*j*) $x^2 \leq 6$ (*k*) $(x - 3)(x + 1) < 0$

7.25 Para quais valores de x que os gráficos de (*a*) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$ e (*b*) $f(x) = x(x - 1)(x + 2)$ estão acima do eixo x? $\boxed{\text{CG}}$ Confira suas respostas por meio de uma calculadora gráfica.

7.26 Prove o Teorema 7.1. [*Sugestão*: Resolva $f(r) = 0$ isolando a_0.]

7.27 Demonstre o Teorema 7.2. [*Sugestão*: Faça uso da ÁLGEBRA que segue o Problema 7.21.]

Capítulo 8

Limites

8.1 INTRODUÇÃO

Em grande parte, cálculo é o estudo das taxas nas quais quantidades mudam. Será necessário ver como o valor $f(x)$ de uma função f se comporta quando o argumento x se aproxima de um dado número. Isso conduz à idéia de *limite*.

Exemplo Considere a função f tal que

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

sempre que essa fórmula fizer sentido. Nesse caso, f é definida para todo x tal que o denominador $x - 3$ não é 0; ou seja, para $x \neq 3$. O que acontece com o valor $f(x)$ quando x se aproxima de 3? Bem, x^2 se aproxima de 9, e assim $x^2 - 9$ se aproxima de 0; além disso, $x - 3$ se aproxima de 0. Como ambos, numerador e denominador, se aproximam de 0, não está claro o que ocorre com $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

No entanto, fatorando o numerador, observamos que

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

Uma vez que $x + 3$ inquestionavelmente se aproxima de 6 quando x se aproxima de 3, agora sabemos que nossa função se aproxima de 6 quando x se aproxima de 3. A maneira tradicional para expressar matematicamente esse fato é

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Isso se lê: "O limite de $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ quando x tende a 3 é 6".

Observe que não existe problema algum quando x se aproxima de qualquer outro número diferente de 3. Por exemplo, quando x se aproxima de 4, $x^2 - 9$ se aproxima de 7 e $x - 3$ se aproxima de 1. Logo,

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{7}{1} = 7$$

8.2 PROPRIEDADES DE LIMITES

No exemplo anterior, assumimos implicitamente certas propriedades óbvias da noção de limite. Vamos escrevê-las abaixo explicitamente.

PROPRIEDADE I.

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Isso segue diretamente do significado do conceito de limite.

PROPRIEDADE II. Se c é uma constante,

$$\lim_{x\to a} c = c$$

Quando x se aproxima de a, o valor de c permanece c.

PROPRIEDADE III. Se c é uma constante e f é uma função,

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 3} 5x = 5\cdot \lim_{x\to 3} x = 5\cdot 3 = 15$$
$$\lim_{x\to 3} -x = \lim_{x\to 3}(-1)x = (-1)\cdot \lim_{x\to 3} x = (-1)\cdot 3 = -3$$

PROPRIEDADE IV. Se f e g são funções,

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

O limite de um produto é o produto dos limites.

Exemplo

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$

De maneira mais geral, para qualquer inteiro positivo n, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

PROPRIEDADE V. Se f e g são funções,

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

O limite de uma soma (diferença) é a soma (diferença) dos limites.

Exemplos

(*a*)

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+5x) = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 5x$$
$$= 3\cdot \lim_{x\to 2} x^2 + 5\cdot \lim_{x\to 2} x = 3(2)^2 + 5(2) = 22$$

(*b*) De maneira mais genérica, se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ é qualquer função polinomial e k é qualquer número real, então

$$\lim_{x\to k} f(x) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_0 = f(k)$$

PROPRIEDADE VI. Se f e g são funções e $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

O limite de uma razão é a razão dos limites.

Exemplo

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^3 - 5}{3x + 2} = \frac{\lim_{x\to 4} (2x^3 - 5)}{\lim_{x\to 4} (3x + 2)} = \frac{2(4)^3 - 5}{3(4) + 2} = \frac{123}{14}$$

PROPRIEDADE VII.

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

O limite de uma raiz quadrada é a raiz quadrada do limite.

Exemplo

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{\lim_{x\to 2} (x^2 + 5)} = \sqrt{9} = 3$$

As propriedades IV-VII têm uma estrutura em comum. Cada uma delas nos diz que, se f e/ou g tem um limite quando x tende a a (ver Seção 8.3), outra função relacionada também tem um limite quando x se aproxima de a, e esse limite é dado pela fórmula indicada.

8.3 EXISTÊNCIA OU NÃO EXISTÊNCIA DO LIMITE

Em certos casos, uma função $f(x)$ não se aproxima de um limite quando x tende a um número particular.

Exemplos

(*a*) A Figura 8-1(*a*) indica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

não existe. Quando x tende a 0, a magnitude de $1/x$ torna-se maior e maior. (Se $x > 0$, $1/x$ é positivo e muito grande quando x se aproxima de 0. Se $x < 0$, $1/x$ é negativo e muito "pequeno" quando x se aproxima de 0.)

(*b*) A Figura 8-1(*b*) indica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

não existe. Quando $x > 0$, $|x| = x$ e $|x|/x = 1$; quando $x < 0$, $|x| = -x$ e $|x|/x = -1$. Portanto, quando x se aproxima de 0, $|x|/x$ se aproxima de dois valores diferentes, 1 e -1, dependendo se x se aproxima de 0 por valores positivos ou negativos. Uma vez que não existe um *único* limite quando x se aproxima de 0, dizemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

não existe.

(*c*) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Então [ver Fig. 8-1(*c*)], $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe. Quando x se aproxima de 1 pela esquerda (isto é, por valores de $x < 1$), $f(x)$ se aproxima de 1. Mas quando x tende a 1 pela direita (isto é, por valores de $x > 1$), $f(x)$ se aproxima de 2.

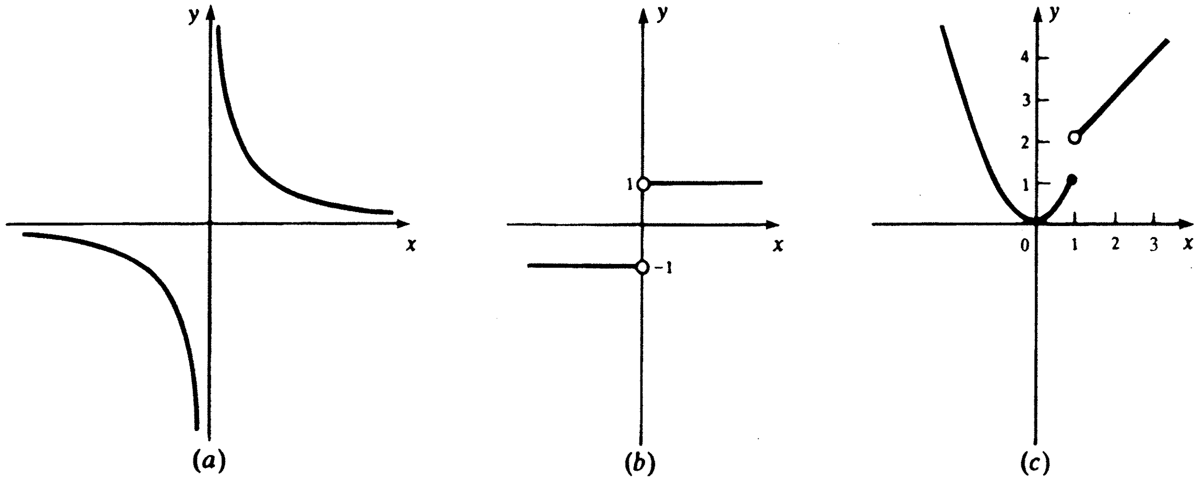


Fig. 8-1

Observe que a existência ou não de um limite para $f(x)$ quando $x \to a$ não depende do valor de $f(a)$, e sequer é necessário que f seja definida em a. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então L é um número para o qual $f(x)$ pode ser tornada arbitrariamente próxima, fazendo x suficientemente próximo de a. O valor de L — ou mesmo a existência de L — é determinado pelo comportamento de f *nas proximidades de a*, e não pelo seu valor em a (se tal valor existir).

Problemas Resolvidos

8.1 Calcule os seguintes limites (se existirem):

$$(a)\ \lim_{y\to 2}\left(y^2 - \frac{1}{y}\right) \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \qquad (c)\ \lim_{u\to 5}\frac{u^2-25}{u-5} \qquad (d)\ \lim_{x\to 2}\,[x]$$

(*a*) y^2 e $1/y$ têm limites quando $y \to 2$. Assim, pela Propriedade V,

$$\lim_{y\to 2}\left(y^2 - \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 2} y^2 - \lim_{y\to 2}\frac{1}{y} = 4 - \frac{\lim_{y\to 2} 1}{\lim_{y\to 2} y} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

(*b*) Aqui é necessário proceder indiretamente. A função x^2 tem um limite quando $x \to 0$. Logo, supondo que o limite indicado exista, a Propriedade V implica que

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

também existe. Mas esse não é o caso. [Ver o exemplo (*a*) na Seção 8.3.] Assim,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

não existe.

(*c*)
$$\lim_{u\to 5}\frac{u^2-25}{u-5} = \lim_{u\to 5}\frac{(u-5)(u+5)}{u-5} = \lim_{u\to 5}(u+5) = 10$$

(*d*) Quando x tende a 2 pela direita (isto é, com $x > 2$), $[x]$ permanece igual a 2 (ver Fig. 7-12). Contudo, quando x se aproxima de 2 pela esquerda (isto é, com $x < 2$), $[x]$ permanece igual a 1. Logo, não existe um número único para o qual $[x]$ se aproxima quando x tende a 2. Desse modo, $\lim_{x\to 2}\,[x]$ não existe.

8.2 Determine $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada uma das seguintes funções. (Esse limite será importante no estudo de cálculo diferencial.)

$$(a)\ f(x)=3x-1 \qquad (b)\ f(x)=4x^2-x \qquad (c)\ f(x)=\frac{1}{x}$$

(*a*) $f(x+h)=3(x+h)-1=3x+3h-1$

$f(x)=3x-1$

$f(x+h)-f(x)=(3x+3h-1)-(3x-1)=3x+3h-1-3x+1=3h$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{3h}{h}=3$

Logo $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

(*b*) $f(x+h)=4(x+h)^2-(x+h)=4(x^2+2hx+h^2)-x-h$
$=4x^2+8hx+4h^2-x-h$

$f(x)=4x^2-x$

$f(x+h)-f(x)=(4x^2+8hx+4h^2-x-h)-(4x^2-x)$
$=4x^2+8hx+4h^2-x-h-4x^2+x$
$=8hx+4h^2-h=h(8x+4h-1)$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h(8x+4h-1)}{h}=8x+4h-1$

Logo, $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(8x+4h-1)$$
$$=\lim_{h\to 0}(8x-1)+\lim_{h\to 0}4h=8x-1+0=8x-1$$

(*c*) $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$

$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$f(x+h)-f(x)=\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}$

ÁLGEBRA $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

$$=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=\frac{x-x-h}{(x+h)x}=\frac{-h}{(x+h)x}$$

Logo, $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-h}{(x+h)x}\div h=\frac{-h}{(x+h)x}\cdot\frac{1}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}$$

e $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{x+h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}$$
$$=-\frac{1}{\lim_{h\to 0}(x+h)}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$$

8.3 Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Ambos numerador e denominador tendem a 0 quando x se aproxima de 1. No entanto, uma vez que 1 é uma raiz de $x^3 - 1$, $x - 1$ é um fator de $x^3 - 1$ (Teorema 7.2). A divisão de $x^3 - 1$ por $x - 1$ produz a fatorização $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

[Ver exemplo (*b*) da Propriedade V na Seção 8.2.]

8.4 (*a*) Dê uma definição precisa do conceito de limite; $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

(*b*) Usando a definição no item (*a*) prove a Propriedade V de limites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = K \quad \text{implica} \quad \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + K$$

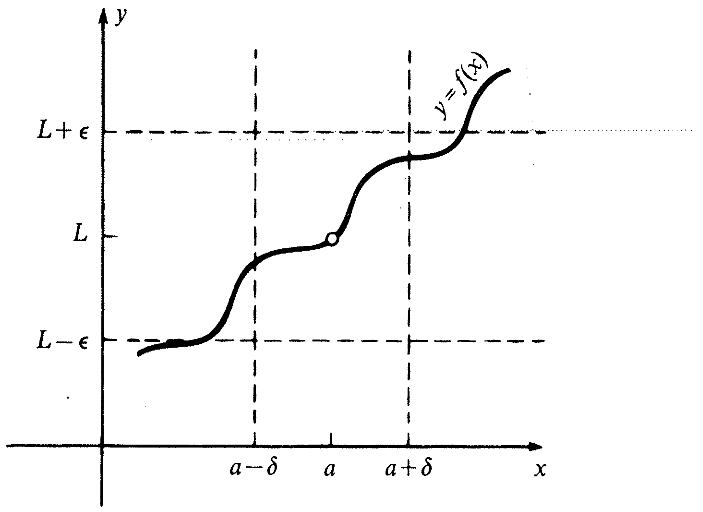


Fig. 8-2

(*a*) Intuitivamente, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ pode ser escolhido tão próximo quanto desejamos de L se x for escolhido suficientemente próximo de a. Uma versão matematicamente precisa dessa afirmação é: Para qualquer número real $\epsilon > 0$ existe um número real $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica em} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

para qualquer x no domínio de f. Lembre que $|x - a| < \delta$ significa que a distância entre x e a é menor que δ, e que $|f(x) - L| < \epsilon$ significa que a distância entre $f(x)$ e L é menor que ϵ. Assumimos que o domínio de f é tal que contém pelo menos um argumento x a uma distância de a menor que δ para um $\delta > 0$ arbitrário. Observe também que a condição $0 < |x - a|$ exclui $x = a$, o que está em acordo com a exigência de que o valor (se houver) de $f(a)$ não tem nada a ver com $\lim_{x \to a} f(x)$.

Uma versão pictórica dessa definição é mostrada na Fig. 8-2. Não importa quão estreita seja uma faixa horizontal (de largura 2ϵ) que pode ser posicionada simetricamente acima e abaixo da reta $y = L$, existe uma faixa vertical estreita (de largura 2δ) em torno da reta $x = a$ tal que, para qualquer coordenada x de um ponto nessa faixa exceto $x = a$, o ponto correspondente $(x, f(x))$ pertence à faixa horizontal. O número δ depende do número ϵ dado; se ϵ for escolhido cada vez menor, então δ também pode se tornar cada vez menor.

A versão precisa dada acima para o conceito de limite é chamada de *definição em termos de épsilon e delta* devido ao uso tradicional das letras gregas ϵ e δ.

(*b*) Seja $\epsilon > 0$ dado. Então $\epsilon/2 > 0$ e, uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe um número real $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{implica em} \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

para todo x no domínio de f. Da mesma forma, como $\lim_{x \to a} g(x) = K$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{implica em} \quad |g(x) - K| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

para todo x no domínio de g. Seja δ o menor entre δ_1 e δ_2. Assuma que $0 < |x - a| < \delta$ e que x está nos domínios de f e g. Pela desigualdade triangular (*1.10*),

$$|(f(x) + g(x)) - (L + K)| = |(f(x) - L) + (g(x) - K)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - K| \tag{3}$$

Para o número x considerado, (1) e (2) mostram que os dois termos do lado direito de (3) são, cada um, menores que $\epsilon/2$. Assim,

$$|(f(x) + g(x)) - (L + K)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e temos desse modo estabelecido que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + K$.

Problemas Complementares

8.5 Calcule os seguintes limites (se existirem):

(*a*) $\lim_{x \to 2} 7$ (*b*) $\lim_{u \to 0} \frac{5u^2 - 4}{u + 1}$ (*c*) $\lim_{w \to -2} \frac{4 - w^2}{w + 2}$

(*d*) $\lim_{x \to 3/2} [x]$ (*e*) $\lim_{x \to 0} |x|$ (*f*) $\lim_{x \to 2} (7x^3 - 5x^2 + 2x - 4)$

(*g*) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ (*h*) $\lim_{x \to 2} (x - [x])$? (*i*) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

(*j*) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - x^2 - x - 15}{x - 3}$ (*k*) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^4 - 7x^2 + x - 6}{x - 2}$? (*l*) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$

1 (*m*) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x}$ 2 (*n*) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$ (*o*) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

8.6 Calcule $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ e então $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ (se existir) para cada uma das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = 3x^2 + 5$ (*b*) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ (*c*) $f(x) = 7x + 12$

(*d*) $f(x) = x^3$ (*e*) $f(x) = \sqrt{x}$ (*f*) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$

8.7 Dê demonstrações rigorosas das seguintes propriedades do conceito de limite:

(*a*) $\lim_{x \to a} x = a$ (*b*) $\lim_{x \to a} c = c$ (*c*) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ para, no máximo, um número L

8.8 Assumindo que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = K$, prove rigorosamente que:

(*a*) $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot L$, onde c é qualquer número.

(*b*) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$.

(*c*) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ se $K \neq 0$.

(*d*) $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ se $L \geq 0$.

(*e*) Se $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

(*f*) Se $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$ e se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x nas proximidades de a, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

[*Sugestão*: No item (*d*), para $L > 0$,

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = \left|(\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}) \cdot \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}\right| = \left|\frac{f(x) - L}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}}\right| \le \frac{|f(x) - L|}{\sqrt{L}}$$

No item (*f*), se $f(x)$ e $h(x)$ pertencem ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, o mesmo deve ocorrer para $g(x)$.]

8.9 Em uma demonstração, em termos de epsilon e delta, do fato de que $\lim_{x \to 3} (2 + 5x) = 17$, qual dos seguintes valores de δ é o maior que pode ser usado, dado ϵ?

(*a*) ϵ (*b*) $\frac{\epsilon}{2}$ (*c*) $\frac{\epsilon}{4}$ (*d*) $\frac{\epsilon}{5}$ (*e*) $\frac{\epsilon}{8}$

8.10 (*a*) Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$.

(*b*) CG Resolva o item (*a*) com uma calculadora gráfica fazendo o gráfico de $y = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ e avaliando o comportamento da curva quando x se aproxima de 1.

8.11 (*a*) Determine $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x + 21} - 5}{x - 4}$.

(*b*) CG Resolva o item (*a*) com uma calculadora gráfica fazendo o gráfico de $y = \frac{\sqrt{x + 21} - 5}{x - 4}$ e avaliando o comportamento da curva quando x se aproxima de 4.

8.12 Obtenha os seguintes limites:

(*a*) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ (*b*) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - x - 14}$ (*c*) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 4x + 3}$ (*d*) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 16} - 4}{x^2}$

Capítulo 9

Limites Especiais

9.1 LIMITES LATERAIS

É comumente útil considerar o limite de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um dado número pela direita ou pela esquerda.

Exemplos

(*a*) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Seu gráfico é dado na Fig. 9-1(*a*). Quando x se aproxima de 0 pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de -1. Quando x se aproxima de 0 pela direita, $f(x)$ se aproxima de 2. Denotamos esses fatos como:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

(*b*) Considere a função $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Seu gráfico é dado na Fig. 9-1(*b*). Então $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$.

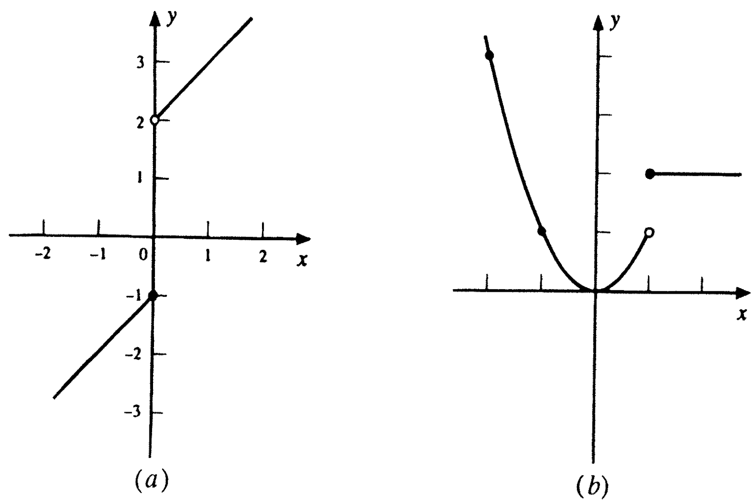


Fig. 9-1

É claro que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe se, e somente se, ambos $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existem e $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

9.2 LIMITES INFINITOS: ASSÍNTOTAS VERTICAIS

Se o valor $f(x)$ de uma função cresce indefinidamente quando x se aproxima de a, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe. Porém, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

para indicar que $f(x)$ cresce indefinidamente.

Exemplo Seja $f(x) = 1/x^2$ para todo $x \neq 0$. O gráfico de f é mostrado na Fig. 9-2. Quando x se aproxima de 0 por qualquer lado, $1/x^2$ cresce indefinidamente. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

A notação $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significará que $f(x)$ decresce indefinidamente quando x se aproxima de a; isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{x \to a} (-f(x)) = +\infty$$

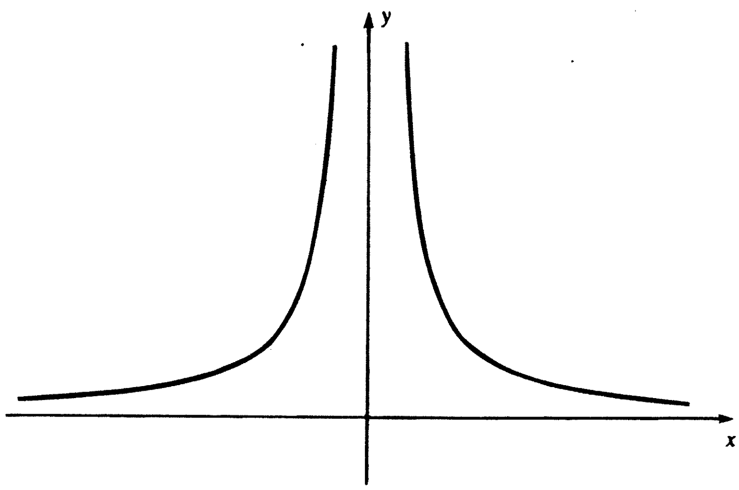


Fig. 9-2

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

baseado no problema anterior.

Algumas vezes $f(x)$ crescerá ou decrescerá indefinidamente quando x se aproxima de a por um lado ($x \to a^-$ ou $x \to a^+$).

Exemplos

(a) Seja $f(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$. Então escrevemos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

para indicar que $f(x)$ cresce indefinidamente quando x se aproxima de 0 pela direita [ver Fig. 8-1(a)]. Da mesma forma, escrevemos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

para expressar o fato que $f(x)$ decresce indefinidamente quando x se aproxima de 0 pela esquerda.

(*b*) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{para } x > 0 \\ x & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$.

Então (ver Fig. 9-3), $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

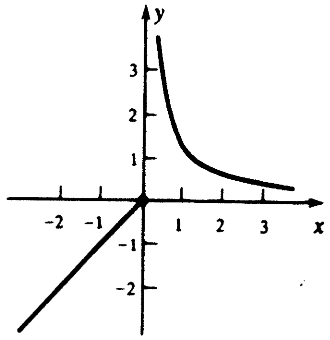


Fig. 9-3

Quando $f(x)$ tem um limite infinito à medida que x se aproxima de a pela direita e/ou pela esquerda, o gráfico da função aproxima-se cada vez mais da reta vertical $x = a$ quando x tende a a. Nesse caso, a reta $x = a$ é chamada de *assíntota vertical* do gráfico. Na Fig. 9-4, as retas $x = a$ e $x = b$ são assíntotas verticais (se aproximando por um lado apenas).

Se uma função é expressa como uma razão, $F(x)/G(x)$, a existência de uma assíntota vertical $x = a$ é usualmente detectada pelo fato de que $G(a) = 0$ [exceto quando $F(a)$ também se anula].

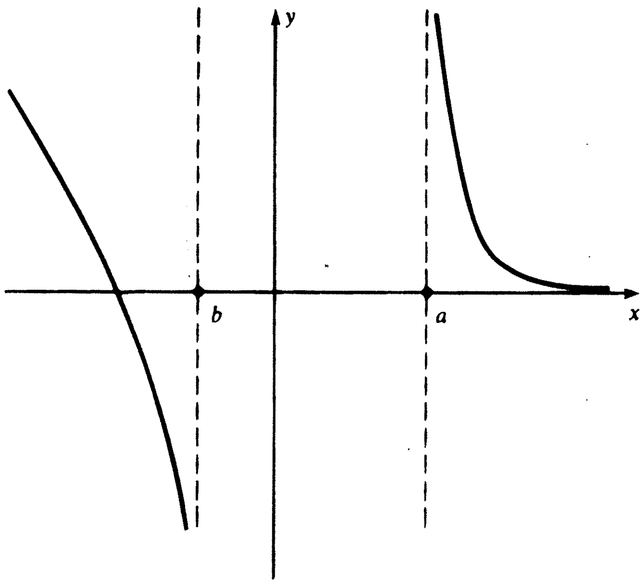


Fig. 9-4

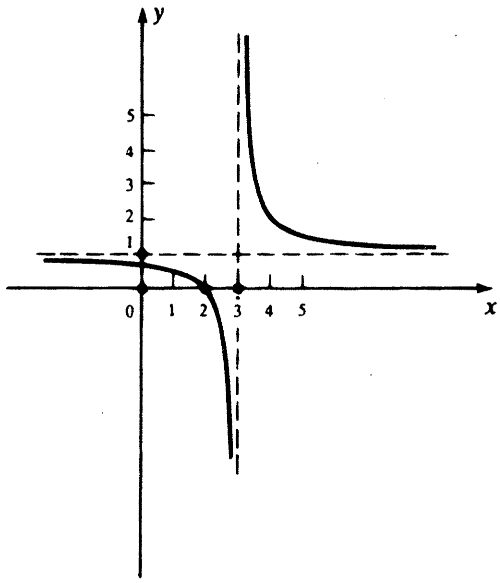


Fig. 9-5

Exemplo Seja $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ para $x \neq 3$. Então $x = 3$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, pois

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x-2}{x-3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{x-2}{x-3} = -\infty$$

Nesse caso, a assíntota $x = 3$ é aproximada por ambos os lados, direito e esquerdo (ver Fig. 9-5).

[Observe que, de acordo com a divisão, $\dfrac{x-2}{x-3} = 1 + \dfrac{1}{x-3}$. Portanto, o gráfico de $f(x)$ é obtido pela translação da hipérbole $y = 1/x$ três unidades para a direita e uma unidade para cima.]

9.3 LIMITES NO INFINITO: ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Quando x cresce indefinidamente, o valor $f(x)$ de uma função f pode se aproximar de um número real fixo c. Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$$

ou seja, o gráfico de f aproxima-se da reta horizontal $y = c$ quando x cresce indefinidamente. Então, a reta $y = c$ é chamada de *assíntota horizontal* do gráfico – mais precisamente, uma *assíntota horizontal pela direita.*

Exemplo Considere a função $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ cujo gráfico é mostrado na Fig. 9-5. Então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ e a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal pela direita.

Se $f(x)$ se aproxima de um número real fixo c quando x decresce indefinidamente[1], escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$$

ou seja, o gráfico de f fica cada vez mais próximo da reta horizontal $y = c$ quando x decresce indefinidamente. Então, a reta $y = c$ é chamada de *assíntota horizontal pela esquerda.*

Exemplos Para a função representada graficamente na Fig. 9-5, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal pela esquerda e pela direita. Para a função representada na Fig. 9-2, a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal tanto pela esquerda quanto pela direita.

Se uma função f cresce indefinidamente quando seu argumento x cresce indefinidamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplos

$$\lim_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Se uma função f cresce indefinidamente quando seu argumento x decresce indefinidamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplos

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

Se uma função f decresce indefinidamente quando seu argumento x cresce indefinidamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplos

$$\lim_{x \to +\infty} -2x = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} (1 - x^2) = -\infty$$

Se uma função f decresce indefinidamente quando seu argumento x decresce indefinidamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplos

$$\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

[1] Dizer que x decresce indefinidamente significa que x pode se tornar menor que qualquer número negativo. Naturalmente, nesse caso, o valor absoluto $|x|$ cresce indefinidamente.

Exemplo Considere a função f tal que $f(x) = x - [x]$ para todo x. Para cada inteiro n, quando x cresce de n até $n+1$, mas sem incluir o próprio $n + 1$, o valor de $f(x)$ aumenta de 0 até 1, excluindo o 1. Portanto, o gráfico consiste de uma seqüência de segmentos de retas, como mostrado na Fig. 9-6. Então $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ é indefinido, uma vez que o valor $f(x)$ não se aproxima de um limite fixo e nem cresce ou decresce indefinidamente. Da mesma forma, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ é indefinido.

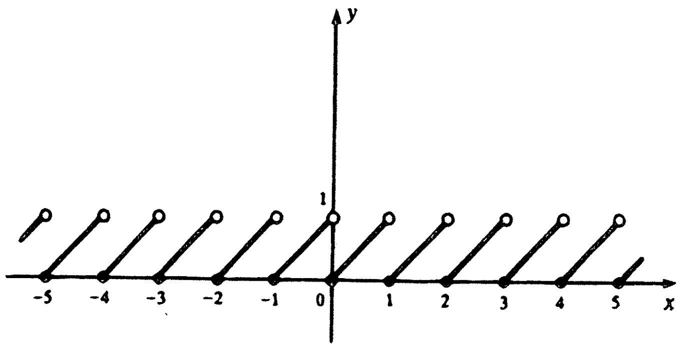


Fig. 9-6

Determinando Limites no Infinito de Funções Racionais

Uma *função racional* é uma razão $f(x)/g(x)$ entre polinômios $f(x)$ e $g(x)$. Por exemplo, $\dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x + 7}$ e $\dfrac{x^2 - 5}{4x^7 + 3x}$ são funções racionais.

REGRA GERAL. Para calcular $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, divida o numerador e o denominador pela mais alta potência de x no denominador e então use o fato de que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0 \qquad (9.1)$$

para qualquer número positivo real r e qualquer constante c.

Exemplo A

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}(2x + 5)}{\frac{1}{x^2}(x^2 - 7x + 3)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Portanto, $y = 0$ é uma assíntota horizontal, pela direita, do gráfico dessa função racional.

Observe que exatamente o mesmo cálculo se aplica quando $+\infty$ é substituído por $-\infty$. Assim, $y = 0$ é também uma assíntota horizontal, pela esquerda, do gráfico dessa função.

REGRA GERAL A. Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios e o grau de g é maior que o grau de f, então $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemplo B

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}(3x^3-4x+2)}{\frac{1}{x^3}(7x^3+5)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}7+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^3}}=\frac{3-0+0}{7+0}=\frac{3}{7}$$

Observe que exatamente o mesmo cálculo funciona quando $+\infty$ é substituído por $-\infty$.

REGRA GERAL B. Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios e o grau de g é o mesmo grau de f, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ são iguais à razão entre os coeficientes dos monômios de maior grau de f e g.*

Exemplo C

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-1}{3x^3+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}(4x^5-1)}{\frac{1}{x^3}(3x^3+7)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-\frac{1}{x^3}}{3+\frac{7}{x^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2-0}{3+0}=\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

REGRA GERAL C. Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios e o grau de g é menor que o grau de f, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$. O resultado é $+\infty$ quando os coeficientes dos monômios de maior grau de f e g têm o mesmo sinal, e o resultado é $-\infty$ quando os coeficientes dos monômios de maior grau de f e g têm sinais opostos.

Exemplo D

(*a*) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7}{2x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\frac{7}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x=-\infty$$

(*b*) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-7}{2x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-\frac{7}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x^2=+\infty$$

(*c*) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2-7}{2x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-\frac{7}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{2}x=+\infty$$

(*d*) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3-7}{2x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2-\frac{7}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{2}x^2=-\infty$$

REGRA GERAL D. Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios e o grau de g é menor que o grau de f, então $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$.[2]

* N. de T.: Isso porque todo polinômio pode ser entendido como uma soma de monômios.

[2] A regra geral para determinar se $+\infty$ ou $-\infty$ vale é complexa. Se a_n e b_k são os coeficientes dos monômios de maior grau de f e g, respectivamente, então o limite é igual a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_n}{b_k}x^{n-k}$ e o sinal correto é o sinal de $a_nb_k(-1)^{n-k}$.

Problemas Resolvidos

9.1 Calcule os seguintes limites:

(*a*) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x^3 - 20x^2 + 2x - 14)$ (*b*) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3 + 70x^2 + 50x + 5)$

(*c*) $\lim\limits_{x\to-\infty} (7x^4 - 12x^3 + 4x - 3)$ (*d*) $\lim\limits_{x\to-\infty} (7x^3 + 10x^2 + 3x + 5)$

Se $f(x)$ é um polinômio,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

com $a_n \neq 0$, então

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}/a_n}{x} + \frac{a_{n-2}/a_n}{x^2} + \cdots + \frac{a_1/a_n}{x^{n-1}} + \frac{a_0/a_n}{x^n}$$

Segue de (*9.1*) que quando $x \to \pm\infty$, $f(x)/a_n x^n$ fica arbitrariamente próximo de 1. Por essa razão, $f(x)$ deve ser ilimitada da mesma forma como $a_n x^n$; isto é,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Aplicando essa regra aos polinômios dados, temos:

(*a*) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$ (*b*) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$

(*c*) $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^4 = +\infty$ (*d*) $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^3 = -\infty$

REGRA GERAL P. Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, então:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ e o sinal correto é o sinal de a_n.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ e o sinal correto é o sinal de $a_n(-1)^n$.

9.2 Calcule: (*a*) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+3}{x-1}$; (*b*) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x+3}{x-1}$.

Quando x tende a 1, o denominador $x - 1$ se aproxima de 0, enquanto $x + 3$ se aproxima de 4. Portanto, $\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$ cresce indefinidamente.

(*a*) Quando x tende a 1 pela direita, $x - 1$ é positivo. Uma vez que $x + 3$ é positivo quando x está próximo de 1,

$$\frac{x+3}{x-1} > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

(*b*) Quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $x - 1$ é negativo, enquanto $x + 3$ é positivo. Então,

$$\frac{x+3}{x-1} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$$

A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico da função racional (ver Fig. 9-7).

9.3 Dada $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x > 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, calcule: (*a*) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; (*b*) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$; (*c*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; (*d*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(*a*)
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical do gráfico de f (Fig. 9-8).

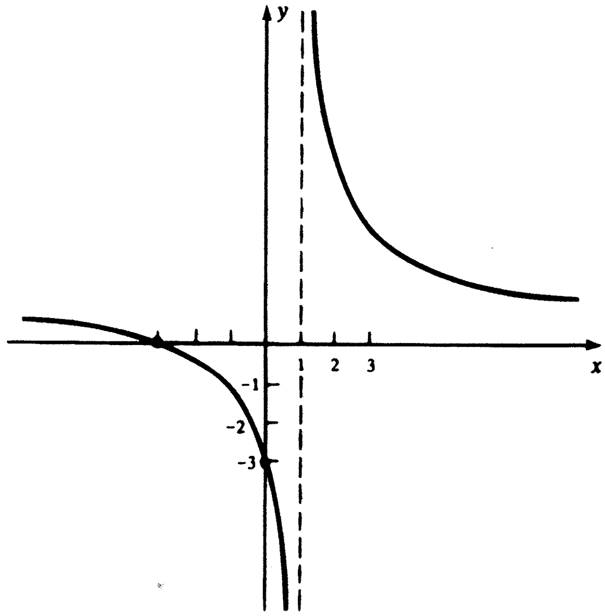


Fig. 9-7

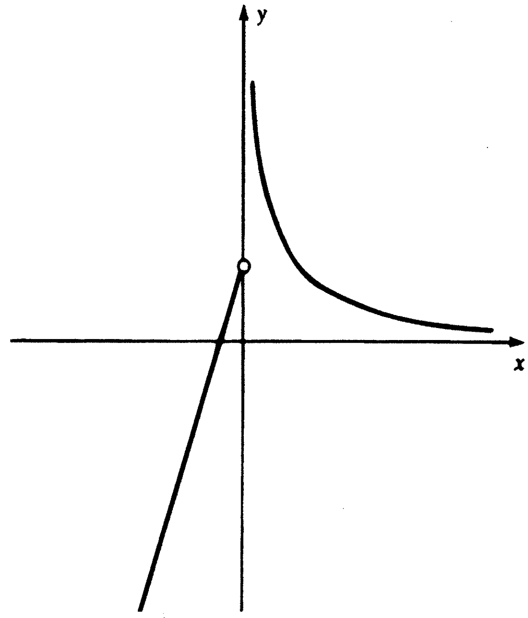


Fig. 9-8

(*b*) $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x+2) = 2$$

(*c*) $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Logo, a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal (pela direita) do gráfico de f.

(*d*) $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (3x+2) = -\infty$$

9.4 Calcule: (*a*) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-5}{4x^2+5}$; (*b*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-7}{x^2-8}$; (*c*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}}$; (*d*) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}}$.

(*a*) Aplique a Regra B da Seção 9.3:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-5}{4x^2+5} = \frac{3}{4}$$

(*b*) Aplique a Regra A da Seção 9.3:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-7}{x^2-8} = 0$$

(*c*) Pela Regra P, desenvolvida no Problema 9.1, o denominador se comporta como $\sqrt{x^2}$ quando $x \to +\infty$. Mas $\sqrt{x^2} = x$ quando $x > 0$. Portanto, pela Regra B da Seção 9.3,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5x+2}{x} = \frac{5}{1} = 5$$

(*d*) Pela Regra P, desenvolvida no Problema 9.1, o denominador se comporta como $\sqrt{x^2}$ quando $x \to -\infty$. Mas, $\sqrt{x^2} = -x$ quando $x < 0$. Portanto, pela Regra B da Seção 9.3,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{5x+2}{-x} = \frac{5}{-1} = -5$$

9.5 Determine as assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$$

As assíntotas verticais são determinadas pelas raízes do denominador:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x + 1 &= 0 \\ (3x-1)(2x-1) &= 0 \\ 3x - 1 = 0 \quad &\text{ou} \quad 2x - 1 = 0 \\ 3x = 1 \quad &\text{ou} \quad 2x = 1 \\ x = \tfrac{1}{3} \quad &\text{ou} \quad x = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Como o numerador não é 0 em $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$, $|f(x)|$ se aproxima de $+\infty$ quando x tende a $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$, seja de um lado ou do outro. Portanto, as assíntotas verticais são $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{2}$.

As assíntotas horizontais podem ser encontradas pela Regra B da Seção 9.3,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $y = \frac{1}{2}$ é um assíntota horizontal pela direita. Um procedimento semelhante mostra que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, e assim $y = \frac{1}{2}$ é também uma assíntota horizontal pela esquerda.

Problemas Complementares

9.6 Calcule os seguintes limites:

(*a*) $\lim_{x \to +\infty} (2x^{11} - 5x^6 + 3x^2 + 1)$ (*b*) $\lim_{x \to +\infty} (-4x^7 + 23x^3 + 5x^2 + 1)$

(*c*) $\lim_{x \to -\infty} (2x^4 - 12x^2 + x - 7)$ (*d*) $\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 12x^2 + x - 7)$

(*e*) $\lim_{x \to -\infty} (-x^8 + 2x^7 - 3x^3 + x)$ (*f*) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4)$

9.7 Calcule os seguintes limites (se existirem):

(*a*) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, se $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x + 5 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ (*b*) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$

(*c*) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\textit{Sugestão:} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}\right]$ (*d*) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9}$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$

(*e*) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ (*f*) $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2 - 7x + 12}$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x^2 - 7x + 12}$

(*g*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3x - 5}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3x - 5}$ (*h*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1}$

(*i*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{3x + 1}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{3x + 1}$ (*j*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x - 5}{3x^4 + 4}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + x - 5}{3x^4 + 4}$

(*k*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ (*l*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2}{\sqrt{x^4 - 2}}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + 2}{\sqrt{x^4 - 2}}$

(*m*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x - 4}{\sqrt{x^3 + 5}}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{7x - 4}{\sqrt{x^3 + 5}}$ (*n*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x^2 - 2}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x^2 - 2}$

(*o*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 4}}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 4}}$ (*p*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 3}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

(*q*) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5}{3 + 5x - 2x^2}$ (*r*) $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$

(*s*) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 7x^3 + 4}{x^2 - 3}$

9.8 Encontre quaisquer assíntotas verticais e horizontais dos gráficos das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = x^3$ (*b*) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x+2}$ (*c*) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+x-6}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x^2+3x-5}$ (*e*) $f(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}$ (*f*) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x-8}}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}}$ (*h*) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ (*i*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

9.9 Assuma que f é uma função definida para todo x. Considere também que, para qualquer número real c, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x| < \delta$ implica que $f(x) > c$. O que a seguir corresponde a essa situação?

(*a*) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (*b*) $\lim_{x \to \delta} f(x) = c$ (*c*) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ (*d*) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

9.10 (*a*) Assuma que $f(x) \geq 0$ para argumentos à direita e próximos de a [isto é, existe algum número positivo δ tal que $a < x < a + \delta$ implica em $f(x) \geq 0$]. Prove que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{implica em} \quad L \geq 0$$

(*b*) Assuma que $f(x) \geq 0$ para argumentos à direita e próximos de a. Prove que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = M \quad \text{implica em} \quad M \leq 0$$

(*c*) Formule e prove resultados análogos aos itens (*a*) e (*b*) para $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

9.11 $\boxed{\text{CG}}$ Determine as assíntotas vertical e horizontal dos gráficos das seguintes funções com a ajuda de uma calculadora gráfica, e então use métodos analíticos para verificar suas respostas.

(*a*) $\dfrac{5-3x^3}{4x^3+x-1}$ (*b*) $\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{5-2x}$ (*c*) $\dfrac{|4-x|}{4-x}$

(*d*) $\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x}$ (*e*) $\dfrac{(4x^4+3x^3+2x^2+x+1)^{1/2}}{x^2+x+1}$

Capítulo 10

Continuidade

10.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Uma função é intuitivamente concebida como sendo *contínua* quando seu gráfico não tem interrupções ou saltos.* Isso pode ser tornado preciso da seguinte maneira.

Definição: Uma função f é dita *contínua em a* se as três condições abaixo valem:

(i) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

(ii) $f(a)$ é definida.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$. A função é descontínua (ou seja, não é contínua) em 0. A condição (i) é satisfeita: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. A condição (ii) é satisfeita: $f(0) = 0$. No entanto, a condição (iii) falha: $1 \neq 0$. Existe uma lacuna no gráfico de f (ver Fig. 10-1) no ponto (0,1). A função é contínua em todo ponto diferente de 0.

(*b*) Seja $f(x) = x^2$ para todo x. Essa função é contínua em todo a, uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a)$. Observe que não existem lacunas ou saltos no gráfico de f (ver Fig. 10-2).

(*c*) A função f tal que $f(x) = [x]$ para todo x é descontínua para todo inteiro, pois a condição (i) não é satisfeita (ver Fig. 7-12). As descontinuidades se mostram como saltos no gráfico da função,

(*d*) A função f tal que $f(x) = |x|/x$ para todo $x \neq 0$ é descontínua em 0 [ver Fig. 8-1(*b*)]. O $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe e $f(0)$ não é definida. Observe que há um salto no gráfico em $x = 0$.

Se uma função f não é contínua em a, então f é dita ter uma *descontinuidade removível* em a se uma mudança apropriada na definição de f em a pode tornar a função resultante contínua em a.

* N. de T.: Na verdade, quando não há interrupções ou saltos em seu domínio.

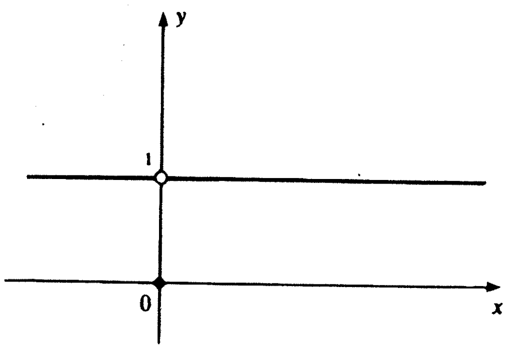


Fig. 10-1

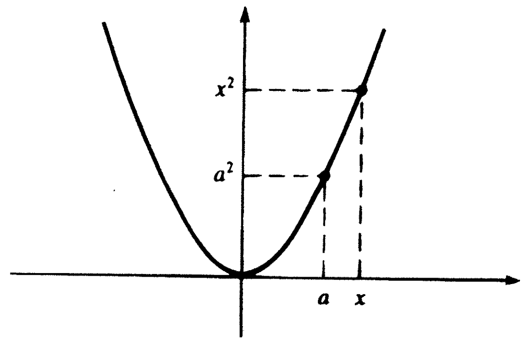


Fig. 10-2

Exemplos No exemplo (*a*) acima, a descontinuidade em $x = 0$ é removível, uma vez que se redefinimos f de modo que $f(0) = 1$, então a função resultante seria contínua em $x = 0$. As descontinuidades das funções nos exemplos (*c*) e (*d*) acima não são removíveis.

Uma descontinuidade de uma função f em a é removível se, e somente se, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Nesse caso, o valor da função em a pode ser mudado para $\lim_{x\to a} f(x)$.

Uma função f é dita *contínua em um conjunto A* se f é contínua em cada elemento de A. Se f é contínua em cada número de seu domínio, então simplesmente dizemos que f *é contínua* ou que f é uma *função contínua*.

Exemplos

(*a*) *Toda função polinomial é contínua.* Isso segue do exemplo (*b*) da Propriedade V na Seção 8.2.

(*b*) *Toda a função racional* $\frac{f(x)}{g(x)}$, onde f e g são polinômios, *é contínua em todo número real, exceto nas raízes reais (se houverem) de* $g(x)$. Isso segue da Propriedade VI na Seção 8.2.

Existem certas propriedades de continuidade que seguem diretamente das propriedades usuais de limites (Seção 8.2). Assuma f e g contínuas em a. Então,

(1) A soma $f + g$ e a diferença $f - g$ são contínuas em a.

NOTAÇÃO $f + g$ é uma função, tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo x, ou seja, em ambos os domínios de f e g. Analogamente, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ para todo x comum ao domínio de f e de g.

(2) Se c é uma constante, a função cf é contínua em a.

NOTAÇÃO cf é uma função tal que $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ para todo x no domínio de f.

(3) O produto fg é contínuo em a e o quociente f/g é contínuo em a desde que $g(a) \neq 0$.

NOTAÇÃO fg é uma função tal que $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo x, isto é, em ambos os domínios de f e g. Analogamente, $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para todo x em ambos os domínios tal que $g(x) \neq 0$.

(4) $\sqrt{f(x)}$ é contínua em a se $f(a) > 0$.

Observação: Como f é contínua em a, a restrição de que $f(a) > 0$ garante que, para x próximo de a, $f(x) > 0$ e, por esse motivo, $\sqrt{f(x)}$ é definida.

10.2 CONTINUIDADE LATERAL

Uma função f é dita ser *contínua pela direita de a* se satisfaz as condições (i)-(iii) para continuidade em a, com $\lim_{x\to a}$ substituído por $\lim_{x\to a^+}$; isto é, (i) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe; (ii) $f(a)$ é definida; (iii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Analogamente, f *é contínua pela esquerda de a* se satisfaz as condições de continuidade em a com $\lim_{x\to a}$ substituído por $\lim_{x\to a^-}$. Note que f é contínua em a se, e somente se, é contínua tanto pela direita quanto pela esquerda de a, uma vez que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existem e $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Exemplos

(*a*) A função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ x & \text{se } x < 1 \end{cases}$ é contínua pela direita de 1 (ver Fig. 10-3). Observe que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2 = f(1)$. Por outro lado, f não é contínua pela esquerda de 1, uma vez que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1 \neq f(1)$. Conseqüentemente, f não é contínua em 1, como é evidenciado pelo salto em seu gráfico em $x = 1$.

(*b*) A função do exemplo (*c*) da Seção 8.3 [ver Fig. 8-1(*c*)] é contínua pela esquerda, mas não pela direita de 1.

(*c*) A função do exemplo (*b*) da Seção 9-1 [ver Fig. 9-1(*b*)] é contínua pela direita, mas não pela esquerda de 1.

(*d*) A função do exemplo (*b*) da Seção 9.2 (ver Fig. 9-3) é contínua pela esquerda, mas não pela direita de 0.

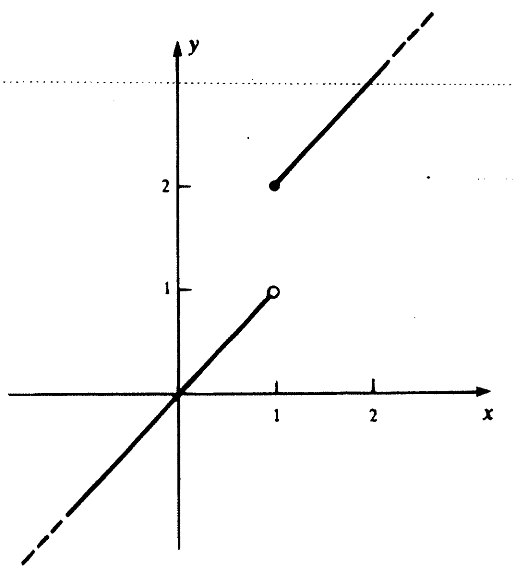


Fig. 10-3

10.3 CONTINUIDADE EM UM INTERVALO FECHADO

Freqüentemente queremos restringir nossa atenção a um intervalo fechado $[a,b]$ do domínio de uma função, ignorando o comportamento da função em quaisquer outros pontos nos quais a mesma possa estar definida.

Definição: Uma função f é *contínua em* $[a, b]$ se:

(i) f é contínua em cada ponto do intervalo aberto (a, b).

(ii) f é contínua pela direita de a.

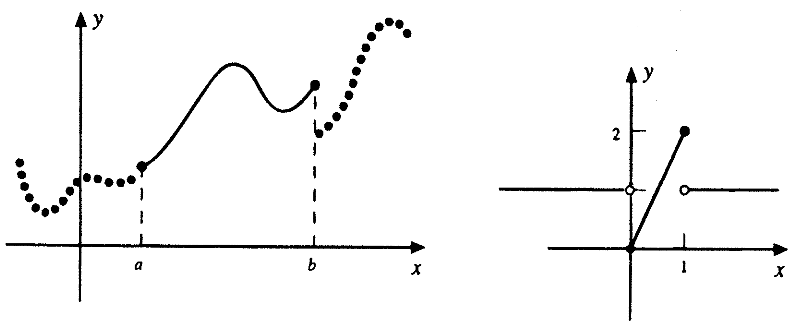
(iii) f é contínua pela esquerda de b.

Exemplos

(*a*) A Fig. 10-4(*a*) mostra o gráfico de uma função que é contínua em $[a,b]$.

(*b*) A função $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$ é contínua em $[0, 1]$ [veja Fig. 10-4(*b*)].

Note que f não é contínua nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Observe também que se redefinimos f de modo que $f(1) = 1$, então a nova função não seria contínua em $[0, 1]$, uma vez que não seria contínua pela esquerda de $x = 1$.



(a) (b)

Fig. 10-4

Problemas Resolvidos

10.1 Determine os pontos em que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{se } x \neq -1 \\ -2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua.

Para $x \neq -1$, f é contínua, pois f é o quociente entre duas funções contínuas com denominador não nulo. Além disso, para $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$$

donde $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x-1) = -2 = f(-1)$. Portanto, f também é contínua em $x = -1$.

10.2 Considere a função f tal que $f(x) = x - [x]$ para todo x (ver o gráfico de f na Fig. 9-6). Encontre os pontos em que f é descontínua. Nesses pontos determine se f é contínua pela direita ou pela esquerda (ou nenhum dos casos).

Para cada inteiro n, $f(n) = n - [n] = n - n = 0$. Para $n < x < n + 1$, $f(x) = x - [x] = x - n$. Logo,

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} (x - n) = 0 = f(n)$$

Portanto, f é contínua pela direita de n. Por outro lado,

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [x - (n-1)] = n - (n-1) = 1 \neq 0 = f(n)$$

de forma que f não é contínua pela esquerda de n. Segue que f é descontínua em cada inteiro. Em cada intervalo aberto $(n, n+1)$, f coincide com a função contínua $x - n$. Por essa razão, não existem outros pontos de descontinuidade além dos inteiros.

10.3 Para cada função representada na Fig. 10-5, obtenha os pontos de descontinuidade (se houver). Em cada ponto de descontinuidade, determine se a função é contínua pela direita ou pela esquerda (ou nenhum dos casos).

(a) Não existem pontos de descontinuidade (não há quebras no gráfico).

(b) 0 é o único ponto de descontinuidade. Continuidade pela esquerda vale em 0, uma vez que o valor em 0 é o número aproximado pelos valores tomados à esquerda de 0.

(c) 1 é o único ponto de descontinuidade. Em 1 a função não é contínua nem pela esquerda e nem pela direita, uma vez que nem o limite à esquerda ou o limite à direita são iguais a $f(1)$. (De fato, o limite sequer existe.)

(d) Sem pontos de descontinuidade.

(e) 0 e 1 são pontos de descontinuidade. Continuidade pela esquerda vale em 0, mas nem continuidade pela esquerda ou pela direita de 1 valem.

10.4 Defina f tal que $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$. (Ver Fig. 10-6.) f é contínua em:

(a) $[0,1]$; (b) $[1,2]$; (c) $[0,2]$?

(*a*) Sim, pois f é contínua pela direita de 0 e pela esquerda de 1.

(*b*) Não, pois f não é contínua pela direita de 1. De fato,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x - 2) = 0 \neq 1 = f(1)$$

(*c*) Não, pois f não é contínua em $x = 1$, que pertence a (0,2).

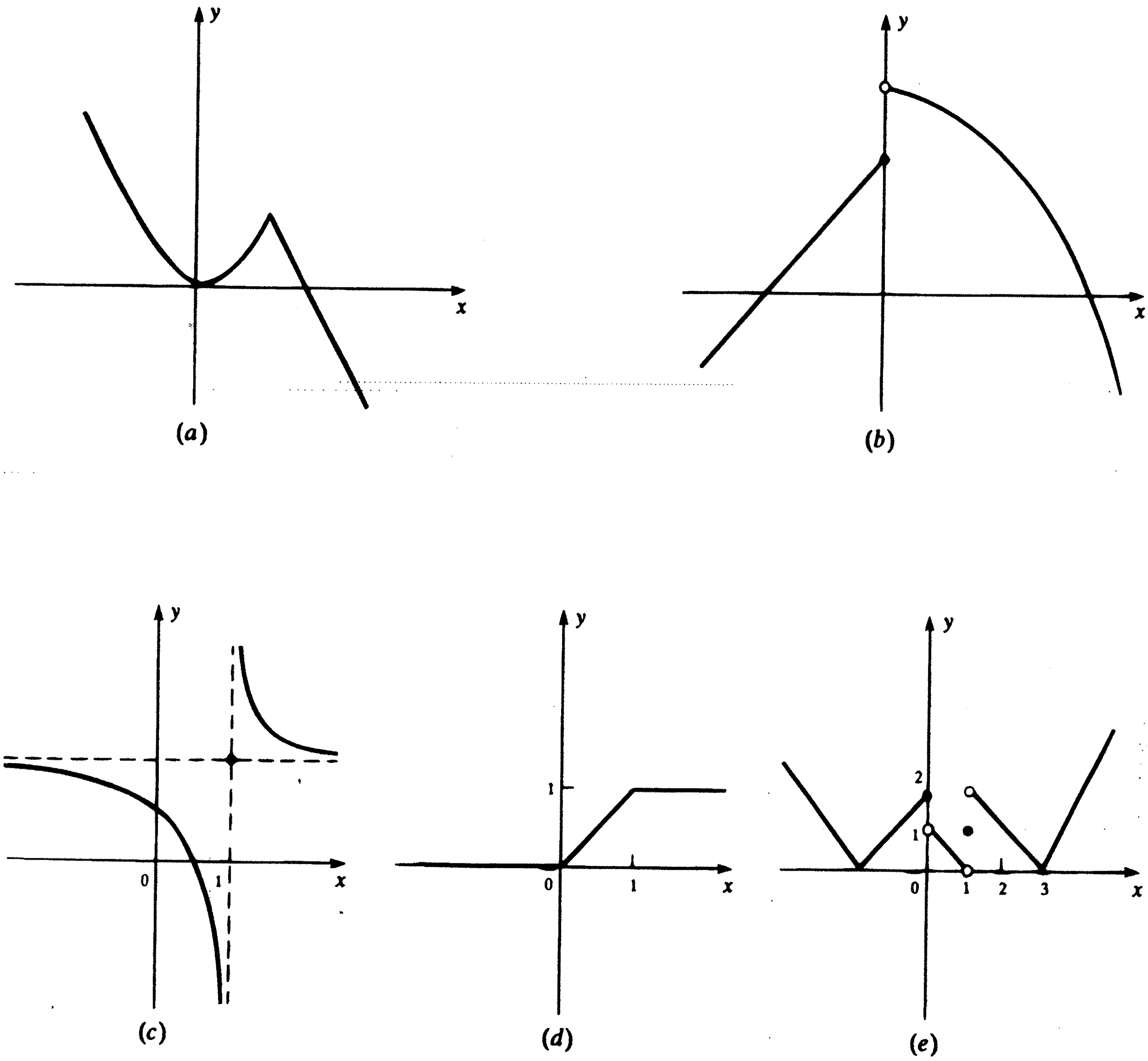


Fig. 10-5

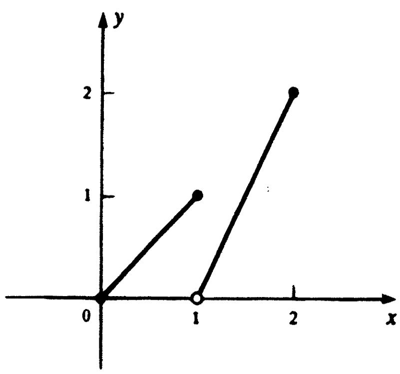


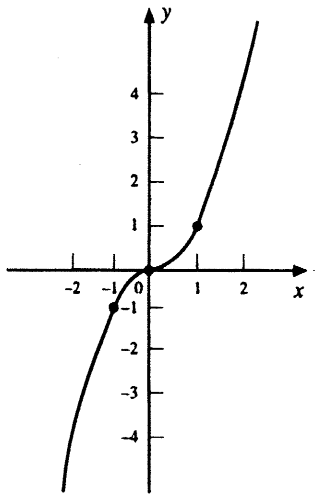
Fig. 10-6

10.5 Para cada uma das seguintes funções, determine os pontos de descontinuidade (se existirem). Para cada ponto de descontinuidade, determine se é removível.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (*b*) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ para $x \neq 1$

(*a*) Não existem pontos de descontinuidade [ver Fig. 10-7(*a*)]. Em $x = 0, f(0) = 0$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(*b*) A única descontinuidade ocorre em $x = 1$, uma vez que $g(1)$ não é definida [ver Fig. 10-7(*b*)]. Essa descontinuidade é removível. Como $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$, $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$.. Assim, se definimos o valor da função em $x = 1$ como sendo 2, a função estendida é contínua em $x = 1$.



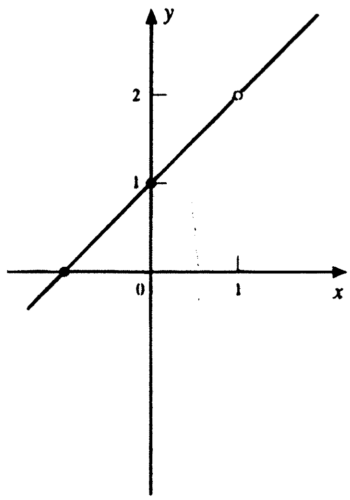


Fig. 10-7

Problemas Complementares

10.6 Determine os pontos nos quais cada uma das seguintes funções é contínua. (Desenhe os gráficos das funções.) Determine se as descontinuidades são removíveis.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ (*b*) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (*c*) $f(x) = |x|$

(*d*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ (*e*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ -4 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ (*f*) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 2 \\ x & \text{se } 1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

10.7 Determine os pontos de descontinuidade (se existirem) das funções cujos gráficos são mostrados na Fig. 10-8.

10.8 Dê exemplos simples de funções tais que:

(*a*) f é definida em $[-2, 2]$, contínua em $[-1, 1]$, mas não contínua em $[-2, 2]$.

(*b*) g é definida em $[0, 1]$, contínua no intervalo aberto $(0, 1)$, mas não contínua em $[0, 1]$.

(*c*) h é contínua em todos os pontos exceto $x = 0$, onde é contínua pela direita mas não pela esquerda.

10.9 Para cada descontinuidade das seguintes funções, determine se é uma descontinuidade removível:

(*a*) A função f do Problema 7.4 (ver Fig. 7-13).

(*b*) A função f do exemplo (*c*) na Seção 8.3 {ver Fig. 8-1(*c*)].

(*c*) A função f do exemplo (*a*) na Seção 9.1 [ver Fig. 9-1(*a*)].

(*d*) A função f no exemplo (*a*) na Seção 9.2 (ver Fig. 9-3).

(*e*) Os exemplos nos Problemas 10.3 e 10.4.

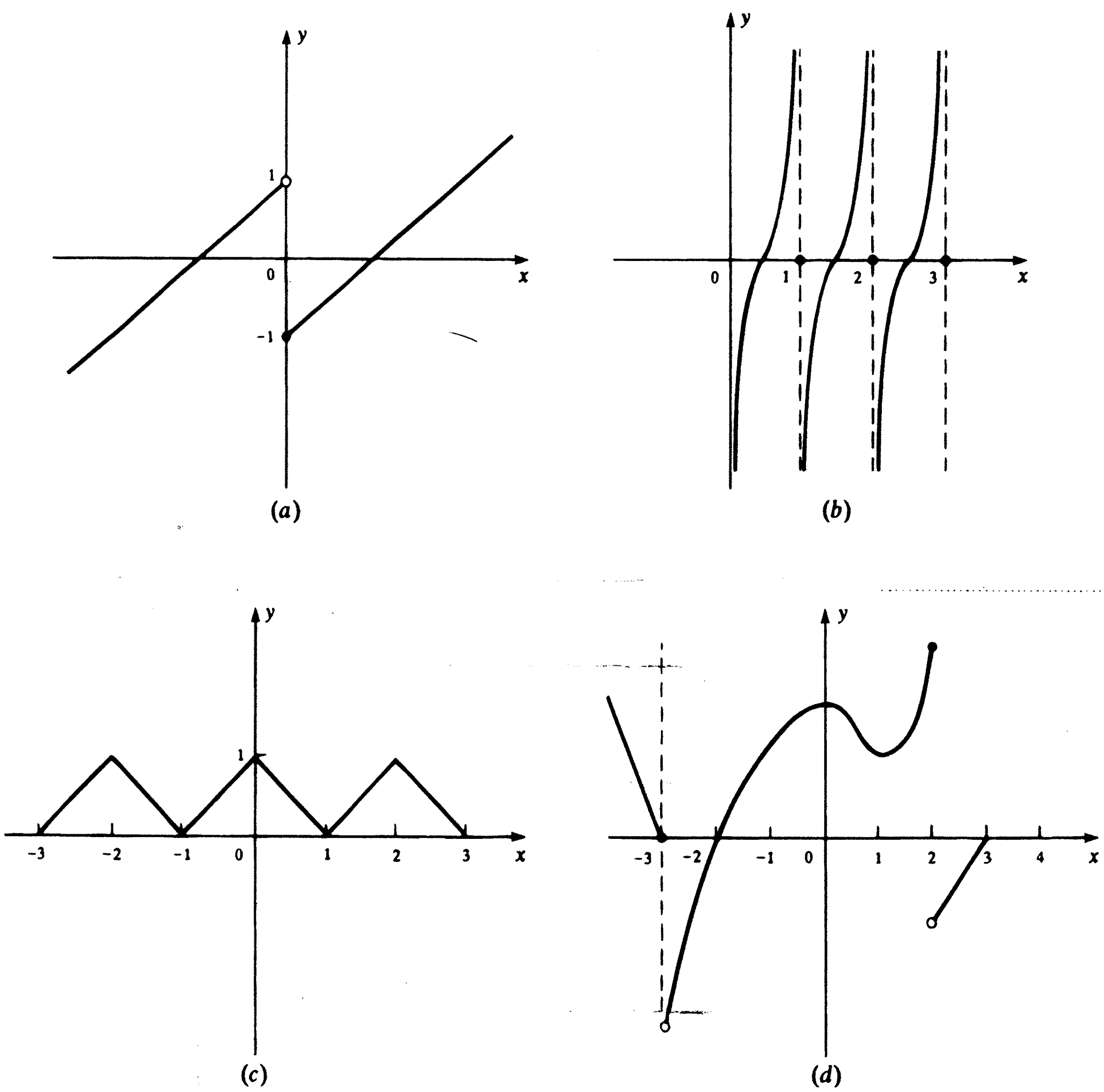


Fig. 10-8

10.10 Seja f definida pela fórmula $\dfrac{3x+3}{x^2-3x-4}$.

(*a*) Obtenha os argumentos x em que f é descontínua.

(*b*) Para cada número a no qual f é descontínua, determine se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Se existe, encontre seu valor.

(*c*) Escreva uma equação para cada assíntota vertical e horizontal do gráfico de f.

10.11 Seja $f(x) = x + (1/x)$ para $x \neq 0$.

(*a*) Obtenha os pontos de descontinuidade de f.

(*b*) Determine todas as assíntotas verticais e horizontais do gráfico de f.

10.12 Para cada uma das seguintes funções determine se é contínua no intervalo dado:

(*a*) $f(x) = [x]$ em $[1, 2]$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $[0, 1]$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $[0, 1]$

(*d*) f como no item (*c*) em $[1, 2]$

10.13 Se a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ c & \text{se } x = 4 \end{cases}$ é contínua, qual é o valor de c?

10.14 Seja $b \neq 0$ e seja g a função tal que $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - b^2}{x - b} & \text{se } x \neq b \\ 0 & \text{se } x = b \end{cases}$

(*a*) $g(b)$ existe? (*b*) $\lim_{x \to b} g(x)$ existe? (*c*) g é contínua em b?

10.15 (*a*) Mostre que f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x+7}}{x - 6} & \text{se } x \geq -\frac{1}{4} \text{ e } x \neq 6 \\ \frac{1}{10} & \text{se } x = 6 \end{cases}$$

ÁLGEBRA $\quad \sqrt{u} - \sqrt{v} = \dfrac{(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v})}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \dfrac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$

(*b*) Para quais valores de k que a seguinte função é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x - 2} & \text{se } x \geq -\frac{2}{7} \text{ e } x \neq 2 \\ k & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

10.16 Determine os pontos de descontinuidade da seguinte função f:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

[*Sugestão:* Um número racional é uma fração ordinária p/q, onde p e q são inteiros. Lembre da demonstração de Euclides de que $\sqrt{2}$ não pode ser expressa nessa forma; é um número irracional, assim como $\sqrt{2}/n$, para qualquer inteiro n. Segue que qualquer número racional fixo r pode ser aproximado tanto quanto se queira por meio de números *irracionais* da forma $r + \sqrt{2}/n$. Reciprocamente, qualquer número irracional fixo pode ser aproximado tanto quanto se queira por meio de números *racionais*.]

10.17 CG Use uma calculadora gráfica para encontrar as descontinuidades (se existirem) das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x + 4}{|x + 4|}$ (*b*) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ (*c*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ (*d*) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Capítulo 11

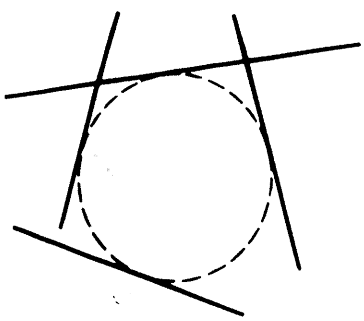
O Coeficiente Angular de uma Reta Tangente

O coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva é familiar no caso de círculos* [ver Fig. 11-1(a)]. Em cada ponto P de um círculo existe uma reta $\mathscr{L}$ tal que o círculo toca a reta em P e se localiza em um lado da reta (*inteiramente* em um lado, no caso de um círculo). Para a curva da Fig. 11-1(b), mostrada tracejada, $\mathscr{L}_1$ é a reta tangente em P_1, $\mathscr{L}_2$ a reta tangente em P_2 e $\mathscr{L}_3$ a reta tangente em P_3. Vamos desenvolver uma definição que corresponde a essas idéias intuitivas sobre retas tangentes.

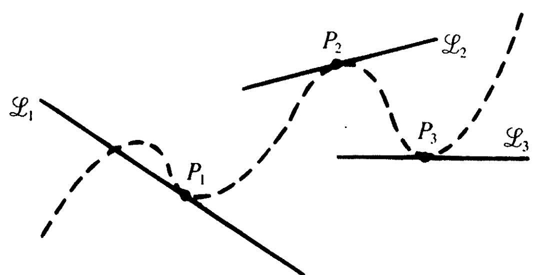
A Fig. 11-2(a) mostra o gráfico (em curva tracejada) de uma função contínua f. Lembre que o gráfico consiste de todos os pontos (x, y) tais que $y = f(x)$. Seja P um ponto do gráfico que tem abscissa x. Então, as coordenadas de P são $(x, f(x))$. Considere um ponto Q do gráfico que tem abscissa $x + h$. Q estará próximo de P se, e somente se, h estiver próximo de 0 (pois f é uma função contínua). Como a coordenada x de Q é $x + h$, a coordenada y de Q deve ser $f(x + h)$. Por definição de coeficiente angular, a reta PQ terá uma inclinação

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Observe na Fig. 11-2(b) o que ocorre à reta PQ quando Q se move ao longo do gráfico na direção de P. Algumas das posições de Q foram designadas por $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, e as retas correspondentes por $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3, \ldots$.



(a)



(b)

Fig. 11-1

* N. de T.: Neste livro usamos o termo círculo como sinônimo de circunferência.

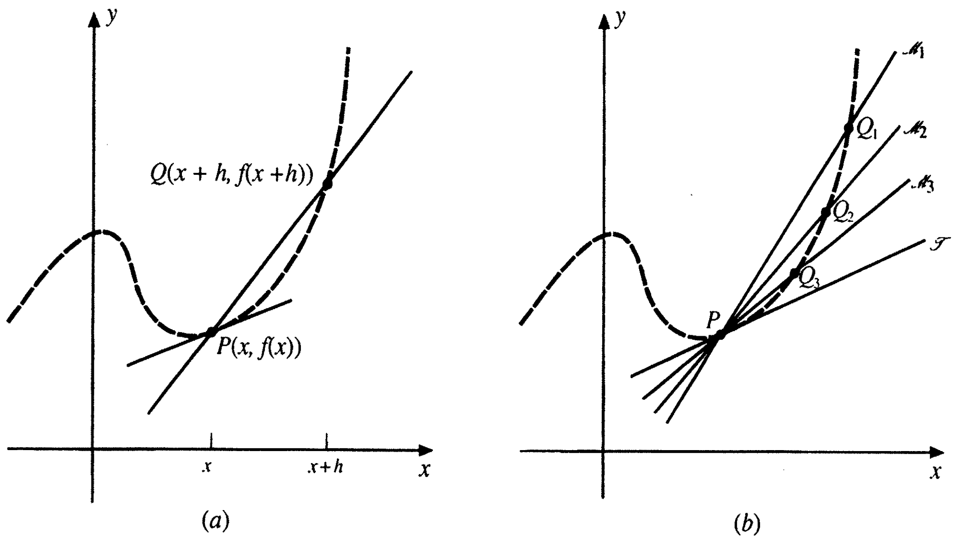


Fig. 11-2

Essas retas estão cada vez mais próximas daquilo que imaginamos como a reta $\mathcal{T}$ tangente ao gráfico em P. Logo, o coeficiente angular da reta PQ se aproximará do coeficiente angular da reta tangente em P; isto é, o coeficiente angular da reta tangente em P será dado por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O que afirmamos sobre retas tangentes nos leva à seguinte definição precisa.

Definição: Considere uma função f contínua em x. Por *reta tangente* ao gráfico de f em $P(x, f(x))$ queremos dizer a reta que passa por P e tem coeficiente angular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Problemas Resolvidos

11.1 Considere o gráfico da função f tal que $f(x) = x^2$ (a parábola na Fig. 11-3). Por um ponto P, sobre a parábola, que tem abscissa x, faça os cálculos necessários para encontrar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Temos:

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$
$$f(x) = x^2$$
$$f(x+h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2) - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = \lim_{h \to 0} 2x + \lim_{h \to 0} h = 2x + 0 = 2x$$

e o coeficiente angular da reta tangente em P é $2x$. Por exemplo, no ponto $(2, 4)$, $x = 2$, e o coeficiente angular da reta tangente é $2x = 2(2) = 4$.

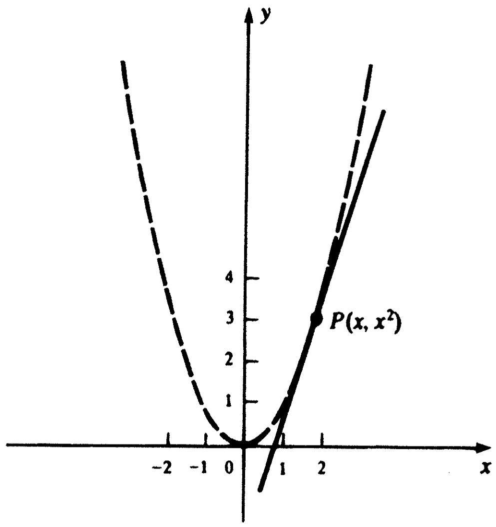


Fig. 11-3

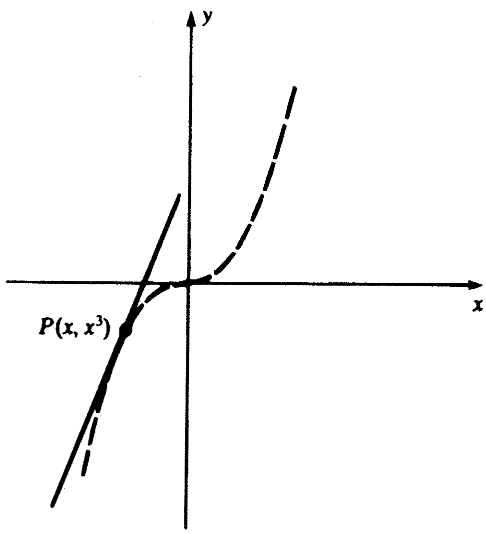


Fig. 11-4

11.2 Considere o gráfico da função f tal que $f(x) = x^3$ (ver Fig. 11-4). Para um ponto P, sobre o gráfico, que tem coordenadas (x, x^3), calcule o valor de

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Temos $f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$ e $f(x) = x^3$.

ÁLGEBRA Para quaisquer x e y

$$\begin{aligned}(x+h)^3 &= [(x+h)(x+h)](x+h) = (x^2+2xh+h^2)(x+h)\\ &= (x^3+2x^2h+h^2x)+(x^2h+2xh^2+h^3)\\ &= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x) &= (x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3\\ &= 3x^2h+3xh^2+h^3 = h(3x^2+3xh+h^2)\end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\ &= 3x^2+3x(0)+0^2 = 3x^2\end{aligned}$$

Isso mostra que o coeficiente angular da reta tangente em P é $3x^2$. Por exemplo, o coeficiente angular da reta tangente em $(2, 8)$ é $3x^2 = 3(2)^2 = 3(4) = 12$.

11.3 (*a*) Deduza uma fórmula para o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto do gráfico da função f tal que $f(x) = 1/x$ (a hipérbole na Fig. 11-5).

(*b*) Encontre a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, \frac{1}{2})$.

(*a*)
$$f(x+h) = \frac{1}{x+h} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{x+h}-\frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \frac{x-x-h}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x}$$

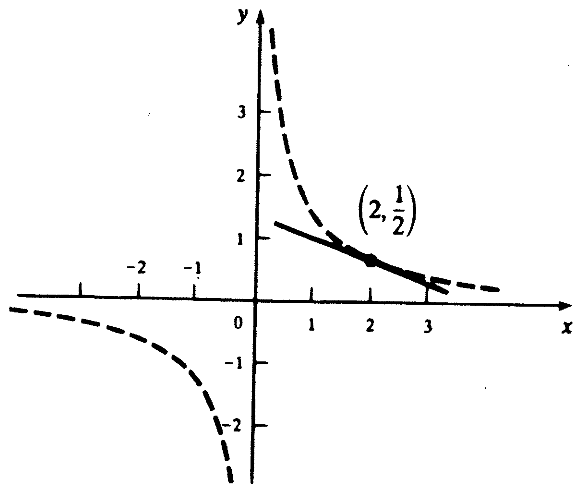


Fig. 11-5

ÁLGEBRA	$\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} - \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad - bc}{bd}$

Logo,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{h}{(x+h)x} \div h = -\frac{h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{(x+h)x}$$

e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{\lim_{h \to 0} 1}{\lim_{h \to 0} (x+h)x}$$

$$= -\frac{1}{\lim_{h \to 0} (x+h) \cdot \lim_{h \to 0} x} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente em $(x, 1/x)$ é $-1/x^2$.

(*b*) Do item (*a*), o coeficiente angular da reta em $(2, \frac{1}{2})$ é

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente $\mathscr{L}$ tem a forma

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

Como $\mathscr{L}$ passa por $(2, \frac{1}{2})$, a substituição de x por 2 e y por $\frac{1}{2}$ resulta

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(2) + b \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + b \qquad \text{ou} \qquad b = 1$$

Logo, a equação de $\mathscr{L}$ é

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

11.4 (*a*) Encontre uma fórmula para o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto do gráfico da função f tal que $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

(*b*) Encontre a equação reduzida da reta tangente no ponto (0, 4) do gráfico.

(*c*) Desenhe o gráfico de f e mostre a reta tangente em (0, 4).

(*a*) Calcule $f(x+h)$ substituindo todas as ocorrências de x na fórmula de $f(x)$ por $x+h$:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= 3(x+h)^2 - 6(x+h) + 4 \\
&= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 6x - 6h + 4 \\
&= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 6x - 6h + 4 \\
f(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\
f(x+h) - f(x) &= (3x^2 + 6xh + 3h^2 - 6x - 6h + 4) - (3x^2 - 6x + 4) \\
&= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 6x - 6h + 4 - 3x^2 + 6x - 4 \\
&= 6xh + 3h^2 - 6h = h(6x + 3h - 6) \\
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{h(6x+3h-6)}{h} = 6x + 3h - 6 \\
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} (6x + 3h - 6) \\
&= 6x + 0 - 6 = 6x - 6
\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente em $(x, f(x))$ é $6x - 6$.

(*b*) Do item (*a*), o coeficiente angular da reta tangente em $(0, 4)$ é $6x - 6 = 6(0) - 6 = 0 - 6 = -6$. Logo, a equação reduzida tem a forma $y = -6x + b$. Uma vez que a reta passa por $(0, 4)$, o intercepto y b é 4. Portanto, a equação é $y = -6x + 4$.

(*c*) Queremos o gráfico de $y = 3x^2 - 6x + 4$. Complete o quadrado:

$$y = 3\left(x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right) = 3\left((x-1)^2 + \frac{1}{3}\right) = 3(x-1)^2 + 1$$

O gráfico (ver Fig. 11-6) é obtido movendo o gráfico de $y = 3x^2$ uma unidade para a direita [obtendo o gráfico de $y = 3(x-1)^2$] e então levantando esse gráfico uma unidade para cima.

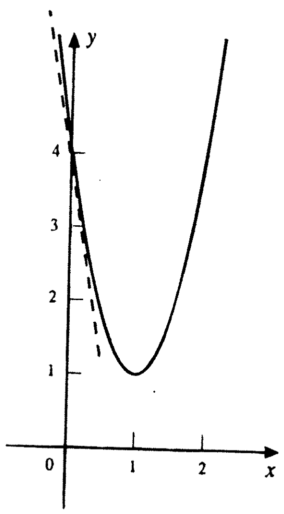


Fig. 11-6

11.5 A *reta normal* a uma curva em um ponto P é definida como a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente em P. Obtenha a equação reduzida da reta normal à parábola $y = x^2$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Pelo Problema 11.1, a reta tangente tem coeficiente angular $2(\frac{1}{2}) = 1$. Portanto, pelo Teorema 4.2, o coeficiente angular da reta normal é -1, e a equação reduzida da reta normal terá a forma $y = -x + b$. Quando $x = \frac{1}{2}$, $y = x^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, donde

$$\frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{2}\right) + b \quad \text{ou} \quad b = \frac{3}{4}$$

Portanto, a equação é

$$y = -x + \frac{3}{4}$$

Problemas Complementares

11.6 Para cada função f e argumento $x = a$ abaixo, (i) obtenha uma fórmula para o coeficiente angular da reta tangente em um ponto arbitrário $P(x, f(x))$ do gráfico de f; (ii) encontre a equação reduzida da reta tangente correspondente ao argumento dado a; (iii) desenhe o gráfico de f e mostre a reta tangente obtida em (ii).

(*a*) $f(x) = 2x^2 + x;\ a = \frac{1}{4}$ (*b*) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1;\ a = 2$

(*c*) $f(x) = x^2 - 2x;\ a = 1$ (*d*) $f(x) = 4x^2 + 3;\ a = \frac{1}{2}$

11.7 Encontre o(s) ponto(s) do gráfico de $y = x^2$ no qual a reta tangente é paralela à reta $y = 6x - 1$. [*Sugestão:* Use o Teorema 4.1.]

11.8 Determine o(s) ponto(s) sobre o gráfico de $y = x^3$ no(s) qual(is) a reta tangente é perpendicular à reta $3x + 9y = 4$. [*Sugestão:* Use o Teorema 4.2.]

11.9 Encontre a equação reduzida da reta normal ao gráfico de $y = x^3$ no ponto em que $x = \frac{1}{3}$.

11.10 Em que ponto(s) que a reta normal à curva $y = x^2 - 3x + 5$ no ponto (3,5) intersecta a curva?

11.11 Em qualquer ponto (x, y) da reta que tem a equação reduzida $y = mx + b$, mostre que a reta tangente à mesma é ela própria.

11.12 Encontre o(s) ponto(s) do gráfico de $y = x^2$ no(s) qual(is) a reta tangente é uma reta que passa pelo ponto $(2, -12)$. [*Sugestão:* Obtenha uma equação da reta tangente em qualquer ponto (x_0, x_0^2) e determine o(s) valor(es) de x_0 para o(s) qual(is) a reta contém o ponto $(2, -12)$.]

11.13 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ no ponto (4, 2). [*Sugestão:* Ver a ÁLGEBRA no Problema 10.15.]

Capítulo 12

A Derivada

A expressão para o coeficiente angular da reta tangente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

determina um número que depende de x. Portanto, a expressão define uma função, chamada de *derivada* de f.

Definição: A derivada f' de f é a função definida pela fórmula

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

NOTAÇÃO Existem outras notações tradicionalmente usadas para a derivada:

$$D_x f(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx}$$

Quando uma variável y representa $f(x)$, a derivada é denotada por y', $D_x y$ ou $\frac{dy}{dx}$. Usaremos a notação que for mais conveniente ou habitual em um cada caso.

A derivada é tão importante em todas as áreas da matemática pura e aplicada que devemos dedicar um grande esforço para encontrar fórmulas para as derivadas de vários tipos de funções. Se o limite na definição acima existe, a função f é dita *diferenciável* em x, e o processo do cálculo de f' é chamado de *derivação* de f.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = 3x + 5$ para todo x. Então,

$$f(x+h) = 3(x+h) + 5 = 3x + 3h + 5$$

$$f(x+h) - f(x) = (3x + 3h + 5) - (3x + 5) = 3x + 3h + 5 - 3x - 5 = 3h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

ou, em outra notação $D_x(3x + 5) = 3$. Nesse caso, a derivada é independente de x.

(*b*) Vamos generalizar para o caso da função $f(x) = Ax + B$, onde A e B são constantes. Então,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[A(x+h)+B]-(Ax+B)}{h} = \frac{Ax+Ah+B-Ax-B}{h} = \frac{Ah}{h} = A$$

Assim,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} A = A$$

Portanto, provamos o:

Teorema 12.1: $D_x(Ax+B) = A$

Fazendo $A = 0$ no Teorema 12.1, obtemos:

Corolário 12.2: $D_x(B) = 1$; isto é, *a derivada de uma função constante é* 0.

Fazendo $A = 1$ e $B = 0$ no Teorema 12.1, obtemos:

Corolário 12.3: $D_x(x) = 1$

Pelos cálculos nos Problemas 11.1, 11.2 e 11.3(*a*), temos:

Teorema 12.4:
(i) $D_x(x^2) = 2x$
(ii) $D_x(x^3) = 3x^2$
(iii) $D_x\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

Precisaremos saber como derivar funções que são definidas a partir de operações aritméticas sobre funções mais simples. Para esse propósito, várias regras de derivação serão provadas.

REGRA 1. (i) $D_x(f(x) + g(x)) = D_x f(x) + D_x g(x)$
A derivada de uma soma é a soma das derivadas.

(ii) $D_x(f(x) - g(x)) = D_x f(x) - D_x g(x)$
A derivada de uma diferença é a diferença das derivadas.

Para as provas de (i) e (ii), ver Problema 12.1(*a*).

Exemplos

(*a*) $D_x(x^3 + x^2) = D_x(x^3) + D_x(x^2) = 3x^2 + 2x$

(*b*) $D_x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = D_x(x^2) - D_x\left(\frac{1}{x}\right) = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$

REGRA 2. (i) $D_x(c \cdot f(x)) = c \cdot D_x f(x)$
onde c é uma constante.

Para uma demonstração, ver Problema 12.1(*b*).

Exemplos

(*a*) $D_x(7x^2) = 7 \cdot D_x(x^2) = 7 \cdot 2x = 14x$

(*b*) $D_x(12x^3) = 12 \cdot D_x(x^3) = 12(3x^2) = 36x^2$

(*c*) $D_x\left(-\frac{4}{x}\right) = D_x\left((-4)\frac{1}{x}\right) = -4 \cdot D_x\left(\frac{1}{x}\right) = -4\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$

(*d*) $$\begin{aligned} D_x(3x^3 + 5x^2 + 2x + 4) &= D_x(3x^3) + D_x(5x^2) + D_x(2x) + D_x(4) \\ &= 3 \cdot D_x(x^3) + 5 \cdot D_x(x^2) + 2 \cdot D_x(x) + 0 \\ &= 3(3x^2) + 5(2x) + 2(1) = 9x^2 + 10x + 2 \end{aligned}$$

REGRA 3. (Derivada do produto) $D_x(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$

Para uma prova, ver Problema 13.1.

Exemplos

(*a*) $D_x(x^4) = D_x(x^3 \cdot x)$

ÁLGEBRA	$u^a \cdot u^b = u^{a+b}$ e	$\dfrac{u^a}{u^b} = u^{a-b}$

$= x^3 \cdot D_x(x) + x \cdot D_x(x^3)$ [pela regra do produto]

$= x^3(1) + x(3x^2) = x^3 + 3x^3 = 4x^3$

(*b*) $D_x(x^5) = D_x(x^4 \cdot x)$

$= x^4 \cdot D_x(x) + x \cdot D_x(x^4)$ [pela regra do produto]

$= x^4(1) + x(4x^3)$ [pelo exemplo (a)]

$= x^4 + 4x^4 = 5x^4$

(*c*) $D_x((x^3 + x)(x^2 - x + 2)) = (x^3 + x) \cdot D_x(x^2 - x + 2) + (x^2 - x + 2) \cdot D_x(x^3 + x)$

$= (x^3 + x)(2x - 1) + (x^2 - x + 2)(3x^2 + 1)$

O leitor pode ter observado um padrão nas derivadas das potências de x:

$D_x(x) = 1 = 1 \cdot x^0$ $\quad D_x(x^2) = 2x$ $\quad D_x(x^3) = 3x^2$ $\quad D_x(x^4) = 4x^3$ $\quad D_x(x^5) = 5x^4$

Esse padrão de fato vale para todas as potências de x.

REGRA 4. $D_x(x^n) = nx^{n-1}$
onde n é qualquer inteiro positivo.

Para uma demonstração, ver Problema 12.2.

Exemplos

(*a*) $D_x(x^9) = 9x^8$

(*b*) $D_x(5x^{11}) = 5 \cdot D_x(x^{11}) = 5(11x^{10}) = 55x^{10}$

Usando as regras 1, 2 e 4, temos um método fácil para derivar qualquer função polinomial.

Exemplo

$$D_x\left(\frac{3}{5}x^3 - 4x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) = D_x\left(\frac{3}{5}x^3\right) - D_x(4x^2) + D_x(2x) - D_x\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{[pela Regra 1]}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot D_x(x^3) - 4 \cdot D_x(x^2) + 2 \cdot D_x(x) - 0 \quad \text{[pela Regra 2 e Corolário 2.2]}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot (3x^2) - 4 \cdot (2x) + 2 \cdot (1) \quad \text{[pela Regra 4]}$$

$$= \frac{9}{5}x^2 - 8x + 2$$

Mais concisamente, temos:

REGRA 5. Para derivar um polinômio, troque cada termo não constante $a_k x^k$ por $k a_k x^{k-1}$ e elimine o termo constante (se existir).

Exemplos

(*a*) $D_x(8x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 5x + 7) = 40x^4 - 8x^3 + 6x + 5$

(*b*) $D_x\left(3x^7 + \sqrt{2}x^5 - \frac{4}{3}x^2 + 9x - \pi\right) = 21x^6 + 5\sqrt{2}x^4 - \frac{8}{3}x + 9$

Problemas Resolvidos

12.1 Prove: (*a*) Regra 1 (i, ii); (*b*) Regra 2. Assuma que $D_x f(x)$ e $D_x g(x)$ são definidas.

(*a*)
$$D_x(f(x) \pm g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \pm [g(x+h) - g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{[pela Seção 8.2, Propriedade V]}$$
$$= D_x f(x) \pm D_x g(x)$$

(*b*)
$$D_x(c \cdot f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h}$$
$$= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{[pela Seção 8.2, Propriedade III]}$$
$$= c \cdot D_x f(x)$$

12.2 Prove a Regra 4, $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, para qualquer inteiro positivo n.

Já sabemos que a Regra 4 vale quando $n = 1$,

$$D_x(x^1) = D_x(x) = 1 = 1 \cdot x^0$$

(Lembre que $x^0 = 1$.) Podemos provar a regra por indução matemática. Isso significa mostrar que *se a regra vale para qualquer inteiro positivo particular k, então a regra também deve valer para o próximo inteiro k* + 1. Como sabemos que a regra vale para $n = 1$, então deve valer para todos os inteiros positivos.

Assuma, então, que $D_x(x^k) = kx^{k-1}$. Temos

$$\begin{aligned}
D_x(x^{k+1}) &= D_x(x^k \cdot x) && [\text{uma vez que } x^{k+1} = x^k \cdot x^1 = x^k \cdot x]\\
&= x^k \cdot D_x(x) + x \cdot D_x(x^k) && [\text{pela regra do produto}]\\
&= x^k \cdot 1 + x(kx^{k-1}) && [\text{pela hipótese de que } D_x(x^k) = kx^{k-1}]\\
&= x^k + kx^k && [\text{já que } x \cdot x^{k-1} = x^1 \cdot x^{k-1} = x^k]\\
&= (1+k)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

e a demonstração por indução está completa.

12.3 Calcule a derivada do polinômio $5x^9 - 12x^6 + 4x^5 - 3x^2 + x - 2$.

Pela Regra 5,

$$D_x(5x^9 - 12x^6 + 4x^5 - 3x^2 + x - 2) = 45x^8 - 72x^5 + 20x^4 - 6x + 1$$

12.4 Encontre as equações reduzidas das retas tangentes aos gráficos das seguintes funções nos pontos dados:

(*a*) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, em $x = 2$ (*b*) $f(x) = x^7 - 12x^4 + 2x$, em $x = 1$

(*a*) Para $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, Regra 5 nos dá $f'(x) = 6x - 5$. Então,

$$f'(2) = 6(2) - 5 = 12 - 5 = 7$$
e
$$f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 3(4) - 10 + 1 = 12 - 9 = 3$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em $(2, f(2)) = (2, 3)$ é $f'(2) = 7$, e temos como equação ponto-angular da reta tangente $y - 3 = 7(x - 2)$, da qual

$$y - 3 = 7x - 14$$
$$y = 7x - 11$$

(*b*) Para $f(x) = x^7 - 12x^4 + 2x$, Regra 5 resulta em $f'(x) = 7x^6 - 48x^3 + 2$. Mas

$$f(1) = (1)^7 - 12(1^4) + 2(1) = 1 - 12 + 2 = -9$$
e
$$f'(1) = 7(1)^6 - 48(1)^3 + 2 = 7 - 48 + 2 = -39$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente em $x = 1$ é -39, e uma equação ponto-angular da reta tangente é $y - (-9) = -39(x - 1)$, donde

$$\begin{aligned} +9 &= -39x + 39 \\ y &= -39x + 30 \end{aligned}$$

12.5 Em qual(is) ponto(s) do gráfico de $y = x^5 + 4x - 3$ que a reta tangente ao gráfico também passa pelo ponto $(0, 1)$?

O coeficiente angular da reta tangente em um ponto $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^5 + 4x_0 - 3)$ do gráfico é o valor da derivada dy/dx em $x = x_0$. Pela Regra 5,

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4 \qquad \text{e assim} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 5x_0^4 + 4$$

NOTAÇÃO O valor de uma função g em um argumento $x = b$ é algumas vezes denotado por $g(x)|_{x=b}$. Por exemplo, $x^2|_{x=3} = (3)^2 = 9$

A reta $\mathscr{T}$ tangente ao gráfico em (x_0, y_0) passa por $(0, 1)$ se, e somente se, $\mathscr{T}$ é a reta $\mathscr{L}$ que conecta (x_0, y_0) e $(0, 1)$. Mas isso é verdade se, e somente se, o coeficiente angular $m_{\mathscr{T}}$ de $\mathscr{T}$ é o mesmo coeficiente angular $m_{\mathscr{L}}$ de $\mathscr{L}$.

Mas $m_{\mathscr{T}} = 5x_0^4 + 4$ e $m_{\mathscr{L}} = \dfrac{(x_0^5 + 4x_0 - 3) - 1}{x_0 - 0} = \dfrac{x_0^5 + 4x_0 - 4}{x_0}$. Portanto, devemos resolver

$$\begin{aligned} 5x_0^4 + 4 &= \frac{x_0^5 + 4x_0 - 4}{x_0} \\ 5x_0^5 + 4x_0 &= x_0^5 + 4x_0 - 4 \\ 4x_0^5 &= -4 \\ x_0^5 &= -1 \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Logo, o ponto pedido do gráfico é

$$(-1, (-1)^5 + 4(-1) - 3) = (-1, -1 - 4 - 3) = (-1, -8).$$

Problemas Complementares

12.6 Use a definição básica de $f'(x)$ como um limite para calcular as derivadas das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = 2x - 5$ (*b*) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 7x + 4$ (*c*) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

(*d*) $f(x) = x^4$ (*e*) $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ (*f*) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ (*g*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

12.7 Use a Regra 5 para calcular as derivadas dos seguintes polinômios:

(*a*) $3x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ (*b*) $-8x^5 + \sqrt{3}x^3 + 2\pi x^2 - 12$

(*c*) $3x^{13} - 5x^{10} + 10x^2$ (*d*) $2x^{51} + 3x^{12} - 14x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt{5}$

12.8 (*a*) Determine $D_x\left(3x^7 - \frac{1}{5}x^5\right)$. (*b*) Encontre $\dfrac{d(3x^2 - 5x + 1)}{dx}$. (*c*) Se $y = \frac{1}{2}x^4 + 5x$, obtenha $\dfrac{dy}{dx}$.

(*d*) Calcule $\dfrac{d(3t^7 - 12t^2)}{dt}$. (*e*) Se $u = \sqrt{2}x^5 - x^3$, obtenha $D_x u$.

12.9 Encontre as equações reduzidas das retas tangentes aos gráficos das seguintes funções f nos pontos especificados:

(*a*) $f(x) = x^2 - 5x + 2$, em $x = -1$ (*b*) $f(x) = 4x^3 - 7x^2$, em $x = 3$

(*c*) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$, em $x = 0$

12.10 Especifique todas as retas que satisfazem as seguintes condições:

(*a*) Passa pelo ponto $(0, 2)$ e é tangente à curva $y = x^4 - 12x + 50$.

(*b*) Passa pelo ponto $(1, 5)$ e é tangente à curva $y = 3x^3 + x + 4$.

12.11 Determine a equação reduzida da reta normal ao gráfico $y = x^3 - x^2$ no ponto onde $x = 1$.

12.12 Obtenha o(s) ponto(s) do gráfico de $y = \frac{1}{2} x^2$ no(s) qual(is) a reta normal passa pelo ponto (4, 1).

12.13 Lembrando a definição de derivada, calcule

(*a*) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^5 - 3^5}{h}$ (*b*) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(\frac{1}{3}+h)^4 - 5(\frac{1}{3})^4}{h}$

12.14 Uma função f, definida para todos os números reais, é tal que: (i) $f(1) = 2$; (ii) $f(2) = 8$, (iii) $f(u + v) - f(u) = kuv - 2v^2$ para todo u e v, onde k é alguma constante. Determine $f'(x)$ para x arbitrário.

12.15 Seja $f(x) = 2x^2 + \sqrt{3}\,x$ para todo x.

(*a*) Calcule os valores não negativos de x para os quais a reta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico em $(-x, f(-x))$.

(*b*) Determine o ponto de interseção de cada par de retas perpendiculares encontradas no item (*a*).

12.16 Se a reta $4x - 9y = 0$ é tangente no primeiro quadrante ao gráfico de $y = \frac{1}{3} x^3 + c$, qual é o valor de c?

12.17 Para qual valor não negativo de b que a reta $y = -\frac{1}{12} x + b$ é normal ao gráfico de $y = x^3 + \frac{1}{3}$?

12.18 Seja f diferenciável (isto é, f' existe). Defina uma função $f^{\#}$ pela equação

$$f^{\#}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

(*a*) Calcule $f^{\#}(x)$ se $f(x) = x^2 - x$. (*b*) Encontre a relação entre $f^{\#}$ e a derivada f'.

$$\left[\textit{Sugestão: } \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+k) - f(x)}{k} \text{ onde } k = -h.\right]$$

12.19 Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$.

(*a*) Determine os zeros de f.

ÁLGEBRA Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, onde os a_is são inteiros, então qualquer raiz inteira k de $f(x)$ deve ser um divisor do termo constante a_0.[1]

(*b*) Encontre a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde $x = 1$.

(*c*) Determine um ponto (x_0, y_0) do gráfico de f tal que a reta tangente ao gráfico em (x_0, y_0) passa pelo ponto (4, –1).

12.20 Seja $f(x) = 3x^3 - 11x^2 - 15x + 63$.

(*a*) Determine os zeros de f.

(*b*) Escreva uma equação da reta normal ao gráfico de f em $x = 0$.

(*c*) Obtenha todos os pontos do gráfico de f onde a reta tangente ao gráfico é horizontal.

12.21 Defina $f'_+(x)$, a *derivada pela direita* de f em x, como sendo $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, e $f'_-(x)$, a *derivada pela esquerda* de f em x, como sendo $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Mostre que a derivada $f'(x)$ existe se, e somente se, $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ existem e são iguais.

---

[1] Se $0 = f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$, então

$$a_0 = -(a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k) = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \cdots + a_1).$$

12.22 Determine se as seguintes funções são diferenciáveis no argumento dado. [*Sugestão:* Use o Problema 12.21.]

(*a*) A função f do Problema 10.5(*a*) em $x = 0$.

(*b*) $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, em $x = 0$

(*c*) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, em $x = 1$

(*d*) $G(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ 4x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, em $x = 1$

12.23 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 3 \\ Ax - 1 & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$.

(*a*) Encontre o valor de A para o qual f é contínua em $x = 3$.

(*b*) Para o valor de A obtido no item (*a*), f é diferenciável em $x = 3$?

12.24 Use a definição original para calcular a derivada da função f tal que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$.

Capítulo 13

Mais Sobre a Derivada

13.1 DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

Na fórmula $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para a derivada $f'(a)$, podemos fazer $x = a + h$ e reescrever $f'(a)$ como $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Se f é diferenciável em a, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(x)-f(a)+f(a)] \\
&= \lim_{x\to a} [f(x)-f(a)] + \lim_{x\to a} f(a) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) + f(a) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} (x-a) + f(a) \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em a. Isso prova que:

Teorema 13-1: Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Exemplo Diferenciabilidade é uma *condição mais forte* que continuidade. Em outras palavras, a recíproca do Teorema 13.1 não é verdadeira. Para perceber isso, considere a função valor-absoluto $f(x) = |x|$ (ver Fig. 13-1). f é obviamente contínua em $x = 0$; mas não é diferenciável em $x = 0$. Isso porque

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

e, portanto, o limite necessário para definir $f'(0)$ não existe. (A ponta que ocorre no gráfico é um sinal. Onde não existir uma única reta tangente, não pode haver derivada.)

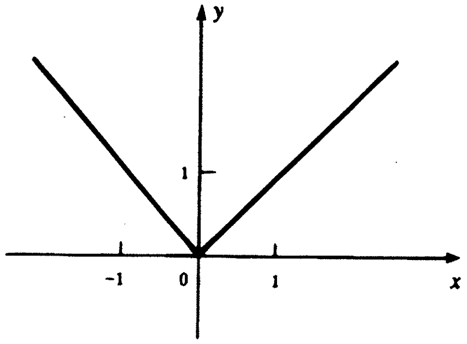


Fig. 13-1

13.2 OUTRAS REGRAS PARA DERIVADAS

O Teorema 13.1 nos permitirá justificar a Regra 3, a derivada do produto, do Capítulo 12 e ainda estabelecer duas regras a mais.

REGRA 6. (Regra do Quociente) Se f e g são diferenciáveis em x e se $g(x) \neq 0$, então

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot D_x f(x) - f(x) \cdot D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

Para uma demonstração, ver Problema 13.2.

Exemplos

(*a*)
$$D_x\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right) = \frac{(x^2-2) \cdot D_x(x+1) - (x+1) \cdot D_x(x^2-2)}{(x^2-2)^2}$$
$$= \frac{(x^2-2)(1) - (x+1)(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{x^2 - 2 - 2x^2 - 2x}{(x^2-2)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 2x - 2}{(x^2-2)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2-2)^2}$$

(*b*)
$$D_x\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(x^2)}{(x^2)^2} = \frac{x^2(0) - 1(2x)}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

A regra do quociente nos permite estender a Regra 4 do Capítulo 12:

REGRA 7. $D_x(x^k) = kx^{k-1}$ para qualquer inteiro k (positivo, zero ou negativo).

Para uma demonstração, ver Problema 13.3.

Exemplos

(*a*)
$$D_x\left(\frac{1}{x}\right) = D_x(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = (-1)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

(*b*)
$$D_x\left(\frac{1}{x^2}\right) = D_x(x^{-2}) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Problemas Resolvidos

13.1 Prove a Regra 3, a derivada do produto: Se f e g são diferenciáveis em x, então

$$D_x(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$$

Por simples algebrismo,

$$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_x(f(x)\cdot g(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)\cdot D_x g(x)+g(x)\cdot D_x f(x)
\end{aligned}$$

No último passo, $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ segue do fato de que f é contínua em x, de acordo com o Teorema 13.1.

13.2 Prove a Regra 6, a derivada do quociente: Se f e g são diferenciáveis em x e se $g(x)\neq 0$, então

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot D_x f(x)-f(x)\cdot D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

Se $g(x)\neq 0$, então $1/g(x)$ é definida. Além disso, como g é contínua em x (pelo Teorema 13.1), $g(x+h)\neq 0$ para todos os valores suficientemente pequenos de h. Logo $1/g(x+h)$ é definida para os mesmos valores de h. Podemos então calcular

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} && \text{[algebrismo: multiplique numerador e denominador por } g(x)g(x+h)\text{]}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1/g(x)}{g(x+h)}\right]\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] && \text{[algebrismo]}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1/g(x)}{g(x+h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} && \text{[pela Propriedade IV de limites]}\\
&= \frac{\lim_{h\to 0}[-1/g(x)]}{\lim_{h\to 0} g(x+h)}\cdot D_x g(x) && \text{[pela Propriedade VI de limites e pela diferenciabilidade de } g\text{]}\\
&= \frac{-1/g(x)}{g(x)}\cdot D_x g(x) && \text{[pela Propriedade II de limites e pela continuidade de } g\text{]}\\
&= \frac{-1}{[g(x)]^2}D_x g(x)
\end{aligned}$$

Provamos, portanto, que

$$D_x\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{-1}{[g(x)]^2}D_x g(x) \tag{1}$$

o que podemos substituir na regra da derivada do produto (demonstrada no Problema 13.1) para obter

$$\begin{aligned}
D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= D_x\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=f(x)\,\frac{-1}{[g(x)]^2}D_x g(x)+\frac{1}{g(x)}D_x f(x)\\
&= \frac{-f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}+\frac{g(x)D_x f(x)}{[g(x)]^2}\\
&= \frac{g(x)D_x f(x)-f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

a qual corresponde à regra do quociente, conforme pedido.

13.3 Prove a Regra 7: $D_x(x^k) = kx^{k-1}$ para qualquer inteiro k.

Quando k é positivo, essa é simplesmente a Regra 4 (Capítulo 12). Quando $k = 0$,

$$D_x(x^k) = D_x(x^0) = D_x(1) = 0 = 0 \cdot x^{-1} = kx^{k-1}$$

Agora considere k negativo; $k = -n$, onde n é positivo.

ÁLGEBRA Por definição,

$$x^k = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

De acordo com (*1*) do Problema 13.2

$$D_x(x^k) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-1}{(x^n)^2} D_x(x^n)$$

Mas $(x^n)^2 = x^{2n}$ e, pela Regra 4, $D_x(x^n) = nx^{n-1}$. Portanto,

$$D_x(x^k) = \frac{-1}{x^{2n}} nx^{n-1} = -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}$$

ÁLGEBRA Usamos aqui a lei dos expoentes,

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

13.4 Calcule a derivada da função f tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 4}$.

Use a regra do quociente e, em seguida, a Regra 5 (Capítulo 12),

$$\begin{aligned} D_x\left(\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 4}\right) &= \frac{(x^3 + 4)D_x(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)D_x(x^3 + 4)}{(x^3 + 4)^2} \\ &= \frac{(x^3 + 4)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 4)^2} \\ &= \frac{(2x^4 + x^3 + 8x + 4) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 4)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 8x + 4}{(x^3 + 4)^2} \end{aligned}$$

13.5 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $y = 1/x^3$ quando $x = \frac{1}{2}$.

O coeficiente angular da reta tangente é a derivada

$$\frac{dy}{dx} = D_x\left(\frac{1}{x^3}\right) = D_x(x^{-3}) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Quando $x = \frac{1}{2}$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1/2} = -\frac{3}{(\frac{1}{2})^4} = -\frac{3}{\frac{1}{16}} = -3(16) = -48$$

Logo, a reta tangente tem equação reduzida $y = -48x + b$. Quando $x = \frac{1}{2}$, a coordenada y do ponto sobre o gráfico é

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

Substituindo y por 8 e x por $\frac{1}{2}$ em $y = -48x + b$, temos

$$8 = -48(\tfrac{1}{2}) + b \quad \text{ou} \quad 8 = -24 + b \quad \text{ou} \quad b = 32$$

Portanto, a equação é $y = -48x + 32$.

Problemas Complementares

13.6 Calcule as derivadas das funções definidas pelas seguintes fórmulas:

(*a*) $(x^{100} + 2x^{50} - 3)(7x^8 + 20x + 5)$ (*b*) $\dfrac{x^2 - 3}{x + 4}$ (*c*) $\dfrac{x^5 - x + 2}{x^3 + 7}$

(*d*) $\dfrac{3}{x^5}$ (*e*) $8x^3 - x^2 + 5 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^3}$ (*f*) $\dfrac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}$

13.7 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado:

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, em $x = 2$ (*b*) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^3 - 1}$, em $x = -1$

13.8 Seja $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$ para todo $x \neq 2$. Calcule $f'(-2)$

13.9 Determine os pontos nos quais a função $f(x) = |x - 3|$ é diferenciável.

13.10 A parábola na Fig. 13-2 é o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x$.

(*a*) Faça o gráfico de $y = |f(x)|$. (*b*) Em qual(is) ponto(s) que a derivada de $|f(x)|$ não existe?

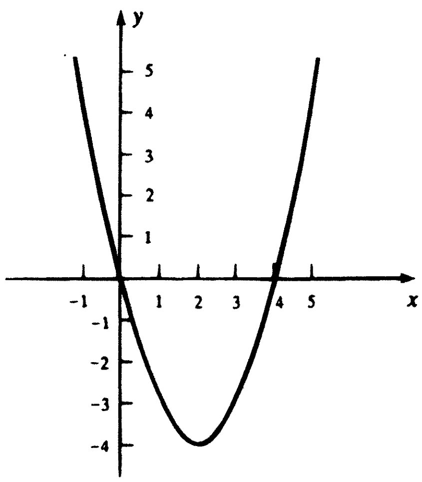


Fig. 13-2

13.11 $\boxed{\text{CG}}$ Use uma calculadora gráfica para determinar as descontinuidades das derivadas das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = x^{2/3}$ (*b*) $f(x) = 4|x - 2| + 3$ (*c*) $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$

13.12 Calcule $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(1 + h)^8} - 1\right]$.

Capítulo 14

Problemas de Máximos e Mínimos

14.1 EXTREMOS RELATIVOS

Uma função é dita ter um *máximo relativo* em $x = c$ se

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo x próximo de c. Mais precisamente, f atinge um máximo relativo em c se existe $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta$ implica em $f(x) \leq f(c)$.

> ***Exemplo*** Para a função f cujo gráfico é mostrado na Fig. 14-1, máximos relativos ocorrem em $x = c_1$ e $x = c_2$. Isso é óbvio, uma vez que o ponto A é mais alto que outros pontos em sua vizinhança no gráfico, e o ponto B é mais alto que outros pontos próximos no gráfico.
>
> O termo "relativo" é usado para qualificar "máximo" uma vez que o valor de uma função em um máximo relativo não é necessariamente o maior valor da função. Desse modo, na Fig. 14-1, o valor $f(c_1)$ em c_1 é menor que muitos outros valores de $f(x)$; em particular, $f(c_1) < f(c_2)$. Nesse exemplo o valor $f(c_2)$ é o maior da função.

Uma função f é dita ter um *mínimo relativo* em $x = c$ se

$$f(x) \geq f(c)$$

para x próximo a c. Na Fig. 14-1, f atinge um mínimo relativo em $x = d$, já que o ponto D é o mais baixo entre pontos que estão próximos no gráfico. O valor em um mínimo relativo não precisa ser o menor valor da função; por exemplo, na Fig. 14-1, o valor $f(e)$ é menor que $f(d)$.

Por *extremo relativo* entende-se um máximo relativo ou um mínimo relativo. Pontos nos quais existe um extremo relativo possuem a seguinte propriedade especial.

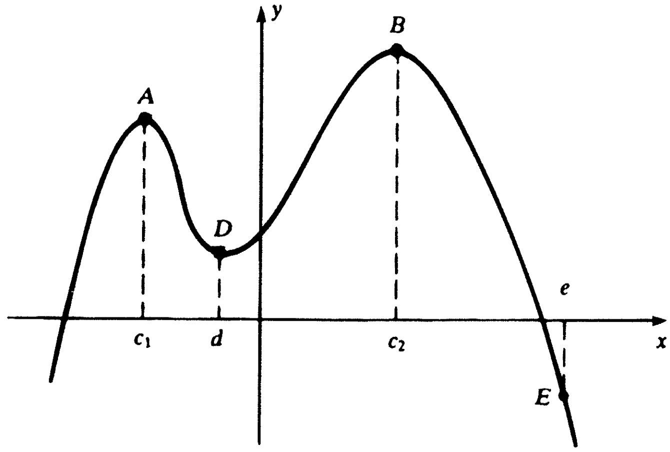


Fig. 14-1

Teorema 14-1: Se f tem um extremo relativo em $x = c$ e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

O teorema é intuitivamente óbvio. Se $f'(c)$ existe, então há uma reta tangente bem definida no ponto do gráfico de f onde $x = c$. Mas em um máximo relativo ou mínimo relativo, a reta tangente é horizontal (ver Fig. 14-2) e, portanto, seu coeficiente angular $f'(c)$ é zero. Para uma demonstração rigorosa, ver Problema 14.28.

A recíproca do Teorema 14.1 não é válida. Se $f'(c) = 0$, então f não tem necessariamente um extremo relativo em $x = c$.

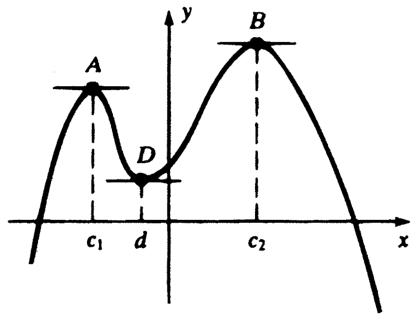


Fig. 14-2

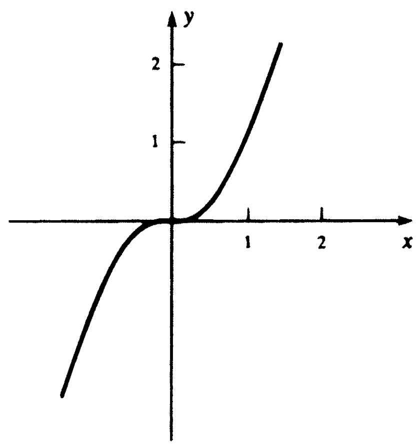


Fig. 14-3

Exemplo Considere a função $f'(x) = x^3$. Como $f'(x) = 3x^2, f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Mas, de acordo com o gráfico de f na Fig. 14-3, está claro que f não tem máximo e nem mínimo relativo em $x = 0$.

No Capítulo 23 será dado um método que freqüentemente nos permitirá determinar se um extremo relativo realmente existe quando $f'(c) = 0$.

14.2 EXTREMOS ABSOLUTOS

Aplicações práticas geralmente exigem que se encontre o máximo *absoluto* ou o mínimo *absoluto* de uma função em um dado conjunto. Seja f uma função definida em um conjunto $\mathscr{E}$ (e possivelmente em outros pontos também) e considere que c é elemento de $\mathscr{E}$ Então f é dita atingir um *máximo absoluto em* $\mathscr{E}$ no ponto c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em $\mathscr{E}$. Analogamente, f é dita atingir um *mínimo absoluto em* $\mathscr{E}$ no ponto d se $f(x) \geq f(d)$ para todo x em $\mathscr{E}$

Se o conjunto $\mathscr{E}$ é um intervalo fechado $[a,b]$ e se a função f é contínua sobre $[a,b]$ (ver Seção 10.3), então temos um teorema de existência muito importante (que não pode ser demonstrado de maneira elementar).

Teorema 14.2 (*Teorema do Valor Extremo*): Qualquer função contínua f sobre um intervalo fechado $[a,b]$ admite um máximo absoluto e um mínimo absoluto em $[a,b]$.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = x + 1$ para todo x no intervalo fechado $[0,2]$. O gráfico de f é mostrado na Fig. 14-4(*a*). Logo, f atinge um máximo absoluto em $[0,2]$ no ponto $x = 2$; esse valor de máximo absoluto é 3. Além disso, f atinge um mínimo absoluto em $x = 0$; esse mínimo absoluto é 1.

(*b*) Seja $f(x) = 1/x$ para todo x no intervalo *aberto* $(0,1)$. O gráfico de f é exibido na Fig. 14-4(*b*). f não tem máximo absoluto e nem mínimo absoluto em $(0,1)$. Se estendermos f para o intervalo semi-aberto $(0,1]$, então há um mínimo absoluto em $x = 1$, mas ainda assim nenhum máximo absoluto.

(*c*) Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x-1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Ver Fig. 14-4(*c*) para o gráfico de f. f não admite máximo absoluto e nem mínimo absoluto no intervalo fechado $[-1,1]$. O Teorema 14.2 não se aplica, pois f é descontínua em 0.

Pontos Críticos

Para localizar os extremos absolutos garantidos pelo Teorema 14.2, é útil o seguinte conceito.

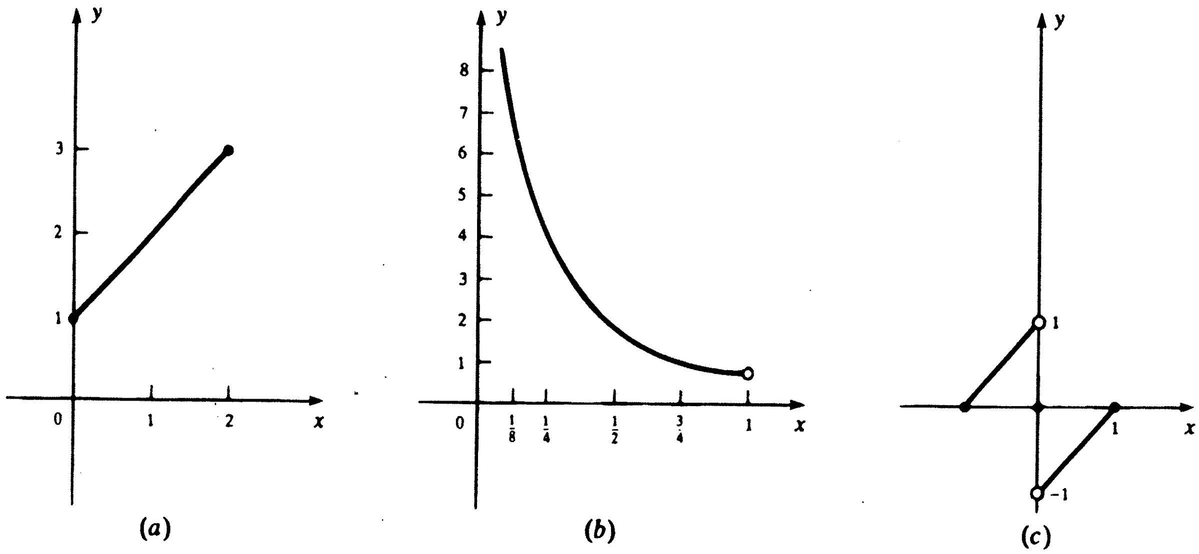


Fig. 14-4

Definição: Um *ponto crítico* de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não é definida.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Então $f'(x) = 6x - 2$. Como $6x - 2$ é definida para todo x, os únicos pontos críticos são dados por

$$\begin{aligned} 6x - 2 &= 0 \\ 6x &= 2 \\ x &= \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto, o único ponto crítico é $\frac{1}{3}$.

(*b*) Seja $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 3$. Logo, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$ e como $3x^2 - 2x - 5$ é definida para todo x, os únicos pontos críticos são soluções de

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x - 5 &= 0 \\ (3x - 5)(x + 1) &= 0 \\ 3x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 &= 0 \\ 3x = 5 \quad \text{ou} \quad x &= -1 \\ x = \tfrac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x &= -1 \end{aligned}$$

Logo, há dois pontos críticos, -1 e $\frac{5}{3}$.

(*c*) Seja $f(x) = |x|$. Logo, $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Já sabemos, do exemplo na Seção 13.1, que $f'(0)$ não é definida. Logo, 0 é um ponto crítico. Como $D_x(x) = 1$ e $D_x(-x) = -1$, não há outros pontos críticos.

Método para Determinar Extremos Absolutos

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$. Considere que há somente um número finito de pontos críticos $c_1, c_2, \ldots, c_k$ de f *no interior* de $[a,b]$; ou seja, em (a,b). (Essa hipótese vale para a maioria das funções encontradas no cálculo.) Faça uma tabela de valores de f nesses pontos críticos e nos extremos a e b, como na Tabela 14-1. Assim, o maior valor da tabela é o máximo absoluto de f em $[a,b]$ e o menor valor da tabela é o mínimo absoluto de f em $[a,b]$. (Esse resultado é demonstrado no Problema 14.1.)

Tabela 14-1

x	$f(x)$
c_1	$f(c_1)$
c_2	$f(c_2)$
$\vdots$	$\vdots$
c_k	$f(c_k)$
a	$f(a)$
b	$f(b)$

Exemplo Determine os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

em $[0,1]$ e encontre os argumentos nos quais esses valores são obtidos.

A função é contínua em todos os pontos; em particular, em $[0,1]$. Como $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ é definida para todo x, os únicos pontos críticos são soluções de

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ (3x - 1)(x - 3) &= 0 \\ 3x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 &= 0 \\ 3x = 1 \quad \text{ou} \quad x &= 3 \\ x = \tfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x &= 3 \end{aligned}$$

Logo, o único ponto crítico no intervalo aberto $(0,1)$ é $\frac{1}{3}$. Agora construa a Tabela 14-2:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 1 + 1 \\ &= \frac{1}{27} - \frac{15}{27} + 2 = 2 - \frac{14}{27} = \frac{40}{27} \\ f(0) &= 0^3 - 5(0)^2 + 3(0) + 1 = 1 \\ f(1) &= 1^3 - 5(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 - 5 + 3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

O máximo absoluto é o maior valor da segunda coluna, $\frac{40}{27}$, e é obtido no ponto $x = \frac{1}{3}$. O mínimo absoluto é o menor valor, 0, e é conseguido em $x = 1$.

Tabela 14-2

x	$f(x)$
1/3	40/27
0	1
1	0

Problemas Resolvidos

14.1 Justifique o método via tabela para localizar o máximo e o mínimo absolutos de uma função em um intervalo fechado.

Pelo teorema do valor extremo (Teorema 14.2), uma função f contínua em $[a,b]$ deve ter um máximo absoluto e um mínimo absoluto em $[a,b]$. Seja p um ponto no qual o valor absoluto ocorre.

Caso 1: p é um dos pontos de fronteira, a ou b. Então $f(p)$ será um dos valores de nossa tabela. De fato, será o maior valor da tabela, uma vez que $f(p)$ é o máximo absoluto de f em $[a,b]$.

Caso 2: p não é um ponto de fronteira e $f'(p)$ não é definida. Então p é um ponto crítico e será um dos números $c_1, c_2, \ldots, c_k$ em nossa lista. Logo, $f(p)$ aparece como um valor da tabela e será o maior de todos os valores tabelados.

Caso 3: p não é um ponto de fronteira e $f'(p)$ é definida. Como p é o máximo absoluto de f em $[a,b]$, $f(p) \geq f(x)$ para todo x próximo de p. Desse modo, f tem um máximo relativo em p e o Teorema 14.1 garante que $f'(p) = 0$. Mas então p é um ponto crítico e a conclusão segue como no Caso 2.

Um argumento muito parecido mostra que o método conduz ao mínimo absoluto.

14.2 Determine o máximo e o mínimo absolutos de cada função no intervalo dado:

(*a*) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ em $[-1,2]$ (*b*) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ em $[0,3]$

(*a*) Como $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$, os pontos críticos são soluções de

$$\begin{aligned} 6x^2 - 10x + 4 &= 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 &= 0 \\ (3x-2)(x-1) &= 0 \\ 3x - 2 = 0 \quad &\text{ou} \quad x - 1 = 0 \\ 3x = 2 \quad &\text{ou} \quad x = 1 \\ x = \tfrac{2}{3} \quad &\text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Assim, os pontos críticos são $\frac{2}{3}$ e 1, ambos em $(-1,2)$. Agora faça a Tabela 14-3:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{16}{27} - \frac{20}{9} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{16}{27} - \frac{60}{27} + \frac{72}{27} - \frac{27}{27} = \frac{1}{27} \\ f(1) &= 2(1)^3 - 5(1)^2 + 4(1) - 1 = 2 - 5 + 4 - 1 = 0 \\ f(-1) &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -2 - 5 - 4 - 1 = -12 \\ f(2) &= 2(2)^3 - 5(2)^2 + 4(2) - 1 = 16 - 20 + 8 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Dessa maneira, o máximo absoluto é 3, conseguido em $x = 2$, e o mínimo absoluto é -12, obtido em $x = -1$.

Tabela 14-3

x	$f(x)$
2/3	1/27
1	0
−1	−12 mínimo
2	3 máximo

(*b*) $$f'(x) = \frac{(x+1)D_x(x^2+3) - (x^2+3)D_x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(2x) - (x^2+3)(1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$f'(x)$ não é definida quando $(x+1)^2 = 0$; ou seja, quando $x = -1$. No entanto, como -1 não está em (0,3), os únicos pontos críticos que precisam ser considerados são os zeros de $x^2 + 2x - 3$ em (0,3):

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Logo, 1 é o único ponto crítico em (0,3).

Agora faça a Tabela 14-4:

$$f(1) = \frac{(1)^2+3}{1+1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$f(0) = \frac{(0)^2+3}{0+1} = \frac{3}{1} = 3$$
$$f(3) = \frac{(3)^2+3}{3+1} = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Assim, o máximo absoluto, obtido em 0 e 3, é 3; e o mínimo absoluto, conseguido em 1, é 2.

Tabela 14-4

x	$f(x)$
1	2 mínimo
0	3 máximo
3	3 máximo

14.3 Entre todos os pares de números reais positivos u e v cuja soma é 10, qual corresponde ao maior produto uv?

Seja $P = uv$. Como $u + v = 10$, $v = 10 - u$ e assim,

$$P = u(10 - u) = 10u - u^2$$

Aqui, $0 < u < 10$. Mas como P seria 0 em $u = 0$ e $u = 10$, e claramente 0 não é o máximo absoluto de P, podemos estender o domínio de P para o *intervalo fechado* [0,10]. Assim, devemos encontrar o máximo absoluto de $P = 10u - u^2$ no intervalo fechado [0,10]. A derivada $dP/du = 10 - 2u$ se anula somente em $u = 5$ e esse ponto crítico deve levar ao máximo. Logo, o máximo absoluto é $P(5) = 5(10 - 5) = 5(5) = 25$, o que se consegue a partir de $u = 5$. Quando $u = 5$, $v = 10 - u = 10 - 5 = 5$.

ÁLGEBRA O cálculo não era realmente necessário nesse problema, pois $P = \frac{(u+v)^2 - (u-v)^2}{4} = \frac{10^2 - (u-v)^2}{4}$, que é maior quando $u - v = 0$, ou seja, quando $u = v$. Então, $10 = u + v = 2u$ e, assim, $u = 5$.

14.4 Uma caixa aberta deve ser feita a partir de um pedaço retangular de cartolina que mede 8 pés por 3 pés, cortando-se quatro quadrados iguais dos cantos e dobrando-se as abas (ver Fig. 14-5). Qual comprimento do lado de um quadrado que permitirá fazer a caixa com o maior volume?

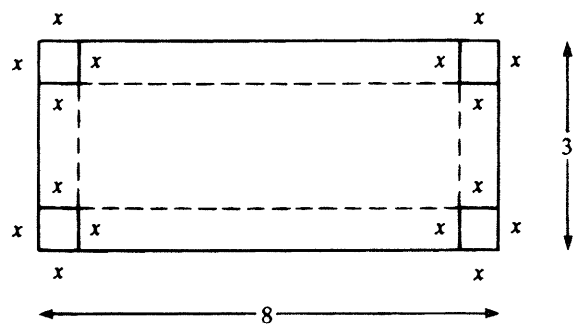


Fig. 14-5

Seja x o lado do quadrado que é removido de cada canto. O volume $V = lwh$, onde l, w e h são comprimento, largura e altura da caixa. Mas $l = 8 - 2x$, $w = 3 - 2x$ e $h = x$, ou seja

$$V(x) = (8 - 2x)(3 - 2x)x = (4x^2 - 22x + 24)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

A largura w deve ser positiva. Logo,

$$3 - 2x > 0 \quad \text{ou} \quad 3 > 2x \quad \text{ou} \quad \tfrac{3}{2} > x$$

Além disso, $x > 0$. Mas também podemos admitir os valores $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$, que tornam o volume $V = 0$ e que, por esse motivo, não podem resultar no volume máximo. Portanto, temos que maximizar $V(x)$ no intervalo $[0, \frac{3}{2}]$. Como

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 44x + 24$$

os pontos críticos são as soluções de

$$\begin{aligned} 12x^2 - 44x + 24 &= 0 \\ 3x^2 - 11x + 6 &= 0 \\ (3x - 2)(x - 3) &= 0 \\ 3x - 2 = 0 \quad &\text{ou} \quad x - 3 = 0 \\ 3x = 2 \quad &\text{ou} \quad x = 3 \\ x = \tfrac{2}{3} \quad &\text{ou} \quad x = 3 \end{aligned}$$

O único ponto crítico em $(0, \frac{3}{2})$ é $\frac{2}{3}$. Logo, o volume é maior quando $x = \frac{2}{3}$.

14.5 Um fabricante vende cada um de seus televisores por \$85. O custo C (em reais) da fabricação e venda de x televisores por semana é

$$C = 1500 + 10x + 0{,}005x^2$$

Se no máximo 10 000 televisores podem ser produzidos por semana, quantos deveriam ser fabricados e vendidos para maximizar o lucro semanal?

Para x televisores por semana, o total da renda é $85x$. O lucro é a renda menos o custo,

$$P = 85x - (1500 + 10x + 0{,}005x^2) = 75x - 1500 - 0{,}005x^2$$

Desejamos maximizar P no intervalo [0,10 000] uma vez que a produção é, no máximo, 10 000.

$$\frac{dP}{dx} = 75 - 0{,}01x$$

e o ponto crítico é a solução de

$$75 - 0{,}01x = 0$$
$$0{,}01x = 75$$
$$x = \frac{75}{0{,}01} = 7500$$

Agora construímos a Tabela 14-5:

$$P(7500) = 75(7500) - 1500 - 0{,}0005(7500)^2$$
$$= 562\,500 - 1500 - 0{,}0005(56\,250\,000)$$
$$= 561\,000 - 281\,250 = 279\,750$$

$$P(0) = 75(0) - 1500 - 0{,}0005(0)^2 = -1500$$

$$P(10\,000) = 75(10\,000) - 1500 - 0{,}0005(10\,000)^2$$
$$= 750\,000 - 1500 - 0{,}0005(100\,000\,000)$$
$$= 748\,500 - 500\,000 = 248\,500$$

Portanto, o lucro máximo é alcançado quando 7 500 televisores são produzidos e vendidos por semana.

Tabela 14-5

x	$P(x)$
7500	279 750
0	−1500
10 000	248 500

14.6 Um pomar tem um rendimento médio de 25 metros cúbicos por árvore quando existem no máximo 40 árvores por acre. Quando há mais de 40 árvores por acre, o rendimento médio diminui $\frac{1}{2}$ metro cúbico por árvore para cada árvore que excede aquelas 40. Determine o número de árvores por acre que darão o maior rendimento por acre.

Seja x o número de árvores por acre e $f(x)$ o rendimento total em metros cúbicos por acre. Quando $0 \le x \le 40$, $f(x) = 25x$. Se $x > 40$, o número de metros cúbicos produzido por cada árvore é $25 - \frac{1}{2}(x - 40)$. [Aqui $x - 40$ é o número de árvores que excede 40, e $\frac{1}{2}(x - 40)$ é a correspondente queda de metros cúbicos por árvore.] Logo, para $x > 40$, $f(x)$ é dada por

$$\left(25 - \frac{1}{2}(x-40)\right)x = \left(25 - \frac{1}{2}x + 20\right)x = \left(45 - \frac{1}{2}x\right)x = \frac{x}{2}(90 - x)$$

Assim
$$f(x) = \begin{cases} 25x & \text{se } 0 \le x \le 40 \\ \dfrac{x}{2}(90 - x) & \text{se } x > 40 \end{cases}$$

$f(x)$ é contínua em todos os pontos, uma vez que $25x = \frac{x}{2}(90 - x)$ quando $x = 40$. Obviamente, $f(x) < 0$ quando $x > 90$. Logo, podemos restringir a atenção para o intervalo $[0,90]$.

Para $0 < x < 40$, $f(x) = 25x$ e $f'(x) = 25$. Portanto, não existem pontos críticos no intervalo aberto $(0,40)$. Para $40 < x < 90$,

$$f(x) = \frac{x}{2}(90 - x) = 45x - \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad f'(x) = 45 - x$$

Portanto, $x = 45$ é um ponto crítico. Além disso, 40 é também um ponto crítico pois $f'(40)$ não existe. Não temos que verificar esse fato, uma vez que não há mal algum em acrescentar 40 [ou qualquer outro número em $(0,90)$] na lista em que calculamos $f(x)$.

Agora construímos a Tabela 14-6:

$$f(45) = \frac{45}{2}(90 - 45) = \frac{45}{2}(45) = \frac{2025}{2} = 1012{,}5$$
$$f(40) = 25(40) = 1000$$
$$f(0) = 25(0) = 0$$
$$f(90) = \frac{90}{2}(90 - 90) = \frac{90}{2}(0) = 0$$

O rendimento máximo por acre é conseguido quando existem 45 árvores por acre.

Tabela 14-6

x	$f(x)$
45	1012,5
40	1000
0	0
90	0

Problemas Complementares

14.7 Determine o máximo e o mínimo absolutos das seguintes funções nos intervalos indicados:

(*a*) $f(x) = -4x + 5$ em $[-2,3]$

(*b*) $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$ em $[-1,3]$

(*c*) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ em $[-1,1]$

(*d*) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ em $[-1,1]$

(*e*) $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ em $[0,4]$

(*f*) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 - 4}$ em $[-5,-3]$

(*g*) $f(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{1}{x}$ em $[1,4]$

(*h*) $f(x) = \dfrac{x^3}{x + 2}$ em $[-1,1]$

(*i*) $f(x) = \begin{cases} x^3 - \dfrac{1}{3}x & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - \dfrac{4}{3} & \text{para } 1 < x \le 2 \end{cases}$ em $[0,2]$

14.8 Um fazendeiro deseja cercar um campo retangular. Se cercar na direção norte-sul custa \$3 por metro, e cercar leste-oeste custa \$2 por metro, quais são as dimensões do campo de área máxima que pode ser cercado com \$600?

14.9 Um fazendeiro deve cercar um terreno retangular ao longo de um rio que corre em linha reta. Se o fazendeiro tem 120 metros de cerca, e o lado do terreno ao longo do rio não tem que ser cercado, quais são as dimensões do terreno cercado com maior área?

14.10 A distância de ônibus entre Nova York e Boston é 225 milhas. O motorista de ônibus recebe \$12,50 por hora; outros custos da viagem a uma velocidade constante de x milhas por hora somam $90 + 0{,}5x$ centavos por milha. As velocidades mínima e máxima permitidas na rota do ônibus são 40 e 55 milhas por hora. Em qual velocidade constante o ônibus deveria ser conduzido para minimizar o custo total?

14.11 Uma companhia aérea está planejando um vôo para o qual está se considerando um preço entre \$150 e \$300 por pessoa. A empresa aérea estima que o número de passageiros que fará o vôo será de $20 - 0{,}5x$, dependendo do preço em x reais que será cobrado. Qual preço maximizará a renda da companhia?

14.12 Suponha que uma empresa possa vender x rádios por semana se cobrar $100 - 0{,}1x$ reais por rádio. Seu custo de produção é de $30x + 5000$ reais quando x rádios são produzidos por semana. Quantos rádios deveriam ser produzidos para maximizar o lucro e qual será o preço de venda de cada rádio?

14.13 Uma caixa com base quadrada e lados verticais deve ser construída com 150 cm quadrados de cartolina. Quais dimensões fornecerão o maior volume se: (*a*) a caixa tiver tampa; (*b*) a caixa for aberta em cima?

14.14 Um fazendeiro deseja cercar um campo retangular e também dividi-lo ao meio com outra cerca (AB na Fig. 14-6). A cerca externa custa \$2 por metro e a cerca do meio custa \$3 por metro. Se o fazendeiro tem \$840 para gastar, quais dimensões maximizarão a área total?

14.15 Em um frete aéreo o preço por passageiro é de \$250 para qualquer número de passageiros até 100. O vôo será cancelado se houver menos de 50 passageiros. No entanto, para cada passageiro que exceder 100, o preço por passagem será diminuído em \$1. O número máximo de passageiros que pode voar é 225. Qual o número de passageiros resultará em renda máxima?

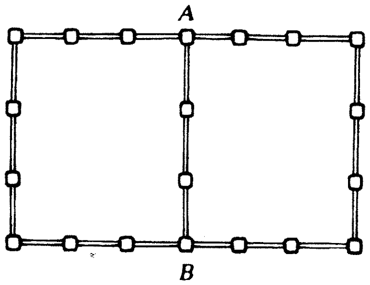


Fig. 14-6

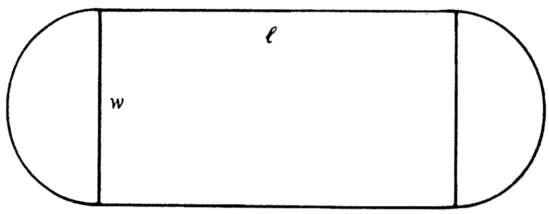


Fig. 14-7

14.16 Entre todos os pares x, y de números não negativos cuja soma é 100, obtenha os seguintes pares: (*a*) aqueles cuja a soma dos quadrados $x^2 + y^2$ é um mínimo; (*b*) aqueles cuja soma dos quadrados $x^2 + y^2$ é um máximo; (*c*) aqueles cuja soma dos cubos $x^3 + y^3$ é um mínimo.

14.17 Um complexo esportivo será construído na forma de um campo retangular com duas áreas semicirculares iguais em cada extremo (ver Fig. 14-7). Se a borda do complexo inteiro deve ser uma pista de corrida de 1256 metros de comprimento, quais deveriam ser as dimensões do complexo de modo que a área do campo retangular seja máxima?

14.18 Um cabo de comprimento L é cortado em dois pedaços. Com o primeiro pedaço é feito o contorno de um círculo e com o segundo um quadrado. Onde deverá ser cortado o cabo de modo que a área total do círculo mais a do quadrado seja: (*a*) um máximo; (*b*) um mínimo?

GEOMETRIA A área de um círculo com raio r é πr^2, e comprimento é $2\pi r$.

14.19 Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços. Com o primeiro pedaço é feito um quadrado e com o segundo um triângulo equilátero. Onde o fio deverá ser cortado de modo que a área total do quadrado e do triângulo seja a maior possível?

GEOMETRIA A área de um tiângulo equilátero de lado s é $\sqrt{3}\,\dfrac{s^2}{4}$.

14.20 Uma companhia tem um lucro de \$40 em cada aparelho de TV que faz quando produz no máximo 1000 aparelhos. Se o lucro por item diminui 5 centavos para cada aparelho de TV acima de 1000, qual nível de produção maximiza o lucro total?

14.21 Determine o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto que tem um raio de 3 m e altura de 5 m (ver Fig. 14-8).

GEOMETRIA O volume de um cilindro circular reto de raio r e altura h é $\pi r^2 h$. Pela proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes (na Fig. 14-8), $\dfrac{5-h}{r} = \dfrac{5}{3}$.

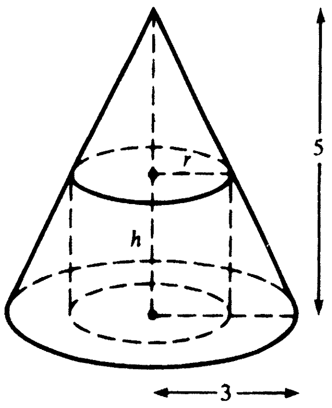


Fig. 14-8

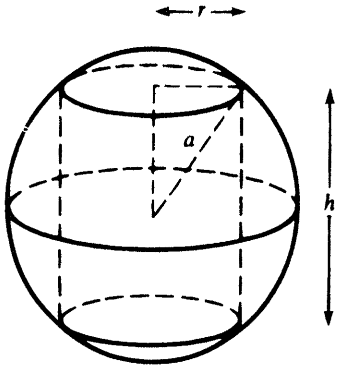


Fig. 14-9

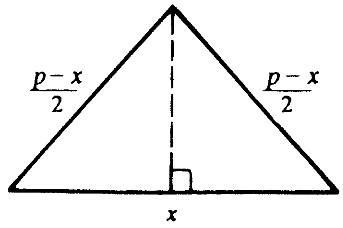


Fig. 14-10

14.22 Determine a altura h e o raio r do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio a. [*Sugestão:* Ver Fig. 14-9. O teorema de Pitágoras relaciona $h/2$ e r, e delimita os possíveis valores para cada.]

14.23 Entre todos os triângulos isósceles com um perímetro fixado p, qual tem a maior área? [*Sugestão:* Ver Fig. 14-10 e resolver o problema equivalente de maximização do quadrado da área.]

14.24 Obtenha o(s) ponto(s) da elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ que é (são): (*a*) o(s) mais próximo(s) do ponto (1,0); (*b*) o(s) mais distante(s) do ponto (1,0). [*Sugestão:* É mais fácil encontrar os extremos do quadrado da distância de (1,0) a (x,y). Observe que $-5 \le x \le 5$ para pontos (x,y) da elipse.]

14.25 Uma piscina retangular deve ser construída de tal modo que as margens norte e sul tenham comprimento múltiplo inteiro de 6 m e as margens leste e oeste, comprimento múltiplo inteiro de 10 m. Se a área total disponível é de 6000 m^2 quadrados, quais são as dimensões da maior área possível da piscina?

14.26 Um fazendeiro deve cercar dois terrenos. Um deve ser um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura, e o outro deve ser um quadrado. O retângulo deve ter pelo menos 882 metros quadrados e o quadrado deve medir pelo menos 400 metros quadrados. Existem 680 metros de cerca disponível.

(*a*) Se x é a largura do campo retangular, quais são os possíveis valores máximo e mínimo de x?

(*b*) Qual é a maior área total possível?

14.27 Custa para uma companhia $0{,}1x^2+4x+3$ reais para produzir x toneladas de ouro. Se mais de 10 toneladas são produzidas, a necessidade de maior mão de obra aumenta o custo em $2(x-10)$ reais. Se o preço por tonelada é \$9, independentemente do nível de produção, e se a capacidade máxima de produção é de 20 toneladas, qual produção maximiza o lucro?

14.28 Demonstre o Teorema 14.1. [*Sugestão:* Considere o caso de um mínimo relativo em $x = c$. Então $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$ para h suficientemente pequeno e positivo, e $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$ para h negativo e suficientemente pequeno em magnitude. Como $f'(c)$ existe $f'(c)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$ e $f'(c)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$.]

14.29 Um retângulo é inscrito em um triângulo isósceles com base de 9 polegadas e altura de 6 polegadas. Determine as dimensões do retângulo de área máxima se um lado do retângulo está sobre a base do triângulo.

14.30 Um jardim retangular deve corresponder a uma área de 200 metros quadrados. Uma cerca se faz necessária apenas em três lados, uma vez que um lado fará divisa com um muro de uma construção. O comprimento e a largura do jardim devem medir pelo menos 5 metros cada.

(*a*) Quais dimensões minimizarão a quantia total de cerca necessária? Qual será o mínimo de cerca?

(*b*) Quais dimensões maximizarão a quantia total de cerca, e qual será o máximo de cerca?

14.31 Seja $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2}$.

(a) Determine os valores máximos e mínimos de f em [1,10].

(b) O teorema do valor-extremo se aplica a f em [–10,10]? Por quê?

14.32 Determine o(s) ponto(s) da curva $y = \sqrt{6x^4 + 8x^3 + 11x^2 + 9}$ que é (são) mais próximo(s) da origem.

14.33 Calcule a menor distância entre pontos da curva $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ e a origem.

14.34 Determine as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um triângulo retângulo cujos lados são 3, 4 e 5 se um lado do retângulo está sobre o lado do triângulo de comprimento 3 e o outro lado está sobre o lado do triângulo de comprimento 4.

14.35 $\boxed{\text{CG}}$ Encontre os extremos relativos de $f(x) = x^4 + 2x^2 - 5x - 2$ de duas formas:

(a) Trace o gráfico de f para obter o máximo relativo e o mínimo relativo diretamente.

(b) Trace o gráfico de f' para encontrar os pontos críticos de f.

14.36 $\boxed{\text{CG}}$ Determine os extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ em (–5,3).

Capítulo 15

A Regra da Cadeia

15.1 FUNÇÕES COMPOSTAS

Existem ainda muitas funções cujas derivadas não sabemos calcular; por exemplo,

$$\text{(i)}\ \sqrt{x^3 - x + 2} \qquad \text{(ii)}\ \sqrt[3]{x+4} \qquad \text{(iii)}\ (x^2 + 3x - 1)^{23}$$

No caso (iii) poderíamos, certamente, multiplicar $x^2 + 3x - 1$ por ela própria 22 vezes e então derivar o polinômio resultante. Mas sem um computador, isso seria extremamente árduo.

As três funções acima têm a característica comum de serem combinações de funções mais simples:

(i) $\sqrt{x^3 - x + 2}$ é o resultado de começar com a função $f(x) = x^3 - x + 2$ e então aplicar a função $g(x) = \sqrt{x}$ ao resultado. Assim,

$$\sqrt{x^3 - x + 2} = g(f(x))$$

(ii) $\sqrt[3]{x+4}$ é o resultado de começar com a função $F(x) = x + 4$ e então aplicar a função $G(x) = \sqrt[3]{x}$. Portanto,

$$\sqrt[3]{x+4} = G(F(x))$$

(iii) $(x^2 + 3x - 1)^{23}$ é o resultado de começar com a função $H(x) = x^2 + 3x - 1$ e então aplicar a função $K(x) = x^{23}$. Logo,

$$(x^2 + 3x - 1)^{23} = K(H(x))$$

Funções que são escritas juntas dessa forma a partir de funções mais simples são ditas funções *compostas*.

Definição: Se f e g são funções quaisquer, então a *composição* $g \circ f$ de f e g é a função tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

O "processo" de composição é diagramado na Fig. 15-1.

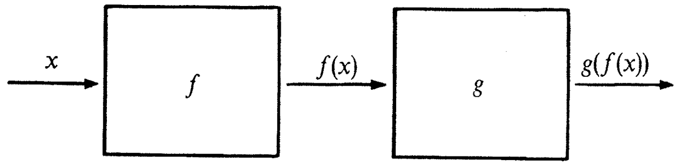


Fig. 15-1

Exemplos

(*a*) Sejam $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2$. Então,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2$$

Por outro lado,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1$$

Portanto, $f \circ g$ e $g \circ f$ não são necessariamente a mesma função (e geralmente elas não são a mesma).

(*b*) Sejam $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Então,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x) = \sqrt{x^2 + 2x}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x}) = x + 2\sqrt{x}$$

Novamente, $g \circ f$ e $f \circ g$ são diferentes.

Uma função composta $g \circ f$ é definida apenas para aqueles x em que $f(x)$ é definida e $g(f(x))$ é definida. Em outras palavras, o domínio de $g \circ f$ consiste daqueles x no domínio de f para os quais $f(x)$ está no domínio de g.

Teorema 15-1: A composição de funções contínuas é uma função contínua. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Para uma demonstração, ver Problema 15.25.

15.2 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES COMPOSTAS

Primeiro vamos tratar de um importante caso especial. A função $[f(x)]^n$ é a composição $g \circ f$ de f com a função $g(x) = x^n$. Temos:

Teorema 15-2 (*Regra da Cadeia para Potências*): Seja f diferenciável e seja n qualquer inteiro. Então,

$$D_x((f(x))^n) = n(f(x))^{n-1}D_x(f(x)) \tag{15.1}$$

Exemplos

(*a*) $D_x((x^2-5)^3) = 3(x^2-5)^2 D_x(x^2-5) = 3(x^2-5)^2(2x) = 6x(x^2-5)^2$

(*b*) $D_x((x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^7) = 7(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^6 D_x(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$
$= 7(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^6(3x^2 - 4x + 3)$

(*c*) $$D_x\left(\frac{1}{(3x-5)^4}\right) = D_x((3x-5)^{-4}) = -4(3x-5)^{-5}D_x(3x-5)$$
$$= -\frac{4}{(3x-5)^5}(3) = -\frac{12}{(3x-5)^5}$$

Teorema 15-3 (*Regra da Cadeia*): Assuma que f é diferenciável em x e que g é diferenciável em $f(x)$. Então a composição $g \circ f$ é diferenciável em x e sua derivada $(g \circ f)'$ é dada por

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{15.2}$$

isto é,

$$D_x(g(f(x)) = g'(f(x))D_x f(x)$$

A prova do Teorema 15.3 é ardilosa; ver Problema 15.27. A regra da cadeia para potências (Teorema 15.2) segue da regra da cadeia (Teorema 15.3) quando $g(x) = x^n$.

Aplicações da regra da cadeia geral serão adiadas até os próximos capítulos. Antes de abandoná-la, no entanto, devemos indicar uma notação intuitiva. Se escrevermos $y = g(f(x))$ e $u = f(x)$, então $y = g(u)$ e *(15.2)* podem ser expressas na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{15.3}$$

como se derivadas fossem frações (o que não é verdade) e assim a regra da cadeia seria uma identidade obtida a partir do cancelamento dos du's no lado direito. Apesar dessa "identidade" corresponder a uma maneira fácil de lembrar da regra da cadeia, deve ser mantido em mente que y no lado esquerdo de *(15.3)* corresponde a uma determinada função de x [a saber, $(g \circ f)(x)$], enquanto o lado direito se refere a uma função diferente em termos de u [a saber, $g(u)$].

Exemplo Usando *(15.3)* para refazer o exemplo anterior (*c*), temos

$$y = (3x - 5)^{-4} = u^{-4}$$

onde $u = 3x - 5$. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (-4u^{-5})(3) = -\frac{12}{u^5} = -\frac{12}{(3x-5)^5}$$

Derivação de Potências Racionais

Queremos ser capazes de derivar a função $f(x) = x^r$, onde r é um número racional. O caso especial de r inteiro já foi contemplado na Regra 7 do Capítulo13.

ÁLGEBRA Um número racional r é aquele que pode ser representado na forma $r = n/k$, onde n e k são inteiros, com k positivo. Por definição,

$$a^{n/k} = (\sqrt[k]{a})^n$$

exceto quando a é negativo e k é par (caso no qual a raiz k-ésima de a não é definida). Por exemplo,

$$(8)^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$
$$(32)^{-2/5} = (\sqrt[5]{32})^{-2} = (2)^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$$
$$(-4)^{7/8} \text{ não é definida}$$

Observe que

$$(\sqrt[k]{a})^n = \sqrt[k]{a^n}$$

sempre que ambos os lados são definidos. De fato,

$$((\sqrt[k]{a})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^{nk} = (\sqrt[k]{a})^{kn} = ((\sqrt[k]{a})^k)^n = a^n$$

o que mostra que $(\sqrt[k]{a})^n$ é a raiz k-ésima de a^n. Na prática somos livres para escolher qual notação para $a^{n/k}$ é mais conveniente. Desse modo, (i) $64^{2/3}$ é mais fácil de calcular como

$$(\sqrt[3]{64})^2 = (4)^2 = 16$$

do que como

$$\sqrt[3]{(64)^2} = \sqrt[3]{4096}$$

mas (ii) $(\sqrt{8})^{2/3}$ é mais fácil de calcular como

$$\sqrt[3]{(\sqrt{8})^2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

do que como

$$(\sqrt[3]{\sqrt{8}})^2$$

As leis usuais para expoentes valem para expoentes racionais:

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$

(4) $(ab)^r = a^r b^r$

onde r e s são números racionais quaisquer.

Teorema 15-4: Para qualquer número racional r, $D_x(x^r) = rx^{r-1}$.

Para uma demonstração, ver Problema 15.6.

Exemplos

(*a*) $D_x(\sqrt{x}) = D_x(x^{1/2}) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(*b*) $D_x(x^{3/2}) = \dfrac{3}{2}x^{1/2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (*c*) $D_x(x^{3/4}) = \dfrac{3}{4}x^{-1/4} = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{x^{1/4}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

O Teorema 15.4, em parceria com a regra da cadeia (Teorema 15.3), nos permite estender a regra da cadeia para potências (Teorema 15.2) de modo a incluir expoentes racionais.

Corolário 15-5: Se f é diferenciável e r é um número racional,

$$D_x((f(x))^r) = r(f(x))^{r-1}D_x f(x)$$

Exemplos

(*a*) $D_x(\sqrt{x^2-3x+1}) = D_x((x^2-3x+1)^{1/2}) = \dfrac{1}{2}(x^2-3x+1)^{-1/2}D_x(x^2-3x+1)$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2-3x+1)^{1/2}}(2x-3) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$$

(*b*) $D_x((3x^2-1)^{5/4}) = \dfrac{5}{4}(3x^2-1)^{1/4}D_x(3x^2-1)$

$$= \frac{5}{4}\sqrt[4]{3x^2-1}\,(6x) = \frac{15x}{2}\sqrt[4]{3x^2-1}$$

(*c*) $D_x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{7x+2}}\right) = D_x\left(\dfrac{1}{(7x+2)^{1/3}}\right) = D_x((7x+2)^{-1/3}) = -\dfrac{1}{3}(7x+2)^{-4/3}D_x(7x+2)$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{(7x+2)^{4/3}}(7) = -\frac{7}{3(\sqrt[3]{7x+2})^4}$$

Problemas Resolvidos

15.1 Para cada par de funções f e g, encontre fórmulas para $g \circ f$ e $f \circ g$, e determine os domínios de $g \circ f$ e $f \circ g$.

(*a*) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x + 1$ (*b*) $g(x) = x^2$ e $f(x) = x - 1$

(*a*)
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \sqrt{x + 1}$$

Como $\sqrt{x + 1}$ é definida se, e somente se, $x \geq -1$, o domínio de $g \circ f$ é $[-1, \infty)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

Como $\sqrt{x} + 1$ é definida se, e somente se, $x \geq 0$, o domínio de $f \circ g$ é $[0, \infty)$.

(*b*)
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))) = g(x - 1) = (x - 1)^2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1$$

Ambas as composições são polinômios e assim o domínio de cada uma é o conjunto de todos os números reais.

15.2 Calcule as derivadas de:

(*a*) $(x^4 - 3x^2 + 5x - 2)^3$ (*b*) $\sqrt{7x^3 - 2x^2 + 5}$ (*c*) $\dfrac{1}{(5x^2 + 4)^3}$

A regra da cadeia para potências é usada em cada caso.

(*a*)
$$D_x((x^4 - 3x^2 + 5x - 2)^3) = 3(x^4 - 3x^2 + 5x - 2)^2 D_x(x^4 - 3x^2 + 5x - 2)$$
$$= 3(x^4 - 3x^2 + 5x - 2)^2(4x^3 - 6x + 5)$$

(*b*)
$$D_x(\sqrt{7x^3 - 2x^2 + 5}) = D_x((7x^3 - 2x^2 + 5)^{1/2}) = \frac{1}{2}(7x^3 - 2x^2 + 5)^{-1/2} D_x(7x^3 - 2x^2 + 5)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(7x^3 - 2x^2 + 5)^{1/2}}(21x^2 - 4x) = \frac{x(21x - 4)}{2\sqrt{7x^3 - 2x^2 + 5}}$$

(*c*)
$$D_x\left(\frac{1}{(5x^2 + 4)^3}\right) = D_x((5x^2 + 4)^{-3}) = -3(5x^2 + 4)^{-4} D_x(5x^2 + 4)$$
$$= \frac{-3}{(5x^2 + 4)^4}(10x) = -\frac{30x}{(5x^2 + 4)^4}$$

15.3 Encontre a derivada da função $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{(x + 1)}} = [1 + (x + 1)^{1/2}]^{1/2}$.

Pela regra da cadeia para potências, empregada duas vezes,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + (x + 1)^{1/2})^{-1/2} D_x(1 + (x + 1)^{1/2})$$
$$= \frac{1}{2}(1 + (x + 1)^{1/2})^{-1/2}\left(\frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2} D_x(x + 1)\right)$$
$$= \frac{1}{4}(1 + (x + 1)^{1/2})^{-1/2}(x + 1)^{-1/2}(1)$$
$$= \frac{1}{4}\{(1 + (x + 1)^{1/2})(x + 1)\}^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\{(1 + (x + 1)^{1/2})(x + 1)\}^{1/2}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{((1 + \sqrt{(x + 1)})(x + 1)}}$$

15.4 Encontre os extremos absolutos de $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ em $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
D_x(x\sqrt{1-x^2}) &= xD_x(\sqrt{1-x^2}) + \sqrt{1-x^2}\,D_x(x) && \text{[pela derivada do produto]}\\
&= xD_x((1-x^2)^{1/2}) + \sqrt{1-x^2}\\
&= x\left(\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}D_x(1-x^2)\right) + \sqrt{1-x^2} && \text{[pela regra da cadeia para potências]}\\
&= \frac{x}{2}\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}(-2x) + \sqrt{1-x^2} = \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\\
&= \frac{-x^2+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} && \left(\text{by } \frac{a}{c} + b = \frac{a+bc}{c}\right)
\end{aligned}$$

O lado direito não é definido quando o denominador é 0; ou seja, quando $x^2 = 1$. Logo, 1 e -1 são pontos críticos. O lado direito é 0 quando o numerador é 0; ou seja, quando

$$2x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Assim, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ são igualmente pontos críticos. O único ponto crítico em $(0,1)$ é $\sqrt{\frac{1}{2}}$,

ÁLGEBRA $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

e $$f(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$$

Nos pontos de fronteira, $f(0) = f(1) = 0$. Portanto, $\frac{1}{2}$ é o máximo absoluto (conseguido em $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$) e 0 é o mínimo absoluto (conseguido em $x = 0$ e $x = 1$).

15.5 Um espião em um submarino S, distante 6 quilômetros de uma praia retilínea, deve atingir um ponto B na praia, que está 9 quilômetros adiante de um ponto A que é a projeção ortogonal de S na praia (ver Fig. 15-2). O espião deve remar em um barco até um determinado ponto C na praia e então percorrer o resto do caminho a pé até B. Se ele rema a 4 km/h e caminha a 5 km/h, em qual ponto C ele deve parar o barco para alcançar B o mais rápido possível?

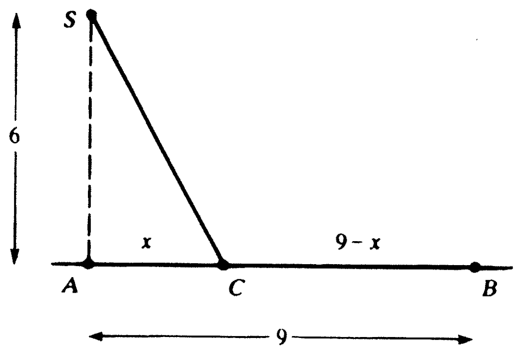


Fig. 15-2

Seja $x = \overline{AC}$; então $\overline{BC} = 9 - x$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{SC}^2 = (6)^2 + x^2 \quad \text{ou} \quad \overline{SC} = \sqrt{36 + x^2}$$

O tempo dispendido remando é, portanto,

$$T_1 = \frac{\sqrt{36+x^2}}{4} \quad \text{[horas]}$$

e o tempo gasto andando será $T_2 = (9 - x)/5$ [horas]. O tempo total $T(x)$ é dado pela fórmula

$$T(x) = T_1 + T_2 = \frac{\sqrt{36+x^2}}{4} + \frac{9-x}{5}$$

Devemos minimizar $T(x)$ no intervalo [0,9], uma vez que x pode variar de 0 (em A) até 9 (em B),

$$\begin{aligned}
T'(x) &= D_x\left(\frac{(36+x^2)^{1/2}}{4}\right) + D_x\left(\frac{9}{5} - \frac{x}{5}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(36+x^2)^{-1/2}\cdot D_x(36+x^2) - \frac{1}{5} && \text{[pela regra da cadeia para potências]} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{8(36+x^2)^{1/2}}(2x) - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Os únicos pontos críticos são soluções de

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{5} &= 0 \\
\frac{x}{4\sqrt{36+x^2}} &= \frac{1}{5} \\
5x &= 4\sqrt{36+x^2} && \text{[produto cruzado]} \\
25x^2 &= 16(36+x^2) && \text{[eleva ambos os lados ao quadrado]} \\
25x^2 &= 576 + 16x^2 \\
9x^2 &= 576 \\
x^2 &= 64 \\
x &= \pm 8
\end{aligned}$$

O único ponto crítico em (0,9) é 8. Calculando os valores para o método via tabela,

$$\begin{aligned}
T(8) &= \frac{\sqrt{36+(8)^2}}{4} + \frac{9-8}{5} = \frac{\sqrt{100}}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{2} + \frac{1}{5} = \frac{27}{10} \\
T(0) &= \frac{\sqrt{36+(0)^2}}{4} + \frac{9-0}{5} = \frac{\sqrt{36}}{4} + \frac{9}{5} = \frac{6}{4} + \frac{9}{5} = \frac{3}{2} + \frac{9}{5} = \frac{33}{10} \\
T(9) &= \frac{\sqrt{36+(9)^2}}{4} + \frac{9-9}{5} = \frac{\sqrt{36+81}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{117}}{4} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{13}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{13}
\end{aligned}$$

geramos a Tabela 15-1. O mínimo absoluto é conseguido em $x = 8$; o espião deveria parar o barco 8 quilômetros adiante do ponto A.

Tabela 15-1

x	$T(x)$
8	$\frac{27}{10}$ mínimo
0	$\frac{33}{10}$
9	$\frac{3}{4}\sqrt{13}$

ÁLGEBRA $T(9) > T(8)$; pois, assumindo o contrário,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\sqrt{13} &\le \frac{27}{10} \\
\sqrt{13} &\le \frac{36}{10} && \text{[multiplica por } \tfrac{4}{3}\text{]} \\
13 &\le \frac{1296}{100} = 12{,}96 && \text{[elevando ao quadrado]}
\end{aligned}$$

o que é falso.

15.6 Prove o Teorema 15.4: $D_x(x^r) = rx^{r-1}$ para qualquer número racional r.

Seja $r = n/k$, onde n é um inteiro e k um inteiro positivo. Que $x^{n/k}$ é diferenciável não é fácil provar; ver Problema 15.26. Assumindo isso, vamos agora deduzir a fórmula para a derivada. Seja

$$f(x) = x^{n/k} = \sqrt[k]{x^n}$$

Então, como $(f(x))^k = x^n$,

$$D_x((f(x))^k) = D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Mas, pelo Teorema 15.2, $D_x((f(x))^k) = k(f(x))^{k-1}f'(x)$. Logo,

$$k(f(x))^{k-1}f'(x) = nx^{n-1}$$

e isolando $f'(x)$, obtemos

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{k(f(x))^{k-1}} = \frac{n}{k}\frac{x^{rk-1}}{(x^r)^{k-1}}$$
$$= r\frac{x^{rk-1}}{x^{rk-r}} = rx^{r-1}$$

Problemas Complementares

15.7 Para cada par de funções $f(x)$ e $g(x)$, encontre fórmulas para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

(*a*) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = 3x$ (*b*) $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $g(x) = x^3$ (*c*) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$, $g(x) = 3$

(*d*) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ (*e*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (*f*) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4$

15.8 Para cada par de funções f e g encontre o conjunto de soluções da equação $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

(*a*) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ (*b*) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = 3x$ (*c*) $f(x) = 2x$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

(*d*) $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (*e*) $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2-3}$

15.9 Expresse cada uma das seguintes funções como a composição $(g \circ f)(x)$ de duas funções mais simples. [As funções $f(x)$ e $g(x)$ obviamente não serão únicas.]

(*a*) $(x^3 - x^2 + 2)^7$ (*b*) $(8 - x)^4$ (*c*) $\sqrt{1 + x^2}$ (*d*) $\dfrac{1}{x^2 - 4}$

15.10 Encontre as derivadas das seguintes funções:

(*a*) $(x^3 - 2x^2 + 7x - 3)^4$ (*b*) $(7 + 3x)^5$ (*c*) $(2x - 3)^{-2}$

(*d*) $(3x^2 + 5)^{-3}$ (*e*) $(4x^2 - 3)^2(x + 5)^3$ (*f*) $\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^3$

(*g*) $\left(\dfrac{x^2-2}{2x^2+1}\right)^2$ (*h*) $\dfrac{4}{3x^2 - x + 5}$ (*i*) $\sqrt{1 + x^3}$

15.11 Calcule as derivadas das seguintes funções:

(*a*) $2x^{3/4}$ (*b*) $x^2(1-3x^3)^{1/3}$ (*c*) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(*d*) $(7x^3-4x^2+2)^{1/4}$ (*e*) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$ (*f*) $8x^{3/4}+4x^{1/4}-x^{-1/3}$

(*g*) $\sqrt[3]{(4x^2+3)^2}$ (*h*) $\sqrt{\dfrac{4}{x}}-\sqrt{3x}$ (*i*) $\sqrt{4-\sqrt{(4+x)}}$ (*j*) $\dfrac{(1+x^3)^{2/3}}{1-2x}$

15.12 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ no ponto $(2,\frac{1}{5})$.

15.13 Determine a equação reduzida da reta normal à curva $y=\sqrt{x^2+16}$ no ponto (3,5).

15.14 Sejam $g(x)=x^2-4$ e $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$.

(*a*) Determine uma fórmula para $(g\circ f)(x)$ e então calcule $(g\circ f)'(x)$.

(*b*) Mostre que a regra da cadeia fornece a mesma resposta para $(g\circ f)'(x)$ como foi determinada no item (*a*).

15.15 Encontre os extremos absolutos das seguintes funções nos intervalos dados:

(*a*) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ em [−1,1] (*b*) $f(x)=(x-2)^2(x+3)^3$ em [−4,3]

(*c*) $f(x)=\sqrt{5-4x}$ em [−1,1] (*d*) $f(x)=\dfrac{2}{3}x-x^{2/3}$ em [0,8]

(*e*) $f(x)=x^{2/5}-\dfrac{1}{9}x^{7/5}$ em [−1,1]

15.16 Duas cidades, P e Q, estão localizadas a duas e três milhas, respectivamente, de uma ferrovia, como mostrado na Fig. 15-3. Qual ponto R sobre a ferrovia deveria ser escolhido para uma nova estação a fim de minimizar a soma das distâncias de P e Q à estação, se a distância entre A e B é de quatro milhas?

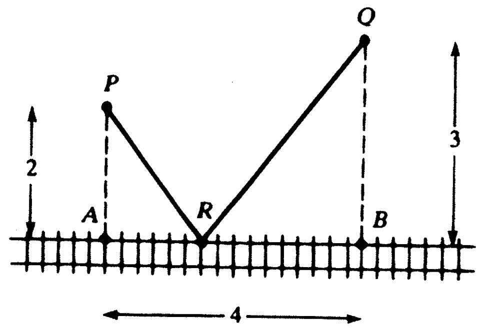


Fig. 15-3

15.17 Considere que F e G são funções diferenciáveis tais que $F'(x)=-G(x)$ e $G'(x)=-F(x)$. Se $H(x)=(F(x))^2-(G(x))^2$, encontre uma fórmula para $H'(x)$.

15.18 Se $y=x^3-2$ e $z=3x+5$, então y pode ser considerada como uma função de z. Expresse dy/dz em termos de x.

15.19 Seja F uma função diferenciável e seja $G(x)=F'(x)$. Expresse $D_x(F(x^3))$ em termos de G e x.

15.20 Se $g(x)=x^{1/5}(x-1)^{3/5}$, encontre o domínio de $g'(x)$.

15.21 Seja f uma função ímpar (Seção 7.3) diferenciável. Encontre a relação entre $f'(-x)$ e $f'(x)$.

15.22 Sejam F e G funções diferenciáveis tais que

$$\begin{array}{lll} F(3) = 5 & F'(3) = 13 & F'(7) = 2 \\ G(3) = 7 & G'(3) = 6 & G'(7) = 0 \end{array}$$

Se $H(x) = F(G(x))$, encontre $H'(3)$.

15.23 Seja $F(x) = \sqrt{1 + 3x}$.

(a) Encontre o domínio e a imagem de F.

(b) Encontre a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de F em $x = 5$.

(c) Encontre as coordenadas do(s) ponto(s) sobre o gráfico de F tal(is) que a reta normal no(s) mesmo(s) é paralela à reta $4x + 3y = 1$.

15.24 Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio 1 se um lado do retângulo está sobre o diâmetro.

15.25 Prove o Teorema 15.1: Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, prove que $g \circ f$ é contínua em a. [*Sugestão:* Para $\varepsilon > 0$ arbitrário, seja $\delta_1 > 0$ tal que $|g(u) - g(f(a))| < \varepsilon$ sempre que $|u - f(a)| < \delta_1$. Então escolha $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \delta_1$ sempre que $|x - a| < \delta$.]

15.26 Prove que $x^{n/k}$ é diferenciável. [*Sugestão:* Basta mostrar que $f(x) = x^{1/k}$ ($k > 1$) é diferenciável.] Proceda da seguinte maneira:

(1) Por simples multiplicação, estabeleça que

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

ou

$$\frac{a - b}{a^k - b^k} = \frac{1}{a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}}$$

(2) Substitua $a = (x + h)^{1/k}$ e $b = x^{1/k}$ no passo (1):

$$\frac{(x + h)^{1/k} - x^{1/k}}{h} = \frac{1}{(x + h)^{(k-1)/k} + (x + h)^{(k-2)/k}x^{1/k} + \cdots + (x + h)^{1/k}x^{(k-2)/k} + x^{(k-1)/k}}$$

(3) Faça $h \to 0$ no passo (2).

15.27 Demonstre a regra da cadeia (Teorema 15.3): $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$, onde f é diferenciável em x e g é diferenciável em $f(x)$. [*Sugestão:* Seja $H = g \circ f$. Sejam $y = f(x)$ e $K = f(x + h) - f(x)$. Seja ainda $G(t) = \dfrac{g(y + t) - g(y)}{t} - g'(y)$ para $t \neq 0$. Como $\lim\limits_{t \to 0} G(t) = 0$, faça $G(0) = 0$. Logo, $g(y + t) - g(y) = t(G(t) + g'(y))$ vale para todo t. Quando $t = K$,

$$\begin{aligned} g(y + K) - g(y) &= K(G(K) + g'(y)) \\ g(f(x + h)) - g(f(x)) &= K(G(K) + g'(y)) \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{H(x + h) - H(x)}{h} = \frac{K}{h}(G(K) + g'(y))$$

Mas $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{K}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$. Como $\lim\limits_{h \to 0} K = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} G(K) = 0$.

Portanto, $H'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$.]

Capítulo 16

Derivação Implícita

Uma função é geralmente definida *explicitamente* por meio de uma fórmula.

Exemplos

$$(a)\ \ f(x) = x^2 - x + 2 \qquad (b)\ \ f(x) = \sqrt{x} \qquad (c)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

No entanto, às vezes o valor $y = f(x)$ não é dado por uma fórmula direta.

Exemplos

(*a*) A equação $y^3 - x = 0$ *implicitamente* determina y como uma função de x. Nesse caso, podemos isolar y explicitamente,

$$y^3 = x \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt[3]{x}$$

(*b*) A equação $y^3 + 12y^2 + 48y - 8x + 64 = 0$ é satisfeita quando $y = 2\sqrt[3]{x} - 4$, mas não é fácil encontrar essa solução. Em casos mais complicados, será impossível encontrar uma fórmula para y em termos de x.

(*c*) A equação $x^2 + y^2 = 1$ implicitamente determina *duas* funções de x,

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

A questão sobre quantas funções uma equação determina e sobre as propriedades dessas funções é muito complicada para ser abordada aqui. Devemos nos limitar a aprender um método para encontrar as derivadas de funções determinadas implicitamente por equações.

Exemplo Encontremos a derivada de uma função y determinada pela equação $x^2 + y^2 = 4$. Como y é considerada uma função de x, os dois lados da equação representam a mesma função de x e, assim, devem ter a mesma derivada,

$$D_x(x^2 + y^2) = D_x(4)$$
$$2x + 2yD_x y = 0 \quad \text{[pela regra da cadeia para potências]}$$
$$2yD_x y = -2x$$
$$D_x y = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Portanto, $D_x y$ foi obtida em termos de x e y. Às vezes essa é toda a informação que podemos precisar. Por exemplo, se queremos conhecer o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $(\sqrt{3}, 1)$, então esse coeficiente angular é a derivada

$$D_x y = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

O processo pelo qual $D_x y$ foi calculada, sem primeiramente isolar y, é chamado de *derivação implícita*.

Observe que a equação dada poderia, nesse caso, ser resolvida como

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

e, a partir disso, poderia ser usada a regra da cadeia para potências,

$$D_x y = D_x(\pm(4 - x^2)^{1/2}) = \pm\tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}D_x(4 - x^2)$$
$$= \pm\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) = \pm\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{x}{\mp\sqrt{4 - x^2}}$$

Problemas Resolvidos

16.1 Considere a curva $3x^2 - xy + 4y^2 = 141$.

(*a*) Encontre uma fórmula em termos de x e y para o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto (x,y) da curva.

(*b*) Escreva a equação reduzida da reta tangente à curva no ponto $(1, 6)$.

(*c*) Encontre as coordenadas de todos os outros pontos sobre a curva nos quais o coeficiente angular da reta tangente é o mesmo da reta tangente em $(1, 6)$.

(*a*) Podemos considerar que y é alguma função de x tal que $3x^2 - xy + 4y^2 = 141$. Logo,

$$D_x(3x^2 - xy + 4y^2) = D_x(141)$$
$$6x - D_x(xy) + D_x(4y^2) = 0$$
$$6x - \left(x\frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right) + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$-x\frac{dy}{dx} + 8y\frac{dy}{dx} = y - 6x$$
$$(-x + 8y)\frac{dy}{dx} = y - 6x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 6x}{8y - x}$$

que é o coeficiente angular da reta tangente em (x, y).

(*b*) O coeficiente angular da reta tangente em $(1, 6)$ é obtido pela substituição de x por 1 e de y por 6 no resultado do item (*a*). Logo, o coeficiente angular é

$$\frac{6 - 6(1)}{8(6) - 1} = \frac{6 - 6}{48 - 1} = \frac{0}{47} = 0$$

e a equação reduzida é $y = b = 6$.

(*c*) Se (x,y) é um ponto sobre a curva onde a reta tangente tem coeficiente angular 0, então,

$$\frac{y-6x}{8y-x}=0 \quad \text{ou} \quad y-6x=0 \quad \text{ou} \quad y=6x$$

Substitua y por $6x$ na equação da curva,

$$\begin{aligned} 3x^2 - x(6x) + 4(6x)^2 &= 141 \\ 3x^2 - 6x^2 + 144x^2 &= 141 \\ 141x^2 &= 141 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Portanto, $(-1,-6)$ é outro ponto no qual o coeficiente angular da reta tangente é zero.

16.2 Se $y = f(x)$ é uma função que satisfaz a equação $x^3y^2 - 2x + y^3 = 36$, encontre uma fórmula para a derivada dy/dx.

$$\begin{aligned} D_x(x^3y^2 - 2x + y^3) &= D_x(36) \\ D_x(x^3y^2) - 2D_x(x) + D_x(y^3) &= 0 \\ x^3D_x(y^2) + y^2D_x(x^3) - 2(1) + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 0 \\ x^3\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(3x^2) - 2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 0 \\ (2x^3y + 3y^2)\frac{dy}{dx} &= 2 - 3x^2y^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2-3x^2y^2}{2x^3y+3y^2} \end{aligned}$$

16.3 Se $y = f(x)$ é uma função diferenciável satisfazendo a equação $x^2y^3 - 5xy^2 - 4y = 4$ e se $f(3) = 2$, determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 2)$.

$$\begin{aligned} D_x(x^2y^3 - 5xy^2 - 4y) &= D_x(4) \\ x^2(3y^2y') + y^3(2x) - 5(x(2yy') + y^2) - 4y' &= 0 \\ 3x^2y^2y' + 2xy^3 - 10xyy' - 5y^2 - 4y' &= 0 \end{aligned}$$

Substitua x por 3 e y por 2,

$$\begin{aligned} 108y' + 48 - 60y' - 20 - 4y' &= 0 \\ 44y' + 28 &= 0 \\ y' &= -\frac{28}{44} = -\frac{7}{11} \end{aligned}$$

Desse modo, o coeficiente angular da reta tangente em $(3, 2)$ é $-\frac{7}{11}$.

Problemas Complementares

16.4 (*a*) Encontre uma fórmula para o coeficiente angular da reta tangente à curva $x^2 - xy + y^2 = 12$ em qualquer ponto (x,y). Além disso, encontre as coordenadas de todos os pontos na curva onde a reta tangente é: (*b*) horizontal; (*c*) vertical.

16.5 Considere a hipérbole $5x^2 - 2y^2 = 130$.

(*a*) Determine uma fórmula para o coeficiente angular da reta tangente a essa hipérbole em (x,y).

(*b*) Para qual(is) valor(es) de k que a reta $x - 3y + k = 0$ será normal à hipérbole no ponto de interseção?

16.6 Calcule y' por derivação implícita.

(*a*) $x^2 + y^2 = 25$ (*b*) $x^3 = \dfrac{2x + y}{2x - y}$ (*c*) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

(*d*) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (*e*) $x^3 - y^3 = 2xy$ (*f*) $(7x - 1)^3 = 2y^4$

(*g*) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (*h*) $y + xy^3 = 2x$ (*i*) $x^2 = \dfrac{x + y}{x - y}$

16.7 Use derivação implícita para encontrar a equação reduzida da reta tangente no ponto indicado.

(*a*) $y^3 - xy = 2$ em $(3,2)$ (*b*) $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$ em $\left(2, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(*c*) $(y - x)^2 + y^3 = xy + 7$ em $(1,2)$ (*d*) $x^3 - y^3 = 7xy$ em $(4,2)$

(*e*) $4xy^2 + 98 = 2x^4 - y^4$ em $(3,2)$ (*f*) $4x^3 - xy - 2y^3 = 1$ em $(1,1)$

(*g*) $\dfrac{x^3 - y}{1 - y^3} = x$ em $(1,-1)$ (*h*) $2y = xy^3 + 2x^3 - 3$ em $(1,-1)$

16.8 Use derivação implícita para encontrar a equação reduzida da reta normal no ponto indicado.

(*a*) $y^3x + 2y = x^2$ em $(2,1)$ (*b*) $2x^3y + 2y^4 - x^4 = 2$ em $(2,1)$

(*c*) $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 12$ em $(9,16)$ (*d*) $x^2 + y^2 = 25$ em $(3,4)$

16.9 Use derivação implícita para encontrar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$ em $x = \frac{7}{16}$. [*Sugestão:* Elimine as raízes elevando ao quadrado duas vezes.]

Capítulo 17

O Teorema do Valor Médio e o Sinal da Derivada

17.1 TEOREMA DE ROLLE E O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Consideremos uma função f que é contínua sobre um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável em todos os pontos do intervalo aberto (a, b). Suponhamos também que $f(a) = f(b) = 0$. Gráficos de alguns exemplos de funções desse tipo são exibidos na Fig. 17-1. Parece claro que sempre deve haver algum ponto entre $x = a$ e $x = b$ no qual a reta tangente é horizontal e, portanto, onde a derivada de f é 0.

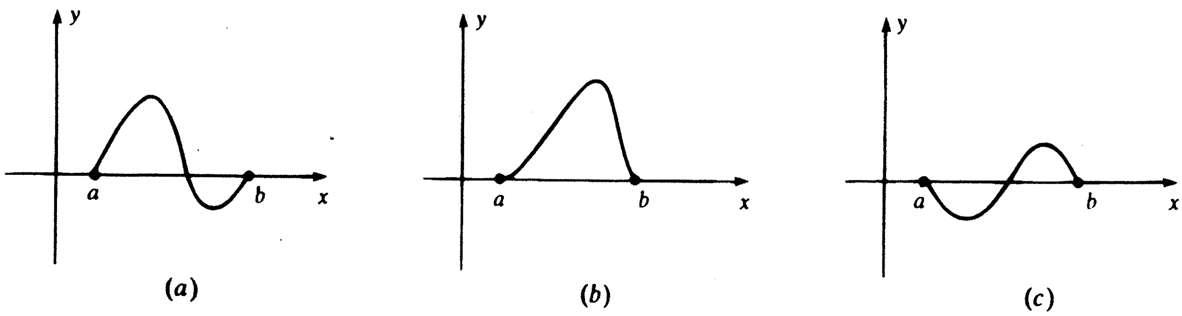


Fig. 17-1

Teorema 17-1 (*Teorema de Rolle*): Se f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, diferenciável no intervalo aberto (a, b) e se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Ver Problema 17.6 para a demonstração.

O teorema de Rolle nos permite demonstrar o seguinte teorema básico (que é também chamado de *lei do valor médio para derivadas*).

Teorema 17-2 (*Teorema do Valor Médio*): Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b). Então existe um ponto c no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para uma demonstração, ver Problema 17.7.

Exemplo Em termos gráficos, o teorema do valor médio estabelece que em algum ponto ao longo de um arco de uma curva, a reta tangente é paralela à reta que conecta o ponto inicial e o ponto final do arco. Isso pode ser visto na Fig. 17-2, onde há três pontos (c_1, c_2 e c_3) entre a e b nos quais o coeficiente angular $f'(c)$ da reta tangente ao gráfico é igual ao coeficiente angular da reta AB, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

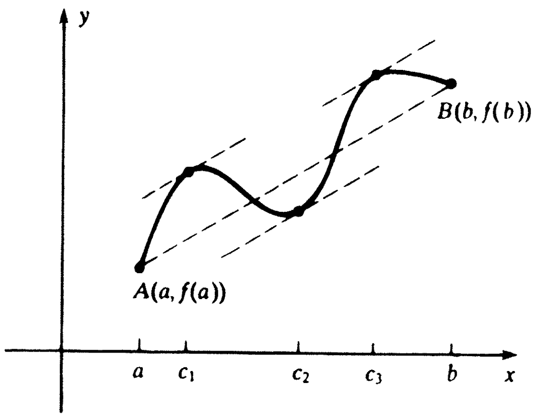
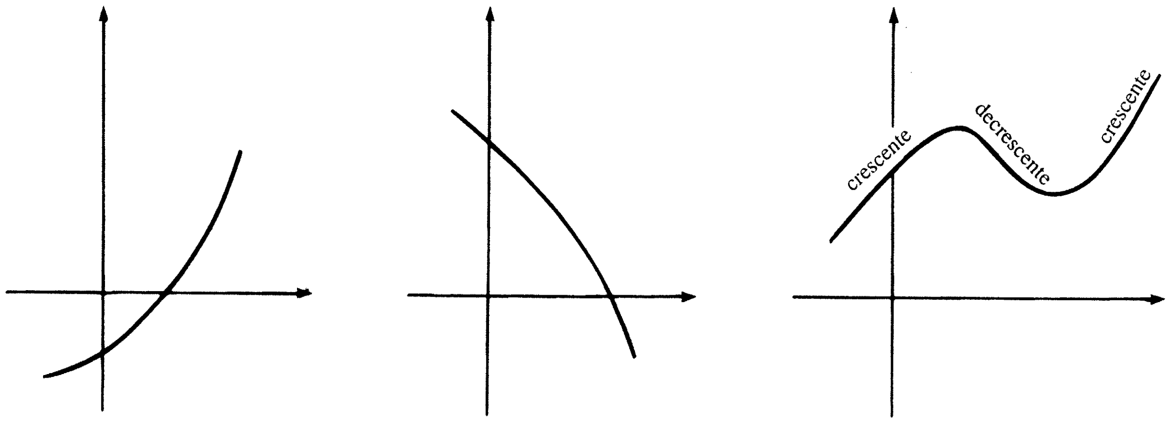


Fig. 17-2

17.2 O SINAL DA DERIVADA

Uma função f é dita *crescente* em um conjunto $\mathscr{A}$ se, para quaisquer u e v em $\mathscr{A}$, $u < v$ implica que $f(u) < f(v)$. Analogamente, f é *decrescente* em um conjunto $\mathscr{A}$ se, para quaisquer u e v em $\mathscr{A}$, $u < v$ implica que $f(u) > f(v)$.

Naturalmente, em um dado conjunto, uma função não é necessariamente crescente ou decrescente (ver Fig. 17-3).



(a) Crescente (b) Decrescente (c) Mista

Fig. 17-3

Teorema 17-3 Se $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto (a, b), então f é crescente em (a, b). Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f é decrescente em (a, b).

Para a demonstração, ver Problema 17.8. A recíproca do Teorema 17.3 não vale. De fato, a função $f(x) = x^3$ é diferenciável e crescente em $(-1, 1)$ — e em toda a reta — mas $f'(x) = 3x^2$ é zero em $x = 0$ [ver Fig. 7-3(b)].
A próxima propriedade importante de funções contínuas será freqüentemente útil.

Teorema 17-4 (*Teorema do Valor Intermediário*): Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ com $f(a) \neq f(b)$. Então qualquer número entre $f(a)$ e $f(b)$ é o valor de f para algum ponto entre a 0 e b.

Apesar do Teorema 17.4 não ser elementar, seu enunciado é intuitivamente óbvio. A função não poderia "saltar" um valor intermediário a menos que existisse uma quebra no gráfico; ou seja, a menos que a função fosse descontínua. Como ilustrado na Fig. 17-4, uma função f que satisfaz o Teorema 17.4 pode também assumir valores que não estão entre $f(a)$ e $f(b)$. Provamos no Problema 17.9:

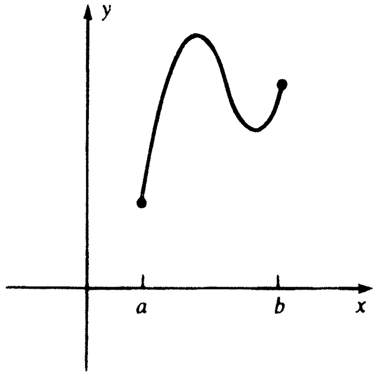


Fig. 17-4

Corolário 17-5 Se f é uma função contínua com domínio $[a, b]$, então a imagem de f é um intervalo fechado ou um ponto*.

Problemas Resolvidos

17.1 Verifique o teorema de Rolle para $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ no intervalo $[1, 3]$.

f é diferenciável em todos os pontos e, portanto, é também contínua. Além disso,

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$$
$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$$

de modo que todas as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas. Deve, portanto, haver algum c em $(1,3)$ no qual $f'(c) = 0$.

Mas, pela fórmula quadrática, as raízes de $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0$ são

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\sqrt{3}}{6}$$
$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Considere a raiz $c = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Como $\sqrt{3}, < 3$

$$1 < 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} < 1 + \frac{2}{3}(3) = 1 + 2 = 3$$

Portanto, c está em $(1, 3)$ e $f'(c) = 0$.

17.2 Verifique o teorema do valor médio para $f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 30$ no intervalo $[4, 6]$.

f é diferenciável e, portanto, contínua em todo x.

$$f(6) = (6)^3 - 6(6)^2 - 4(6) + 30 = 216 - 216 - 24 + 30 = 6$$
$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 - 4(4) + 30 = 64 - 96 - 16 + 30 = -18$$

logo,

$$\frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6 - (-18)}{6 - 4} = \frac{24}{2} = 12$$

Devemos, portanto, encontrar algum c em $(4, 6)$ tal que $f'(c) = 12$.

Mas, $f'(x) = 3x^2 - 12x - 4$ de forma que c será uma solução de

$$3x^2 - 12x - 4 = 12 \qquad \text{ou} \qquad 3x^2 - 12x - 16 = 0$$

Pela fórmula quadrática,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(3)(-16)}}{2(3)} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 192}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{336}}{6}$$
$$= \frac{12 \pm \sqrt{16}\sqrt{21}}{6} = \frac{12 \pm 4\sqrt{21}}{6} = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{21}$$

* N. de T.: Alguns autores se referem a pontos como intervalos fechados degenerados, ou seja, da forma $[a, a]$.

Escolha $c = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{21}$. Como $4 < \sqrt{21} < 5$,

$$4 < 2 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}(4) < 2 + \frac{2}{3}\sqrt{21} < 2 + \frac{2}{3}(5) < 2 + 4 = 6$$

Assim, c está em $(4, 6)$ e $f'(c) = 12$.

17.3 Determine quando a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ é crescente e quando é decrescente e esboce seu gráfico.

Temos $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$. Os pontos cruciais são 1 e 3 [ver Fig. 17-5(a)].

(i) Quando $x < 1$, ambos $(x - 1)$ e $(x - 3)$ são negativos e assim $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$.

(ii) Quando x se move de $(-\infty, 1)$ para $(1, 3)$, o fator $(x - 1)$ muda de negativo para positivo, mas $(x - 3)$ permanece negativo. Logo, $f'(x) < 0$ em $(1, 3)$.

(iii) Quando x se move de $(1, 3)$ para $(3, \infty)$, $(x - 3)$ muda de negativo para positivo, mas $(x - 1)$ se mantém positivo. Logo, $f'(x) > 0$ em $(3, \infty)$.

Assim, pelo Teorema 17.3, f é crescente para $x < 1$, decrescente para $1 < x < 3$ e crescente para $x > 3$. Observe que $f(1) = 6, f(3) = 3, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Um esboço aproximado do gráfico é exibido na Fig. 17-5(b).

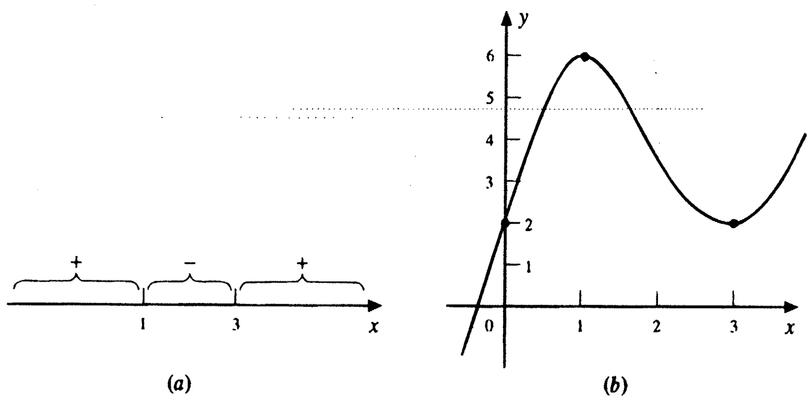


Fig. 17-5

17.4 Verifique o teorema de Rolle para $f(x) = 2x^6 - 8x^5 + 6x^4 - x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ em $[1, 3]$.

f é diferenciável em todos os pontos e

$$f(1) = 2 - 8 + 6 - 1 + 6 - 11 + 6 = 0$$
$$f(3) = 1458 - 1944 + 486 - 27 + 54 - 33 + 6 = 0$$

É difícil determinar um valor de x em $(1, 3)$ no qual

$$f'(x) = 12x^5 - 40x^4 + 24x^3 - 3x^2 + 12x - 11 = 0$$

No entanto, $f'(x)$ é ela própria uma função contínua tal que

$$f'(1) = 12 - 40 + 24 - 3 + 12 - 11 = -6 < 0$$
$$f'(3) = 2916 - 3240 + 648 - 27 + 36 - 11 = 322 > 0$$

Logo, o teorema do valor intermediário nos garante que deve existir algum número c entre 1 e 3 no qual $f'(c) = 0$.

17.5 Mostre que $f(x) = 2x^3 + x - 4 = 0$ admite exatamente uma solução real.

Como $f(0) = -4$ e $f(2) = 16 + 2 - 4 = 14$, o teorema do valor intermediário garante que f tem um zero entre 0 e 2 o qual denotamos por x_0.

Como $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, $f(x)$ é crescente em todo o seu domínio (Teorema 17.3). Portanto, quando $x > x_0$, $f(x) > 0$; e quando $x < x_0$, $f(x) < 0$. Em outras palavras, não existe outro zero além de x_0.

17.6 Prove o teorema de Rolle (Teorema 17.1).

Caso 1: $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$. Então $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b), uma vez que a derivada de uma função constante é 0.

Caso 2: $f(x) > 0$ para algum x em (a, b). Logo, pelo teorema do valor extremo (Teorema 14.2), existe um máximo absoluto de f em $[a, b]$ e deve ser positivo [já que $f(x) > 0$ para algum x em (a, b)]. Como $f(a) = f(b) = 0$, o máximo é atingido em algum ponto c no intervalo aberto (a,b). Desse modo, o máximo absoluto é também um máximo relativo e, pelo Teorema 14.1, $f'(c) = 0$.

Caso 3: $f(x) < 0$ para algum x em (a, b). Seja $g(x) = -f(x)$. Então, pelo Caso 2, $g'(c) = 0$ para algum c em (a, b). Conseqüentemente, $f'(c) = -g'(c) = 0$.

17.7 Prove o teorema do valor médio (Teorema 17.2).

Seja

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Então g é contínua sobre $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Além disso,

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = f(a) - 0 - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = f(b) - (f(b) - f(a)) - f(a)$$
$$= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

Pelo teorema de Rolle, aplicado em g, existe c em (a,b) tal que $g'(c) = 0$. Mas,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

logo,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ou} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

17.8 Demonstre o Teorema 17.3

Considere que $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b) e que $a < u < v < b$. Devemos mostrar que $f(u) < f(v)$. Pelo teorema do valor médio, aplicado a f no intervalo fechado $[u, v]$, existe um número c em (u, v) tal que

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \quad \text{ou} \quad f(v) - f(u) = f'(c)(v - u)$$

Mas $f'(c) > 0$ e $v - u > 0$; logo, $f(v) - f(u) > 0$, $f(u) < f(v)$.

O caso $f'(x) < 0$ é analisado de maneira semelhante.

17.9 Prove o Corolário 17.5.

Pelo teorema do valor extremo, f tem um valor máximo absoluto $f(d)$ em algum argumento d em $[a, b]$ e um valor mínimo absoluto $f(c)$ em algum argumento c em $[a, b]$. Se $f(c) = f(d) = k$, então f é constante em $[a, b]$ e sua imagem é formada apenas pelo ponto k. Se $(c) \neq f(d)$, então o teorema do valor intermediário, aplicado ao subintervalo fechado delimitado por d e c, garante que f assume qualquer valor entre $f(c)$ e $f(d)$. A imagem de f é então o intervalo fechado $[f(c), f(d)]$ (que inclui os valores assumidos naquela parte de $[a, b]$ que está fora do subintervalo).

Problemas Complementares

17.10 Determine se as hipóteses do teorema de Rolle valem para cada função f e, se for o caso, verifique a conclusão do teorema.

(*a*) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ em $[-1, 3]$

(*b*) $f(x) = x^3 - x$ em $[0, 1]$

(*c*) $f(x) = 9x^3 - 4x$ em $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

(*d*) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ em $[1, 1 + \sqrt{2}]$

(*e*) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}$ em $[-2, 3]$

(*f*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ -6 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ em $[-2, 3]$

(*g*) $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$ em $[0, 8]$

(*h*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ em $[0, 2]$

17.11 Verifique que as hipóteses do teorema do valor médio valem para cada função f no intervalo dado e encontre um valor c satisfazendo a conclusão do teorema.

(*a*) $f(x) = 2x + 3$ em $[1, 4]$ (*b*) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ em $[2, 5]$

(*c*) $f(x) = x^{3/4}$ em $[0, 16]$ (*d*) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$ em $[1, 3]$

(*e*) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ em $[-3, 4]$ (*f*) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ em $[0, 2]$

17.12 Determine onde a função f é crescente e onde é decrescente. Então esboce o gráfico de f.

(*a*) $f(x) = 3x + 1$ (*b*) $f(x) = -2x + 2$ (*c*) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

(*d*) $f(x) = 1 - 4x - x^2$ (*e*) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (*f*) $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$

(*g*) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ (*h*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (*i*) $f(x) = x^3 - 12x + 20$

17.13 Seja f uma função diferenciável tal que $f'(x) \neq 0$ para todo x no intervalo aberto (a, b). Prove que existe no máximo um zero de $f(x)$ em (a, b). [*Sugestão:* Suponha, por absurdo*, que c e d são dois zeros de f, com $a < c < d < b$ e aplique o teorema de Rolle no intervalo $[c, d]$.]

17.14 Considere o polinômio $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

(*a*) Mostre que f tem um zero entre 0 e 1.

(*b*) Mostre que f admite apenas um zero real. [*Sugestão:* Use o Problema 17.13.]

17.15 Considere que f é contínua sobre $[0,1]$ e assuma que $f(0) = f(1)$. Qual(is) das seguintes sentenças deve(m) ser verdadeira(s)?

(*a*) Se f tem um máximo absoluto em c pertencente a $(0, 1)$, então $f'(c) = 0$.

(*b*) f' existe em $(0, 1)$.

(*c*) $f'(c) = 0$ para algum c em $(0, 1)$.

(*d*) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ para todo c em $(0, 1)$.

(*e*) f tem um máximo absoluto em algum ponto c de $(0,1)$.

17.16 Seja f e g funções diferenciáveis.

(*a*) Se $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, onde $a < b$, mostre que $f'(c) = g'(c)$ para algum c em (a, b).

(*b*) Se $f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) > g'(x)$ para todo x, mostre que $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$.

(*c*) Se $f'(x) > g'(x)$ para todo x, mostre que os gráficos de f e g se interceptam no máximo uma vez. [*Sugestão*: em cada parte, aplique o teorema apropriado para a função $h(x) = f(x) - g(x)$.]

17.17 Seja f uma função diferenciável em um intervalo aberto (a,b).

(*a*) Se f é crescente em (a, b), prove que $f'(x) \geq 0$ para todo x em (a, b).

[*Sugestão*: Use $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ e o Problema 9.10(*a*).]

(*b*) Se f é decrescente em (a, b), prove que $f'(x) \leq 0$ para todo x em (a, b).

17.18 O teorema do valor médio prevê a existência de qual ponto do gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ entre $(27, 3)$ e $(125, 5)$?

17.19 (*Teorema de Rolle generalizado*) Assuma que f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a,b). Se $f(a) = f(b)$, prove que existe um ponto c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$. [*Sugestão*: Aplique o teorema de Rolle para $g(x) = f(x) - f(a)$.]

17.20 Sejam $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e $g(x) = 1$ para todo x.

(*a*) Encontre a intercessão dos gráficos de f e g.

(*b*) Determine os zeros de f.

(*c*) Se o domínio de f é restrito ao intervalo fechado $[0, 3]$, qual seria a imagem de f?

* N. de T.: Supor algo por absurdo significa supor uma hipótese que mais tarde se verificará conduzir a uma contradição.

17.21 Prove que $8x^3 - 6x^2 - 2x + 1$ tem um zero entre 0 e 1. [*Sugestão*: Aplique o teorema de Rolle para a função $2x^4 - 2x^3 - x^2 + x$.]

17.22 Mostre que $x^3 + 2x - 5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

17.23 Prove que a equação $x^4 + x = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo [0, 1].

17.24 Encontre um ponto do gráfico de $y = x^2 + x + 3$, entre $x = 1$ e $x = 2$, onde a reta tangente é paralela à reta que conecta (1, 5) e (2, 9).

17.25 (*a*) Mostre que $f(x) = x^5 + 5 - 1$ tem exatamente um zero real.

(*b*) CG Localize o zero real de $x^5 + 5 - 1$ com aproximação de uma casa decimal.

17.26 (*a*) CG Use uma calculadora gráfica para estimar os intervalos nos quais a função $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 4$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

(*b*) O mesmo que foi pedido no item (*a*), mas para a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Capítulo 18

Movimento Retilíneo e Velocidade Instantânea

Movimento retilíneo é o movimento ao longo de uma linha reta. Considere, por exemplo, um automóvel movendo-se ao longo de uma estrada reta. Podemos imaginar um sistema de coordenadas colocado sobre a reta contendo a estrada (ver Fig. 18-1). (Em muitas auto-estradas existe na verdade um sistema de coordenadas com marcadores ao longo da beira da estrada indicando a distância de um extremo da estrada.) Se s designa a coordenada do automóvel e t denota tempo, então o movimento do automóvel é dado expressando s, sua posição, como uma função de t: $s = f(t)$.

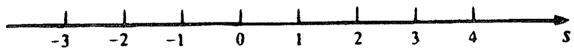


Fig. 18-1

O velocímetro indica quão rápido o automóvel está se movendo. Como a leitura do velocímetro geralmente varia bastante, é claro que o velocímetro indica a rapidez com que o carro está se movendo *no momento* em que é lido. Vamos analisar essa noção para encontrar o conceito matemático que está por trás disso.

Se o automóvel se move de acordo com a equação $s = f(t)$, sua posição no instante t é $f(t)$, e no instante $t + h$, muito próximo de t, sua posição é $f(t + h)$. A distância[1] entre sua posição no instante t e sua posição em $t + h$ é $f(t + h) - f(t)$ (que pode ser negativa). O tempo decorrido entre t e $t + h$ é h. Logo, a *velocidade média* durante esse intervalo de tempo é

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

(Velocidade média = deslocamento ÷ tempo.) Mas quando o tempo decorrido h se aproxima de 0, a velocidade média se aproxima daquilo que intuitivamente imaginamos como a *velocidade instantânea* v no instante t. Portanto,

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Em outras palavras, a velocidade instantânea v é a derivada $f'(t)$.

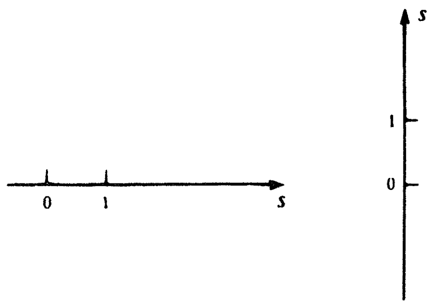
[1] Mais precisamente, o *deslocamento*, uma vez que pode ser positivo, negativo ou zero.

Exemplos

(*a*) A altura s de uma coluna de água é observada seguindo a lei $s = f(t) = 3t + 2$. Portanto, a velocidade instantânea v no topo é $f'(t) = 3$.

(*b*) A posição s de um automóvel ao longo de uma rodovia é dada por $s = f(t) = t^2 - 2t$. Logo, sua velocidade instantânea é $v = f'(t) = 2t - 2$. No instante $t = 3$, sua velocidade v é $2(3) - 2 = 4$.

O sinal da velocidade instantânea v indica a direção na qual o objeto está se movendo. Se $v = ds/dt > 0$ em um intervalo de tempo, o Teorema 17.3 nos diz que s é crescente naquele intervalo. Portanto, se o eixo s é horizontal e direcionado para a direita, como na Fig. 18-2(*a*), então o objeto está se movendo para a direita; mas se o eixo s é vertical e dirigido para cima, como na Fig. 18-2(*b*), então o objeto está se movendo para cima.



(*a*) (*b*)

Fig. 18-2

Por outro lado, se $v = ds/dt < 0$ em um intervalo de tempo, então s deve ser decrescente naquele intervalo. Na Fig. 18-2(*a*), o objeto estaria se movendo para a esquerda (na direção decrescente de s); na Fig. 18-2(*b*), o objeto estaria se movendo para baixo.

Uma conseqüência desses fatos é que *em um instante t quando um objeto movendo-se continuamente muda a direção, sua velocidade instantânea v deve ser* 0. Pois se v fosse, digamos, positiva em t, seria positiva em um pequeno intervalo de tempo em torno de t; o objeto estaria portanto se movendo na mesma direção um pouco antes e um pouco depois de t. Ou, em outros termos, uma mudança na direção significa um extremo relativo de s, que por sua vez implica (Teorema 14.1) em $ds/dt = 0$.

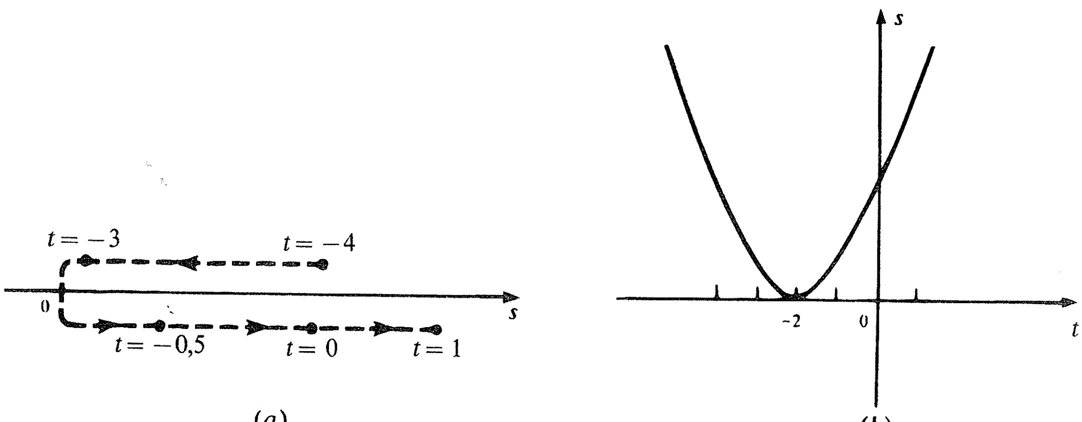
Exemplo Um objeto se move ao longo de uma reta como indicado na Fig. 18-3(*a*). Na forma de função,

$$s = f(t) = (t + 2)^2 \quad [s \text{ em metros, } t \text{ em segundos}]$$

como representado na Fig. 18-3(*b*). A velocidade instantânea do objeto é

$$v = f'(t) = 2(t + 2) \quad [\text{metros por segundo}]$$

Para $t + 2 < 0$ ou $t < -2$, v é negativa e o objeto está se movendo para a esquerda; para $t + 2 > 0$ ou $t > -2$, v é positiva e o objeto está se movendo para a direita. O objeto muda de direção em $t = -2$, e nesse instante $v = 0$. [Observe que $f(t)$ tem um mínimo relativo em $t = -2$.]



(*a*) (*b*)

Fig. 18-3

Queda Livre

Considere um objeto que foi arremessado na vertical para cima ou para baixo, ou foi largado do repouso, e que sofre apenas a atração gravitacional da Terra. O conseqüente movimento retilíneo é chamado de *queda livre*.

Consideremos um sistema de coordenadas sobre a reta vertical ao longo da qual o objeto se move, tal que o eixo s é orientado para cima, a partir da Terra, com $s = 0$ localizado na superfície da Terra (Fig. 18-4).

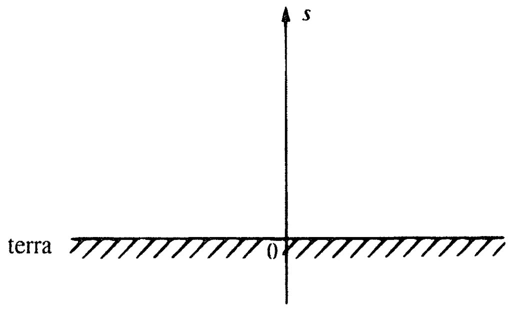


Fig. 18-4

Então a equação de queda livre é

$$s = s_0 + v_0 t - 16t^2 \tag{18.1}$$

onde s é medido em pés e t em segundos[2]. Aqui s_0 e v_0 são, respectivamente, a posição (altura) e a velocidade do objeto no instante $t = 0$. A velocidade instantânea v é obtida derivando (*18.1*),

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - 32t \tag{18.2}$$

Exemplos

(*a*) Em $t = 0$, uma pedra é solta a partir do repouso do alto de um prédio de 256 pés de altura. Quando e com qual velocidade que ela atinge o solo?

Com $s_0 = 256$ e $v_0 = 0$, (*18.1*) fica $s = 256 - 16t^2$ e o momento em que atinge o solo é dado pela solução de

$$\begin{aligned} 0 &= 256 - 16t^2 \\ 16t^2 &= 256 \\ t^2 &= 16 \\ t &= \pm 4 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Já que estamos assumindo que o movimento ocorre quando $t \geq 0$, a única solução é $t = 4$ segundos.

A equação da velocidade (*18.2*) é $v = -32t$ e, assim, para $t = 4$,

$$v = -32(4) = -128 \text{ pés por segundo}$$

o sinal negativo indica que a pedra move-se para baixo quando atinge o solo.

ÁLGEBRA x pés por segundo $= 60x$ pés por minutos

$$\begin{aligned} &= 60(60x) \text{ pés por hora} \\ &= \frac{3600x}{5280} \text{ milhas por hora} \\ &= \frac{15}{22} x \text{ milhas por hora} \end{aligned}$$

Por exemplo, 128 pés por segundo $= \frac{15}{22}(128) = 87\frac{3}{11}$ milhas por hora.

(*b*) Um foguete é disparado verticalmente do solo com uma velocidade inicial de 96 pés por segundo. Quando o foguete atinge sua altura máxima e qual é essa altura máxima?

Com $s_0 = 0$ e $v_0 = 96$, (*18.1*) e (*18.2*) ficam

$$s = 96t - 16t^2 \quad \text{e} \quad v = \frac{ds}{dt} = 96 - 32t$$

[2] Se a posição é medida em metros, a equação ficas $s = s_0 + v_0 t - 4{,}9t^2$

Em um valor máximo, ou ponto de retorno, $v = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= 96 - 32t \\ 32t &= 96 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Portanto, leva 3 segundos para o foguete atingir sua altura máxima, que é

$$s = 96(3) - 16(3)^2 = 288 - 16(9) = 288 - 144 = 144 \text{ pés}$$

(*c*) Quando o foguete do item (*a*) atinge o solo?

Basta fazer $s = 0$ na equação de queda livre (*18.1*),

$$\begin{aligned} 0 &= 96t - 16t^2 \\ 0 &= 6t - t^2 \qquad \text{[divida por 16]} \\ 0 &= t(6 - t) \end{aligned}$$

da qual $t = 0$ ou $t = 6$. Logo, o foguete atinge o solo novamente depois de 6 segundos.

Observe que o foguete subiu em 3 segundos até sua altura máxima, e então levou mais 3 segundos para cair de volta ao solo. Em geral, o vôo para cima do ponto P ao ponto Q levará exatamente o mesmo tempo que o vôo para baixo de Q a P. Além disso, o foguete retornará com a mesma velocidade (em magnitude) que tinha ao deixar o solo.

Problemas Resolvidos

18.1 Uma pedra é arremessada para baixo do alto de uma torre de 80 pés. Se a velocidade inicial é de 64 pés por segundo, quanto tempo leva para atingir o solo e com que velocidade atinge o solo?

Aqui $s_0 = 80$ e $v_0 = -64$. (O sinal negativo para v_0 indica que o objeto está se movendo para baixo.) Logo,

$$s = 80 - 64t - 16t^2 \qquad \text{e} \qquad v = \frac{ds}{dt} = -64 - 32t$$

A pedra atinge o solo quando $s = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= 80 - 64t - 16t^2 \\ 0 &= t^2 + 4t - 5 \qquad \text{[divida por } -16] \\ 0 &= (t + 5)(t - 1) \\ t + 5 = 0 \quad &\text{ou} \quad t - 1 = 0 \\ t = -5 \quad &\text{ou} \quad t = 1 \end{aligned}$$

Como o tempo de queda deve ser positivo, $t = 1$ segundo. A velocidade v quando a pedra atinge o solo é

$$v(1) = -64 - 32(1) = -64 - 32 = -96 \text{ pés por segundo}$$

De acordo com (*18.3*), 96 pés por segundo $= \frac{15}{22}(96) = 65\frac{15}{22}$ milhas por hora.

18.2 Um foguete, é disparado em linha reta para cima a partir do solo e alcança uma altura de 256 pés depois de 2 segundos. Qual era sua velocidade inicial, qual será sua altura máxima e quando alcançará sua altura máxima?

Como $s_0 = 0$,

$$s = v_0 t - 16t^2 \qquad \text{e} \qquad v = \frac{ds}{dt} = v_0 - 32t$$

Quando $t = 2$, $s = 256$,

$$\begin{aligned} 256 &= v_0(2) - 16(2)^2 \\ 256 &= 2v_0 - 64 \\ 320 &= 2v_0 \\ 160 &= v_0 \end{aligned}$$

A velocidade inicial foi de 160 pés por segundo, de modo que

$$s = 160t - 16t^2 \qquad \text{e} \qquad v = 160 - 32t$$

Para determinar o momento quando a altura máxima é atingida, faça $v = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= 160 - 32t \\ 32t &= 160 \\ t &= 5 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Para encontrar a altura máxima, substitua $t = 5$ na fórmula para s,

$$s = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 16(25) = 800 - 400 = 400 \text{ pés}$$

18.3 Um carro se move ao longo de uma estrada reta de acordo com a equação

$$s = f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$$

Descreva seu movimento indicando quando e onde o carro está se movendo para a direita e quando e onde está se movendo para a esquerda. Quando o carro está em repouso?

Temos $v = f'(t) = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t^2 - t - 2) = 6(t - 2)(t + 1)$. Os pontos chaves são $t = 2$ e $t = -1$ (ver Fig. 18-5).

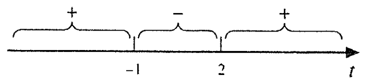


Fig. 18-5

(i) Quando $t > 2$, $t - 2$ e $t + 1$ são positivos. Assim, $v > 0$ e o carro está se movendo para a direita.

(ii) Quando t se move de $(2, \infty)$, em $t = 2$, para $(-1, 2)$, o sinal de $t - 2$ muda, mas o sinal de $t + 1$ permanece o mesmo. Logo, v muda de positivo para negativo. Portanto, para $-1 < t < 2$, o carro está se movendo para a esquerda.

(iii) Quando t se move em $t = -1$ de $(-1, 2)$ para $(-\infty, -1)$ o sinal de $t + 1$ muda mas o sinal de $t - 2$ permanece o mesmo. Logo, v muda do negativo para positivo. Assim, o carro está se movendo para a direita quanto $t < -1$.

Quando $t = -1$,

$$s = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$$

Quando $t = 2$

$$s = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) = 16 - 12 - 24 = -20$$

Portanto, o carro se move para a direita até, em $t = -1$, alcançar $s = 7$, onde muda a direção e se move para a esquerda até, em $t = 2$, alcançar $s = -20$, onde muda de direção novamente e mantém o movimento para a direita sempre (ver Fig. 18-6).

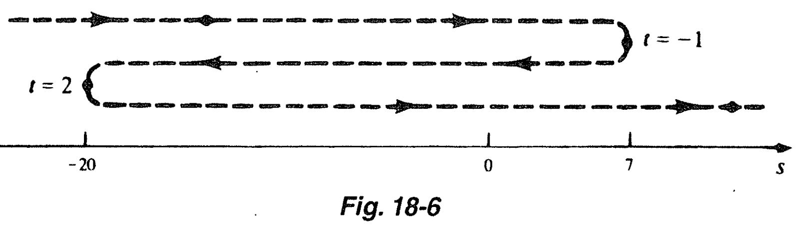


Fig. 18-6

O carro nunca está em repouso. Faz sentido falar sobre o carro estar em repouso somente quando a posição do carro é constante durante um intervalo do tempo (não apenas em um único ponto). Em tal caso, a velocidade seria zero em um intervalo todo.

Problemas Complementares

18.4 (*a*) Se um objeto é largado a partir do repouso de uma dada altura, mostre que, após t segundos, percorreu $16t^2$ pés (assumindo que não tenha ainda atingido o solo).

(*b*) Quantos segundos leva o objeto no item (*a*) para cair: (i) 1 pé; (ii) 16 pés; (iii) 64 pés; (iv) 100 pés?

18.5 Uma pedra é largada em um poço que tem 256 pés de profundidade. Quando baterá no fundo do poço?

18.6 Assumindo que um andar de um prédio tem 10 pés, com qual velocidade, em milhas por hora, que um objeto abandonado do alto do quadragésimo andar atinge o solo?

18.7 Um foguete é lançado em linha reta para cima com uma velocidade inicial de 128 pés por segundo.

(*a*) Quanto viajou em 1 segundo? Em 2 segundos? (*b*) Quando atinge sua altura máxima? (*c*) Qual é a sua altura máxima? (*d*) Quando atinge o solo? (*e*) Qual é sua velocidade quando atinge o solo?

18.8 Uma rocha é lançada para baixo de uma altura de 480 pés com uma velocidade inicial de 16 pés por segundo.

(*a*) Quanto tempo leva para atingir o solo? (*b*) Com qual velocidade que atinge o solo? (*c*) Quanto tempo demora até a pedra se mover com uma velocidade de 112 pés por segundo? (*d*) Quanto tempo demora a pedra para percorrer uma distância de 60 pés?

18.9 Um automóvel se move ao longo de uma rodovia reta, com sua posição dada por $s = 12t^3 - 18t^2 + 9t - \frac{3}{2}$ [s em milhas, t em horas].

(*a*) Descreva o movimento do carro: quando está se movendo para a direita, quando se move para a esquerda e onde e quando muda de direção.

(*b*) Qual a distância percorrida em 1 hora de $t = 0$ a $t = 1$?

18.10 A posição de um objeto se movendo sobre uma reta é dada pela fórmula $s = (t - 1)^3(t - 5)$.

(*a*) Quando o objeto está se movendo para a direita? (*b*) Quando está se movendo para a esquerda? (*c*) Quando muda de direção? (*d*) Quando está em repouso? (*e*) Qual a maior distância percorrida para a esquerda a partir da origem?

18.11 Uma partícula se move ao longo de uma reta de modo que sua posição s (em milhas) no instante t (em horas) é dada por $s = (4t - 1)(t - 1)^2$.

(*a*) Quando a partícula está se movendo para a direita? (*b*) Quando a partícula está se movendo para a esquerda? (*c*) Quando muda de direção? (*d*) Quando a partícula está se movendo para a esquerda, qual é a *velocidade instantânea* máxima (em valor absoluto) que atinge?

18.12 Uma partícula se move ao longo do eixo x de acordo com a equação $x = 10t - 2t^2$. Qual é a distância *total* percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 3$?

18.13 Um foguete foi lançado para cima a partir do solo. Qual deve ter sido a sua velocidade inicial se retornou para a Terra em 20 segundos?

18.14 Duas partículas se movem ao longo do eixo x. Suas posições $f(t)$ e $g(t)$ são dadas por $f(t) = 6t - t^2$ e $g(t) = t^2 - 4t$.

(*a*) Quando elas têm a mesma posição? (*b*) Quando têm a mesma velocidade? (*c*) Quando elas têm a mesma posição, estão se movendo na mesma direção?

18.15 Uma pedra é largada e atinge o solo com uma velocidade de – 49 metros por segundo. (*a*) Quanto tempo levou para cair? (*b*) Determine a altura da qual foi abandonada.

18.16 Uma bola é lançada verticalmente para cima do alto de uma torre de 96 pés. Dois segundos depois, a velocidade da bola é 16 pés por segundo. Determine: (*a*) a altura máxima que a bola atinge; (*b*) A velocidade da bola quando atinge o solo.

Capítulo 19

Taxa de Variação Instantânea

Uma quantidade y pode estar relacionada com outra quantidade x por uma função f: $y = f(x)$. Uma variação no valor de x geralmente induz uma correspondente variação no valor de y.

Exemplo Seja x o comprimento do lado de um cubo, e seja y o volume do cubo. Então $y = x^3$. No caso em que o lado tem comprimento $x = 2$ unidades, considere uma pequena variação Δx no comprimento.

NOTAÇÃO Δx (leia-se "delta x") é o símbolo tradicional em cálculo para uma pequena variação em x. Δx é considerado como um único símbolo, e *não* um produto de Δ com x. Nos capítulos anteriores, o papel de Δx freqüentemente foi assumido pelo símbolo h.

O novo volume será $(2 + \Delta x)^3$ e assim a *variação* no valor do volume é $(2 + \Delta x)^3 - 2^3$. Essa variação em y é denotada tradicionalmente por Δy,

$$\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2^3$$

Mas o caminho natural para comparar a variação Δy de y com a variação Δx de x é calcular a razão $\Delta y/\Delta x$. Essa razão depende naturalmente de Δx, mas se fizermos Δx se aproximar de 0, então o limite de $\Delta y/\Delta x$ definirá a *taxa de variação instantânea* de y em relação a x, quando $x = 2$. Temos (ÁLGEBRA, Problema 11.2)

$$\begin{aligned}\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 &= [(2)^3 + 3(2)^2(\Delta x)^1 + 3(2)^1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 2^3 \\ &= 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = (\Delta x)(12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2)\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2) = 12$$

Logo, quando o lado é 2, a taxa de variação do volume em relação ao lado é 12. Isso significa que, para lados próximos a 2, a variação Δy do volume é aproximadamente 12 vezes a variação Δx do lado (já que $\Delta y/\Delta x$ é próximo de 12). Vamos examinar alguns poucos casos numéricos.

Se $\Delta x = 0{,}1$, o novo lado $x + \Delta x$ é 2,1 e o novo volume é $(2{,}1)^3 = 9{,}261$. Assim, $\Delta y = 9{,}261 - 8 = 1{,}261$ e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}261}{0{,}1} = 12{,}61$$

Se $\Delta x = 0{,}01$, o novo lado $x + \Delta x$ é 2,01 e o novo volume é $(2{,}01)^3 = 8{,}120601$. Assim, $\Delta y = 8{,}120601 - 8 = 0{,}120601$ e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}120\,601}{0{,}01} = 12{,}0601$$

Se $\Delta x = 0{,}001$, um cálculo análogo resulta em

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12{,}006\,001$$

Vamos estender o resultado do exemplo acima de $y = x^3$ para uma função arbitrária diferenciável $y = f(x)$. Considere uma pequena variação Δx no valor do argumento x. O novo valor do argumento é então $x + \Delta x$, e o novo valor de y será $f(x + \Delta x)$. Logo, a variação Δy no valor da função é

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

A razão entre a variação no valor da função e a variação no argumento é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A *taxa de variação instantânea de y em relação a x* é definida como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

A *taxa de variação instantânea é determinada pela derivada*. Segue que, para Δx próximo a 0, $\Delta y/\Delta x$ será próximo de $f'(x)$, de modo que

$$\Delta y \approx f'(x)\, \Delta x \qquad (19.1)$$

Problemas Resolvidos

19.1 O lucro semanal P, em dólares, de uma corporação é determinado pelo número x de rádios produzidos por semana, de acordo com a fórmula

$$P = 75x - 0{,}03x^2 - 15\,000$$

(*a*) Determine a taxa na qual o lucro muda quando o nível de produção x é 1000 rádios por semana. (*b*) Obtenha a variação no lucro semanal quando o nível de produção x aumenta para 1001 rádios por semana.

(*a*) A taxa de variação do lucro P em relação ao nível de produção x é $dP/dx = 75 - 0{,}06x$. Quando $x = 1000$,

$$\frac{dP}{dx} = 75 - 0{,}06(1000) = 75 - 60 = 15 \text{ dólares por rádio}$$

(*b*) Em economia, a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção é chamada de *lucro marginal*. De acordo com (*19.1*), o lucro marginal é uma medida aproximada de como o lucro mudará quando o nível de produção cresce de uma unidade. No presente caso, temos

$$\begin{aligned} P(1000) &= 75(1000) - 0{,}03(1000)^2 - 15\,000 \\ &= 75\,000 - 30\,000 - 15\,000 = 30\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1001) &= 75(1001) - 0{,}03(1001)^2 - 15\,000 \\ &= 75\,075 - 30\,060{,}03 - 15\,000 = 30\,014{,}97 \\ \Delta P &= P(1001) - P(1000) = 14{,}97 \text{ dólares por semana} \end{aligned}$$

que é muito próximo do lucro marginal de 15 dólares calculado no item (*a*).

19.2 O volume V de uma esfera de raio r é dado pela fórmula $V = 4\pi r^3/3$. (*a*) Com qual velocidade que o volume varia em relação ao raio quando o raio é de 10 milímetros? (*b*) Qual é a variação no volume quando o raio varia de 10 para 10,1 milímetros?

(*a*)
$$\frac{dV}{dr} = D_r\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$$

Quando $r = 10$,

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi(10)^2 = 400\pi \approx 400(3{,}14) = 1256$$

(*b*)
$$V(10) = \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{4000\pi}{3}$$

$$V(10{,}1) = \frac{4}{3}\pi(10{,}1)^3 = \frac{4}{3}\pi(1030{,}301) = \frac{4121{,}204\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(10{,}1) - V(10) = \frac{4121{,}204\pi}{3} - \frac{4000\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3}(4121{,}204 - 4000) = \frac{\pi}{3}(121{,}204) \approx \frac{3{,}14}{3}(121{,}204) \\ &= 126{,}86 \text{ milímetros cúbicos} \end{aligned}$$

A variação prevista em (*19.1*) e no item (*a*) é de

$$\Delta V \approx \frac{dV}{dr}\Delta r = 1256(0{,}1) = 125{,}6 \text{ milímetros cúbicos}$$

19.3 Um tanque de óleo está sendo enchido. O volume V do óleo, em galões, após t minutos é dado por

$$V = 1{,}5t^2 + 2t$$

Quão rápido cresce o volume quando existe 10 galões de óleo no tanque? [*Sugestão*: Para responder a questão "quão rápido?" você sempre deve determinar a derivada em relação a *tempo*.]

Quando há 10 galões no tanque,

$$1{,}5t^2 + 2t = 10 \quad \text{ou} \quad 1{,}5t^2 + 2t - 10$$

Resolvendo pela fórmula quadrática,

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1{,}5)(-10)}}{2(1{,}5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{3} = \frac{-2 \pm 8}{3} = 2 \quad \text{ou} \quad -\frac{10}{3}$$

Como t deve ser positivo, $t = 2$ minutos. A taxa em que o volume do óleo cresce é

$$\frac{dV}{dt} = D_t(1{,}5t^2 + 2t) = 3t + 2$$

Logo, no instante $t = 2$ minutos quando $V = 10$ galões,

$$\frac{dV}{dt} = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8 \text{ galões por minuto}$$

Problemas Complementares

19.4 O custo C, em dólares por dia, de produção de x televisores por dia é dado pela fórmula

$$C = 7000 + 50x - 0{,}05x^2$$

Determine a taxa de variação de C em relação a x (chamado de *custo marginal*) quando 200 televisores são produzidos por dia.

19.5 O lucro P, em dólares por dia, resultante da confecção de x unidades diárias de um antibiótico, é

$$P = 5x + 0{,}02x^2 - 120$$

Determine o lucro marginal quando o nível de produção x é 50 unidades por dia.

19.6 Obtenha a taxa na qual a área da superfície de um cubo de lado x varia em relação a x quando $x = 2$ pés.

19.7 O número de quilômetros que uma espaçonave está da Terra é dado pela fórmula

$$E = 30t + 0{,}005t^2$$

onde t é medido em segundos. Quão rápido muda a distância quando a espaçonave está a 35 000 quilômetros da Terra?

19.8 Quando um tanque de gasolina está sendo esvaziado, o número G de galões que sobram após t segundo é dado por $G = 3(15 - t)^2$.

(*a*) Com que rapidez que a gasolina está sendo retirada após 12 segundos?

(*b*) Qual a taxa média com que a gasolina está sendo drenada do tanque durante os primeiros 12 segundos? [*Sugestão:* A taxa média é a quantia total retirada dividida pelo tempo durante o qual foi drenada.]

19.9 Se $y = 3x^2$, encontre: (*a*) a taxa média na qual y muda em relação a x no intervalo [1,2]; (*b*) a taxa instantânea de variação de y em relação a x quando $x = 1$.

19.10 Se $y = f(x)$ é uma função tal que $f'(x) \neq 0$ para qualquer x, encontre os valores de y nos quais a taxa de crescimento de y^4 em relação a x é 32 vezes a de y em relação a x.

Capítulo 20

Taxas Relacionadas

A maioria das quantidades encontradas em ciência ou no dia-a-dia varia com o tempo. Se duas determinadas quantidades estão relacionadas por uma equação e se conhecemos a taxa na qual uma delas muda então, pela diferenciação da equação em relação ao tempo, podemos determinar a taxa na qual a outra quantidade muda.

Exemplos

(*a*) Um homem de 1,80 m está correndo e se afastando da base de um poste que tem 4,50 m de altura (ver Fig. 20-1). Se ele se move a uma taxa de 5,4 metros por segundo, com que velocidade que o comprimento de sua sombra está mudando?

Seja x a distância do homem à base A do poste e seja y o comprimento da sombra do homem.

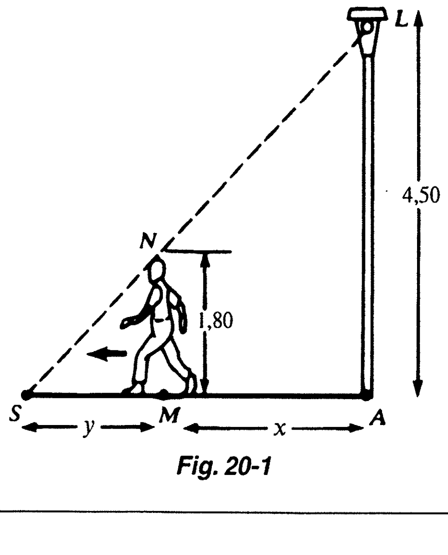
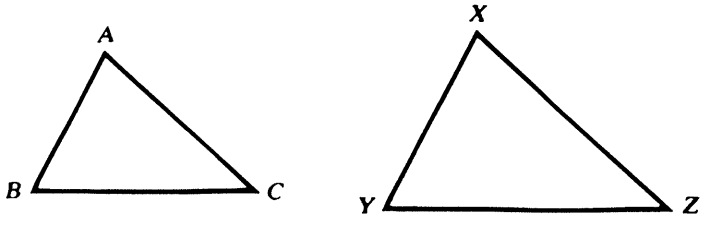


Fig. 20-1

GEOMETRIA Dois triângulos



são *semelhantes* se seus ângulos são iguais dois a dois: $\measuredangle A = \measuredangle X$, $\measuredangle B = \measuredangle Y$, $\measuredangle C = \measuredangle Z$. (Para essa condição valer, basta que *dois* ângulos de um triângulo sejam iguais a dois ângulos do outro.) Triângulos semelhantes têm lados correspondentes em razão constante:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{YZ}}$$

Na Fig. 20-1, $\triangle SMN$ e $\triangle SAL$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LA}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{y+x} = \frac{6}{15} \tag{1}$$

que é a relação procurada entre x e y. Nesse caso é conveniente resolver (*1*) isolando y em termos de x,

$$\frac{y}{y+x} = \frac{2}{5}$$
$$5y = 2y + 2x$$
$$3y = 2x$$
$$y = \frac{2}{3}x \tag{2}$$

A derivação de (*2*) em relação a t nos dá

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dx}{dt} \tag{3}$$

Mas como o homem está se afastando de A à taxa de 5,4 m/s, x está crescendo a essa taxa. Logo,

$$\frac{dx}{dt} = 5{,}4 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}(5{,}4) = 3{,}6 \text{ m/s}$$

ou seja, a sombra está aumentando à taxa de 3,6 metros por segundo.

(*b*) Um cubo de gelo está derretendo. A aresta s do cubo está diminuindo à taxa constante de duas polegadas por minuto. Qual a taxa de decrescimento do volume V?

Como $V = s^3$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(s^3)}{dt} = 3s^2\frac{ds}{dt} \quad \text{[pela regra da cadeia para potências]}$$

O fato de que s está *decrescendo* à taxa de duas polegadas por minuto se traduz na expressão matemática

$$\frac{ds}{dt} = -2$$

Portanto,
$$\frac{dV}{dt} = 3s^2(-2) = -6s^2$$

Assim, apesar de s estar decrescendo a uma taxa constante, V está decrescendo a uma taxa proporcional ao quadrado de s. Por exemplo, quando $s = 3$ polegadas, V decresce a uma taxa de 54 polegadas cúbicas por minuto.

(*c*) Dois pequenos aviões começam a voar a partir de um ponto comum A ao mesmo tempo. Um voa para leste a uma velocidade de 300 km/h e o outro voa para o sul a 400 km/h. Após duas horas, com qual velocidade que a distância entre eles está mudando?

Observe a Fig. 20-2. Temos que $dx/dt = 300$ e $dy/dt = 400$ e queremos determinar o valor de du/dt em $t = 2$ horas. A relação necessária entre u, x e y é dada pelo teorema de Pitágoras,

$$u^2 = x^2 + y^2$$

Logo,
$$\frac{d(u^2)}{dt} = \frac{d(x^2+y^2)}{dt}$$
$$2u\frac{du}{dt} = \frac{d(x^2)}{dt} + \frac{d(y^2)}{dt} \quad \text{[pela regra da cadeia para potência]}$$

$$2u\frac{du}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \text{[pela regra da cadeia para potência]}$$

$$u\frac{du}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 300x + 400y \tag{4}$$

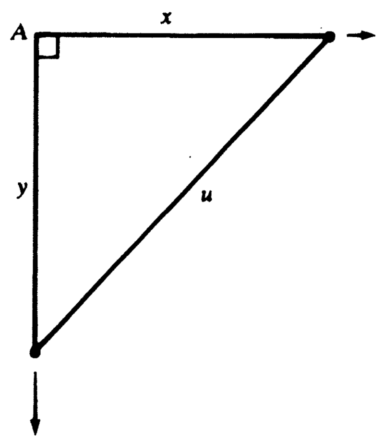


Fig. 20-2

Agora devemos encontrar x, y e u após 2 horas. Como x é crescente à taxa constante de 300 km/h e t é medido a partir do início do vôo, $x = 300t$ (distância = velocidade × tempo, quando velocidade é constante). Analogamente, $y = 400t$. Logo, em $t = 2$,

$$x = 300(2) = 600 \qquad y = 400(2) = 800$$

e

$$u^2 = (600)^2 + (800)^2 = 360\,000 + 640\,000 = 1\,000\,000$$

$$u = 1000$$

Substituindo em (*4*),

$$1000\frac{du}{dt} = 300(600) + 400(800) = 180\,000 + 320\,000 = 500\,000$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{500\,000}{1000} = 500 \text{ km/h}$$

Problemas Resolvidos

20.1 Ar está vazando de um balão esférico à taxa de 3 polegadas cúbicas por minuto. Quando o raio é de 5 polegadas, com qual velocidade que o raio está diminuindo?

Como o ar está vazando à taxa de 3 polegadas cúbicas por minuto, o volume do balão está diminuindo à taxa de $dV/dt = -3$. Mas o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Assim,

$$-3 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\frac{d(r^3)}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

Portanto,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{3}{4\pi r^2}$$

Substituindo $r = 5$,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -\frac{3}{314} \approx -0{,}009\,55$$

Logo, quando o raio é de 5 polegadas, o raio está decrescendo a aproximadamente 0,01 polegada por minuto.

20.2 Uma escada de 13 pés de comprimento está apoiada em uma parede vertical (ver Fig. 20-3). Se a base da escada está escorregando e se afastando da parede à taxa de 2 pés por segundo, com que rapidez está o topo da escada caindo quando a base da escada está a 5 pés da parede?

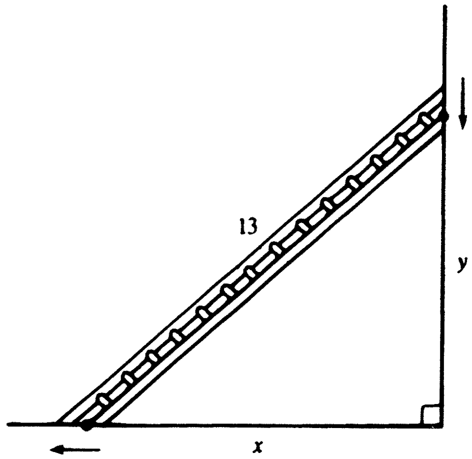


Fig. 20-3

Seja x a distância da base da escada à parede, e seja y a distância do topo da escada ao chão. Como a base da escada está se afastando da base da parede a 2 pés por segundo, $dx/dt = 2$. Queremos calcular dy/dt quando $x = 5$ pés. Mas, de acordo com o teorema de Pitágoras,

$$(13)^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

Derivação disso, como no exemplo (c), nos dá

$$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 2x + y\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

Mas quando $x = 5$, (*1*) implica em

$$y = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

de modo que (*2*) fica

$$0 = 2(5) + 12\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2(5)}{12} = -\frac{5}{6}$$

Portanto, o topo da escada está *caindo* ao longo da parede ($dy/dt<0$) a 5/6 pés por segundo quando a base da escada está a 5 pés da parede.

20.3 Um copo de papel com formato de cone (ver Fig. 20-4) está sendo preenchido com água à taxa de 3 centímetros cúbicos por segundo. A altura do copo é de 10 cm e o raio da base é de 5 cm. Quão rápido sobe o nível da água quando o nível é de 4 cm?

No instante t (em segundos), quando a profundidade da água é h, o volume da água no copo é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, onde r é o raio da superfície no alto. Mas, por triângulos semelhantes na Fig. 20-4,

$$\frac{r}{5} = \frac{h}{10} \quad \text{ou} \quad r = \frac{5h}{10} = \frac{h}{2}$$

(Apenas h é de interesse, portanto estamos eliminando r.) Assim,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h^2}{4}\right)h = \frac{\pi}{12}h^3$$

e, pela regra da cadeia para potências,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\frac{d(h^3)}{dt} = \frac{\pi}{12}\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = \left(\frac{\pi h^2}{4}\right)\frac{dh}{dt}$$

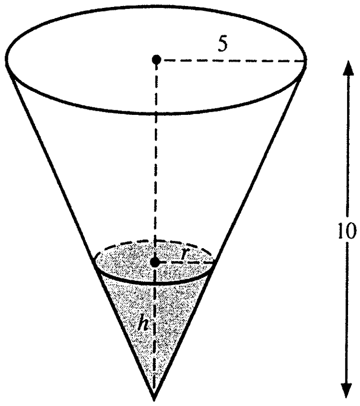


Fig. 20-4

Substituindo $dV/dt = 3$ e $h = 4$, obtemos

$$3 = \left(\frac{\pi 16}{4}\right)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{4\pi} \approx \frac{3}{4(3{,}14)} \approx 0{,}24 \text{ centímetros por segundo}$$

Desse modo, no instante em que o nível da água é 4 cm, o nível está subindo a aproximadamente 0,24 centímetros por segundo.

20.4 Um navio B se move para o oeste em direção a um ponto fixo A a uma velocidade de 12 nós (milhas marítimas por hora). No momento em que o navio B está a 72 milhas marítimas de A, o navio C passa por A, indo para o sul a 10 nós. A que taxa varia a distância entre os navios duas horas após o navio C passar por A?

A Figura 20-5 mostra a situação no instante $t > 0$. Em $t = 0$, o navio C estava em A. Como

$$u^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

temos, como no exemplo (*c*),

$$u\frac{du}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -12x + 10y \qquad (2)$$

uma vez que x está diminuindo a 12 nós e y está aumentando a 10 nós. Em $t = 2$, temos (já que distância = velocidade × tempo)

$$y = 10 \times 2 = 20$$
$$72 - x = 12 \times 2 = 24$$
$$x = 72 - 24 = 48$$

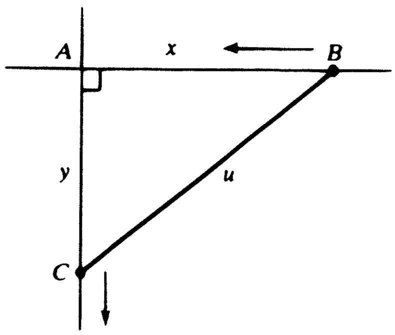


Fig. 20-5

e, de acordo com (*1*)

$$u = \sqrt{(48)^2 + (20)^2} = \sqrt{2304 + 400} = \sqrt{2704} = 52$$

Substituição em (*2*) nos leva a

$$52\frac{du}{dt} = -12(48) + 10(20) = -576 + 200 = -376$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{376}{52} \approx -7{,}23$$

o que mostra que, após duas horas, a distância entre os navios B e C está *diminuindo* à taxa de 7,23 nós.

Problemas Complementares

20.5 O topo de uma escada de 25 pés, encostada em uma parede vertical, escorrega para baixo a uma velocidade de 1 pé por minuto. Com qual velocidade que a base da escada está escorregando sobre o chão quando o topo da mesma está a 7 pés do solo?

20.6 Um tanque cilíndrico com raio de 10 pés está sendo preenchido com trigo à taxa de 314 pés cúbicos por minuto. Com que velocidade está a profundidade do trigo aumentando? [*Sugestão:* O volume de um cilindro é $\pi r^2 h$, onde r é seu raio e h sua altura.]

20.7 Uma garota com 5 pés de altura caminha em direção a um poste de 20 pés à taxa de 6 pés por segundo. Qual é a velocidade da ponta de sua sombra (projetada pela lâmpada do poste)?

20.8 Um foguete é disparado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 400 pés por segundo. Sua altitude s após t segundos é $s = 400t - 16t^2$. Quão rápido aumenta a distância entre o foguete e um observador que está no chão a uma distância de 1800 pés da plataforma de lançamento, quando o foguete ainda está subindo e está 2400 pés acima do solo (ver Fig. 20-6)?

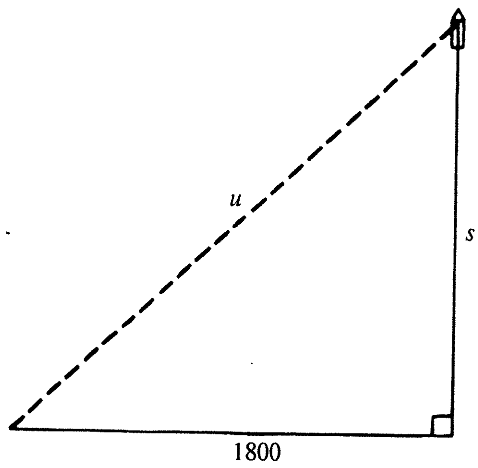


Fig. 20-6

20.9 Um pequeno funil no formato de um cone está sendo esvaziado de um fluido à taxa de 12 milímetros cúbicos por segundo. A altura do funil é 20 milímetros e o raio da base é 4 milímetros. Com qual velocidade que está caindo o nível do fluido quando o mesmo é de 5 milímetros acima do vértice do cone? [Lembre que o volume de um cone é $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.]

20.10 Um balão está sendo inflado bombeando-se ar à taxa de duas polegadas cúbicas por segundo. Quanto está aumentando o diâmetro do balão quando o raio é de meia polegada?

20.11 Petróleo de um poço sem tampa no oceano está jorrando na forma de uma película circular na superfície da água. Se o raio do círculo está aumentando à taxa de 2 metros por minuto, quanto aumenta a área da película de petróleo quando o raio atinge 100 metros?

20.12 O comprimento de um retângulo com área constante de 800 milímetros quadrados está crescendo à taxa de 4 milímetros por segundo. (*a*) Qual a largura do retângulo quando a mesma está diminuindo à taxa de 0,5 milímetro por segundo? (*b*) Qual a taxa de variação da diagonal do retângulo quando a largura é de 20 milímetros?

20.13 Uma partícula se move sobre a hipérbole $x^2 - 18y^2 = 9$ de tal forma que sua coordenada y aumenta a uma taxa constante de nove unidades por segundo. Quanto varia sua coordenada x quando $x = 9$?

20.14 Um objeto se move ao longo do gráfico de $y = f(x)$. Em um certo ponto, a inclinação da curva (ou seja, o coeficiente angular da reta tangente à curva) é $\frac{1}{2}$ e a abscissa (coordenada x) do objeto está dimunindo à taxa de três unidades por segundo. Nesse ponto, qual a taxa de variação da ordenada (coordenada y)? [*Sugestão:* $y = f(x)$ e x é uma função de t. Logo, y é uma função composta de t, que pode ser derivada pela regra da cadeia.]

20.15 Se o raio de uma esfera está aumentando à taxa constante de 3 milímetros por segundo, quão rápido está mudando o volume quando a área da superfície ($4\pi r^2$) é 10 milímetros quadrados?

20.16 Qual é o raio de um círculo em expansão em um instante quando a taxa de variação de sua área é numericamente igual ao dobro da taxa de variação de seu raio?

20.17 Uma partícula se move ao longo da curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 4$. Em um certo momento, quando $x = 2$, a coordenada x da partícula está aumentando à taxa de 0,5 unidade por segundo. Qual a velocidade de sua coordenada y naquele momento?

20.18 Um avião voando paralelamente ao solo a uma altitude de 4 km passa sobre uma estação de radar R (ver Fig. 20-7). Pouco tempo depois, o radar revela que o avião está a 5 km de distância e que a distância entre o avião e a estação está aumentando a uma taxa de 300 km por hora. Naquele instante, qual a velocidade horizontal do avião?

20.19 Um barco passa por uma bóia fixa às 09:00 hs da manhã, navegando para oeste a 3 milhas por hora. Outro barco passa pela mesma bóia às 10:00 hs da manhã, indo para o norte a 5 milhas por hora. Qual a taxa de variação da distância entre os barcos às 11:30 hs da manhã?

20.20 Água está vertendo para dentro de um cone invertido à taxa de 3,14 metros cúbicos por minuto. A altura do cone é 10 metros e o raio de sua base é 5 metros. Com qual velocidade que o nível da água está subindo quando a água está com uma profundidade de 7,5 metros no cone?

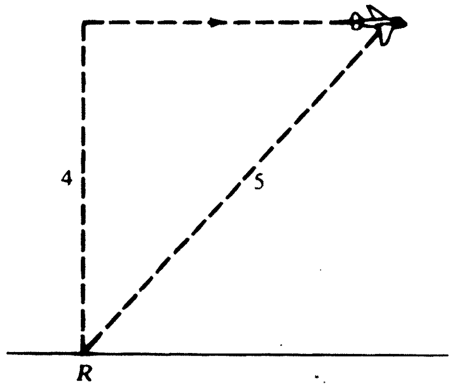


Fig. 20-7

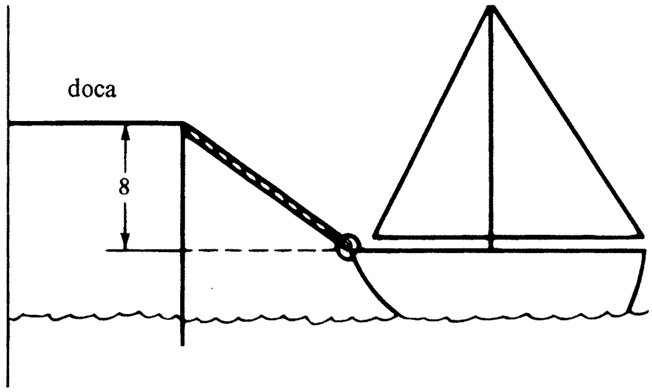


Fig. 20-8

20.21 Uma partícula se move ao longo da curva $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$. Em qual(is) ponto(s) da curva que a taxa de variação da abscisa e da ordenada é a mesma?

20.22 Um barco está sendo puxado para uma doca, por uma corda que passa por um anel na proa (ver Fig. 20-8). A doca é 8 pés mais alta que o anel da proa. Qual a velocidade de aproximação do barco para a doca quando o comprimento da corda entre a doca e o barco é de 10 pés, se a corda está sendo puxada a 3 pés por segundo?

20.23 Uma garota está empinando uma pipa a uma altura de 120 pés. O vento está afastando a pipa da garota a uma velocidade horizontal de 10 pés por segundo. Com que velocidade que o cordão deve ser solto quando a pipa está a 150 pés da garota?

20.24 A base de uma escada de 17 pés está sobre o solo e o topo está encostado em uma parede vertical. Se a base é empurrada em direção à parede à taxa de 3 pés por segundo, com qual velocidade que o topo sobe pela parede quando a base da escada está a 15 pés da base da parede?

20.25 Em um dado momento, uma pessoa está a 5 milhas ao norte de um cruzamento e está caminhando diretamente (em linha reta) para o cruzamento a uma taxa constante de 3 milhas por hora. No mesmo momento, uma segunda pessoa está a uma milha a leste do cruzamento e se afasta desse cruzamento a duas milhas por hora. Qual a taxa de variação da distância entre as duas pessoas uma hora depois? Interprete sua resposta.

20.26 Um objeto está se movendo ao longo do gráfico de $y = 3x - x^3$ e sua coordenada x está variando à taxa de duas unidades por segundo. Quanto varia o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico quando $x = -1$?

Capítulo 21

Aproximação por Diferenciais; Método de Newton

No Capítulo 19, obtemos uma relação aproximada entre a variação

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

em uma função diferenciável f e a variação Δx no argumento de f. Por conveniência, repetimos (*19.1*) aqui e o chamamos de *princípio de aproximação,*

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \qquad (21.1)$$

21.1 ESTIMANDO O VALOR DE UMA FUNÇÃO

Muitos problemas práticos envolvem a determinação de um valor $f(c)$ de alguma função. Um cálculo direto de $f(c)$ pode ser difícil ou, muito freqüentemente, impossível. No entanto, considere que um argumento x próximo de c (quanto mais próximo, melhor), pode ser encontrado de modo que $f(x)$ e $f'(x)$ podem ser calculados com exatidão. Se fizermos $\Delta x = c - x$, então $c = x + \Delta x$ e o princípio de aproximação (*21.1*) nos leva a

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &\approx f'(x)\,\Delta x \\ f(c) - f(x) &\approx f'(x)\,\Delta x \\ f(c) &\approx f(x) + f'(x)\,\Delta x \end{aligned} \qquad (21.2)$$

Exemplo Vamos estimar $\sqrt{9{,}2}$. Aqui f é a função raiz quadrada e $c = 9{,}2$. Se escolhermos $x = 9$, então $\Delta x = 9{,}2 - 9 = 0{,}2$. Ambos $f(x)$ e $f'(x)$ podem ser calculados facilmente,

$$f(x) = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(x) = D_x(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$$

e (*21.2*) implica em

$$\sqrt{9{,}2} = f(9{,}2) \approx 3 + \frac{1}{6}(0{,}2) = 3 + 0{,}0333\ldots = 3{,}0333\ldots$$

O verdadeiro valor de $\sqrt{9{,}2}$, com precisão de quatro casas decimais, é 3,0331.

21.2 O DIFERENCIAL

O produto do lado direito de (*21.1*) é dito o *diferencial* de f e é denotado por df.

Definição: Seja f uma função diferenciável. Então, para um dado argumento x e incremento Δx, o diferencial df de f é definido por

$$df = f'(x)\ \Delta x$$

Observe que df depende de duas quantidades, x e Δx. Apesar de Δx ser geralmente assumido como pequeno, isso não é explicitamente exigido na definição. No entanto, se Δx é pequeno, então a idéia do princípio de aproximação é que

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx df \qquad (21.3)$$

Exemplo Uma representação gráfica dessa última forma do princípio de aproximação é dada na Fig. 21-1. A reta $\mathscr{L}$ é tangente ao gráfico de f em P; seu coeficiente angular é, portanto, $f'(x)$. Mas então

$$f'(x) = \frac{\overline{RT}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{RT}}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \overline{RT} = f'(x)\ \Delta x \equiv df$$

Agora está claro que, para Δx muito pequeno, $\overline{RT} \approx \overline{RQ}$; ou seja,

$$df \approx f(x + \Delta x) - f(x)$$

Se o valor de uma função f é dado por uma fórmula, digamos, $f(x) = x^2 + 2x^{-3}$, vamos considerar que o diferencial df pode também ser escrito como

$$d(x^2 + 2x^{-3}) = df = f'(x)\ \Delta x = (2x - 6x^{-4})\ \Delta x$$

Em particular, se $f(x) = x$, devemos escrever

$$dx = df = f'(x)\ \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

Como $dx = \Delta x$, a definição do diferencial df pode ser reescrita como

$$df = f'(x)\ dx$$

Assumindo que $dx = \Delta x \neq 0,$, podemos dividir ambos os lados por dx, obtendo o resultado

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Se fazemos $y = f(x)$, isso pode explicar a notação tradicional dy/dx para a derivada.

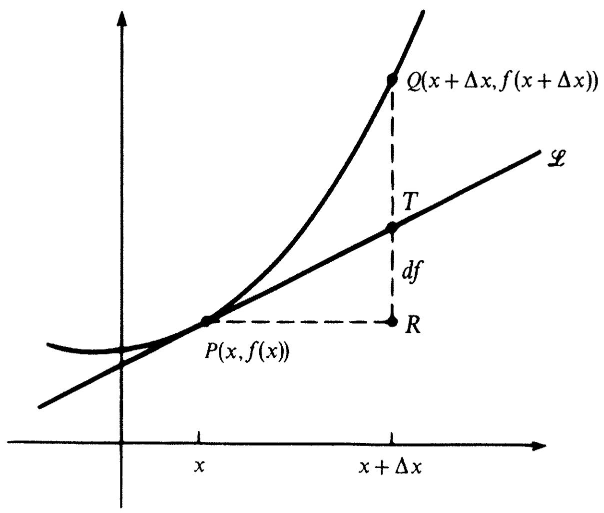


Fig. 21-1

21.3 MÉTODO DE NEWTON

Digamos que estamos tentando encontrar uma solução para a equação

$$f(x) = 0 \tag{21.4}$$

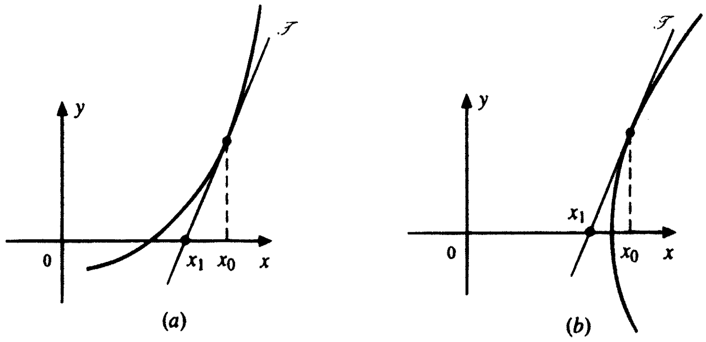


Fig. 21-2

e digamos também que sabemos que x_0 está próxima de uma solução. Se traçamos a reta $\mathcal{T}$ tangente ao gráfico de f no ponto com abscissa x_0, então $\mathcal{T}$ geralmente irá intersectar o eixo x em um ponto cuja abscissa x_1 está mais próxima da solução de (*21.4*) que x_0 (ver Fig. 21-2).

Uma equação da reta tangente $\mathcal{T}$ é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Se $\mathcal{T}$ intersecta o eixo x no ponto x_1, então

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Se $f'(x_0) \neq 0$,

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Se repetimos o mesmo procedimento, mas dessa vez começando com x_1 no lugar de x_0, obtemos um valor x_2 que deve estar ainda mais próximo da solução de (*21.4*),

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Se continuamos a aplicar tal procedimento, a seqüência resultante de números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é determinada pela fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{21.5}$$

Esse processo para encontrar aproximações cada vez melhores para uma solução da equação $f(x) = 0$ é conhecido como *método de Newton*. Não é sempre garantido que os números gerados pelo método de Newton se aproximarão de uma solução de $f(x) = 0$. Algumas dificuldades que podem surgir serão discutidas nos problemas que se seguem.

Exemplo Se queremos aproximar $\sqrt{2}$, deveríamos tentar encontrar uma solução aproximada de $x^2 - 2 = 0$. Aqui $f(x) = x^2 - 2$. Logo, $f'(x) = 2x$ e (*21.5*) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \qquad (21.6)$$

Se consideramos a primeira aproximação como sendo 1 (já que sabemos que $\sqrt{2}$, está entre 1 e 2)*, então obtemos por sucessivas substituições de n por 0, 1, 2,... em (*21.6*)[1],

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$
$$x_2 = \frac{(1{,}5)^2 + 2}{2(1{,}5)} = \frac{2{,}25 + 2}{3} = \frac{4{,}25}{3} \approx 1{,}416\,666\,667$$
$$x_3 \approx \frac{(1{,}416\,666\,667)^2 + 2}{2(1{,}416\,666\,667)} \approx 1{,}414\,215\,686$$
$$x_4 \approx \frac{(1{,}414\,215\,686)^2 + 2}{2(1{,}414\,215\,686)} \approx 1{,}414\,213\,562$$
$$x_5 \approx \frac{(1{,}414\,213\,562)^2 + 2}{2(1{,}414\,213\,562)} \approx 1{,}414\,213\,562$$

Como nossas aproximações para x_4 e x_5 são iguais, todos os futuros valores serão os mesmos e assim conseguimos a melhor aproximação com nove casas decimais, dentro da capacidade de nossa calculadora. Desse modo, $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562$.

Problemas Resolvidos

21.1 Usando o princípio de aproximação, estime o valor de $\sqrt{62}$.

Fazendo $f(x) = \sqrt{x}$ e $c = 62$, escolhemos $x = 64$ (o quadrado perfeito mais próximo de 62). Logo,

$$\Delta x = c - x = 62 - 64 = -2$$
$$f(x) = \sqrt{64} = 8$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2(8)} = \frac{1}{16}$$

e (21.2) implica em

$$\sqrt{62} \approx 8 + \frac{1}{16}(-2) = 8 - \frac{1}{8} = 7\frac{7}{8} = 7{,}875$$

Na verdade, $\sqrt{62} = 7{,}8740\ldots$.

21.2 Use o princípio de aproximação para estimar o valor de $\sqrt[5]{33}$.

Seja $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $c = 33$ e $x = 32$. Logo, $\Delta x = c - x = 1$, $f(x) = \sqrt[5]{32} = 2$, e

$$f'(x) = D_x(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4} = \frac{1}{5(\sqrt[5]{32})^4} = \frac{1}{5(2)^4} = \frac{1}{5(16)} = \frac{1}{80}.$$

Assim, de acordo com (*21.2*),

$$\sqrt[5]{33} = f(c) \approx 2 + \frac{1}{80}(1) = 2{,}0125$$

* N. de T.: Isso é garantido pelo teorema do valor intermediário.

[1] Os cálculos exigidos pelo método de Newton são comumente muito cansativos para serem feitos a mão. Uma calculadora, preferencialmente uma calculadora programável, deveria ser usada.

Como o valor verdadeiro é 2,0123..., a aproximação está correta em três casas decimais.

21.3 A medição do lado de uma sala quadrada resulta em 18,5 pés. Logo, a área é $A = (18{,}5)^2 = 342{,}25$ pés quadrados. Se o instrumento de medição admite uma margem de erro de no máximo 0,05 pés, estime o erro máximo possível para a área.

A fórmula para a área é $A = x^2$, onde x é o lado da sala. Logo, $dA/dx = 2x$. Faça $x = 18{,}5$ e considere que $18{,}5 + \Delta x$ é o verdadeiro comprimento do lado da sala. Por hipótese, $|\Delta x| \le 0{,}05$. O princípio de aproximação nos leva a

$$A(x + \Delta x) - A(x) \approx \frac{dA}{dx}\Delta x$$
$$A(18{,}5 + \Delta x) - 342{,}25 \approx 2(18{,}5)\,\Delta x$$
$$|A(18{,}5 + \Delta x) - 342{,}25| \approx |37\,\Delta x| \le 37(0{,}05) = 1{,}85$$

Portanto, o erro na área deveria ser no máximo 1,85 pés quadrados, o que coloca a área como sendo $(342{,}25 \pm 1{,}85)$ pés quadrados. Ver Problema 21.13.

21.4 Use o método de Newton para encontrar a solução positiva de

$$x^4 + x - 3 = 0$$

Faça $f(x) = x^4 + x - 3$. Logo, $f'(x) = 4x^3 + 1$. Como $f(1) = -1$ e $f(2) = 15$, o teorema do valor intermediário nos diz que existe uma solução entre 1 e 2. [O intervalo (1,2) ocorre como sugestão ao se representar graficamente f por meio de uma calculadora gráfica.] Como $f'(x) > 0$ para $x \ge 0$, f é crescente para $x > 0$ e, portanto, existe exatamente uma solução real positiva. Comece com $x_0 = 1$. A equação (*21.5*) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + x_n - 3}{4x_n^3 + 1} = \frac{4x_n^4 + x_n - (x_n^4 + x_n - 3)}{4x_n^3 + 1} = \frac{3x_n^4 + 3}{4x_n^3 + 1}$$

Cálculos sucessivos nos levam a $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = 1{,}165419616$, $x_3 = 1{,}164037269$, $x_4 = 1{,}164035141$ e $x_5 = 1{,}164035141$. Logo, a solução aproximada é $x = 1{,}164\,035\,141$.

21.5 Mostre que se o método de Newton é aplicado na equação $x^{1/3} = 0$ com $x_0 = 1$, o resultado é uma seqüência divergente de valores (a qual certamente não converge para a raiz 0).

Seja $f(x) = x^{1/3}$. Portanto, $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ e (21.5) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{1/(3x_n^{2/3})} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

Logo, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = -8$, e, em geral, $x_n = (-2)^n$.

Observação: Se estamos buscando uma solução r de uma equação $f(x) = 0$, então pode-se provar que uma condição suficiente para que o método de Newton resulte em uma seqüência que converge para r é que

$$\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

para todo x em um intervalo em torno de r que inclua x_0. No entanto, essa não é uma condição necessária.

Problemas Complementares

21.6 Use o princípio de aproximação para estimar as seguintes quantidades:

(*a*) $\sqrt{51}$ (*b*) $\sqrt{78}$ (*c*) $\sqrt[3]{123}$ (*d*) $(8{,}35)^{2/3}$ (*e*) $(33)^{-1/5}$

(*f*) $\sqrt[4]{\dfrac{17}{81}}$ (*g*) $\sqrt[3]{0{,}065}$ (*h*) $\sqrt{80{,}5}$ (*i*) $\sqrt[3]{215}$

21.7 A medição do lado de um contêiner cúbico dá 8,14 centímetros, com um erro possível de 0,005 centímetros no máximo. Estime o erro máximo possível no valor de $V = (8{,}14)^3 = 539{,}35314$ centímetros cúbicos para o volume do contêiner.

21.8 Deseja-se cobrir um tanque esférico de 20 pés (240 polegadas) de diâmetro com uma demão de tinta de 0,1 polegada de espessura. Use o princípio de aproximação para estimar quantos galões de tinta serão necessários. (($V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e 1 galão corresponde a aproximadamente 231 polegadas cúbicas.)

21.9 Um cilindro de aço sólido tem um raio de 2,5 centímetros e uma altura de 10 centímetros. Uma capa justa deverá ser feita para estender o raio para 2,6 centímetros. Encontre a quantia de aço necessária para a capa: (*a*) pelo uso do princípio de aproximação; (*b*) por meio de um cálculo exato.

21.10 Se o lado de um cubo é medido com um erro de no máximo 3%, estime o erro percentual máximo no volume do cubo. (Se ΔQ é o erro na medição de uma quantidade Q, então $|\Delta Q/Q| \times 100\%$ é o *erro percentual.*)

21.11 Considere, contrariando um fato, que a Terra é uma esfera perfeita com um raio de 4000 milhas. O volume de gelo nos Pólos Norte e Sul é estimado em aproximadamente 8 000 000 de milhas cúbicas. Se esse gelo fosse derretido e a água resultante fosse uniformemente distribuída ao redor do globo, qual seria aproximadamente a profundidade da água a mais em cada ponto da Terra?

21.12 (*a*) Seja $x^{3/2}$. Quando $x = 4$ e $dx = 2$, determine o valor de dy.

(*b*) Seja $y = 2x\sqrt{1 + x^2}$. Quando $x = 0$ e $dx = 3$, encontre o valor de dy.

21.13 No Problema 21.3 calcule com exatidão o maior erro possível na área.

21.14 Prove a útil fórmula de aproximação $(1 + u)^r \approx 1 + ru$, onde r é qualquer expoente racional e $|u|$ é pequeno se comparado com 1. [*Sugestão:* Aplique o princípio de aproximação em $f(x) = x^r$, fazendo $x = 1$ e $\Delta x = u$.]

21.15 $\boxed{\text{CG}}$ Use o método de Newton para determinar aproximadamente as seguintes quantidades:

(*a*) $\sqrt[4]{2}$ (*b*) $\sqrt[3]{4}$ (*c*) $\sqrt[5]{23}$ (*d*) $\sqrt[3]{6}$

21.16 (*a*) Mostre que o método de Newton para encontrar $\sqrt{c}$ resulta na equação

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

para a seqüência de valores aproximados.

(*b*) $\boxed{\text{CG}}$ Use o item (*a*) para estimar $\sqrt{3}$ pelo método de Newton.

21.17 $\boxed{\text{CG}}$ Use o método de Newton para soluções aproximadas das seguintes equações:

(*a*) $x^3 - x - 1 = 0$ (*b*) $x^3 + x - 1 = 0$ (*c*) $x^4 - 2x^2 + 0{,}5 = 0$ (*d*) $x^3 + 2x - 4 = 0$

(*e*) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ (*f*) $x^3 - x + 3 = 0$ (*g*) $x^3 - 2x - 1 = 0$

21.18 Mostre que $x^3 + x^2 - 10 = 0$ tem uma única raiz em (1,2) e aproxime essa raiz pelo método de Newton, com $x_0 = 2$.

21.19 Mostre que $x^5 + 5x - 7 = 0$ tem uma única solução em (1,2) e aproxime essa raiz pelo método de Newton.

21.20 Explique porque o método de Newton não funciona nos seguintes casos:

(*a*) Resolva $x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ com $x_0 = 2$.

(*b*) Resolva $x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ com $x_0 = 1$.

(*c*) Resolva $f(x) = 0$, onde $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{para } x \geq 1 \\ -\sqrt{1-x} & \text{para } x < 1 \end{cases}$ e $x_0 > 1$ (digamos, $x = 1 + b, b > 0$).

Capítulo 22

Derivadas de Ordem Superior

A derivada f' de uma função f é ela mesma uma função, a qual pode ser diferenciável. Se f' é diferenciável, sua derivada será denotada por f''. A derivada de f'', se existir, é denotada por f''' e assim por diante.

Definição:

$$\begin{aligned} f''(x) &= D_x(f'(x)) \\ f'''(x) &= D_x(f''(x)) \\ f^{(4)}(x) &= D_x(f'''(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Chamamos f' de *derivada primeira* de f, f'' de *derivada segunda* de f e f''' de *derivada terceira* de f. Se a ordem n excede 3, escrevemos $f^{(n)}$ para a derivada n-ésima de f.

Exemplos

(*a*) Se $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2x - 1$, então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 21x^2 + 10x + 2 \\ f''(x) &= 36x^2 - 42x + 10 \\ f'''(x) &= 72x - 42 \\ f^{(4)}(x) &= 72 \\ f^{(n)} &= 0 \quad \text{para} \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

(*b*) Se $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + x + 4$, então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 10x + 1 \\ f''(x) &= 3x - 10 \\ f'''(x) &= 3 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad \text{para} \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

É claro que se f é polinomial de grau k, então a derivada n-ésima $f^{(n)}$ será 0 para todo $n > k$.

(*c*) Se $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, então,

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$f'''(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$
$$f^{(4)}(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$
$$\vdots$$

Nesse caso a derivada n-ésima jamais será a função constante 0.

Notação Alternativa

Derivada primeira: $f'(x) = D_x f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x y = y'$

Derivada segunda: $f''(x) = D_x^2 f(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = D_x^2 y = y''$

Derivada terceira: $f'''(x) = D_x^3 f(x) = \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} = D_x^3 y = y'''$

Derivada n-ésima: $f^{(n)}(x) = D_x^n f(x) = \frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n} = D_x^n y = y^{(n)}$

Derivação Implícita de Ordem Superior

Exemplo Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável satisfazendo a equação

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad (0)$$

(Sabemos que $y = \sqrt{9 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{9 - x^2}$; seus gráficos são exibidos na Fig. 22-1.)

Determinemos uma fórmula para a derivada segunda y'', onde y se refere a uma das duas funções.

$$D_x(x^2 + y^2) = D_x(9)$$
$$2x + 2yy' = 0 \qquad [D_x y^2 = 2yy' \text{ pela regra da cadeia de potências}]$$
$$x + yy' = 0 \qquad (1)$$

A seguir, derive ambos os lados de (*1*) em relação a x,

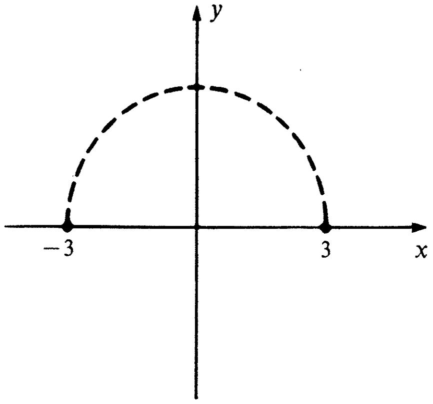
$$D_x(x + yy') = D_x(0)$$
$$1 + yD_x(y') + y'D_x y = 0$$
$$1 + yy'' + y' \cdot y' = 0$$
$$1 + yy'' + (y')^2 = 0 \qquad (2)$$

Resolva (*1*) isolando y' em termos de x e y,

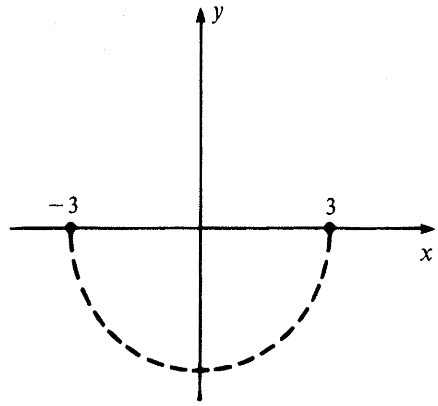
$$y' = -\frac{x}{y}$$

Substitua y' por $-(x/y)$ em (*2*),

$$1 + yy'' + \frac{x^2}{y^2} = 0$$
$$y^2 + y^3y'' + x^2 = 0 \qquad [\text{multiplicado por } y^2]$$



(a) $y = \sqrt{9 - x^2}$



(b) $y = -\sqrt{9 - x^2}$

Fig. 22-1

Isolando y'',

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

A partir de (0), podemos substituir $x^2 + y^2$ por 9,

$$y'' = -\frac{9}{y^3}$$

Aceleração

Considere um objeto que se move ao longo de um eixo coordenado de acordo com a equação $s = f(t)$, onde s é a coordenada do objeto e t é tempo. De acordo com o Capítulo 18, a velocidade do objeto é dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

A taxa de variação da velocidade é chamada de *aceleração a*.

Definição: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$

Exemplos

(a) Para um objeto em queda livre, $s = s_0 + v_0 t - 16t^2$, onde s, medido em pés, é positivo na direção para cima e t é medido em segundos. Lembre que s_0 e v_0 denotam posição e velocidade iniciais; ou seja, os valores de s e v quando $t = 0$. Logo,

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - 32t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

Assim, a velocidade diminui 32 pés por segundo a cada segundo. Outra forma de expressar isso é dizer que a aceleração (para baixo) devido à gravidade é de 32 pés por segundo por segundo, o que se abrevia por 32 pés/seg^2.

(b) Um objeto se move ao longo de uma linha reta de acordo com a equação $s = 2t^3 - 3t^2 + t - 1$. Logo,

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 6t + 1$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

Nesse caso, a aceleração não é constante. Observe que $a > 0$ quando $12t - 6 > 0$, ou $t > \frac{1}{2}$. Isso implica (pelo Teorema 17.3) que a velocidade é crescente para $t > \frac{1}{2}$.

Problemas Resolvidos

22.1 Descreva todas as derivadas (primeira, segunda etc) das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5x - \pi$ (*b*) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(*a*) $f'(x) = x^3 - 5$ $f''(x) = 3x^2$ $f'''(x) = 6x$ $f^{(4)}(x) = 6$ $f^{(n)}(x) = 0$ para $n \geq 5$

(*b*) $f'(x) = \frac{(x+1)D_x x - xD_x(x+1)}{(x+1)^2}$ [pela regra do quociente]

$$= \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$$

$f''(x) = -2(x+1)^{-3}D_x(x+1)$ [pela regra da cadeia para potências]

$$= -2(x+1)^{-3}(1) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = -2(-3)(x+1)^{-4} = \frac{+6}{(x+1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -2(-3)(-4)(x+1)^{-5} = \frac{-24}{(x+1)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = -2(-3)(-4)(-5)\cdots(-n)(x+1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}}$$

ÁLGEBRA $(-1)^{n-1}$ será 1 quando n for ímpar e -1 quando n for par. $n!$ representa o produto $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ dos primeiros n inteiros positivos.

22.2 Calcule y'' se

$$y^3 - xy = 1 \qquad (0)$$

Derivação de (*0*), usando a regra da cadeia para potências em $D_x y^3$ e a regra do produto em $D_x(xy)$, nos dá

$$3y^2y' - (xy' + y) = 0$$
$$3y^2y' - xy' - y = 0$$
$$(3y^2 - x)y' - y = 0 \qquad (1)$$

Em seguida derive (*1*),

$(3y^2 - x)D_x y' + y'D_x(3y^2 - x) - y' = 0$ [pela regra do produto]

$(3y^2 - x)y'' + y'(6yy' - 1) - y' = 0$ [pela regra da cadeia para potência]

$(3y^2 - x)y'' + y'((6yy' - 1) - 1) = 0$ [fator y']

$$(3y^2 - x)y'' + y'(6yy' - 2) = 0 \qquad (2)$$

Agora resolva (*1*), isolando y',

$$y' = \frac{y}{3y^2 - x}$$

Finalmente, substitua em (*2*) e isole y'',

$$(3y^2 - x)y'' + \frac{y}{3y^2 - x} \cdot \left(\frac{6y^2}{3y^2 - x} - 2\right) = 0$$

$(3y^2 - x)^3 y'' + (3y^2 - x)\frac{y}{3y^2 - x} \cdot (3y^2 - x)\left(\frac{6y^2}{3y^2 - x} - 2\right) = 0$ [multiplicado por $(3y^2 - x)^2$]

$$(3y^2 - x)^3 y'' + y \cdot (6y^2 - 2(3y^2 - x)) = 0 \qquad \left[a\left(\frac{b}{a} - c\right) = b - ca\right]$$
$$(3y^2 - x)^3 y'' + y(6y^2 - 6y^2 + 2x) = 0$$
$$(3y^2 - x)^3 y'' + 2xy = 0$$
$$y'' = \frac{-2xy}{(3y^2 - x)^3}$$

22.3 Se y é uma função de x tal que

$$x^3 - 2xy + y^3 = 8 \qquad (0)$$

e tal que $y = 2$ quando $x = 2$ [observe que esses valores satisfazem (0)], determine os valores de y' e y'' quando $x = 2$.

Proceda como no Problema 22.2.

$$x^3 - 2xy + y^3 = 8$$
$$D_x(x^3 - 2xy + y^3) = D_x(8)$$
$$3x^2 - 2(xy' + y) + 3y^2 y' = 0$$
$$3x^2 - 2xy' - 2y + 3y^2 y' = 0 \qquad (1)$$

$$D_x(3x^2 - 2xy' - 2y + 3y^2 y') = D_x(0)$$
$$6x - 2(xy'' + y') - 2y' + 3(y^2 y'' + y'(2yy')) = 0$$
$$6x - 2xy'' - 2y' - 2y' + 3y^2 y'' + 6y(y')^2 = 0 \qquad (2)$$

Substitua x por 2 e y por 2 em (1),

$$12 - 4y' - 4 + 12y' = 0 \quad \text{ou} \quad 8y' + 8 = 0 \quad \text{ou} \quad y' = -1$$

Substitua x por 2, y por 2 e y' por -1 em (2),

$$12 - 4y'' + 2 + 2 + 12y'' + 12 = 0 \quad \text{ou} \quad 8y'' + 28 = 0 \quad \text{ou} \quad y'' = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$$

22.4 Seja $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ a posição s no instante t de um objeto que move sobre uma reta. (a) Encontre a velocidade e a aceleração. (b) Determine quando a velocidade é positiva e quando é negativa. (c) Verifique quando a aceleração é positiva e quando é negativa. (d) Descreva o movimento do objeto.

(a) $v = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t - 2)(t - 4)$

$a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 18 = 6(t - 3)$

(b) v é positiva quando $t - 2 > 0$ e $t - 4 > 0$ ou quando $t - 2 < 0$ e $t - 4 < 0$; ou seja, quando

$$t > 2 \text{ e } t > 4 \quad \text{ou} \quad t < 2 \text{ e } t < 4$$

o que é equivalente a $t > 4$ ou $t < 2$. $v = 0$ se, e somente se, $t = 2$ ou $t = 4$. Logo, $v < 0$ quando $2 < t < 4$.

(c) $a > 0$ quando $t > 3$ e $a < 0$ quando $t < 3$.

(d) Assumindo que s cresce para a direita, velocidade positiva indica movimento para a direita e velocidade negativa indica movimento para a esquerda. O objeto se move para a direita até, no instante $t = 2$, se encontrar em $s = 20$, onde ele inverte a direção. Move-se então para a esquerda até, em $t = 4$, se encontrar em $s = 16$, onde novamente inverte a direção. Em seguida ele volta a se mover para a direita (ver Fig. 22-2).

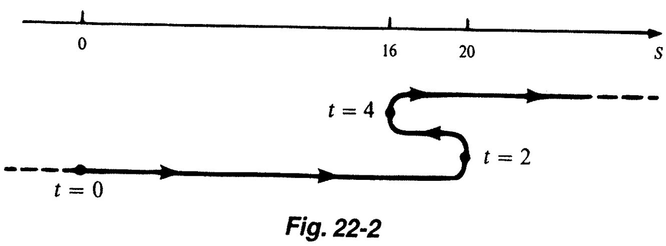


Fig. 22-2

Problemas Complementares

22.5 Encontre a derivada segunda D_x^2 das seguintes funções y:

(*a*) $y = x - \dfrac{1}{x}$ (*b*) $y = \pi x^3 - 7x$ (*c*) $y = \sqrt{x+5}$ (*d*) $y = \sqrt[3]{x-1}$

(*e*) $y = \sqrt[4]{x^2+1}$ (*f*) $y = (x+1)^2(x-3)^3$ (*g*) $y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

22.6 Use derivação implícita para encontrar a derivada segunda y'' nos seguintes casos:

(*a*) $x^2 + y^2 = 1$ (*b*) $x^2 - y^2 = 1$ (*c*) $x^3 - y^3 = 1$ (*d*) $xy + y^2 = 1$

22.7 Se $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, calcule y'': (*a*) explicitamente isolando y e então derivando duas vezes; (*b*) por derivação implícita. (*c*) Qual, entre os métodos (*a*) e (*b*), é o mais simples?

22.8 Calcule todas as derivadas (primeira, segunda etc.) de y:

(*a*) $y = 4x^4 - 2x^2 + 1$ (*b*) $y = 2x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x}$ (*c*) $y = \sqrt{x}$

(*d*) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (*e*) $y = \dfrac{1}{3+x}$ (*f*) $y = \dfrac{1}{x^2}$

22.9 Determine a velocidade no primeiro instante em que a aceleração é 0 se a equação do movimento é:

(*a*) $s = t^2 - 5t + 7$ (*b*) $s = t^3 - 3t + 2$ (*c*) $s = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 3$

22.10 No ponto (1,2) da curva $x^2 - xy + y^2 = 3$, encontre a taxa de variação em relação a x do coeficiente angular da reta tangente à curva.

22.11 Se $x^2 + 2xy + 3y^2 = 2$, encontre os valores de dy/dx e d^2y/dx^2 quando $y = 1$.

22.12 Seja $f(x) = \begin{cases} 1 + 3K(x-2) + (x-2)^2 & \text{se } x \le 2 \\ Lx + K & \text{se } x > 2 \end{cases}$, onde L e K são constantes.

(*a*) Se $f(x)$ é diferenciável em $x = 2$, calcule L e K. (*b*) Uma vez determinados L e K no item (*a*), $f''(x)$ é contínua para todo x?

22.13 Seja $h(x) = f(x)g(x)$ e considere que f e g têm derivadas de todas as ordens. (*a*) Encontre fórmulas para $h''(x)$, $h'''(x)$ e $h^{(4)}(x)$. (*b*) Obtenha uma fórmula geral para $h^{(n)}(x)$.

22.14 Seja $H(x) = f(x)/g(x)$, onde f e g têm derivadas primeira e segunda. Encontre uma fórmula para $H''(x)$.

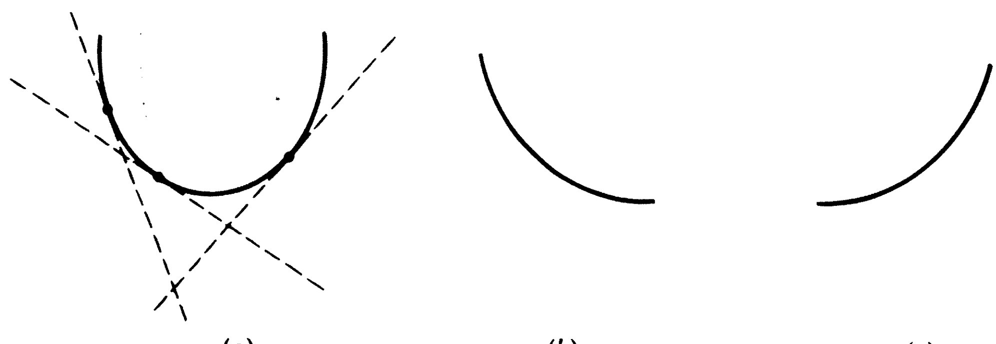
22.15 A altura s de um objeto em queda livre na Lua é aproximadamente dada por $s = s_0 + v_0 t - \frac{27}{10}t^2$, onde s é medido em pés e t em segundos. (*a*) Qual é a aceleração devido à gravidade na Lua? (*b*) Se um objeto é arremessado para cima a partir da superfície da Lua com uma velocidade inicial de 54 pés por segundo, qual é a altitude máxima que ele alcançará e quando alcançará aquela altitude?

Capítulo 23

Aplicações da Derivada Segunda e Esboço de Gráficos

23.1 CONCAVIDADE

Se uma curva tem a forma de uma xícara ou parte de uma xícara (como as curvas na Fig. 23-1), dizemos que ela é *côncava para cima*. Uma descrição matemática dessa noção pode ser dada. Uma curva é côncava para cima se a curva está acima da reta tangente a qualquer ponto da curva. Assim, na Fig. 23-1(a) a curva está acima de todas as três retas tangentes.



(a) (b) (c)

Fig. 23-1 Concavidade para cima.

Uma curva é dita ser *côncava para baixo* se tem a forma de uma tampa ou parte de uma tampa (ver Fig. 23-2). Em termos matemáticos, uma curva é côncava para baixo se está abaixo da reta tangente em um ponto arbitrário da curva [ver Fig. 23-2(a)].

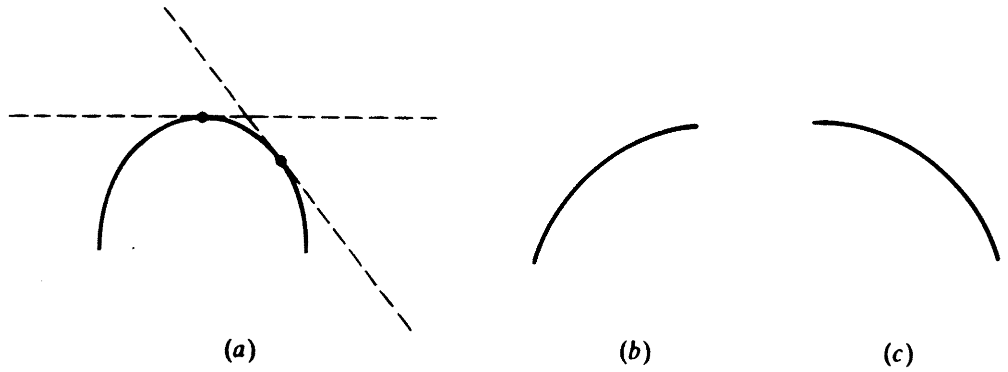


Fig. 23-2 Concavidade para baixo.

Uma curva pode, naturalmente, ser formada por partes de diferentes concavidades. A curva na Fig. 23-3 é côncava para baixo de A a B, côncava para cima de B a C, côncava para baixo de C a D e côncava para cima de D a E. Um ponto da curva no qual a concavidade muda é chamado de *ponto de inflexão*. B, C e D são pontos de inflexão na Fig. 23-3.

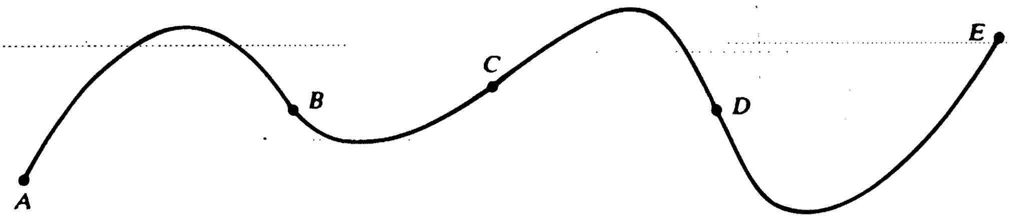


Fig. 23-3

Da Fig. 23-1 percebemos que se nos movemos da esquerda para direita ao longo da curva que é côncava para cima, o coeficiente angular da reta tangente aumenta. O coeficiente angular se torna menos negativo ou mais positivo. Reciprocamente, se a reta tangente tem essa propriedade, a curva deve ser côncava para cima. Mas, para uma curva $y = f(x)$, a reta tangente certamente terá essa propriedade se $f''(x)>0$, uma vez que, nesse caso, o Teorema 17.3 implica que o coeficiente angular $f'(x)$ da reta tangente será uma função crescente. Usando um argumento semelhante, percebemos que se $f''(x)<0$, o coeficiente angular da reta tangente é decrescente e, da Fig. 23-2 vemos que a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo. Isso nos leva ao:

Teorema 23.1: Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a,b), então o gráfico de f é côncavo para cima entre $x = a$ e $x = b$. Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a,b), então o gráfico de f é côncavo para baixo entre $x = a$ e $x = b$.

Para uma demonstração rigorosa do Teorema 23.1 ver Problema 23.17.

Corolário 23.2: Se o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $x = c$ e f'' existe e é contínua em $x = c$, então $f''(c) = 0$.

De fato, se $f''(c)\neq 0$, então $f''(c) > 0$ ou $f''(c) < 0$. Se $f''(c) > 0$, então $f''(x) > 0$ para todo x em algum intervalo aberto que contém c, e o gráfico seria côncavo para cima em tal intervalo, contrariando a hipótese de que existe um ponto de inflexão em $x = c$. Conseguimos uma contradição semelhante se $f''(c) < 0$, pois nesse caso, o gráfico seria côncavo para baixo em um intervalo aberto contendo c.

Exemplos

(*a*) Considere o gráfico de $y = x^3$ [ver Fig. 23-4(*a*)]. Aqui $y' = 3x^2$ e $y'' = 6x$. Como $y'' > 0$ quando $x > 0$ e $y'' < 0$ quando $x < 0$, a curva é côncava para cima quando $x > 0$ e côncava para baixo quando $x < 0$. Há um ponto de inflexão na origem, onde a concavidade muda. Esse é o único possível ponto de inflexão, pois se $y'' = 6x = 0$, então x deve ser 0.

(*b*) Se $f''(c) = 0$, o gráfico de f não precisa necessariamente ter um ponto de inflexão em $x = c$. Por exemplo, o gráfico de $f(x) = x^4$ [ver Fig. 23-4(*b*)] tem um mínimo relativo, não um ponto de inflexão, em $x = 0$, onde $f''(x)= 12x^2 = 0$.

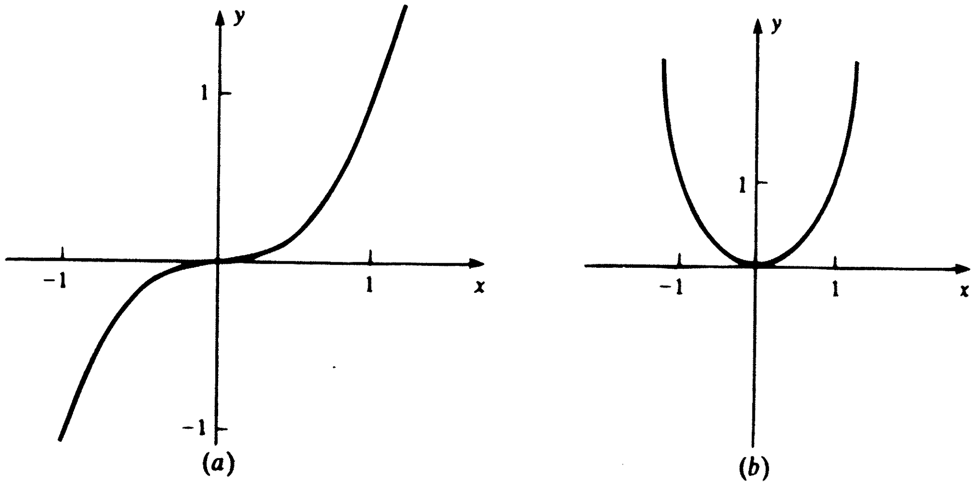


Fig. 23-4

23.2 TESTE PARA EXTREMOS RELATIVOS

Já sabemos, do Capítulo 14, que a condição $f'(c) = 0$ é necessária mas não suficiente para que uma função diferenciável f tenha um máximo ou mínimo relativo em $x = c$. Precisamos de alguma informação adicional que nos dirá se uma função realmente tem um extremo relativo em um ponto onde sua derivada é nula.

Teorema 23-3 (*Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos*): Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f admite um máximo relativo em c. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em c.

Demonstração: Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f é horizontal em $x = c$. Se, além disso, $f''(c) < 0$, então, de acordo com o Teorema 23.1[1], o gráfico de f é côncavo para baixo nas proximidades de $x = c$. Assim, próximo de $x = c$, o gráfico de f deve estar abaixo da reta horizontal que passa por $(c,f(c))$; f tem, portanto, um máximo relativo em $x = c$ [ver Fig. 23-5(a)]. Um argumento semelhante nos leva a um mínimo absoluto quando $f''(c)>0$ [ver Fig. 23-5(b)].

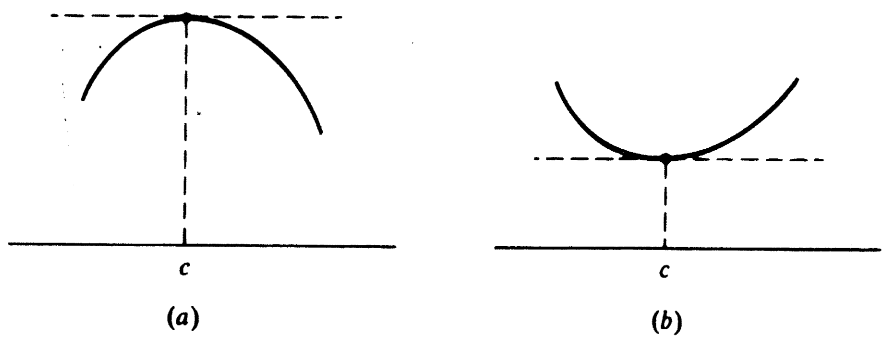


Fig. 23-5

Exemplo Considere a função $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 2$. Logo,

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 4 = 2(3x^2 + x - 2) = 2(3x - 2)(x + 1)$$

Assim, se $f'(x) = 0$, então $3x - 2 = 0$ ou $x + 1 = 0$; ou seja, $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -1$. Mas $f''(x) = 12x + 2$. Portanto,

$$f''(-1) = 12(-1) + 2 = -12 + 2 = -10 < 0$$
$$f''(\tfrac{2}{3}) = 12(\tfrac{2}{3}) + 2 = 8 + 2 = 10 > 0$$

[1] Para usarmos o Teorema 23.1 devemos assumir que f'' é contínua em c e que existe em um intervalo aberto em torno de c. No entanto, um argumento mais elaborado pode evitar tal hipótese.

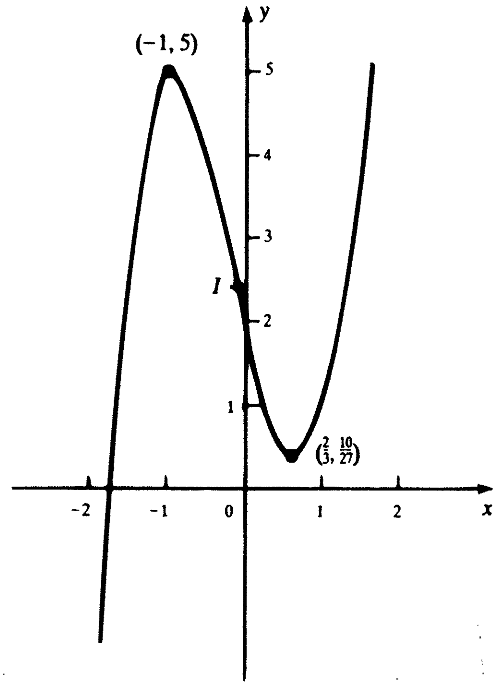


Fig. 23-6

Como $f''(-1) < 0$, f tem um máximo relativo em $x = -1$ com

$$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) + 2 = -2 + 1 + 4 + 2 = 5$$

Como $f''(\frac{2}{3}) > 0$, f tem um mínimo relativo em $x = \frac{2}{3}$, com

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{16}{27} + \frac{4}{9} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{16}{27} + \frac{12}{27} - \frac{72}{27} + \frac{54}{27} = \frac{10}{27}$$

O gráfico de f é exibido na Fig. 23-6. Mas como

$$f''(x) = 12x + 2 = 12\left(x + \frac{1}{6}\right) = 12\left[x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right]$$

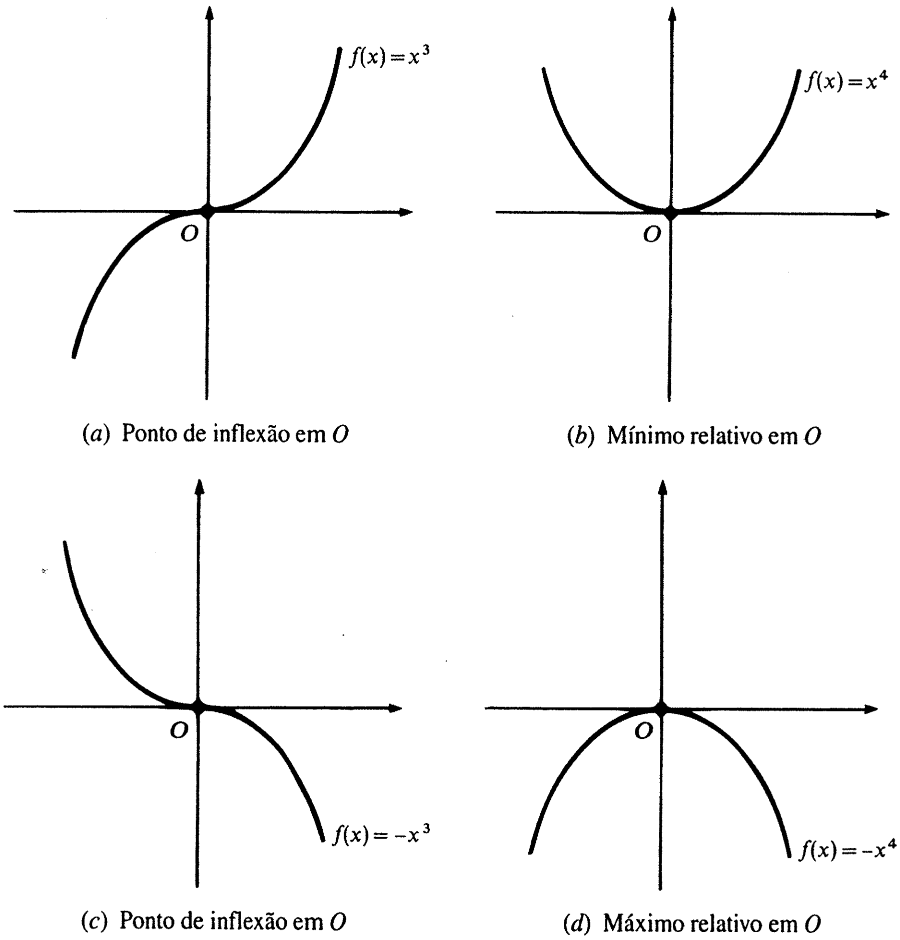
$f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{1}{6}$, e $f''(x) < 0$ quando $x < -\frac{1}{6}$. Logo, a curva é côncava para cima quando $x > -\frac{1}{6}$ e côncava para baixo em $x < -\frac{1}{6}$. Desse modo, deve haver um ponto de inflexão I, onde $x = -\frac{1}{6}$.
A partir do Problema 9.1 sabemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

Assim, a curva se move para cima indefinidamente para a direita e para baixo indefinidamente para a esquerda.

O teste da derivada segunda não nos diz *nada* quando $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$. Isso se mostra com os exemplos na Fig. 23-7, onde em cada caso $f'(0) = f''(0) = 0$.

Para distinguir entre os quatro casos exibidos na Fig. 23-7, considere o sinal da derivada f' imediatamente à esquerda e imediatamente à direita do ponto crítico. Lembrando que o sinal da derivada é o sinal do coeficiente angular da reta tangente, temos as quatro combinações mostradas na Fig. 23-8. Elas nos levam diretamente ao Teorema 23.4.



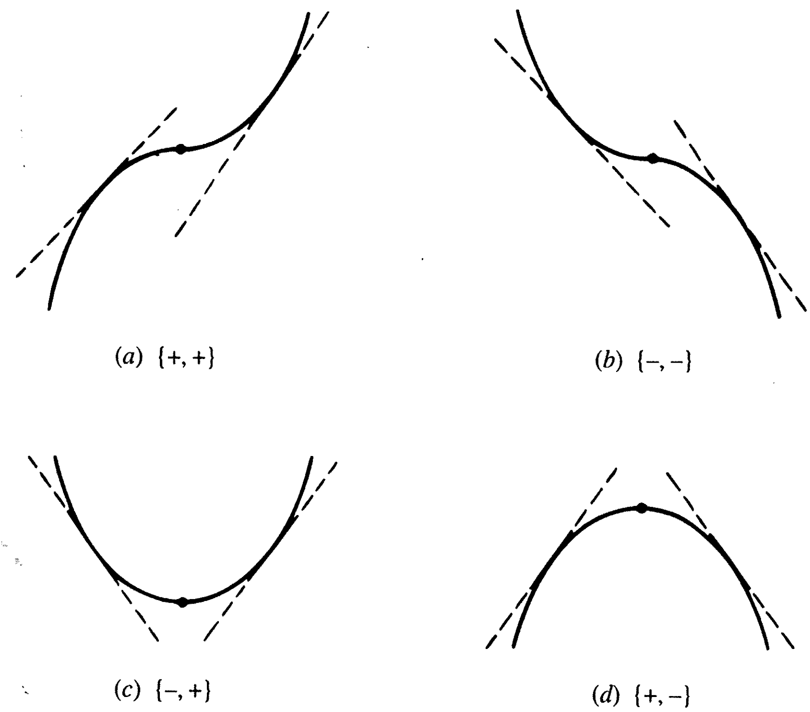
(*a*) Ponto de inflexão em O

(*b*) Mínimo relativo em O

(*c*) Ponto de inflexão em O

(*d*) Máximo relativo em O

Fig. 23-7



(*a*) $\{+,+\}$

(*b*) $\{-,-\}$

(*c*) $\{-,+\}$

(*d*) $\{+,-\}$

Fig. 23-8

Teorema 23-4 (*Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos*): Considere que $f'(c) = 0$.

$\{-, +\}$ Se f' é negativa à esquerda de c e positiva à direita de c, então f tem um *mínimo relativo* em c.

$\{+, -\}$ Se f' é positiva à esquerda de c e negativa à direita de c, então f tem um *máximo relativo* em c.

$\{+, +\}$ $\{-, -\}$ Se f' tem o mesmo sinal à esquerda e à direita de c, então f tem um *ponto de inflexão* em c.

23.3 ESBOÇO DE GRÁFICOS

Agora estamos preparados para esboçar os gráficos de uma grande variedade de funções. As características mais importantes de tais gráficos são:

(i) Extremos relativos (se existirem)
(ii) Pontos de inflexão (se existirem)
(iii) Concavidade
(iv) Assíntotas verticais e horizontais (se existirem)
(v) Comportamento quando x tende a $+\infty$ e $-\infty$

O procedimento foi ilustrado com a função $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 2$ na Seção 23.2. Um exemplo a mais segue abaixo.

Exemplo Esboce o gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Primeiramente, a função é ímpar [isto é, $f(-x) = -f(x)$], de forma que basta representá-la graficamente para x positivo. O gráfico é então completado por reflexão na origem (ver Seção 7.3).

Calcule as primeiras duas derivadas de f,

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)D_x(x) - xD_x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = D_x f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 D_x(1 - x^2) - (1 - x^2)D_x((x^2 + 1)^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (1 - x^2)[2(x^2 + 1)(2x)]}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2 + 1)[x^2 + 1 + 2(1 - x^2)]}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

Como $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, $f'(x)$ $f'(x)$ tem uma única raiz positiva, $x = 1$, na qual $f''(1) = [-2(2)]/(2)^3 = -\frac{1}{2}$. Logo, pelo teste da derivada segunda, f tem um máximo relativo em $x = 1$. O valor máximo é $f(1) = \frac{1}{2}$.

Se examinamos a fórmula para $f''(x)$,

$$f''(x) = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

notamos que $f''(x) > 0$ quando $x > \sqrt{3}$ e que $f''(x) < 0$ quando $0 < x < \sqrt{3}$. Pelo Teorema 23.1, o gráfico de f é côncavo para cima em $x > \sqrt{3}$ e côncavo para baixo em $0 < x < \sqrt{3}$. Portanto, há um ponto de inflexão I em $x = \sqrt{3}$, onde a concavidade muda.

Agora calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1+(1/x^2)} = \frac{0}{1+0} = 0$$

o que mostra que o eixo x positivo é uma assíntota horizontal à direita.

O gráfico, com sua extensão ao eixo x negativo (tracejada), é esboçado na Fig. 23-9. Observe como a concavidade de um tipo se reflete em concavidade de outro tipo. Assim, há um ponto de inflexão em $x = -\sqrt{3}$ e outro ponto de inflexão em $x = 0$. O valor $f(1) = \frac{1}{2}$ é o máximo absoluto de f e $f(-1) = -\frac{1}{2}$ é o mínimo absoluto.

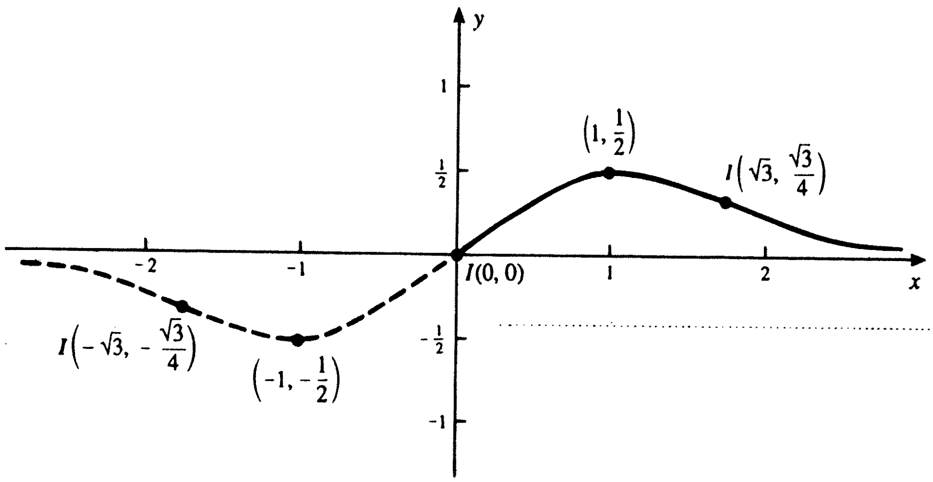


Fig. 23-9

Problemas Resolvidos

23.1 Esboce o gráfico de $f(x) = x - 1/x$.

A função é ímpar. Logo, podemos primeiro esboçar o gráfico para $x > 0$ e, em seguida, refletir na origem para obter o gráfico em $x < 0$.

As derivadas primeira e segunda são

$$f'(x) = D_x(x - x^{-1}) = 1 - (-1)x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = D_x(1 + x^{-2}) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Como $f'(x) = 1 + (1/x^2) > 0$, f é uma função crescente. Além disso, para $x > 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo, uma vez que $f''(x) = -(2/x^3) < 0$ quando $x > 0$. A reta $y = x$ mostra ser uma assíntota, pois

$$\lim_{x\to+\infty} [x - f(x)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

o gráfico de f tem o eixo y negativo como uma assíntota vertical.

Observe que $x = 0$, onde f não é definida, é o único ponto crítico. O gráfico é esboçado, para todo x, na Fig. 23-10. Apesar da concavidade mudar em $x = 0$, não há ponto de inflexão nessa ordenada, pois $f(0)$ não é definida.

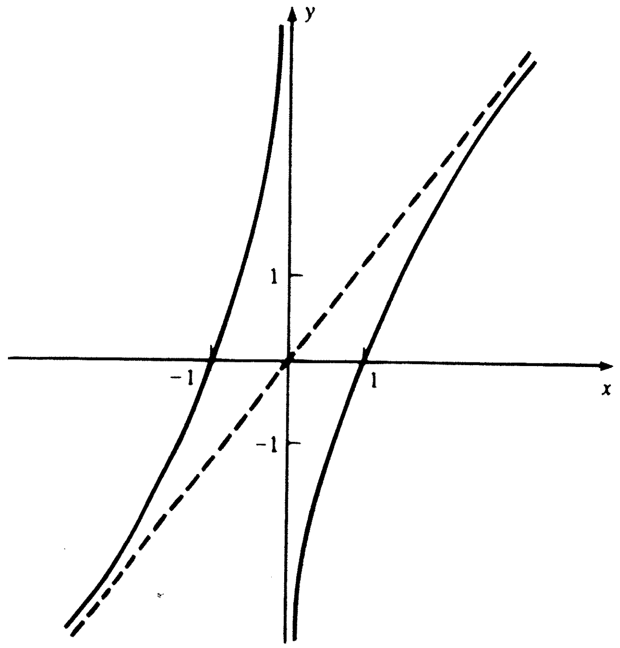


Fig. 23-10

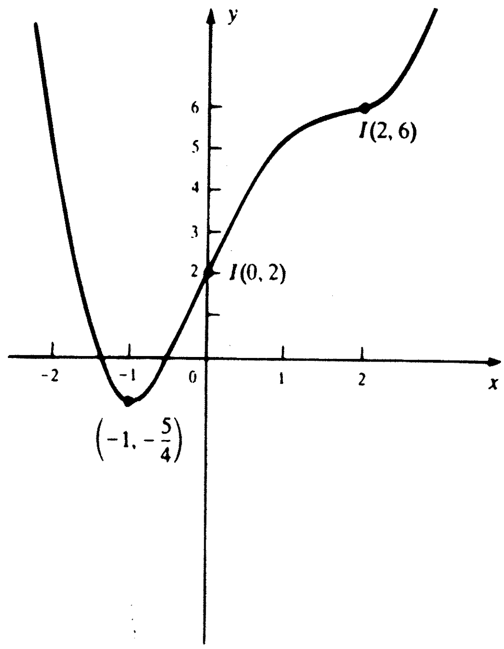


Fig. 23-11

23.2 Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 2$.

A derivada primeira é $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Podemos determinar que -1 é uma raiz de $x^3 - 3x^2 + 4$.

ÁLGEBRA Ao se procurar por raízes de um polinômio, primeiro tente os fatores inteiros da constante. Nesse caso, os fatores de 4 são ± 1, ± 2, ± 4.

Assim (Teorema 7.2), $f'(x)$ é divisível por $x + 1$. A divisão resulta em

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 2)^2$$

Logo, os pontos críticos são $x = -1$ e $x = 2$. Mas

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Logo, $f''(-1) = 3(-1)(-1-2) = 9$. Assim, pelo teste da derivada segunda, f tem um mínimo relativo em $x = -1$.

Como $f''(2) = 3(2)(2-2) = 0$, fazemos o teste da derivada primeira em $x = 2$.

$$f'(x) = (x + 1)(x - 2)^2$$

Em ambos os lados de $x = 2$, $f'(x) > 0$, já que $x + 1 > 0$ e $(x - 2)^2 > 0$. Esse é o caso $\{+,+\}$. Há um ponto de inflexão em (2,6). Além disso, $f''(x)$ muda de sinal em $x = 0$, de modo que existe um ponto de inflexão também em (0,2). Como

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4}x^4 = +\infty$$

o gráfico sobe indefinidamente pela esquerda e pela direita. O gráfico é exibido na Fig. 23-11.

23.3 Esboce o gráfico de $f(x) = x^4 - 8x^2$.

Como a função é par, restringimos a atenção para $x \geq 0$.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4) = 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 12\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Os pontos críticos não-negativos são $x = 0$ e $x = 2$. Testando,

x	$f(x)$	$f''(x)$
0	0	-16 máximo relativo
2	-16	32 mínimo relativo
$+\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{80}{9}$	0 ponto de inflexão

Observando o sinal de $f''(x)$, vemos que o gráfico será côncavo para baixo em $0 < x < 2/\sqrt{3}$ e côncavo para cima em $x > 2/\sqrt{3}$. Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, o gráfico sobe à direita indefinidamente.

O gráfico é esboçado na Fig. 23-12. Observe que, no conjunto de todos os números reais, f tem um mínimo absoluto de -16 em $x = \pm 2$, mas nenhum valor de máximo absoluto.

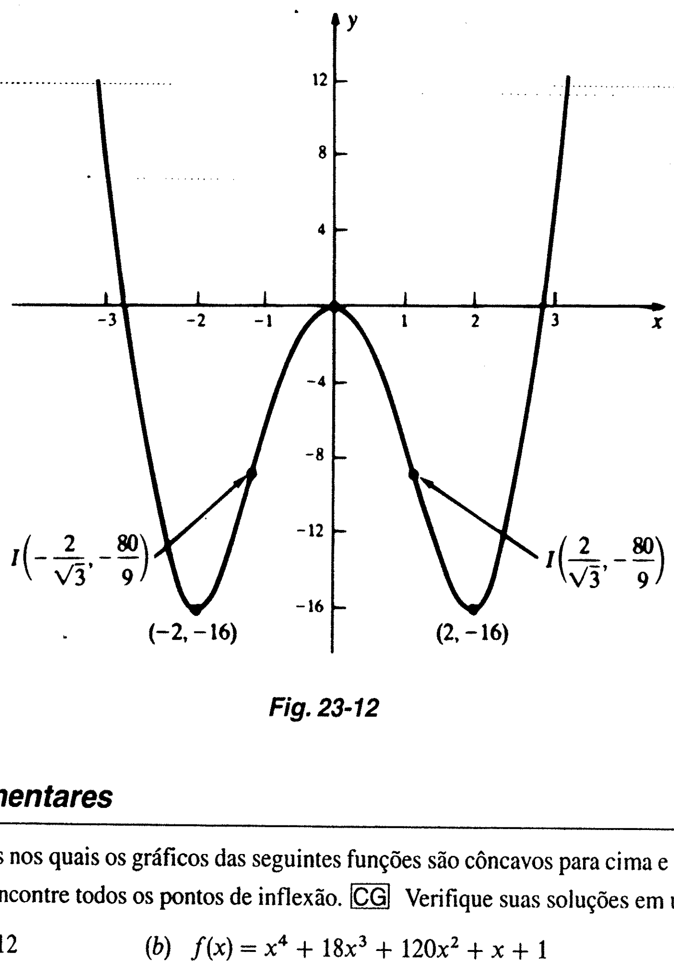


Fig. 23-12

Problemas Complementares

23.4 Determine os intervalos nos quais os gráficos das seguintes funções são côncavos para cima e os intervalos onde eles são côncavos para baixo. Encontre todos os pontos de inflexão. CG Verifique suas soluções em uma calculadora gráfica.

(*a*) $f(x) = x^2 - x + 12$ (*b*) $f(x) = x^4 + 18x^3 + 120x^2 + x + 1$

(*c*) $f(x) = x^3 + 15x^2 + 6x + 1$ (*d*) $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$ (*e*) $f(x) = 5x^4 - x^5$

23.5 Encontre os pontos críticos das seguintes funções e determine se eles correspondem a máximos relativos, mínimos relativos, pontos de inflexão ou nenhum desses casos. CG Verifique suas soluções em uma calculadora gráfica.

(*a*) $f(x) = 8 - 3x + x^2$ (*b*) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 9$

(*c*) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 3$ (*d*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ (*e*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

23.6 Esboce os gráficos das seguintes funções, exibindo extremos (relativos ou absolutos), pontos de inflexão, assíntotas e comportamento no infinito. $\boxed{\text{CG}}$ Verifique suas soluções com uma calculadora gráfica.

(*a*) $f(x) = (x^2 - 1)^3$ (*b*) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ (*c*) $f(x) = x(x - 2)^2$

(*d*) $f(x) = x^4 + 4x^3$ (*e*) $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ (*f*) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

(*g*) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ (*h*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ (*i*) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{x^2}$

23.7 Se, para todo $x, f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$, qual(is) das curvas na Fig. 23-13 poderia ser parte do gráfico de f?

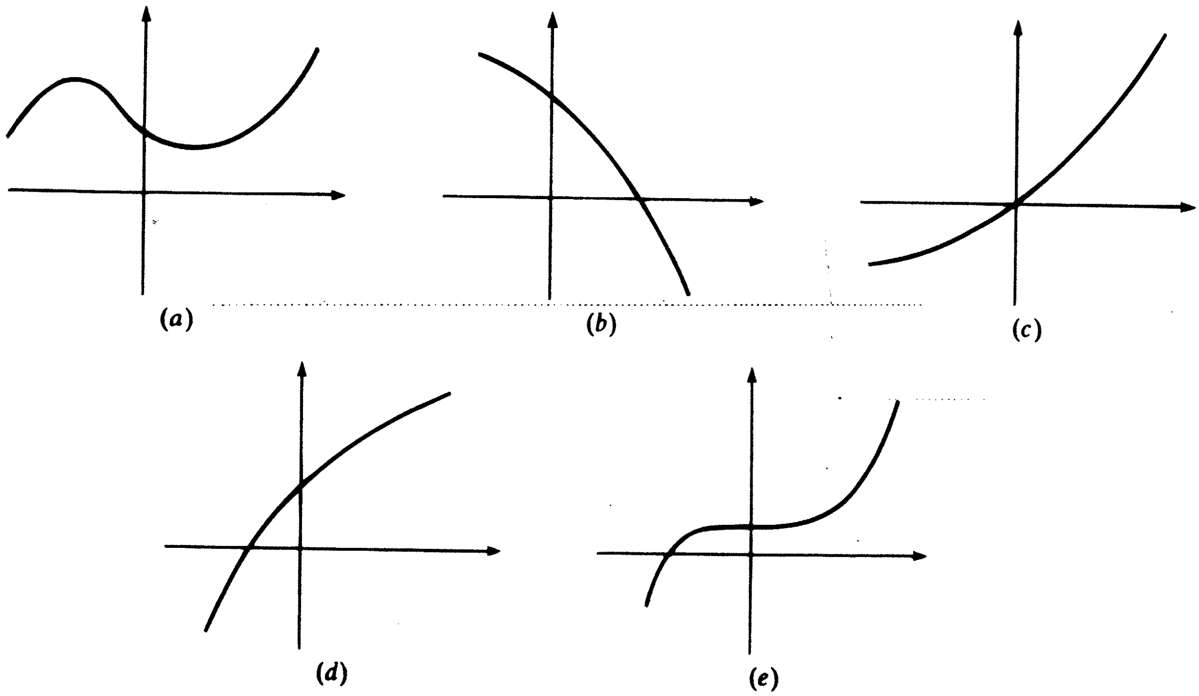


Fig. 23-13

23.8 Em qual(is), entre os cinco pontos indicados no gráfico da Fig. 23-14, que y' e y'' têm o mesmo sinal?

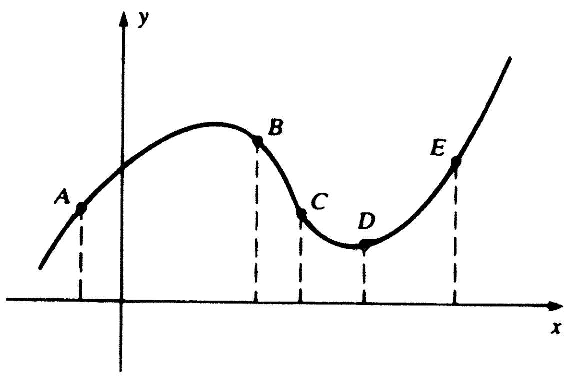


Fig. 23-14

23.9 Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. (*a*) Quantos extremos relativos que f tem? (*b*) Quantos pontos de inflexão existem no gráfico de f? (*c*) Qual é o tipo de curva do gráfico de f?

23.10 Seja f contínua para todo x, com um máximo relativo em (–1,4) e um mínimo relativo em (3,–2). Qual(is) das seguintes afirmações *deve(m)* ser verdadeira(s)? (*a*) O gráfico de f tem um ponto de inflexão em algum x no intervalo (–1,3). (*b*) O gráfico de f tem uma assíntota vertical. (*c*) O gráfico de f tem uma assíntota horizontal. (*d*) $f'(3) = 0$. (*e*) O gráfico de f tem uma reta tangente horizontal em $x = -1$. (*f*) O gráfico de f intersecta ambos os eixos x e y. (*g*) f tem um máximo absoluto no conjunto dos números reais.

23.11 Se $f(x) = x^3 + 3x^2 + k$ tem três raízes reais distintas, quais são as limitações sobre k? [*Sugestão:* Esboce o gráfico de f, usando f' e f''. Em quantos pontos que o gráfico de f corta o eixo x?]

23.12 Esboce o gráfico de uma função contínua f tal que:

(*a*) $f(1) = -2, f'(1) = 0, f''(x) > 0$ para todo x

(*b*) $f(2) = 3, f'(2) = 0, f''(x) < 0$ para todo x

(*c*) $f(1) = 1, f''(x) < 0$ para $x > 1, f''(x) > 0$ para $x < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(*d*) $f(0) = 0, f''(x) < 0$ para $x > 0, f''(x) > 0$ para $x < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

(*e*) $f(0) = 1, f''(x) < 0$ para $x \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$

(*f*) $f(0) = 0, f''(x) > 0$ para $x < 0, f''(x) < 0$ para $x > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

(*g*) $f(0) = 1, f''(x) < 0$ se $x \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$

23.13 Seja $f(x) = x|x - 1|$ para x pertencente a $[-1,2]$. (*a*) Para quais valores de x que f é contínua? (*b*) Em quais valores de x que f é diferenciável? Calcule $f'(x)$. [*Sugestão:* Analise separadamente os casos $x > 1$ e $x < 1$.] (*c*) Onde que f é uma função crescente? (*d*) Calcule $f''(x)$. (*e*) Onde que o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo? (*f*) Esboce o gráfico de f.

23.14 Dadas as funções f e g tais que, para todo x, (i) $(g(x))^2 - (f(x))^2 = 1$; (ii) $f'(x) = (g(x))^2$; (iii) $f''(x)$ e $g''(x)$ existem, (iv) $g(x) < 0$ e (v) $f(0) = 0$, mostre que: (*a*) $g'(x) = f(x)g(x)$; (*b*) g tem um máximo relativo em $x = 0$; (*c*) f tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

23.15 Para qual valor de k que $x - kx^{-1}$ terá um máximo relativo em $x = -2$?

23.16 Seja $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Considere que o gráfico de $y = f(x)$ é simétrico em relação ao eixo y, tem um máximo relativo em $(0,1)$ e um mínimo absoluto em $(k,-3)$. Encontre A, B, C e D, bem como o(s) possível(is) valor(es) para k.

23.17 Prove o Teorema 23.1. [*Sugestão:* Considere que $f''(x) > 0$ em (a,b) e seja c um ponto de (a,b). A equação da reta tangente em $x = c$ é $y = f'(c)(x - c) + f(c)$. Deve ser mostrado que $f(x) > f'(c)(x - c) + f(c)$. Mas o teorema do valor médio nos diz que

$$f(x) = f'(x^*)(x - c) + f(c)$$

onde x^* está entre x e c e como $f''(x) > 0$ em (a,b), f' é crescente.]

23.18 Dê uma demonstração rigorosa para o teste da derivada segunda (Teorema 23.3). [*Sugestão:* Assuma $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Como $f''(c) < 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(c + h) - f'(c)}{h} < 0$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$, $\dfrac{f'(c + h) - f'(c)}{h} < 0$, e como $f'(c) = 0$, $f'(c + h) < 0$ para $h > 0$ e $f'(c + h) > 0$ para $h < 0$. Pelo teorema do valor médio, se $|h| < \delta$, $\dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} = f'(c + h_1)$ para algum $c + h_1$ entre c e $c + h$. Portanto, $|h_1| < |h|$, e se $h > 0$ ou $h < 0$, podemos inferir que $f(c + h) - f(c) < 0$; ou seja, $f(c + h) < f(c)$. Assim, f tem um máximo relativo em c. O caso no qual $f''(c) > 0$ se reduz ao primeiro caso se trabalharmos com $-f$.]

23.19 Considere $f(x) = \dfrac{3(x^2 - 1)}{x^2 + 3}$.

(*a*) Encontre todos os intervalos abertos onde f é crescente. (*b*) Encontre todos os pontos críticos e determine se eles correspondem a máximos relativos, mínimos relativos ou nenhum desses casos. (*c*) Descreva a concavidade do gráfico de f e encontre todos os pontos de inflexão (se houver algum). (*d*) Esboce o gráfico de f. Mostre quaisquer assíntotas horizontal ou vertical.

23.20 No gráfico de $y = f(x)$ na Fig. 23-15: (*a*) encontre todos os x tais que $f'(x) > 0$; (*b*) encontre todos os x tais que $f''(x) > 0$.

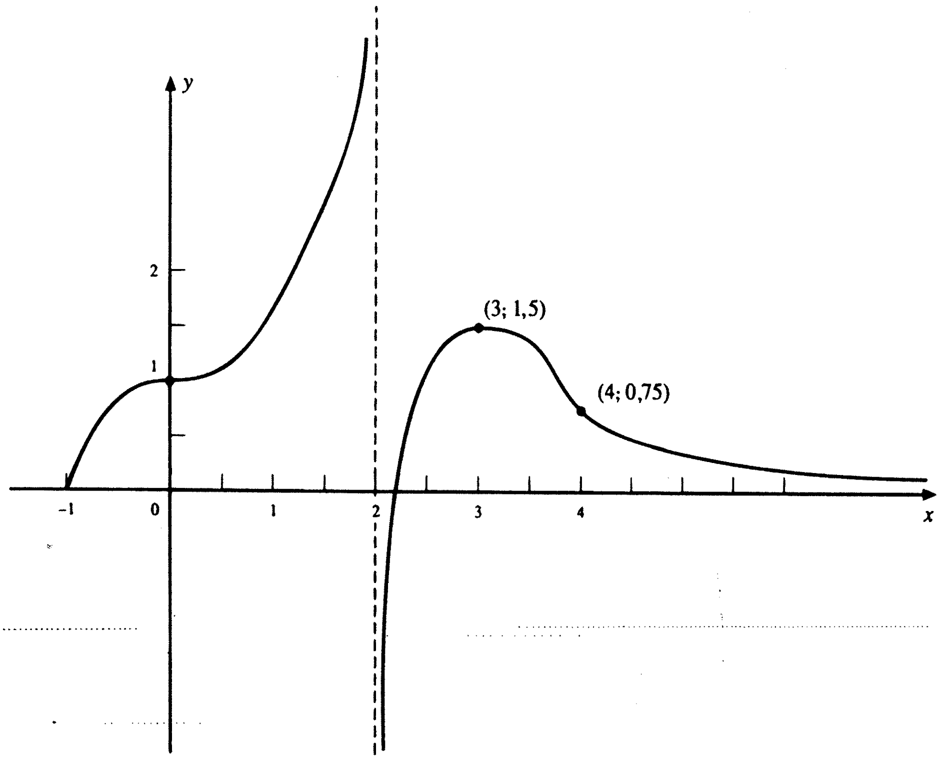


Fig. 23-15

Capítulo 24

Mais Problemas de Máximos e Mínimos

Até agora temos sidos capazes de encontrar os máximos e mínimos absolutos de funções diferenciáveis apenas em intervalos *fechados* (ver Seção 14.2). O resultado a seguir freqüentemente nos capacita a lidar com casos nos quais a função é definida em um intervalo semi-aberto, aberto, infinito ou mesmo no conjunto de todos os números reais. Lembre-se que, em geral, não há qualquer garantia de que uma função tem algum máximo absoluto ou mínimo absoluto em tais domínios.

Teorema 24.1: Seja f uma função contínua em um intervalo $\mathscr{I}$, com um único extremo relativo em $\mathscr{I}$. Então esse extremo relativo é também um extremo absoluto em $\mathscr{I}$.

Argumento intuitivo: Observe a Fig. 24-1. Suponha que f tem um máximo relativo em c e nenhum outro extremo relativo no interior de $\mathscr{I}$. Considere outro número qualquer d em $\mathscr{I}$. A curva desce em ambos os lados de c. Logo, se o valor $f(d)$ fosse maior que $f(c)$ então, em algum ponto u entre c e d, a curva deveria mudar de direção e subir. Mas então f teria um mínimo relativo em u, contrariando nossa hipótese. O resultado para um mínimo relativo segue pela aplicação do mesmo resultado em $-f$.

Para uma demonstração rigorosa, ver Problema 24.20

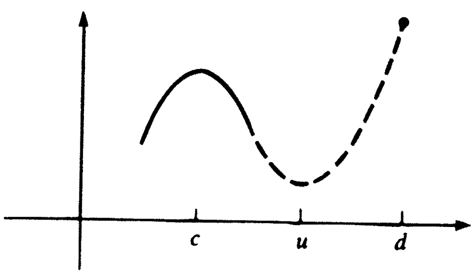


Fig. 24-1

Exemplos

(*a*) Encontre a menor distância do ponto $P(1, 0)$ à parábola $x = y^2$ [ver Fig. 24-2(*a*)].

A distância de um ponto arbitrário $Q(x, y)$ da parábola ao ponto $P(1, 0)$ é, de acordo com (*2.1*),

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + x} \qquad [y^2 = x \text{ at } Q] \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x} = \sqrt{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

Mas minimizar u é equivalente a minimizar $u^2 \equiv F(x) = x^2 - x + 1$ no intervalo $[0, +\infty)$ (o valor de x está restrito pelo fato de que $x = y^2 \geq 0$).

$$F'(x) = 2x - 1 \qquad F''(x) = 2$$

O único ponto crítico é a solução de

$$F'(x) = 2x - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = \tfrac{1}{2}$$

Mas $F''(\frac{1}{2})$. Logo, pelo teste da derivada segunda, a função F tem um mínimo relativo em $x = \frac{1}{2}$. O Teorema 24.1 implica que esse é um mínimo absoluto. Quando $x = \frac{1}{2}$,

$$y^2 = x = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, os pontos da parábola mais próximos de $(1, 0)$ são $(\frac{1}{2}, \sqrt{2}/2)$ e $(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}/2)$.

(*b*) Uma caixa aberta (ou seja, uma caixa sem tampa) deve ser feita com uma base quadrada [ver Fig. 24-2(*b*)] e se exige que tenha um volume de 48 polegadas cúbicas. O fundo da caixa custa 3 centavos por polegada quadrada, enquanto as paredes laterais custam 2 centavos por polegada quadrada. Encontre as dimensões que minimizarão o custo da caixa.

Seja x o lado do quadrado do fundo e seja h a altura. Então o custo do fundo é $3x^2$ e o custo de cada uma das quatro laterais é $2xh$, dando um custo total de

$$C = 3x^2 + 4(2xh) = 3x^2 + 8xh$$

O volume é $V = 48 = x^2h$. Logo, $h = 48/x^2$ e

$$C = 3x^2 + 8x\left(\frac{48}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{384}{x} = 3x^2 + 384x^{-1}$$

que deve ser minimizada em $(0, +\infty)$. Mas

$$\frac{dC}{dx} = 6x - 384x^{-2} = 6x - \frac{384}{x^2}$$

e assim os pontos críticos são soluções de

$$6x - \frac{384}{x^2} = 0$$
$$6x = \frac{384}{x^2}$$
$$x^3 = 64$$
$$x = 4$$

Mas

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 6 - (-2)384x^{-3} = 6 + \frac{768}{x^3} > 0$$

para todos os x positivos; em particular, para $x = 4$. Pelo teste da derivada segunda, C tem um mínimo relativo em $x = 4$. Mas como 4 é o único ponto crítico positivo e C é contínua em $(0, +\infty)$, o Teorema 24.1 nos diz que C tem um mínimo absoluto em $x = 4$. Quando $x = 4$,

$$h = \frac{48}{x^2} = \frac{48}{16} = 3$$

Assim, o lado da base deveria ser de 4 polegadas e a altura de 3 polegadas.

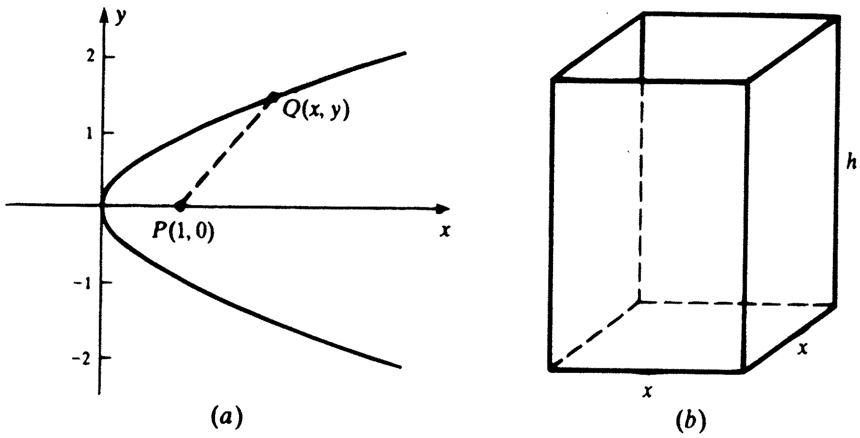


Fig. 24-2

Problemas Resolvidos

24.1 Um fazendeiro deve cercar um terreno retangular com um dos lados ao longo de um riacho; nenhuma cerca é necessária naquele lado. Se a área deve ser de 1800 metros quadrados e a cerca custa \$2 por metro, quais as dimensões que minimizarão o custo?

Sejam x e y os comprimentos dos lados paralelos e perpendiculares ao riacho, respectivamente. Então o custo C é

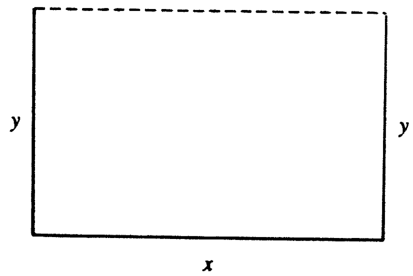
$$C = 2(x + 2y) = 2x + 4y$$

Mas $1800 = xy$, ou $x = 1800/y$, de modo que

$$C = 2\left(\frac{1800}{y}\right) + 4y = \frac{3600}{y} + 4y = 3600y^{-1} + 4y$$

e

$$\frac{dC}{dy} = -3600y^{-2} + 4 = -\frac{3600}{y^2} + 4$$



Queremos minimizar $C(y)$ para $y > 0$. Assim, procuramos por pontos críticos positivos

$$-\frac{3600}{y^2} + 4 = 0$$

$$4 = \frac{3600}{y^2}$$

$$y^2 = \frac{3600}{4} = 900$$

$$y = +30$$

Mas $\frac{d^2C}{dy^2} = \frac{d}{dy}(-3600y^{-2} + 4) = 7200y^{-3} = \frac{7200}{y^3}$, que é positivo em $y = +30$. Logo, pelo teste da derivada segunda, C admite um mínimo relativo em $y = 30$. Como $y = 30$ é o único ponto crítico positivo, não pode haver outro extremo relativo no intervalo $(0. +\infty)$. Portanto, C tem um mínimo absoluto em $y = 30$, pelo Teorema 24.1. Quando $y = 30$ metros,

$$x = \frac{1800}{y} = \frac{1800}{30} = 60 \text{ metros}$$

24.2 Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são os resultados de n medições de uma quantidade desconhecida, um método para estimar o valor de tal quantidade é determinar o número x que minimiza a função

$$f(x) = (x - c_1)^2 + (x - c_2)^2 + \cdots + (x - c_n)^2$$

Esse método é chamado de *princípio dos mínimos quadrados*. Encontre o valor de x determinado pelo princípio dos mínimos quadrados.

$$f'(x) = 2(x - c_1) + 2(x - c_2) + \cdots + 2(x - c_n)$$

Para encontrar os pontos críticos,

$$\begin{aligned} 2(x - c_1) + 2(x - c_2) + \cdots + 2(x - c_n) &= 0 \\ (x - c_1) + (x - c_2) + \cdots + (x - c_n) &= 0 \\ nx - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) &= 0 \\ nx &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n \\ x &= \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \end{aligned}$$

Quando $f''(x) = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n > 0$, temos, pelo teste da derivada segunda, um mínimo relativo de f no único ponto crítico. Pelo Teorema 24.1, esse mínimo relativo é também um mínimo absoluto no conjunto de todos os números reais x. Assim, o princípio dos mínimos quadrados estipula a *média das n medições*.

24.3 Seja $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{x - 1}$ para $0 \le x \le 1$. Encontre os extremos absolutos, se existirem, de f em $[0, 1)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)D_x(4x^2-3) - (4x^2-3)D_x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(8x) - (4x^2-3)(1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 8x - 4x^2 + 3}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 3}{(x-1)^2} = \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Para encontrar os pontos críticos, faça $f'(x) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x-1)^2} &= 0 \\ (2x-3)(2x-1) &= 0 \\ 2x - 3 = 0 \quad &\text{ou} \quad 2x - 1 = 0 \\ x = \tfrac{3}{2} \quad &\text{ou} \quad x = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o único ponto crítico em $[0, 1)$ é $x = \frac{1}{2}$.

Usemos o teste da derivada primeira (Teorema 23.4),

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2(x - \frac{3}{2}) \cdot 2(x - \frac{1}{2})}{(x-1)^2} = \frac{4(x - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})}{(x-1)^2}$$

Para x imediatamente à esquerda de $\frac{1}{2}$, $x - \frac{1}{2} < 0$ e $x - \frac{3}{2} < 0$ e, assim, $f'(x) > 0$. Para x imediatamente à direita de $\frac{1}{2}$, $x - \frac{1}{2} > 0$ e $x - \frac{3}{2} < 0$ e, assim, $f'(x) < 0$. Portanto, temos o caso $\{+, -\}$ e f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{2}$. (O teste da derivada segunda poderia ter sido usado no lugar desse.) A função f não tem nenhum mínimo absoluto em $[0, 1)$. Seu gráfico tem a reta $x = 1$ como assíntota vertical, uma vez que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{4x^2 - 3}{x - 1} = -\infty$ (ver Fig. 24-3).[1]

[1] Observe que $\dfrac{4x^2 - 3}{x - 1} = 4(x + 1) + \dfrac{1}{x - 1} \to -\infty$ quando $x \to 1^-$.

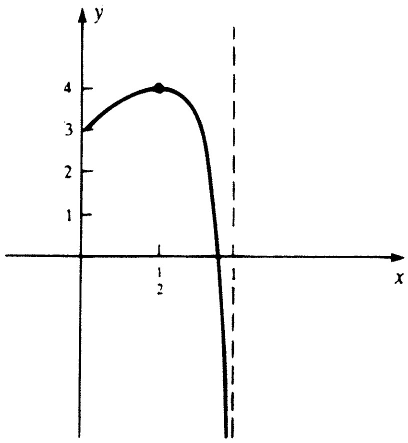


Fig. 24-3

Problemas Complementares

24.4 Um terreno retangular deve ser cercado de modo que a área resultante seja de 100 metros quadrados. Determine as dimensões desse terreno (se houver solução) para que o perímetro seja: (*a*) um máximo; (*b*) um mínimo.

24.5 Encontre os pontos na parábola $2x = y^2$ mais próximos ao ponto (1, 0).

24.6 Encontre os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 2$ mais próximos do ponto (0, 1).

24.7 Uma caixa fechada com uma base quadrada deve ter 252 pés cúbicos. O fundo custa \$ 5 por pé quadrado, a tampa custa \$ 2 o pé quadrado e as laterais custam \$ 3 por cada pé quadrado. Determine as dimensões que minimizarão o custo.

24.8 Encontre o máximo e o mínimo absolutos (se existirem) de $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ no intervalo [0, 2).

24.9 Uma determinada página deve conter 60 centímetros quadrados de material impresso. Devem haver margens de 5 centímetros em cada lado e margens de 3 centímetros em baixo e no topo. Qual o tamanho das linhas impressas para minimizar a quantia de papel usado?

24.10 Um fazendeiro deseja cercar um terreno retangular de 10 000 pés quadrados. As cercas norte-sul custarão \$ 1,50 por pé enquanto as cercas leste-oeste custarão \$ 6,00 cada pé. Determine as dimensões do terreno que minimizarão o custo.

24.11 (*a*) Esboce o gráfico de $\dfrac{1}{1 + x^2}$

(*b*) Encontre o ponto do gráfico onde a reta tangente tem o maior coeficiente angular.

24.12 (*a*) Determine as dimensões da lata cilíndrica fechada [ver Fig. 24-4(a)] que terá uma capacidade de k unidades de volume e terá usado a menor quantia de material. Encontre a razão entre a altura h e o raio r da base e do topo. (O volume é $V = \pi r^2 h$, e a área lateral é $S = 2\pi rh$.)

(*b*) Se a base e o topo da lata devem ser cortados a partir de pedaços quadrados de metal e o resto desses quadrados é desperdiçado [ver Fig. 24-4(*b*)], encontre as dimensões que minimizarão a quantia de material usado e determine a razão entre a altura e o raio.

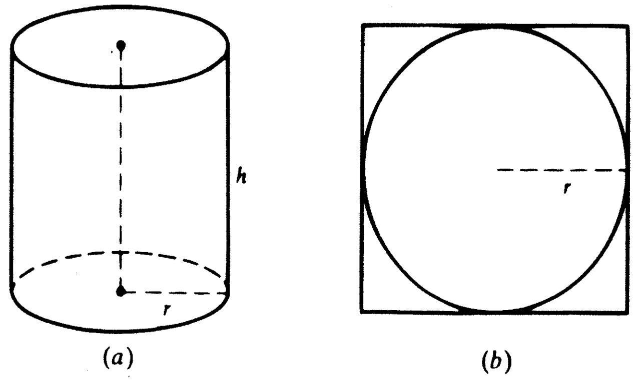


Fig. 24-4

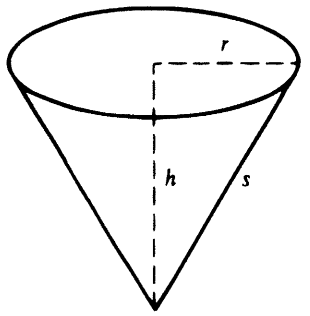


Fig. 24-5

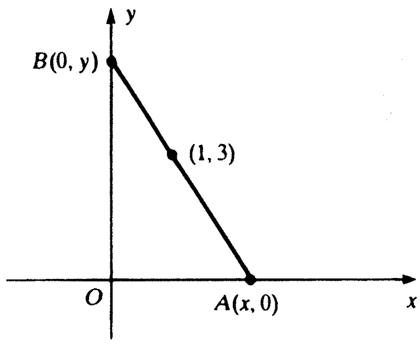


Fig. 24-6

24.13 Um copo em forma de cone e com paredes finas deve suportar 36π polegadas cúbicas de água quando cheio. Quais dimensões minimizarão a quantia de material necessária para o copo? (O volume é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e área da superfície é $A = \pi rs$; ver Fig. 24-5.)

24.14 (*a*) Encontre os extremos absolutos em $[0, +\infty]$ de $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$. (*b*) Esboce o gráfico de f.

24.15 Uma lixeira retangular, aberta no topo, deve conter um volume de 128 metros cúbicos. Se a base for um quadrado, a um custo de \$ 2 por metro quadrado, e as laterais custam \$ 0,50 cada metros quadrado, quais dimensões minimizarão o custo?

24.16 O preço de venda P de um item é $100 - 0{,}02x$ dólares, sendo que x denota o número de itens produzidos diariamente. Se o custo C para produzir e vender x itens é $40x + 15\,000$ dólares por dia, quantos itens deveriam ser produzidos e vendidos a fim de maximizar o lucro?

24.17 Considere todas as retas que passam pelo ponto (1, 3) e que interceptam o eixo x positivo em $A(x, 0)$ e o eixo y positivo em $B(0, y)$ (ver Fig. 24-6). Encontre a reta que torna a área do ΔBOA mínima.

24.18 Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{k}{x}$. (*a*) Para qual valor de k que f terá um mínimo em $x = -2$?

24.19 Encontre os pontos do gráfico de $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 9$ mais próximos da origem. [*Sugestão:* Minimize $x^2 + y^2$, fazendo uso de derivação implícita.]

24.20 Preencha as lacunas na seguinte demonstração do Teorema 24.1. Considere que f é contínua em um intervalo $\mathscr{I}$. Assuma que f tem um máximo relativo em c pertencente a $\mathscr{I}$, mas nenhum outro extremo relativo em $\mathscr{I}$. Devemos provar que f tem um máximo absoluto em $\mathscr{I}$ no ponto c. Suponha, por absurdo, que $d \neq c$ é um ponto em $\mathscr{I}$ com $f(c) < f(d)$. No intervalo fechado $\mathscr{I}$ com pontos de fronteira c e d, f admite um mínimo absoluto em algum ponto u. Como f tem um máximo relativo em c, u é diferente de c e, portanto, $f(u) < f(c)$. Logo, $u \neq d$. Portanto, u está no interior de $\mathscr{I}$ e assim f tem um mínimo *relativo* em $u \neq c$.

24.21 Prove o seguinte teorema, semelhante ao Teorema 24.1: Se o gráfico de f é côncavo para cima (para baixo) em um intervalo $\mathscr{I}$, então qualquer mínimo (máximo) relativo de f em $\mathscr{I}$ é um mínimo (máximo) absoluto em $\mathscr{I}$. [*Sugestão:* Considere a relação entre o gráfico de f e a reta tangente no extremo relativo.)

24.22 Encontre os extremos absolutos (se existirem) de $f(x) = x^{2/5} - \frac{1}{7}x^{7/5}$ em $(-1, 1]$.

Capítulo 25

Medida de Ângulos

25.1 COMPRIMENTO DE ARCO E MEDIDA EM RADIANOS

A Figura 25-1(*a*) ilustra o sistema tradicional de medida de ângulos. Uma rotação completa é dividida em 360 partes iguais e a medida assinalada para cada parte chama-se um *grau*. Em matemática e ciência moderna é interessante definir uma unidade diferente para medida de ângulos.

Definição: Considere um círculo com um raio de uma unidade [ver Fig. 25-1(*b*)]. Seja C o centro e sejam CA e CB dois raios com os quais o arco interceptado $\widehat{AB}$ do círculo tem comprimento 1. Logo, o ângulo central ACB é considerado como tendo uma unidade de medida, *um radiano*.

Seja X o número de graus em $\measuredangle ACB$ de medida 1 radiano. Então, a razão entre X e 360° (uma volta completa) é igual à razão entre $\widehat{AB}$ e a circunferência inteira 2π. Como $\widehat{AB} = 1$,

$$\frac{X}{360} = \frac{1}{2\pi} \quad \text{ou} \quad X = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$$

Assim,

$$1 \text{ radiano} = \frac{180}{\pi} \text{ graus} \tag{25.1}$$

Se consideramos π como sendo aproximadamente 3,14, então 1 radiano é aproximadamente igual a 57,3 graus. Se multiplicamos (*25.1*) por $\pi/180$, temos

$$1 \text{ grau} = \frac{\pi}{180} \text{ radianos} \tag{25.2}$$

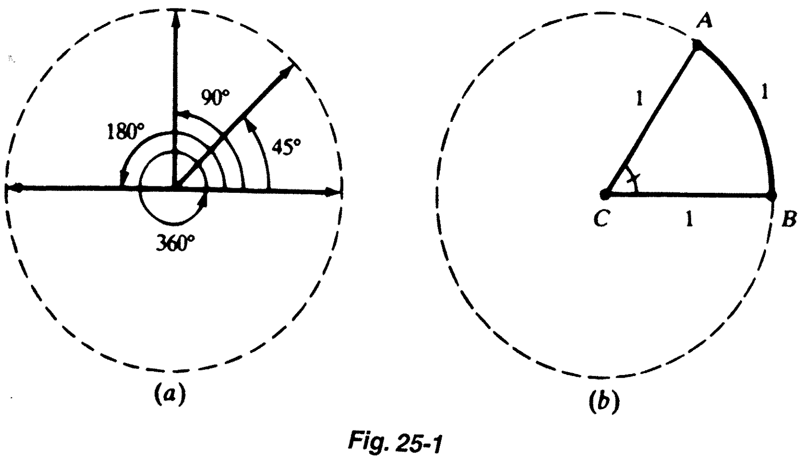


Fig. 25-1

Exemplo Determinemos a medida em radianos de alguns ângulos "notáveis" dados em graus. Claramente, o ângulo nulo é 0 em qualquer medida. Para um ângulo de 30°, (*25.2*) nos dá

$$30° = 30\left(\frac{\pi}{180}\text{ radianos}\right) = \frac{\pi}{6}\text{ radianos}$$

Para um ângulo de 45°,

$$45° = 45\left(\frac{\pi}{180}\text{ radianos}\right) = \frac{\pi}{4}\text{ radianos}$$

e assim por diante, de modo a gerar a Tabela 25-1. Essa tabela deveria ser memorizada pelo estudante, o qual freqüentemente lidará com graus e radianos.

Tabela 25-1

Graus	Radianos
0	0
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3\pi}{2}$
360	2π

Considere agora um círculo de raio r e centro O (ver Fig. 25-2). Considere que $\measuredangle DOE$ tem θ radianos e seja s o comprimento do arco $\widehat{DE}$. A razão entre θ e o número 2π de radianos de uma volta completa é igual à razão entre s e a circunferência completa $2\pi r$, $\theta/2\pi = s/2\pi r$. Logo,

$$s = r\theta \tag{25.3}$$

nos dá a relação básica entre o comprimento de arco, o raio e a medida em radianos do ângulo central.

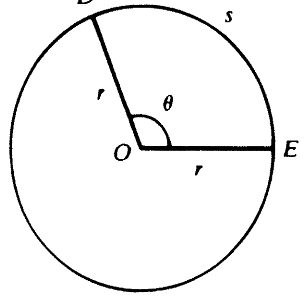


Fig. 25-2

25.2 ÂNGULOS DIRECIONADOS

Ângulos podem ser classificados como positivos ou negativos, de acordo com a direção da rotação que os gera. Na Fig. 25-3(*a*), observamos que o ângulo direcionado AOB é considerado *positivo* quando é obtido da rotação da flecha OA em direção à flecha OB no sentido *anti-horário*. Por outro lado, o ângulo direcionado AOB na Fig. 25-3(*b*) é considerado *negativo* se é gerado a partir de uma rotação da flecha OA na direção da flecha OB no sentido horário. Alguns exemplos de ângulos direcionados e suas medidas em radianos são exibidos na Fig. 25-4.

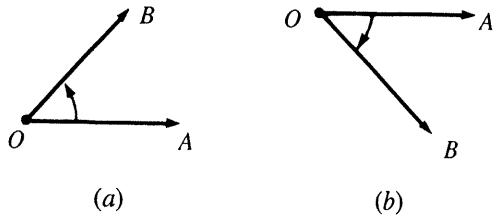


Fig. 25-3

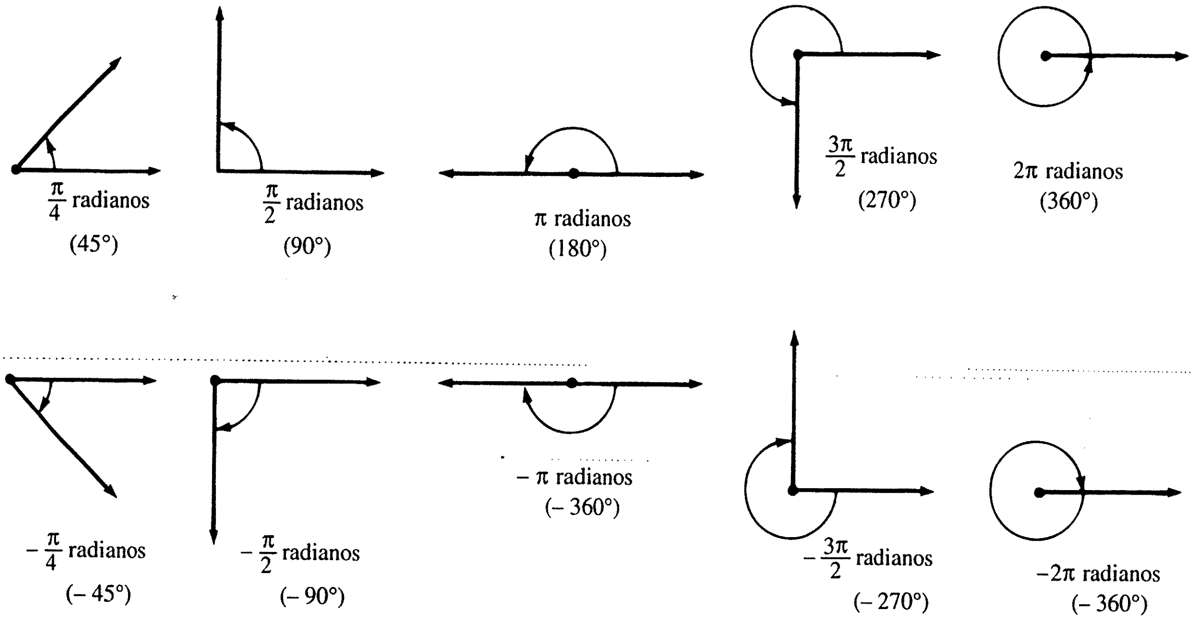


Fig. 25-4

Alguns ângulos direcionados correspondentes a mais que uma volta completa são mostrados na Fig. 25-5. É óbvio que ângulos direcionados cujas medidas em radianos diferem por um múltiplo inteiro de 2π (por exemplo, o primeiro e o último ângulo na Fig. 25-5) representam configurações idênticas de duas flechas. Dizemos que tais ângulos "têm os mesmos lados".

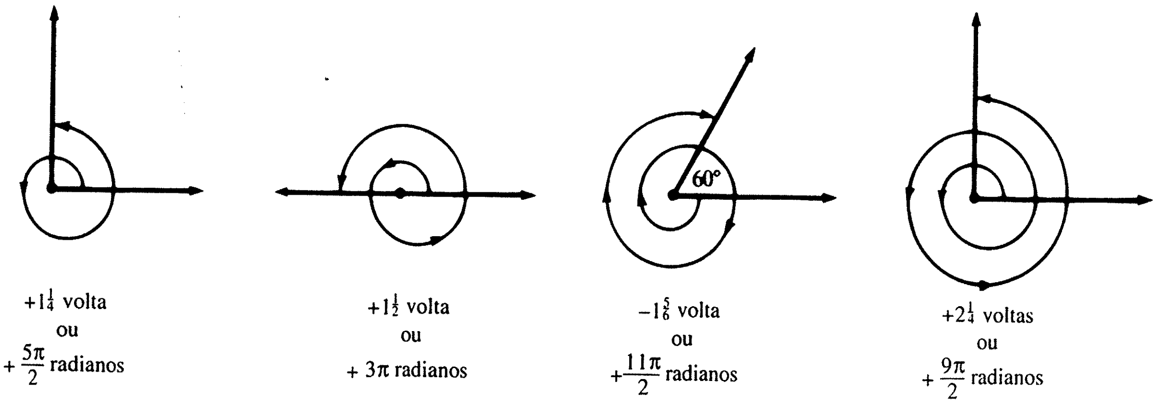


Fig. 25-5

Problemas Resolvidos

25.1 Expresse em radianos um ângulo de: (*a*) 72°; (*b*) 150°.

Use (*25.2*).

(*a*) $$72° = 72\left(\frac{\pi}{180}\text{ radianos}\right) = \frac{2\cdot 36}{5\cdot 36}(\pi\text{ radianos}) = \frac{2\pi}{5}\text{ radianos}$$

(*b*) $$150° = \frac{150}{180}\pi = \frac{5(30)}{6(30)}\pi = \frac{5\pi}{6}\text{ radianos}$$

25.2 Expresse em graus um ângulo de: (*a*) $5\pi/2$ radianos; (*b*) 0,3 radianos; (*c*) 3 radianos.

Use (*25.1*).

(*a*) $\frac{5\pi}{12}$ radianos $= \frac{5\pi}{12}\left(\frac{180}{\pi}\text{ graus}\right) = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

(*b*) $0{,}3\pi$ radianos $= \frac{0{,}3\pi}{\pi} \times 180° = 54°$

(*c*) 3 radianos $= \frac{3}{\pi} \times 180° = \left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ} \approx 172°$

Já que $\pi \approx 3{,}14$.*

25.3 (*a*) Em um círculo de raio com 5 centímetros, qual comprimento de arco ao longo da circunferência é interceptado por um ângulo central de $\pi/3$ radianos?

(*b*) Em um círculo de raio de 12 pés, qual comprimento de arco ao longo da circunferência é intersectado por um ângulo central de 30°?

Use (*25.3*): $s = r\theta$.

(*a*) $s = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ centímetros

(*b*) O ângulo central deve ser convertido para medida em radianos. Pela Tabela 25-1,

$$30° = \frac{\pi}{6} \text{ radianos} \quad \text{e, portanto,} \quad s = 12 \times \frac{\pi}{6} = 2\pi \text{ pés}$$

25.4 O ponteiro de minutos de um antigo relógio de uma torre mede 5 pés de comprimento. Quanto tempo se passa quando a ponta percorre um arco de 188,4 polegadas?

Na fórmula $\theta = s/r$, s e r devem ser expressos na mesma unidade de comprimento. Escolhendo pés, temos $s = 188{,}4/12 = 15{,}7$ pés e $r = 5$ pés. Logo,

$$\theta = \frac{15{,}7}{5} = 3{,}14 \text{ radianos}$$

Isso se aproxima bastante de π radianos, que corresponde a meia-volta, ou 30 minutos de tempo.

25.5 Quais ângulos (positivos) entre 0 e 2π radianos têm os mesmos lados de ângulos com as seguintes medidas?

(*a*) $\frac{9\pi}{4}$ radianos (*b*) 390° (*c*) $-\frac{\pi}{2}$ radianos (*d*) -3π radianos

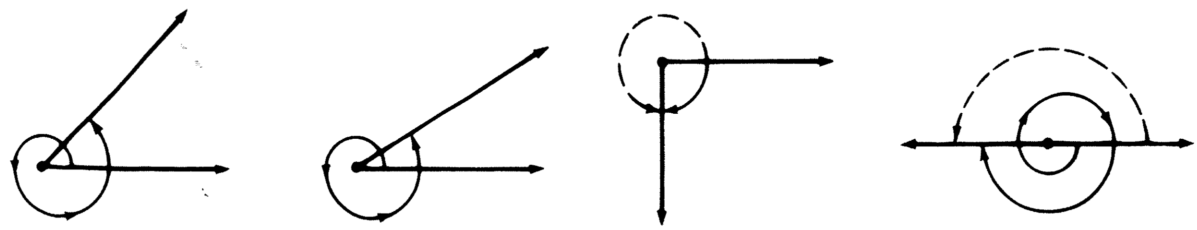
(*a*) $$\frac{9\pi}{4} = \left(2 + \frac{1}{4}\right)\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Logo, $9\pi/4$ radianos determina uma rotação completa em sentido anti-horário (2π radianos) mais uma rotação de $\pi/4$ radianos (45°) em sentido anti-horário [ver Fig. 25-6(*a*)]. O "ângulo reduzido"; ou seja, o ângulo com medida em $[0,2\pi)$ e que tem os mesmos lados do ângulo dado é, portanto, $\pi/4$ radianos.

(*b*) $390° = 360° + 30° = (2\pi$ radianos$) + (\pi/6$ radianos$)$ [ver Fig. 25-6(*b*)]. O ângulo reduzido é $\pi/6$ radianos (ou 30°).

(*c*) Uma rotação em sentido horário de $\pi/2$ radianos (90°) é equivalente a uma rotação em sentido anti-horário de $2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$ radianos [ver Fig. 25-6(*c*)]. Logo, o ângulo reduzido é $3\pi/2$ radianos.

(*d*) Somando um múltiplo adequado de 2π ao ângulo dado, temos $-3\pi + 4\pi = +\pi$ radianos; ou seja, uma rotação em sentido horário de 3π radianos é equivalente a uma rotação em sentido anti-horário de π radianos [ver Fig. 25-6(*d*)]. O ângulo reduzido é π radianos.



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Fig. 25-6

* N. de T.: Apenas como curiosidade, uma aproximação melhor para π é 3,14159265358979323846.)

Problemas Complementares

25.6 Converta as seguintes medidas de ângulos de graus para radianos: (*a*) 36°; (*b*) 15°; (*c*) 2°; (*d*) $(90/\pi)°$; (*e*) 144°.

25.7 Converta as seguintes medidas de ângulos de radianos para graus: (*a*) 2 radianos; (*b*) $\pi/5$ radianos; (*c*) $7\pi/12$ radianos; (*d*) $5\pi/4$ radianos; (*e*) $7\pi/6$ radianos.

25.8 Se um inseto percorre uma distância de 3π centímetros ao longo de um arco circular e se esse arco compreende um ângulo central de 45°, qual é o raio do círculo?

25.9 Em cada um dos seguintes casos, a partir da informação sobre duas das quantidades s (arco interceptado), r (raio) e θ (ângulo central), encontre a terceira quantidade. (Se apenas um número é dado para θ, assuma que se trata do número de radianos) (*a*) $r = 10$, $\theta = \pi/5$; (*b*) (equação), $s = 11/21$; (*c*) $r = 1$, $s = \pi/4$; (*d*) $r = 2$, $s = 3$; (*e*) $r = 3$, $\theta = 90°$; (*f*) $\theta = 180°$, $s = 6{,}28318$; (*g*) $r = 10$, $\theta = 120°$.

25.10 Se um ângulo central de um círculo de raio r mede θ radianos, determine a área A do setor do círculo definido pelo ângulo central (ver Fig. 25-7). [*Sugestão:* A área do círculo inteiro é πr^2.]

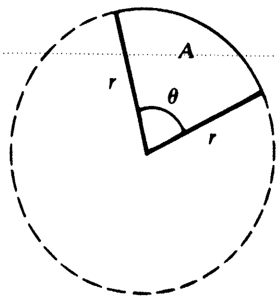


Fig. 25-7

25.11 Faça representações gráficas das rotações que determinam ângulos que medem: (*a*) 405°; (*b*) $11\pi/4$ radianos; (*c*) $7\pi/2$ radianos; (*d*) $-60°$; (*e*) $-\pi/6$ radianos; (*f*) $-5\pi/2$ radianos.

25.12 Reduza cada ângulo do Problema 25.11 ao intervalo de 0 a 2π radianos.

Capítulo 26

Funções Seno e Co-seno

26.1 DEFINIÇÃO GERAL

As funções trigonométricas fundamentais, *seno* e *co-seno*, terão um importante papel no cálculo. Essas funções serão agora definidas para todos os números reais.

Definição: Coloque uma flecha $\overrightarrow{OA}$ de comprimento unitário de forma que seu ponto inicial O é a origem de um sistema de coordenadas e seu ponto terminal A é o ponto (1,0) do eixo x (ver Fig. 26-1). Para qualquer número θ dado, rotacione $\overrightarrow{OA}$ em torno do ponto O por um ângulo que mede θ radianos. Seja $\overrightarrow{OB}$ a posição final da flecha após a rotação. Logo: (i) a coordenada x de B é definida como o *co-seno* de θ, denotado por cos θ; (ii) a coordenada y de B é definida como sendo o *seno* de θ, denotado por sen θ. Assim, $B = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$.

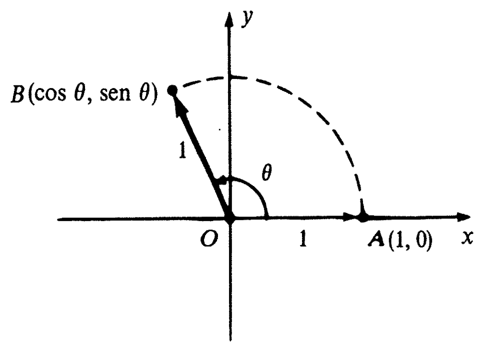


Fig. 26-1

Exemplos

(*a*) Seja $\theta = \pi/2$. Se rotacionamos $\overrightarrow{OA}$ $\pi/2$ radianos no sentido anti-horário, a posição final B é (0, 1) [ver Fig. 26-2(*a*)]. Logo,

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$$

(*b*) Seja $\theta = \pi$. Se rotacionamos $\overrightarrow{OA}$ π radianos no sentido anti-horário, a posição final B é $(-1,0)$ [ver Fig. 26-2(*b*)]. Portanto,

$$\cos \pi = -1 \qquad \text{sen}\, \pi = 0$$

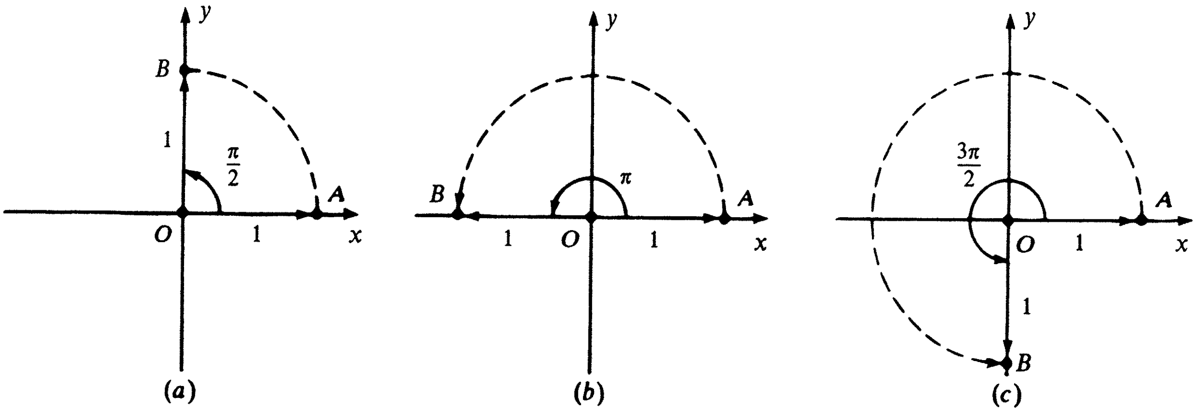


Fig. 26-2

(*c*) Seja $\theta = 3\pi/2$. Logo, a posição final B, após uma rotação de $3\pi/2$ radianos no sentido anti-horário, é $(0, -1)$ [ver Fig. 26-2(*c*)]. Logo,

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \text{sen}\, \frac{3\pi}{2} = -1$$

(*d*) Seja $\theta = 0$. Se $\overrightarrow{OA}$ é rotacionado em 0 radianos, a posição final ainda é $(1, 0)$. Portanto,

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$$

(*e*) Seja θ um *ângulo agudo* $(0 < \theta < \pi/2)$ do triângulo retângulo DEF e seja ΔOBG um triângulo semelhante com hipotenusa 1 (ver Fig. 26-3). Por proporcionalidade, $\overline{BG} = b/c$ e $\overline{OG} = a/c$. Assim, por definição, $\cos \theta = a/c$, $\text{sen}\, \theta = b/c$. Isso está em acordo com as definições tradicionais:

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{sen}\, \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

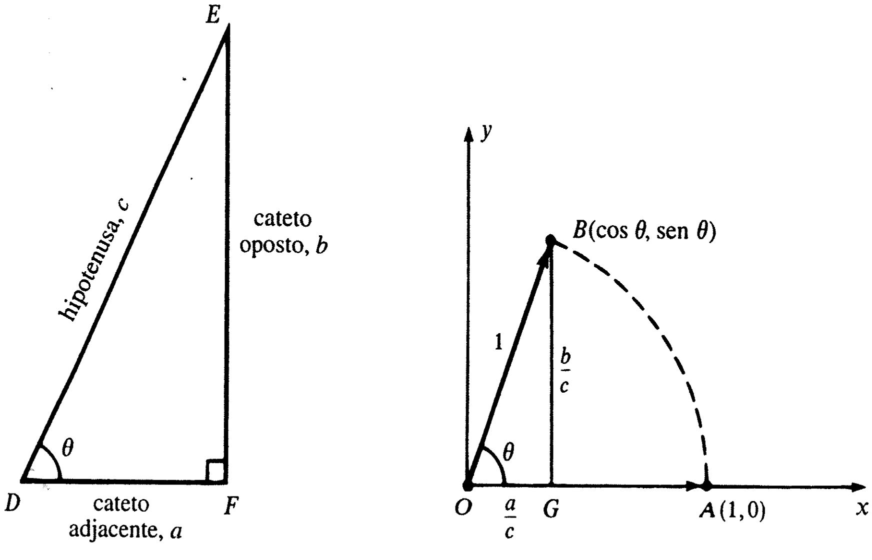


Fig. 26-3

Conseqüentemente, podemos fazer uso dos valores das funções para $\theta = \pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ da trignometria do ensino médio. Os resultados são reunidos na Tabela 26-1, a qual deve ser memorizada.

Tabela 26-1

θ			
radianos	graus	$\cos\theta$	$\text{sen}\,\theta$
0	0	1	0
$\pi/6$	30	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	60	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	90	0	1
π	180	-1	0
$3\pi/2$	270	0	-1

A definição acima implica que os sinais de $\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta$ são determinados pelo quadrante no qual B está. No primeiro quadrante, $\cos\theta > 0$ e $\text{sen}\,\theta > 0$. No segundo quadrante, $\cos\theta < 0$ e $\text{sen}\,\theta > 0$. No terceiro quadrante, $\cos\theta < 0$ e $\text{sen}\,\theta < 0$. No quarto quadrante, $\cos\theta > 0$ e $\text{sen}\,\theta < 0$ (ver Fig. 26-4).

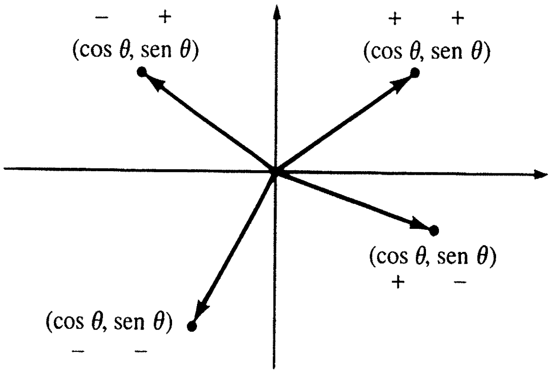


Fig. 26-4

26.2 PROPRIEDADES

Listamos os seguintes teoremas, os quais fornecem as propriedades mais importantes das funções seno e co-seno.

Teorema 26.1: $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$.

Demonstração: Na Fig. 26-1 o comprimento de $\overline{OB}$ é dado por *(2.1)*,

$$1 = \sqrt{(\cos\theta - 0)^2 + (\text{sen}\,\theta - 0)^2} = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\,\theta)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados e usando as notações convencionais $(\text{sen}\,\pi)^2 \equiv \text{sen}^2\,\theta$ e $(\cos\theta)^2$ nos dá o Teorema 26.1.

Corolário: $1 - \text{sen}^2\,\theta = \cos^2\theta$ e $1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\,\theta$

Exemplo Seja θ a medida em radianos de um ângulo agudo tal que $\theta = \frac{3}{5}$. Pelo Teorema 26.1,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Como θ é um ângulo agudo, cos θ é positivo; $\frac{4}{5}$.

Já vimos (Capítulo 25) que dois ângulos que diferem por um múltiplo inteiro de 2π radianos (360°) têm os mesmos lados. Isso nos dá o:

Teorema 26.2: As funções seno e co-seno são *periódicas*, de período 2π; ou seja, para todo θ,

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad \text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,\theta$$

(Mais que isso, 2π é o menor número positivo com essa propriedade.)

Tendo em vista o Teorema 26.2, basta conhecer os valores de cos θ e sen θ para $0 \leq \theta < 2\pi$.

Exemplos

(*a*) $\text{sen}\,\frac{7\pi}{3} = \text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(*b*) $\cos 5\pi = \cos(3\pi + 2\pi) = \cos 3\pi = \cos(\pi + 2\pi) = \cos\pi = -1$

(*c*) $\cos 390° = \cos(30° + 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(*d*) $\text{sen}\,405° = \text{sen}\,(45° + 360°) = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Teorema 26.3: cos θ é uma função par e sen θ é uma função ímpar.

A demonstração é óbvia se observarmos a Fig. 26-5. Os pontos B' e B têm as mesmas coordenadas x,

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

mas suas coordenadas y diferem no sinal,

$$\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$$

Por causa do Teorema 26.3, agora precisamos conhecer os valores de cos θ e sen θ apenas para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Considere qualquer pont $A(x, y)$ diferente da origem O, como na Fig. 26-6. Seja r sua distância da origem e θ a medida em radianos do ângulo que a reta OA forma com o eixo x positivo. Chamamos r e θ de *coordenadas polares* do ponto A.

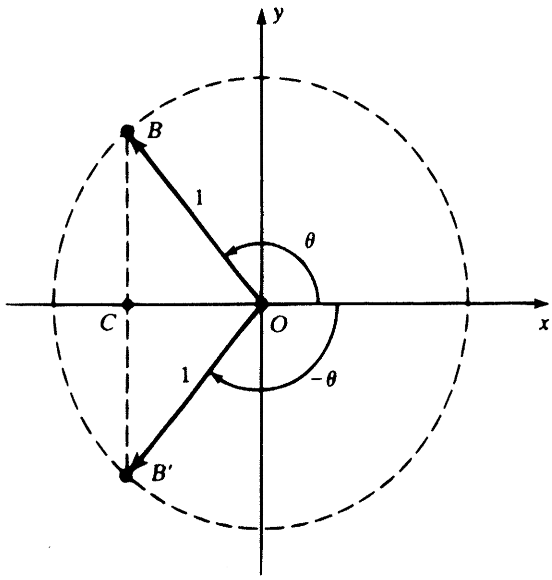


Fig. 26-5

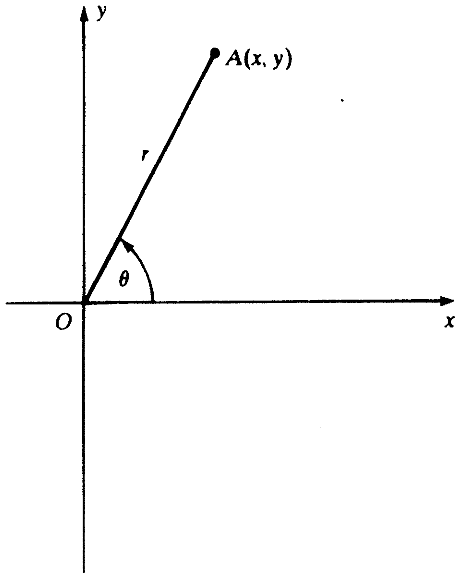


Fig. 26-6

Teorema 26.4: As coordenadas polares de um ponto e suas coordenadas xy estão relacionadas por

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \text{ sen } \theta$$

Para a demonstração, ver Problema 26.2.

Teorema 26.5 (Lei dos Co-senos): Em qualquer triângulo ABC (ver Fig. 26-7),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Para uma demonstração, ver Problema 26.3. Observe que o teorema de Pitágoras surge como o caso particular em que $\theta = \pi/2$.

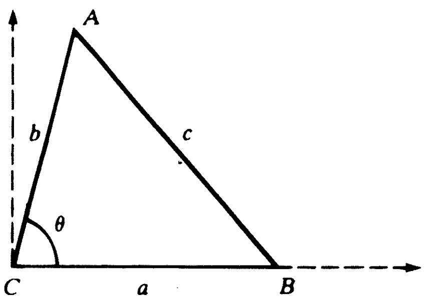


Fig. 26-7

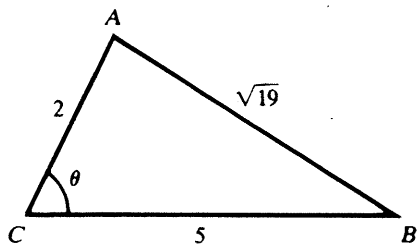


Fig. 26-8

Exemplo Encontre o ângulo θ no triângulo da Fig. 26-8.

Isolando $\cos \theta$ na lei dos co-senos,

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(5)^2 + (2)^2 - (\sqrt{19})^2}{2(5)(2)} = \frac{25 + 4 - 19}{20} = \frac{1}{2}$$

Então, da Tabela 26-1, $\theta = \pi/3$.

Teorema 26.6 (Fórmulas de Soma e Diferença):

(*a*) $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

(*b*) $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

(*c*) $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

(*d*) $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

Se qualquer uma dessas quatro fórmulas for provada, as outras três podem ser obtidas como corolários. Uma demonstração para a fórmula do co-seno da diferença é esboçada no Problema 26.14.

Exemplos

(*a*) $$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(*b*) $$\cos 135° = \cos(90° + 45°) = \cos 90° \cos 45° - \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} 45$$
$$= (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(*c*) $$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$$
$$= (1)\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + (0)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) \qquad \text{[por exemplo } (a)]$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Substituindo $u = \pi/2$ e $v = \theta$ nas fórmulas de diferenças do Teorema 26.6 nos dá

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta = 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta = 1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$

Logo, temos:

Teorema 26.7: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$; isto é, o seno de um ângulo é o co-seno de seu complemento.

Também temos as importantes *fórmulas de ângulo duplo:*

Teorema 26.8: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

Para $\cos 2\theta$, observe que:

(i) $\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta$ [pelo Teorema 26.6(*a*)]

(ii) $= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$ [pelo Teorema 26.1]

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= (1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta$ [por (ii) e pelo Teorema 26.1]

$= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

Para sen 2θ

$$\begin{aligned}\text{sen } 2\theta &= \text{sen } (\theta + \theta) = \text{sen } \theta \cos \theta + \cos \theta \text{ sen } \theta \qquad \text{[pelo Teorema 26.6(}c\text{)]}\\ &= 2 \text{ sen } \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Do Teorema 26.8, temos:

Teorema 26.9: (Fórmulas de Meio Ângulo):

(*a*) $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos \theta}{2}$

(*b*) $\text{sen}^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos \theta}{2}$

De fato, substitua θ por $\theta/2$ no Teorema 26.8:

(*a*) $\cos \theta = \cos \left(2 \cdot \dfrac{\theta}{2}\right) = 2 \cos^2 \dfrac{\theta}{2} - 1$. Logo, $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos \theta}{2}$.

(*b*) $\cos \theta = \cos \left(2 \cdot \dfrac{\theta}{2}\right) = 1 - 2 \text{ sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$. Logo, $\text{sen}^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos \theta}{2}$.

Exemplos

(*a*) $$\begin{aligned}\text{sen } 120° &= \text{sen } (2 \times 60°) = 2 \text{ sen } 60° \cos 60°\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(*b*) $$\begin{aligned}\cos \frac{2\pi}{3} &= \cos \left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{3} - \text{sen}^2 \frac{\pi}{3}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(*c*) $$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{12} &= \cos^2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \qquad \text{[multiplique numerador e denominador por 2]}\end{aligned}$$

TESTANDO Anteriormente provamos a partir do Teorema 26.6 que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Logo, tendo em vista a identidade $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$,

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{6}) + (\sqrt{6})^2}{(4)^2} = \frac{2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + 6}{16}\\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

(*d*) $\text{sen}^2 \dfrac{\pi}{8} = \text{sen}^2 \left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$. Logo, como $\pi/8$ está no primeiro quadrante,

$$\text{sen } \frac{\pi}{8} = + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{(2)}}}{2}$$

Problemas Resolvidos

26.1 Calcule: (*a*) cos (π/8); (*b*) cos 210°; (*c*) sen 135°; (*d*) cos 17°.

(*a*) Pelo Teorema 26.9,

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \cos^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Logo, como π/8 é um ângulo agudo,

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{(2)}}}{2}$$

(*b*) Escrevendo 210° = 180 + 30°, temos, pelo Teorema 26.6,

$$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180° \cos 30° - \text{sen } 180° \text{ sen } 30°$$
$$= -1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(*c*) Usando o valor anteriormente calculado 135° = $-\sqrt{2}/2$, temos, pelo Teorema 26.1,

$$\text{sen}^2\, 135° = 1 - \cos^2 135° = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$$

Logo, 135° está no segundo quadrante,

$$\text{sen } 135° = +\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(*d*) 17° não pode ser expresso em termos de ângulos mais familiares (tais como 30°, 45°, 60°) de modo a permitir a aplicação de qualquer uma de nossas fórmulas. Devemos, então, usar a tabela de co-senos no Apêndice D, a qual dá 0,9563 para o valor de 17°. Essa é uma aproximação correta em quatro casas decimais.

26.2 Prove o Teorema 26.4.

Observe a Fig. 26-9. Seja D o pé da perpendicular traçada de A ao eixo x. Seja F o ponto sobre o raio OA a uma unidade de distância da origem. Então, $F = (\cos\theta, \text{sen }\theta)$. Se E é o pé da perpendicular de F ao eixo x, temos

$$\text{sen } 135° = +\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mas, ΔADO é semelhante ao ΔFEO (pelo critério AA), logo

$$\overline{OE} = \cos\theta \qquad \overline{FE} = \text{sen }\theta$$

Portanto, $x = r\cos\theta$ e $y = r\text{sen }\theta$. Quando $A(x, y)$ está em um dos outros quadrantes, a demonstração pode ser reduzida ao caso em que $A(x, y)$ está no primeiro quadrante. A prova fica fácil quando $A(x, y)$ está sobre o eixo x ou sobre o eixo y.

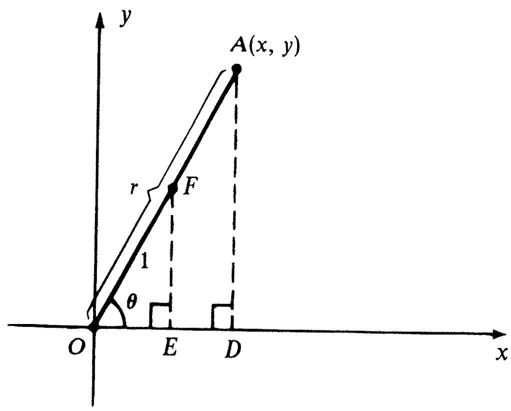


Fig. 26-9

26.3 Prove o Teorema 26.5.

Na Fig. 26-7 estabeleça um sistema de coordenadas com C como origem e B sobre o eixo positivo x. Logo, B tem coordenadas $(a, 0)$. Sejam (x, y) as coordenadas de A. Pelo Teorema 26.4,

$$x = b \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} \theta$$

Pela fórmula de distância (*2.1*),

$$c = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Logo,

$$c^2 = (x-a)^2 + y^2 = (b \cos \theta - a)^2 + (b \operatorname{sen} \theta)^2$$

ÁLGEBRA	$(P-Q)^2 = P^2 - 2PQ + Q^2$

$$\begin{aligned} &= b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta + a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= a^2 + b^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

26.4 Obtenha as seguintes identidades:

(a) $(\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)^2 = 1 - \operatorname{sen} 2\theta$ (b) $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

(a) Pela ÁLGEBRA do Problema 26.3,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)^2 &= \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \text{[pelo Teorema 26.1]} \\ &= 1 - \operatorname{sen} 2\theta \qquad \text{[pelo Teorema 26.8]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \frac{1 - (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \qquad \text{[pelo Teorema 26.8]} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \qquad \text{[pelo Teorema 26.1]} \\ &= \frac{(2 \operatorname{sen} \theta)(\operatorname{sen} \theta)}{(2 \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

26.5 Sabendo-se que θ está no quarto quadrante e que $\cos \theta = \frac{2}{3}$, encontre: ($a$) $\cos 2\theta$; (b) $\operatorname{sen} \theta$; ($c$) $\cos(\theta/2)$; (d) $\operatorname{sen}(\theta/2)$.

(a) Pelo Teorema 26.8,

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1 = \frac{8}{9} - \frac{9}{9} = -\frac{1}{9}$$

(b) Pelo Teorema 26.1,

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Logo, como $\operatorname{sen} \theta$ é negativo para θ no quarto quadrante, $\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{5}/3$.

(c) Pelo Teorema 26.9,

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 + (2/3)}{2} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Como θ está no quarto quadrante, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$; portanto,

$$\frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \pi$$

Assim, $\theta/2$ está no segundo quadrante e $\cos(\theta/2)$ é negativo. Logo,

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{5}{6}}$$

(*d*) Pelo Teorema 26.9,

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{1-\frac{2}{3}}{2} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Do item (*c*), $\theta/2$ está no segundo quadrante. Logo, sen $(\theta/2)$ é positivo. Assim, sen $\theta/2 = 1/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$.

26.6 Seja ΔABC um triângulo qualquer. Usando a notação na Fig. 26-10, prove que

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \textit{lei dos senos}$$

(Aqui, sen A é o seno do $\measuredangle CAB$, valendo de forma análoga para sen B e sen C.)

Seja D o pé da perpendicular de A ao lado BC. Seja $h = \overline{AD}$. Então,

$$\text{sen } B = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{h}{c} \qquad \text{ou} \qquad h = c \text{ sen } B$$

e assim,

$$\text{área do } \Delta ABC = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura}) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac \text{ sen } B$$

(Verifique que isso está igualmente correto quando $\measuredangle B$ é obtuso.) Analogamente,

$$\text{área} = \frac{1}{2}bc \text{ sen } A \qquad \text{área} = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C$$

Logo,

$$\frac{1}{2}ac \text{ sen } B = \frac{1}{2}bc \text{ sen } A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C$$

e divisão por $\frac{1}{2}abc$ nos dá a lei dos senos.

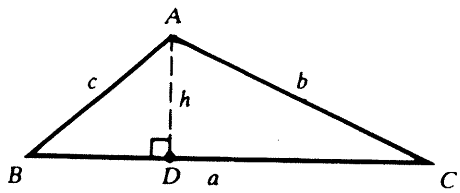


Fig. 26-10

Problemas Complementares

26.7 Calcule: (*a*) sen $(4\pi/3)$; (*b*) cos $(11\pi/6)$; (*c*) sen 240°; (*d*) cos 315°; (*e*) sen 75°; (*f*) sen 15°; (*g*) sen $(11\pi/12)$; (*h*) cos 71°; (*i*) sen 12°.

26.8 Se θ é agudo e cos $\theta = \frac{1}{9}$, calcule: (*a*) sen θ; (*b*) sen 2θ; (*c*) cos 2θ; (*d*) cos $(\theta/2)$; (*e*) sen $(\theta/2)$.

26.9 Se θ está no terceiro quadrante e sen $\theta = -\frac{2}{5}$, calcule: (*a*) cos θ; (*b*) sen 2θ; (*c*) cos 2θ; (*d*) cos $(\theta/2)$; (*e*) sen $(\theta/2)$.

26.10 No ΔABC, $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 7$ e $\overline{BC} = 6$. Calcule cos B.

26.11 Na Fig. 26-11, D é um ponto sobre o lado BC do ΔABC tal que $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = 5$, $\overline{BD} = 4$ e $\overline{DC} = 3$. Calcule $\overline{AC}$. [*Sugestão:* Use a lei dos co-senos duas vezes.]

26.12 Prove as seguintes identidades:

(*a*) $\cos^2 5\theta = (1 - \operatorname{sen} 5\theta)(1 + \operatorname{sen} 5\theta)$ (*b*) $\dfrac{1 + \cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

(*c*) $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$ (*d*) $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

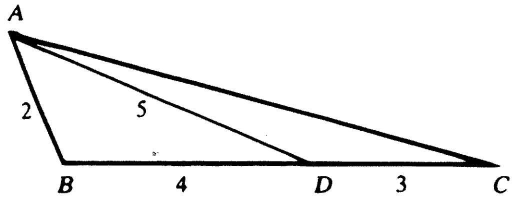


Fig. 26-11

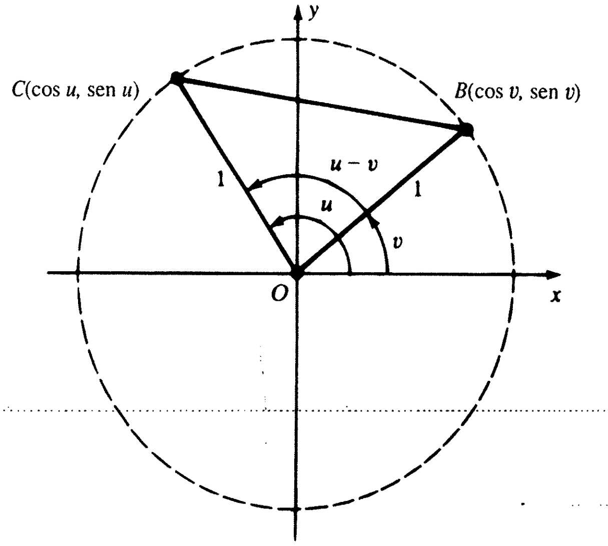


Fig. 26-12

26.13 Para cada um dos seguintes itens, prove que se trata de uma identidade ou dê um exemplo que mostra que é falso:

(*a*) $\operatorname{sen} 4\theta = 4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ (*b*) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

(*c*) $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1$ (*d*) $\dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{1+\cos\theta} = \cos\theta - \cos^2\theta$

(*e*) $\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2\theta}$ (*f*) $2 \operatorname{sen}\dfrac{3}{2}\theta \cos\dfrac{3}{2}\theta = \operatorname{sen} 3\theta$

26.14 Preencha todos os detalhes da seguinte demonstração da identidade

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

Considere o caso no qual $0 \le v < u < v + \pi$ (ver Fig. 26-12). pela lei dos co-senos,

$$\overline{BC}^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos \measuredangle BOC$$

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v)^2 = 2 - 2\cos(u - v)$$

$$\cos^2 u - 2\cos u \cos v + \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen}^2 v = 2 - 2\cos(u - v)$$

$$(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) = 2 - 2\cos(u - v)$$

$$1 + 1 - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) = 2 - 2\cos(u - v)$$

$$\cos u \cos v + \operatorname{se n} u \operatorname{sen} v = \cos(u - v)$$

Verifique que todos os outros casos podem ser obtidos a partir do caso aqui considerado.

26.15 Prove as seguintes identidades:

(*a*) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\theta$ (*b*) $\operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

(*c*) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ (*d*) $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$

26.16 Mostre que: (a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[*Sugestão:* (a) Considere um triângulo retângulo isósceles ΔOGB com ângulo reto em G e sejam $b = OG = BG$ e $c = OB$. Então, $c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$. Logo, $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{2}$. Desse modo, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ($b$) Considere um triângulo equilátero ΔABC de lado 1 e seja AD a altura de A ao ponto médio D de BC. Então, $\overline{BD} = \frac{1}{2}$. Como $\measuredangle ABD$ mede $\frac{\pi}{3}$ radianos, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 26.7, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$. ($c$) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Logo, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$ pelo Teorema 26.7.]

26.17 Deduza os outros itens do Teorema 26.6 a partir do item (a), o qual foi provado no Problema 26.14. [*Sugestão:* Primeiramente note que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$ segue do item (a). A fórmula para $\cos(u + v)$ é conseqüência da aplicação do item (a) em $\cos(u - (-v))$ e do uso das identidades $\cos(-v) = \cos v$ e $\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$. A fórmula para $\operatorname{sen}(u + v)$ segue da aplicação do item (a) em $\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right)$ e, então, a fórmula para $\operatorname{sen}(u - v)$ segue da fórmula para $\operatorname{sen}(u + v)$, substituindo v por $-v$.]

Capítulo 27

Gráficos e Derivadas das Funções Seno e Co-seno

27.1 GRÁFICOS

Observemos primeiro que cos x e sen x são funções contínuas. Isso significa que, para qualquer $x = \theta$ fixo,

$$\lim_{h \to 0} \cos(\theta + h) = \cos\theta \qquad \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(\theta + h) = \operatorname{sen}\theta$$

como fica óbvio a partir da Fig. 27-1. De fato, quando h tende a 0, o ponto C se aproxima do ponto B. Portanto, a coordenada x (o co-seno) de C se aproxima da coordenada x de B e a coordenada y (o seno) de C se aproxima da coordenada y de B.

Tabela 27-1

x	cos x	sen x
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}71$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}87$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

Agora podemos esboçar os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$. A Tabela 27-1 contém os valores de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ para os valores notáveis de x entre 0 e $\pi/2$; esses valores são obtidos da Tabela 26-1. Estão também listados os valores para $2\pi/3$ (120°), $3\pi/4$ (135°) e $5\pi/6$ (150°). Esses são conseguidos a partir das fórmulas (ver Problema 26.15)

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$

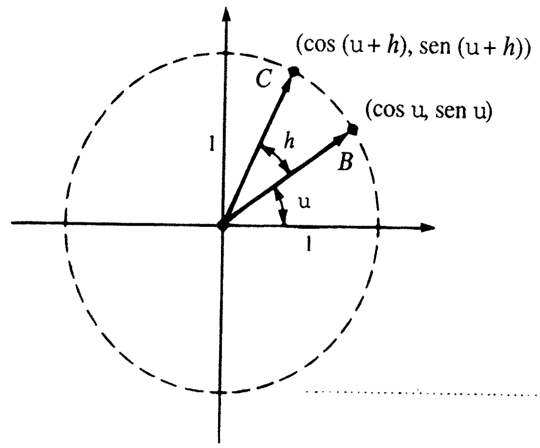
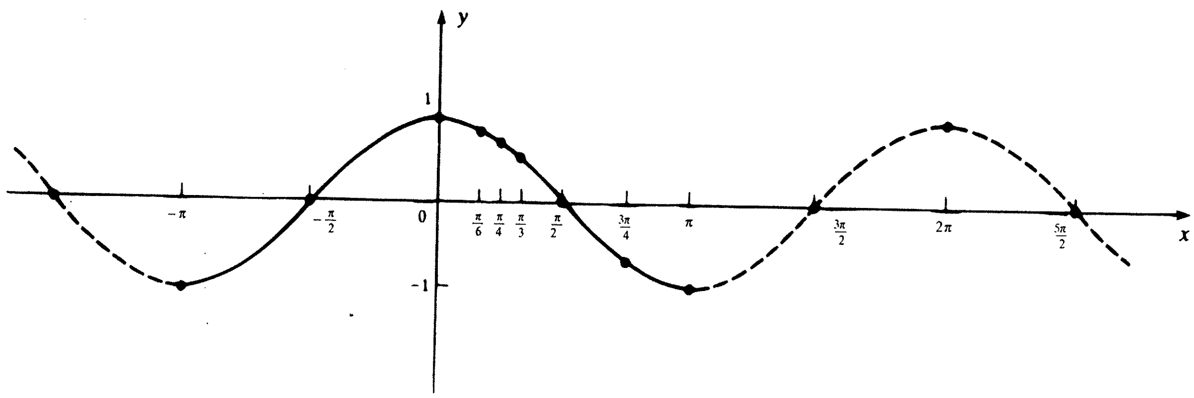
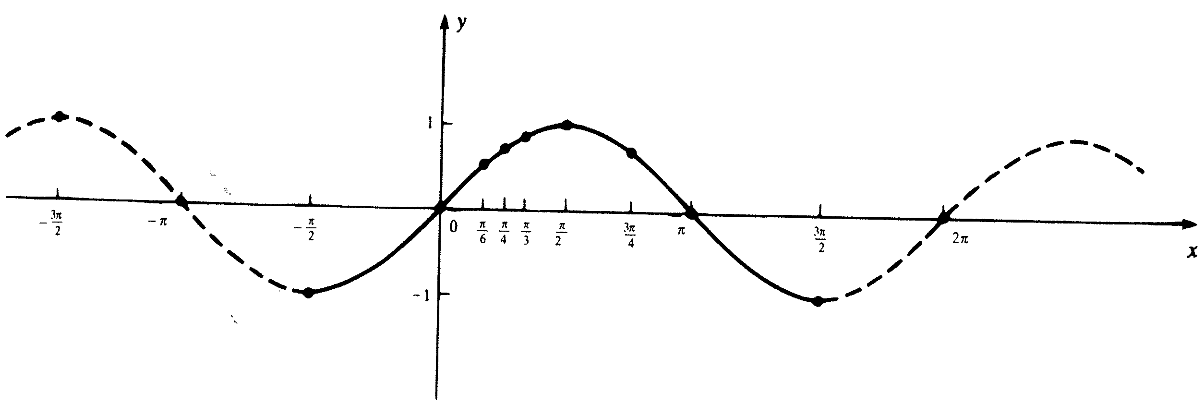


Fig. 27-1

O gráfico de $y = \cos x$ é esboçado na Fig. 27-2(a). Para argumentos entre $-\pi$ e 0, usamos a identidade $\cos(-x) = \cos x$ (Teorema 26.3). Fora do intervalo $[-\pi,\pi]$, a curva se repete de acordo com o Teorema 26.2.



(a) $y = \cos x$



(b) $y = \operatorname{sen} x$

Fig. 27-2

O gráfico de $y = \text{sen}\, x$ [ver Fig. 27-2(*b*)] é feito do mesmo modo. Note que esse gráfico é o resultado de transladar o gráfico de $y = \cos x$ para a direita $\pi/2$ unidades. Isso pode ser verificado observando que

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\, x$$

Os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \text{sen}\, x$ têm a forma de ondas repetidas, sendo que cada onda completa se estende por um intervalo de comprimento 2π (o período). O comprimento e a altura das ondas podem ser modificados pela multiplicação do argumento e da imagem da função, respectivamente, por constantes.

Exemplos

(*a*) $y = \cos 3x$. O gráfico dessa função está esboçado na Fig. 27-3. Como

$$\cos 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\,(3x + 2\pi) = \cos 3x$$

a função é de período $p = 2\pi/3$. Logo, o comprimento de cada onda é $2\pi/3$. O número de ondas sobre um intervalo de comprimento 2π (correspondente a uma revolução completa do raio que determina o ângulo x) é 3. Esse número é chamado de *freqüência* de $\cos 3x$. Em geral,

$pf =$ (comprimento de cada onda) $\times$ (número de ondas em um intervalo de comprimento 2π) $= 2\pi$

e assim

$$f = \frac{2\pi}{p}$$

Para uma constante qualquer $b > 0$, a função $\cos bx$ (ou $\text{sen}\, bx$) tem freqüência b e período $2\pi/b$.

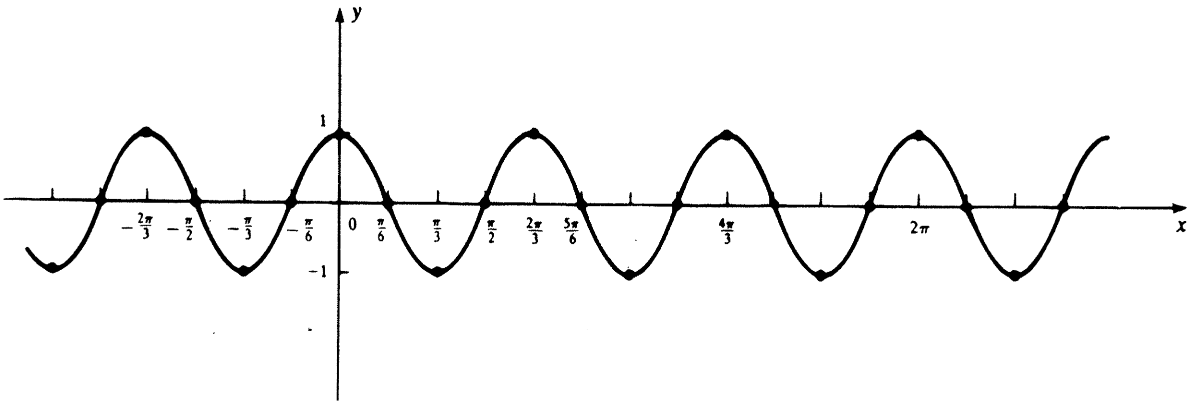


Fig. 27-3

(*b*) $y = 2\text{sen}\, x$. O gráfico dessa função (ver Fig. 27-4) é obtido a partir do gráfico de $y = \text{sen}\, x$ (ver Fig. 27-2) pela multiplicação de cada ordenada por 2. O período (comprimento de onda) e a freqüência da função $2\,\text{sen}\, x$ são os mesmos da função $\text{sen}\, x$: $p = 2\pi, f = 1$. Mas a *amplitude*, a altura máxima de cada onda, de $2\,\text{sen}\, x$ é 2, ou o dobro da amplitude de $\text{sen}\, x$.

NOTA A *oscilação total* de uma função seno ou co-seno, que é a distância vertical entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo, é *duas vezes* a amplitude.

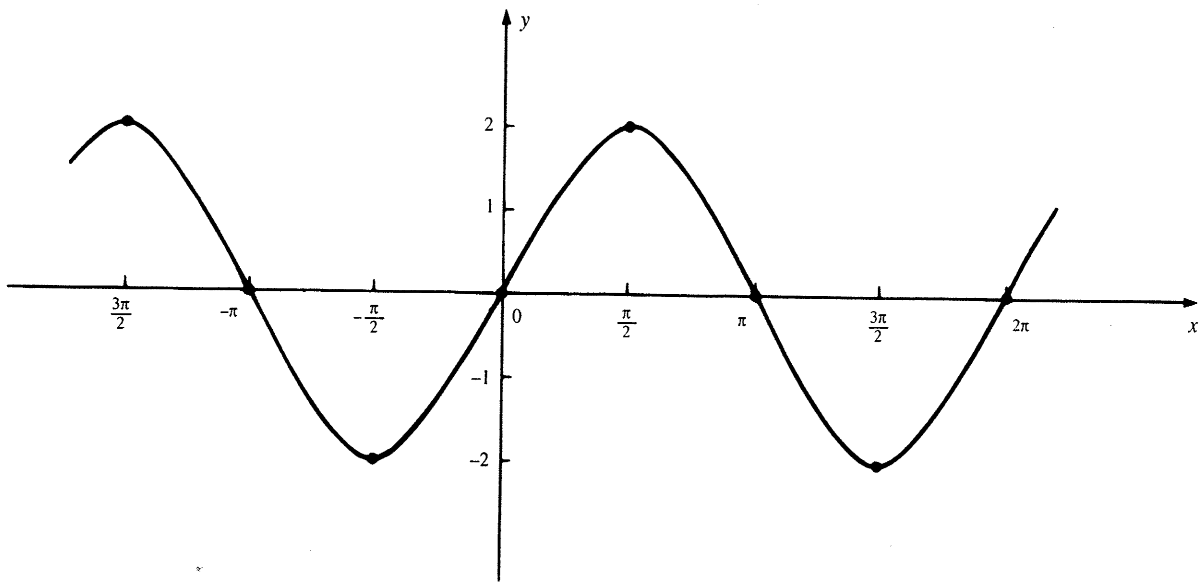


Fig. 27-4

Para uma constante arbitrária A, a função A sen x (ou $A \cos x$) tem amplitude $|A|$.

(*c*) Concatenando os exemplos (*a*) e (*b*) acima, percebemos que as funções A sen bx e $A \cos bx$ ($b > 0$) têm período $2\pi/b$, freqüência b e amplitude $|A|$. A Figura 27-5 corresponde ao gráfico de $y = 1{,}5$ sen $4x$.

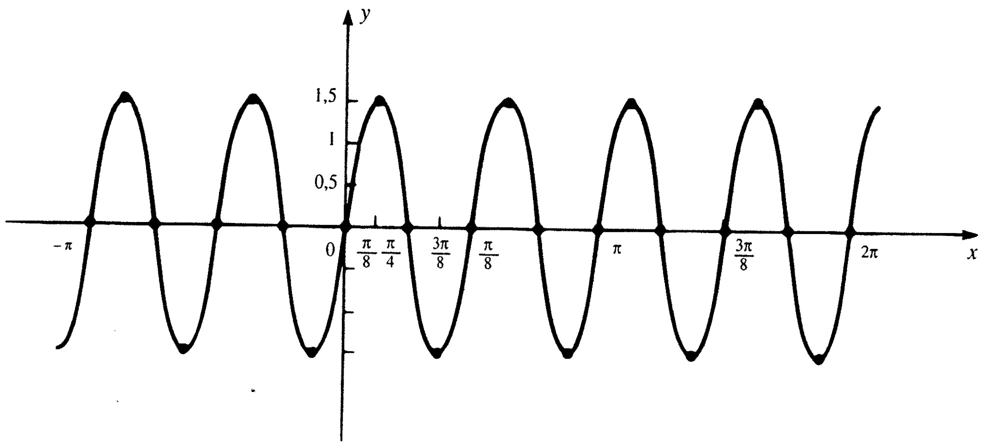


Fig. 27-5

27.2 DERIVADAS

Lema 27-1: (*a*) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta} = 1$; (*b*) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0$.

(*a*) Para a demonstração, ver Problema 27.4.

(*b*)
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$
$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta} \cdot \frac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}$$
$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

Teorema 27.2: $D_x(\text{sen } x) = \cos x$ e $D_x(\cos x) = -\text{sen } x$.

Para a demonstração, ver Problema 27.5.

Exemplos

(*a*) Calcule $D_x(\text{sen } 2x)$. A função sen $2x$ é composta. Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = \text{sen } x$, então sen $2x = g(f(x))$. A regra da cadeia (*15.2*) nos dá

$$D_x(g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot D_x(f(x))$$

ou

$$D_x(\text{sen } 2x) = (\cos 2x) \cdot D_x(2x) = (\cos 2x) \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

(*b*) Calcule $D_x(\cos^4 x)$. A função $\cos^4 x$ é composta. Se $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^4$, então

$$\cos^4 x = (\cos x)^4 = g(f(x))$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_x(\cos^4 x) = D_x((\cos x)^4) &= 4(\cos x)^3 \cdot D_x(\cos x) \quad \text{[pela regra da cadeia para potências]} \\ &= 4(\cos x)^3 \cdot (-\text{sen } x) \\ &= -4 \cos^3 x \text{ sen } x \end{aligned}$$

Problemas Resolvidos

27.1 Determine o período, a freqüência e a amplitude de:

(*a*) $4 \text{ sen} \dfrac{x}{2}$ (*b*) $\dfrac{1}{2} \cos 3x$

e esboce seus gráficos.

(*a*) Para $4 \text{ sen } \frac{1}{2}x \equiv A \text{ sen } bx$, a freqüência é $f = b = \frac{1}{2}$, o período é $p = \dfrac{2\pi}{f} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ e a amplitude é $A = 4$. O gráfico está esboçado na Fig. 27-6(*a*).

(*b*) Para $\frac{1}{2} \cos 3x \equiv A \cos bx$, a freqüência f é $b = 3$, o período é $p = \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{3}$ e a amplitude é $A = \frac{1}{2}$. O gráfico é esboçado na Fig. 27-6(*b*).

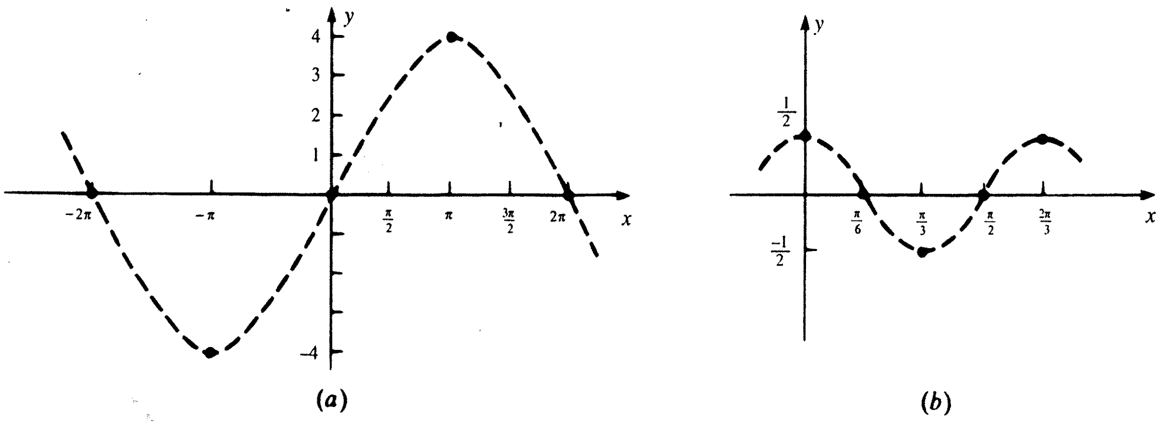


Fig. 27-6

27.2 Encontre todas as soluções das equações:

(*a*) $\cos x = 0$ (*b*) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

(*a*) Para $-\pi \le x < \pi$, observação da Fig. 27-2(*a*) mostra que as únicas soluções de $\cos x = 0$ são

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Como 2π é o período de $\cos x$, as soluções de $\cos x = 0$ são conseguidas somando-se múltiplos inteiros arbitrários de 2π a $-\pi/2$ e $\pi/2$,

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n - 1) \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$$

Juntos, $4n - 1$ e $4n + 1$ variam sobre todos os inteiros ímpares e assim as soluções de $\cos x = 0$ são todos os múltiplos ímpares de $\pi/2$,

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \qquad [k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

(*b*) A Fig. 27-2(*b*) mostra que, para $-\pi/2 \le x < 3\pi/2$, as únicas soluções são $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$. Logo, todas as soluções são

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{e} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

27.3 Calcule as derivadas de:

(*a*) $3 \operatorname{sen} 5x$ (*b*) $4 \cos \frac{x}{2}$ (*c*) $\operatorname{sen}^2 x$ (*d*) $\cos^3 \frac{x}{2}$

(*a*)
$$\begin{aligned} D_x(3 \operatorname{sen} 5x) &= 3D_x(\operatorname{sen} 5x) \\ &= 3(\cos 5x)D_x(5x) \qquad \text{[pela regra da cadeia e pelo Teorema 27.2]} \\ &= 3(\cos 5x)(5) = 15 \cos 5x \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} D_x\left(4 \cos \frac{x}{2}\right) &= 4D_x\left(\cos \frac{x}{2}\right) \\ &= 4\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)D_x\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{[pela regra da cadeia e pelo Teorema 27.2]} \\ &= -4\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{sen}^2 x) &= D_x((\operatorname{sen} x)^2) \\ &= (2 \operatorname{sen} x)D_x(\operatorname{sen} x) \qquad \text{[pela regra da cadeia para potências]} \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{[pelo Teorema 27.2]} \\ &= \operatorname{sen} 2x \qquad \text{[pelo Teorema 26.8]} \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} D_x\left(\cos^3 \frac{x}{2}\right) &= D_x\left(\left(\cos \frac{x}{2}\right)^3\right) \\ &= 3\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 D_x\left(\cos \frac{x}{2}\right) \qquad \text{[pela regra da cadeia para potências]} \\ &= \left(3 \cos^2 \frac{x}{2}\right)\left(-\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)D_x\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{[pela regra da cadeia e pelo Teorema 27.2]} \\ &= \left(3 \cos^2 \frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{sen}\frac{x}{2} \end{aligned}$$

27.4 Prove o Lema 27.1.

Considere o caso no qual $\theta > 0$. Usando a notação da Fig. 27-7,

$$\text{área } (\triangle OBC) < \text{área (setor } OBA) < \text{área } (\triangle ODA) \qquad (1)$$

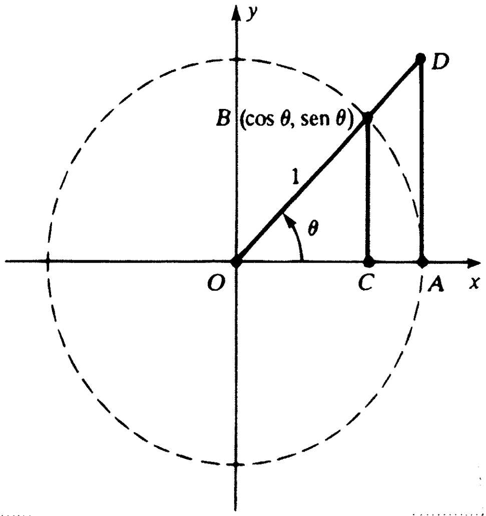


Fig. 27-7

Mas

$$\text{área } (\triangle OBC) = \frac{1}{2}(\overline{OC})(\overline{BC}) = \frac{1}{2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{área (setor } OBA) = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{(área do círculo)}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} \times (\pi 1^2) = \frac{\theta}{2}$$

Além disso, como $\triangle OBC$ e $\triangle ODA$ são semelhantes (pelo critério AA),

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{DA}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \overline{DA} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\text{área } (\triangle ODA) = \frac{1}{2}(\overline{DA})(\overline{OA}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1)$$

e (*1*) fica, após dividir pela quantia positiva $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$,

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

que é equivalente a

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \qquad (2)$$

ÁLGEBRA Se a e b são números positivos, então

$$a < b \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Em (*2*), faça θ tender a 0 pela direita. Ambos $\cos\theta$ e $1/(\cos\theta)$ se aproximam de 1. Portanto, pelo Problema 8.8(*f*),

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad (3)$$

Mas, pelo Teorema 26.3, sen$(-\theta)$ = $-$sen θ e, portanto, $\frac{\text{sen}\,(-\theta)}{-\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$. Logo, (*3*) implica que $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$, que, juntamente com (*3*), nos leva a $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$.

27.5 Prove o Teorema 27.2

(*a*) Vamos primeiro provar que $D_x(\text{sen}\,x) = \cos x$. Pelo Teorema 26.6(*c*), sen $(x + h)$ = sen x cos h + cos x sen h, e assim

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\,x}{h} &= \frac{\text{sen}\,x \cos h + \cos x\,\text{sen}\,h - \text{sen}\,x}{h} \\ &= \frac{\cos x\,\text{sen}\,h + \text{sen}\,x\,(\cos h - 1)}{h} \\ &= \cos x\,\frac{\text{sen}\,h}{h} - \text{sen}\,x\,\frac{1 - \cos h}{h}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}D_x(\text{sen}\,x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\,x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \cos x\,\frac{\text{sen}\,h}{h} - \lim_{h \to 0} \text{sen}\,x\,\frac{1 - \cos h}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\,h}{h} - \text{sen}\,x \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} \\ &= \cos x \cdot 1 - \text{sen}\,x \cdot 0 \qquad \text{[pelo Lema 27.1]} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

(*b*) Pelo Teorema 26.7, $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Logo, pela regra da cadeia,

$$D_x(\cos x) = D_x\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\text{sen}\,x$$

27.6 Esboce o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,x - \text{sen}^2\,x$.

Por conta de sen x, $f(x)$ tem 2π como um período. Logo, precisamos esboçar somente o gráfico para $0 \leq x < 2\pi$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos x - 2\,\text{sen}\,x \cos x = \cos x - \text{sen}\,2x \\ f''(x) &= -\text{sen}\,x - (\cos 2x) D_x(2x) = -\text{sen}\,x - 2 \cos 2x\end{aligned}$$

Para encontrar os pontos críticos, resolva $f'(x) = 0$.

$$\begin{gathered}\cos x - 2\,\text{sen}\,x \cos x = 0 \\ (\cos x)(1 - 2\,\text{sen}\,x) = 0 \\ \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 2\,\text{sen}\,x = 0 \\ \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\end{gathered}$$

onde o Problema 27.2(*b*) foi usado. Aplicação do teste da derivada segunda (Teorema 23.3) em cada ponto crítico fornece o resultado exibido na Tabela 27-2. O gráfico é esboçado na Fig. 27-8.

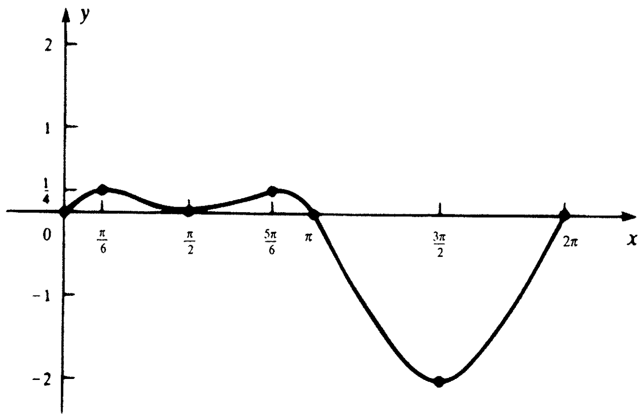


Fig. 27-8

Tabela 27-2

x	$f(x)$	$f''(x)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$ máximo relativo
$\frac{\pi}{2}$	0	1 mínimo relativo
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$ máximo relativo
$\frac{3\pi}{2}$	-2	3 mínimo relativo

27.7 Encontre os extremos absolutos da função $f(x) = 2 \text{ sen } x - \cos 2x$ no intervalo fechado $[0, \pi]$.

Para essa função simples é desnecessário recorrer ao método via tabela da Seção 14.2. Basta observar que as funções seno e co-seno têm valor de máximo absoluto 1. Logo, se existe um argumento x em $[0, \pi]$ tal que

$$f(x) = 2(+1) - (-1) = 3$$

esse argumento deve representar um máximo absoluto (em qualquer intervalo). Obviamente, há um e apenas um argumento desse tipo, $x = \pi/2$.

Por outro lado, como sen $x \geq 0$ em $[0, \pi]$, os argumentos $x = 0$ e $x = \pi$ minimizam sen x e, ao mesmo tempo, *maximizam* cos $2x$. Logo,

$$f(0) = f(\pi) = 2(0) - (+1) = -1$$

é o valor mínimo absoluto em $[0, \pi]$.

Problemas Complementares

27.8 Encontre o período, a freqüência e a amplitude de cada função e esboce seu gráfico.

(*a*) $\cos \frac{4x}{3}$ (*b*) $\frac{1}{2} \text{ sen } 3x$

27.9 Encontre o período, a freqüência e a amplitude de:

(*a*) $2 \text{ sen} \frac{x}{3}$ (*b*) $-\cos 2x$ (*c*) $5 \text{ sen} \frac{5x}{2}$ (*d*) $\cos(-4x)$

[*Sugestão:* No item (*d*) a função é par.]

27.10 Encontre todas as soluções das seguintes equações:

(*a*) $\text{sen } x = 0$ (*b*) $\cos x = 1$ (*c*) $\text{sen } x = 1$ (*d*) $\cos x = -1$

(*e*) $\text{sen } x = -1$ (*f*) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ (*g*) $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*h*) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

27.11 Encontre as derivadas das seguintes funções:

(*a*) $4 \text{ sen}^3 x$ (*b*) $\text{sen } x + 2 \cos x$ (*c*) $x \text{ sen } x$ (*d*) $x^2 \cos 2x$

(*e*) $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ (*f*) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (*g*) $5 \text{ sen } 3x \cos x$ (*h*) $\cos^2 2x$

(*i*) $\cos (2x^2 - 3)$ (*j*) $\text{sen}^3 (5x + 4)$ (*k*) $\sqrt{\cos 2x}$ (*l*) $\text{sen}^3 (\text{sen}^2 x)$

27.12 Calcule os seguintes limites:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{3x}$ (*b*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{2x}$ (*c*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x}$ (*d*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{\cos x}$

(*e*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{5x}$ (*f*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^3 x}{4x^3}$ (*g*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x^2}{x}$ (*h*) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

(*i*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \text{ sen } 4x - \text{sen}^2 x}{x^2}$ (*j*) $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x^2}$ (*k*) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\text{sen}^2 (x - 4)}{(x - 4)^2}$ (*l*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - x \cos x}{x^2 + x + 1}$

27.13 Esboce os gráficos das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = \text{sen}^2 x$ (*b*) $g(x) = \text{sen } x + \cos x$ (*c*) $f(x) = 3 \text{ sen } x - \text{sen}^3 x$

(*d*) $h(x) = \cos x - \cos^2 x$ (*e*) $g(x) = |\text{sen } x|$ (*f*) $f(x) = \text{sen } x + x$

(*g*) $f(x) = \text{sen } (x - 1)$

(*h*) $\boxed{\text{CG}}$ Verifique suas respostas aos itens (*a*)–(*g*) em uma calculadora gráfica.

27.14 Determine os extremos absolutos de cada função no intervalo dado:

(*a*) $\text{sen } x + x$ em $[0, 2\pi]$ (*b*) $\text{sen } x - \cos x$ em $[0, \pi]$ (*c*) $\cos^2 x + \text{sen } x$ em $[0, \pi]$

(*d*) $2 \text{ sen } x + \text{sen } 2x$ em $[0, 2\pi]$ (*e*) $\left|\cos x - \dfrac{1}{4}\right|$ em $[0, 2\pi]$ (*f*) $\dfrac{1}{2} x - \text{sen } x$ em $[0, 2\pi]$

(*g*) $3 \text{ sen } x - 4 \cos x$ em $[0, 2\pi]$

27.15 (*a*) Mostre que $f(x) = A \cos x + B \text{ sen } x$ tem período 2π e amplitude $\sqrt{A^2 + B^2}$. [*Sugestão:* Claramente, $f(x+2\pi) = f(x)$. Note que $\left|\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \leq 1$ e $\left|\dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \leq 1$. Logo, existe φ tal que $\text{sen } \varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ e $\cos \varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Mostre que $f(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ sen } (x + \varphi)$].

(*b*) Encontre a amplitude e o período de: (i) $3 \cos x - 4 \text{ sen } x$; (ii) $5 \text{ sen } 2x + 12 \cos 2x$; (iii) $2 \cos x + \sqrt{2} \text{ sen } x$.

27.16 Calcule: (*a*) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) - \text{sen}\dfrac{\pi}{4}}{h}$ (*b*) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + h\right) - \dfrac{1}{2}}{h}$

[*Sugestão:* Recorde a definição de derivada.]

27.17 Para qual valor de A que $2\text{sen } Ax$ tem período 2?

27.18 Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico de $y = \text{sen}^2 x$ no ponto onde $x = \pi/3$.

27.19 Encontre uma equação da reta normal à curva $y = 1 + \cos x$ no ponto $(\pi/3, 3/2)$.

27.20 Determine o menor inteiro positivo n tal que $D_x^n(\cos x) = \cos x$.

27.21 Seja $f(x) = \text{sen } x + \text{sen } |x|$. (*a*) Esboce o gráfico de f. (*b*) f é contínua em 0? (*c*) f é diferenciável em $x = 0$?

27.22 Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de:

(*a*) $y = x + \cos(xy)$ em $(0,1)$; (*b*) $\text{sen}(xy) = y$ em $(\pi/2, 1)$.

[*Sugestão:* Use derivação implícita.]

27.23 Use derivação implícita para encontrar y':

(*a*) $\cos y = x$ (*b*) $\text{sen}(xy) = y^2$

27.24 (*a*) Uma escada de 26 pés de comprimento está apoiada contra uma parede vertical (ver Fig. 27-9). Se a base A da escada se afasta da base da parede à taxa de 3 pés por segundo, qual a taxa de variação do ângulo θ entre a escada e o solo quando a base da escada está a 10 pés da base da parede?

(*b*) Um avião decola a uma velocidade de 400 quilômetros por hora ao longo de uma reta que forma um ângulo de 60° com o solo. Quanto aumenta a altitude do avião?

27.25 (*a*) Um homem em um ponto P da praia de um lago circular com raio de uma milha (ver Fig. 27-10) deseja alcançar o ponto Q da praia diametralmente oposto a P. Ele pode remar a 1,5 milhas por hora e caminhar a 3 milhas por hora. Em qual ângulo θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ em relação ao diâmetro PQ que ele deveria remar para minimizar o tempo exigido para alcançar Q? (Quando $\theta = 0$, ele rema por todo o caminho; quando $\theta = \pi/2$, ele caminha por todo o caminho.)

(*b*) Refaça o item (*a*) considerando que o homem pode remar uma canoa a 4 milhas por hora.

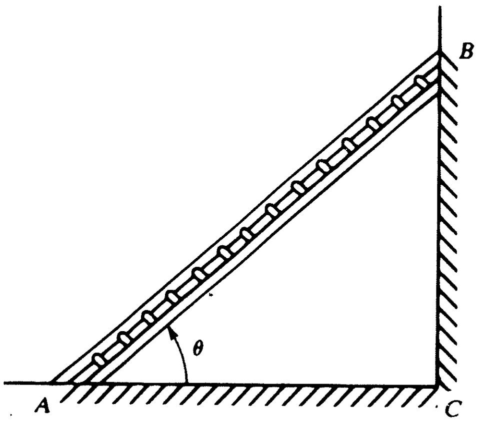


Fig. 27-9

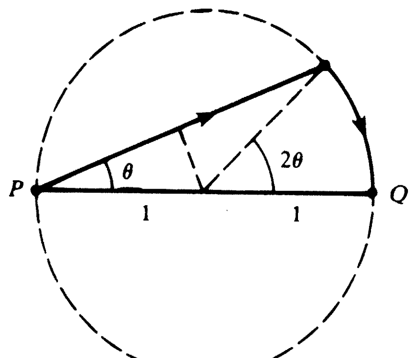


Fig. 27-10

27.26 (*a*) Encontre os extremos absolutos de $f(x) = x - \text{sen } x$ em $[0, \pi/2]$.

(*b*) A partir do item (*a*), prove que $\text{sen } x < x$ para todo x positivo.

(*c*) CG Verifique em uma calculadora gráfica que $\cos x \leq \dfrac{\text{sen } x}{x} \leq 1$ para $x \neq 0$ e $-(\pi/2) \leq x \leq (\pi/2)$.

27.27 Determine se a função $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{para } x \leq \pi/4 \\ \cos x & \text{para } x > \pi/4 \end{cases}$ é contínua em $x = \pi/4$. A função é diferenciável em $x = \pi/4$?

27.28 (*a*) A hipotenusa de um triângulo retângulo é de exatamente 20 polegadas e um dos ângulos agudos foi medido como 30°, com um erro possível de 2°. Use diferenciais para estimar o erro no cálculo do lado adjacente ao ângulo medido.

(*b*) Use diferenciais para estimar cos 31°.

27.29 (*a*) Calcule as primeiras quatro derivadas de sen x. (*b*) Calcule a 70ª derivada de sen x.

27.30 (*a*) Mostre que existe uma única solução para $x^3 - \cos x = 0$ no intervalo $[0,1]$. (*b*) $\boxed{\text{CG}}$ Use o método de Newton para estimar a solução do item (*a*).

27.31 $\boxed{\text{CG}}$ Aproxime π usando o método de Newton para encontrar uma solução para $1 + \cos x = 0$.

27.32 $\boxed{\text{CG}}$ Use o método de Newton para encontrar a única solução positiva de sen $x = x/2$.

Capítulo 28

A Função Tangente e Outras Funções Trigonométricas

Além das funções seno e co-seno, há outras quatro funções trigonométricas importantes, todas podendo ser expressas em termos de sen x e cos x.

Definições: ***Função tangente***

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Função cotangente

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Função secante

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Função co-secante

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Exemplo Calculemos e coloquemos na Tabela 28-1 alguns dos valores de tg x.

$$\operatorname{tg}\ 0 = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Note que tg $(\pi/2)$ não é definida, uma vez que sen $(\pi/2) = 1$ e cos $(\pi/2) = 0$. Além disso

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{tg } x = \lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pi^+/2} \text{tg } x = \lim_{x\to\pi^+/2} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\infty$$

pois $\cos x > 0$ para x imediatamente à esquerda de $\pi/2$ e $\cos x < 0$ para x imediatamente à direita de $\pi/2$.

Tabela 28-1

x	tg x
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

Teorema 28.1: As funções tangente e cotangente são funções ímpares que são periódicas, de período π.

Que elas são ímpares segue do teorema 26.3,

$$\text{tg }(-x) = \frac{\text{sen }(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\text{sen } x}{\cos x} = -\text{tg } x$$

$$\text{cotg }(-x) = \frac{1}{\text{tg }(-x)} = \frac{1}{-\text{tg } x} = -\text{cotg } x$$

A periodicidade de período π segue dos Problemas 26.15(*c*) e (*d*),

$$\text{tg }(x+\pi) = \frac{\text{sen }(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\text{sen } x}{-\cos x} = \text{tg } x$$

***Teorema 28.2 (Derivadas)*:**

$$D_x(\text{tg } x) = \sec^2 x$$
$$D_x(\text{cotg } x) = -\csc^2 x$$
$$D_x(\sec x) = \text{tg } x \sec x$$
$$D_x(\csc x) = -\text{cotg } x \csc x$$

Para as demonstrações, ver Problema 28.1.

Exemplo Do Teorema 28.2 e da regra da cadeia para potências,

$$D_x^2(\text{tg } x) = D_x((\sec x)^2) = (2\sec x)D_x(\sec x)$$
$$= 2(\sec x)(\text{tg } x \sec x) = 2 \text{ tg } x \sec^2 x$$

Mas em $(0,\pi/2)$, tg $x > 0$ (já que ambos sen x e cos x são positivos), o que implica em $D_x^2(\text{tg } x)$. Logo, (teorema 23.1), o gráfico de $y = \text{tg } x$ é côncavo para cima em $(0,\pi/2)$. Sabendo disso, podemos facilmente esboçar o gráfico em $(0,\pi/2)$ e, portanto, em toda a reta (ver Fig. 28-1).

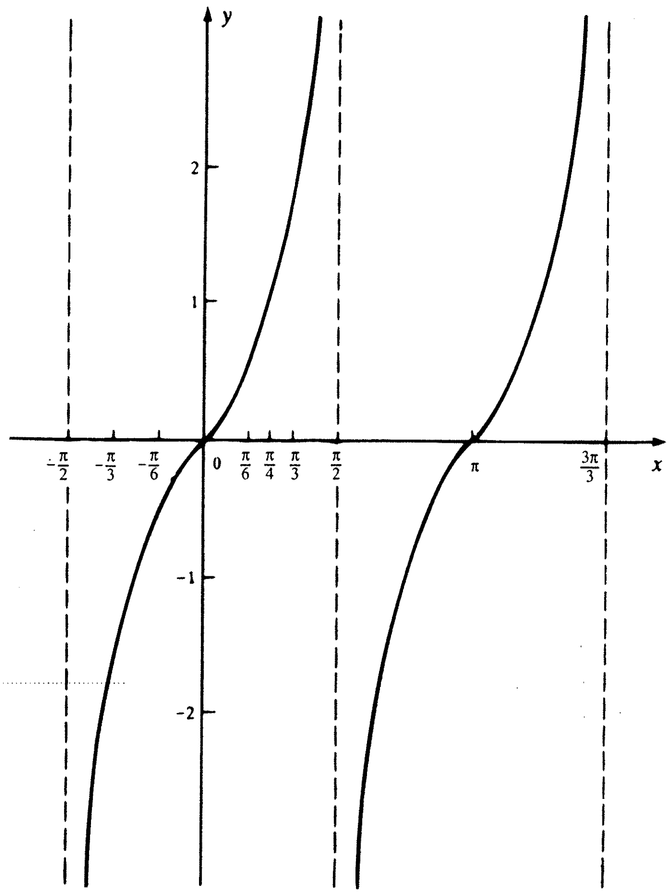


Fig. 28-1

Teorema 28.3 *(Identidades):* $\text{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x$ e $\text{cotg}^2\, x + 1 = \csc^2 x$.

Demonstração: Divida $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ ou $\text{sen}^2\, x$.

Definições Tradicionais

Como no caso de sen θ e cos θ, as funções trigonométricas suplementares foram originalmente definidas apenas para um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Observando a Fig. 26-3, temos

$$\text{tg}\ \theta \equiv \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{cotg}\ \theta \equiv \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

$$\sec \theta \equiv \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\csc \theta \equiv \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$

Problemas Resolvidos

28.1 Prove o Teorema 28.2.

$$D_x(\text{tg}\ x) = D_x\left(\frac{\text{sen}\ x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{(\cos x)D_x(\text{sen } x) - (\text{sen } x)D_x(\cos x)}{(\cos x)^2} \qquad \text{[pela regra do quociente]}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\text{sen } x)(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} \qquad \text{[pelo Teorema 27.2]}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{[pelo Teorema 26.1]}$$

$$= \sec^2 x$$

$$D_x(\text{cotg } x) = D_x((\text{tg } x)^{-1}) = \frac{-1}{(\text{tg } x)^2} D_x(\text{tg } x) \qquad \text{[pela regra da cadeia para potências]}$$

$$= \frac{-1}{(\text{tg } x)^2} \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{-1}{(\text{tg } x \cos x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(\text{sen } x)^2} \qquad \left[\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}\right]$$

$$= -\csc^2 x$$

Derivando a primeira identidade do Teorema 28.3,

$$2(\text{tg } x)(\sec^2 x) = 2(\sec x)D_x(\sec x)$$

e dividindo tudo por $2(\sec x)$, que jamais é zero, nos dá

$$D_x(\sec x) = \text{tg } x \sec x$$

Analogamente, derivação da segunda identidade do Teorema 28.3 nos dá

$$D_x(\csc x) = -\text{cotg } x \csc x$$

28.2 Faça o gráfico de $\csc x$.

Como $\csc x = 1/(\text{sen } x)$, essa função é, assim como $\text{sen } x$, periódica com período 2π e ímpar. Logo, precisamos fazer o gráfico apenas para $0 < x < \pi$. Mas

$$\csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\text{sen } (\pi/2)} = \frac{1}{1} = 1$$

Quando x diminui de $\pi/2$ para 0, $\text{sen } x$ cai de 1 para 0. Logo, $\csc x$ aumenta de 1 para $+\infty$. De forma semelhante, quando x aumenta de $\pi/2$ para π, $\text{sen } x$ decresce de 1 para 0 e $\csc x$ aumenta de 1 para $+\infty$. De fato, como $\text{sen } ((\pi/2) + u) = \text{sen } ((\pi/2) - u)$, o gráfico será simétrico em relação à reta $x = \pi/2$ (ver Fig. 28-2).

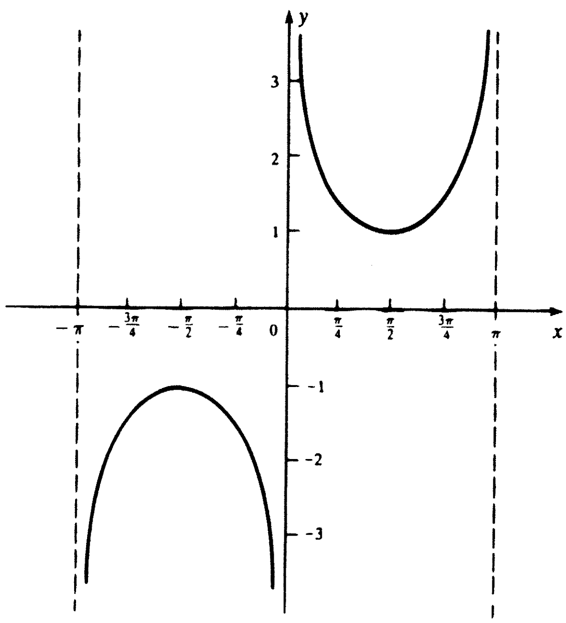


Fig. 28-2

28.3 Prove a identidade $\text{tg}\,(u - v) = \dfrac{\text{tg}\,u - \text{tg}\,v}{1 + \text{tg}\,u\,\text{tg}\,v}$.

$$\text{tg}\,(u - v) = \frac{\text{sen}(u - v)}{\cos\,(u - v)} = \frac{\text{sen}\,u\cos v - \cos u\,\text{sen}\,v}{\cos u\cos v + \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v} \qquad \text{[pelo Teorema 26.6]}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,u}{\cos u} - \dfrac{\text{sen}\,v}{\cos v}}{1 + \dfrac{\text{sen}\,u}{\cos u}\dfrac{\text{sen}\,v}{\cos v}} \qquad \text{[divida numerador e denominador por } \cos u\cos v\text{]}$$

$$= \frac{\text{tg}\,u - \text{tg}\,v}{1 + \text{tg}\,u\,\text{tg}\,v}$$

28.4 Calcule: (*a*) $D_x(3\,\text{tg}^2\,x)$; (*b*) $D_x(\sec x\,\text{tg}\,x)$.

(*a*)
$$\begin{aligned} D_x(3\,\text{tg}^2\,x) &= 3D_x(\text{tg}^2\,x) = 3(2\,\text{tg}\,x)D_x(\text{tg}\,x) && \text{[pela regra da cadeia para potências]}\\ &= 6\,\text{tg}\,x\sec^2 x \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} D_x(\sec x\,\text{tg}\,x) &= (\sec x)D_x(\text{tg}\,x) + (\text{tg}\,x)D_x(\sec x) && \text{[pelo regra do produto]}\\ &= (\sec x)(\sec^2 x) + (\text{tg}\,x)(\text{tg}\,x\sec x) && \text{[pelo Teorema 28.2]}\\ &= (\sec x)(\sec^2 x + \text{tg}^2\,x)\\ &= (\sec x)(\sec^2 x + \text{tg}^2\,x) && \text{[pelo Teorema 28.3]}\\ &= (\sec x)(\text{tg}^2\,x + 1 + \text{tg}^2\,x)\\ &= (\sec x)(2\,\text{tg}^2\,x + 1) \end{aligned}$$

28.5 Um farol H, a uma milha de distância de uma praia reta, tem um facho que gira no sentido anti-horário (como visto acima) à taxa de seis revoluções por minuto. Qual a velocidade do ponto P onde o facho de luz atinge a praia?

Seja A o ponto na praia oposto a H e seja x a distância $\overline{AP}$ (ver Fig. 28-3). Devemos determinar dx/dt. Seja θ a medida de $\measuredangle PHA$. Como o facho faz seis revoluções (de 2π radianos) por minuto,

$$\frac{d\theta}{dt} = 12\pi \text{ radianos por minuto}$$

Mas

$$\text{tg}\,\theta = \frac{x}{1} = x \qquad \left[\text{já que } \text{tg}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\right]$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= D_t(\text{tg}\,\theta) = D_\theta(\text{tg}\,\theta)\ \frac{d\theta}{dt} && \text{[pela regra da cadeia]}\\ &= (\sec^2\theta)(12\pi) = (\sqrt{x^2+1})^2(12\pi) && \left[\text{já que } \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}\right]\\ &= 12\pi(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Por exemplo, quando P está a uma milha de A, a luz se move ao longo da praia a 24π milhas por minuto (aproximadamente 4522 milhas por hora).

28.6 O ângulo de inclinação de uma reta não vertical $\mathscr{L}$ é definida como o menor ângulo α em sentido anti-horário que a reta forma com o eixo x positivo (ver Fig. 28-4). Mostre que $\text{tg}\,\alpha = m$, onde m é o coeficiente angular de $\mathscr{L}$.

Assumindo uma reta paralela, sempre podemos considerar que $\mathscr{L}$ passa pela origem (ver Fig. 28-5). $\mathscr{L}$ intercepta o círculo unitário com centro na origem no ponto P ($\cos\alpha$, $\text{sen}\,\alpha$). Pela definição de coeficiente angular,

$$m = \frac{\text{sen}\,\alpha - 0}{\cos\alpha - 0} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

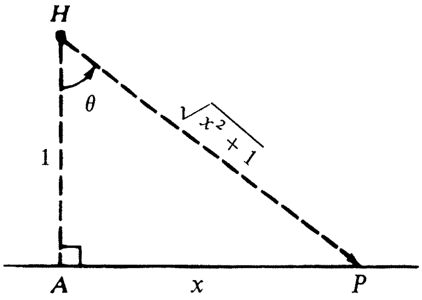


Fig. 28-3

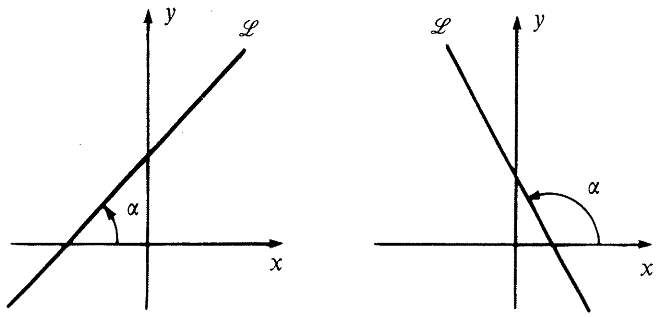


Fig. 28-4

28.7 Determine o ângulo no qual as retas $\mathscr{L}_1$: $y = 2x + 1$ e $\mathscr{L}_2$: $y = -3x + 5$ se interceptam.

Sejam α_1 e α_2 os ângulos de inclinação de $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ (ver Fig. 28-6) e sejam m_1 e m_2 os coeficientes angulares de $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$. De acordo com o Problema 28.6, tg $\alpha_1 = m_1 = -2$ e tg $\alpha_2 = m_2 = -3$. $\alpha_2 - \alpha_1$ é o ângulo de interseção. Mas

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} && \text{[pelo Problema 28.3]}\\ &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} && \text{[pelo Problema 28.6]}\\ &= \frac{-3-2}{1+(-3)(2)} = \frac{-5}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1\end{aligned}$$

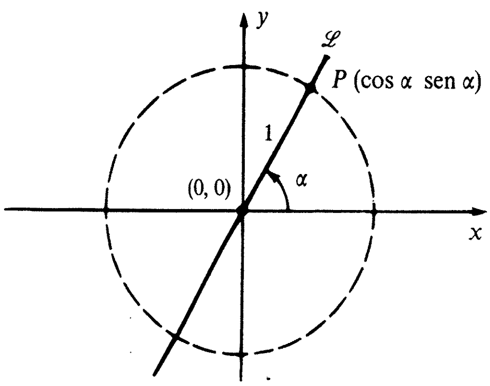


Fig. 28-5

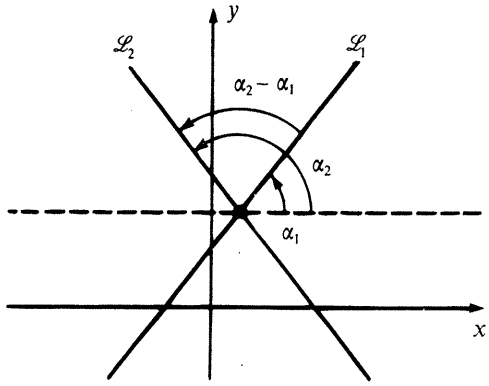


Fig. 28-6

Como tg $(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \text{ radianos} = 45°$$

Em geral, dado tg $(\alpha_2 - \alpha_1)$, o valor de $\alpha_2 - \alpha_1$ pode ser estimado a partir da tabela no Apêndice D.

Deve ser observado que, em certos casos, o método acima conduzirá ao *maior* ângulo de interseção.

Problemas Complementares

28.8 Esboce os gráficos de: (*a*) sec x; (*b*) cotg x.

28.9 Prove a identidade $\operatorname{tg}(u+v) = \dfrac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$.

28.10 Calcule: (*a*) $D_x\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5\right)$ (*b*) $D_x(\operatorname{tg} x - \sec x)$ (*c*) $D_x(\operatorname{cotg}^2 x)$

(*d*) $D_x(\operatorname{cotg} 4x + 3x)$ (*e*) $D_x(\sec^2 3x)$ (*f*) $D_x(\csc(3x - 5))$

(*g*) $D_x(\csc\sqrt{x})$ (*h*) $D_x(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x})$

28.11 Calcule y' por derivação implícita:

(*a*) $\operatorname{tg}(xy) = y$ (*b*) $\sec^2 y + \csc^2 x = 3$

(*c*) $\operatorname{tg}^2(y+1) = 3 \operatorname{sen} x$ (*d*) $y = \operatorname{tg}^2(x+y)$

28.12 Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \operatorname{tg} x$ no ponto $(\pi/3, \sqrt{3})$.

28.13 Encontre uma equação da reta normal à curva $y = 3\sec^2 x$ no ponto $(\pi/6,4)$.

28.14 Calcule: (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ (*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{x^3}$ (*c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$

28.15 Um foguete está subindo verticalmente a partir do solo a uma velocidade de 1000 quilômetros por hora. Um observador a 2 quilômetros da plataforma de lançamento está fotografando o foguete (ver Fig. 28-7). Quão rápido está mudando o ângulo θ da câmera em relação ao solo quando o foguete está a 1,5 quilômetro de altitude?

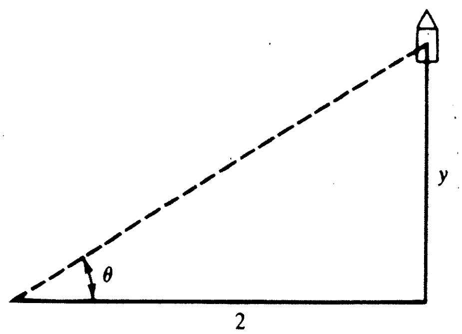


Fig. 28-7

28.16 Determine o ângulo de interseção entre as retas $\mathscr{L}_1$: $y = x - 3$ e $\mathscr{L}_2$: $y = -5x + 4$.

28.17 Encontre o ângulo de interseção entre as retas tangentes às curvas $xy = 1$ e $y = x^3$ no ponto de interseção (1,1).

28.18 Encontre o ângulo de interseção entre as retas tangentes às curvas $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ no ponto de interseção $(\pi/6, \sqrt{3}/2)$.

28.19 Encontre uma equação da reta tangente à curva $1 + 16x^2 y = \operatorname{tg}(x - 2y)$ no ponto $(\pi/4,0)$.

28.20 Determine os máximos e mínimos relativos, pontos de inflexão e assíntotas verticais dos gráficos das seguintes funções em $[0,\pi]$:

(*a*) $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$

(*b*) $f(x) = \operatorname{tg} x - 4x$

28.21 Determine os intervalos onde a função $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ é crescente.

28.22 CG Use o método de Newton para aproximar soluções das seguintes equações:

(*a*) $\sec x = 4$ em $[0,\pi/2]$;

(*b*) $\operatorname{tg} x - x = 0$ em $[\pi,3\pi/2]$;

(*c*) $\operatorname{tg} x = 1/x$ em $(0,\pi)$.

Capítulo 29

Antiderivadas

29.1 DEFINIÇÃO E NOTAÇÃO

Definição: Uma *antiderivada* de uma função f é uma função cuja derivada é f.

Exemplos

(*a*) x^2 é uma antiderivada de $2x$, já que $D_x(x^2) = 2x$.

(*b*) $x^4/4$ é uma antiderivada de x^3, uma vez que $D_x(x^4/4) = x^3$.

(*c*) $3x^3 - 4x^2 + 5$ é uma antiderivada de $9x^2 - 8x$, pois $D_x(3x^3 - 4x^2 + 5) = 9x^2 - 8x$.

(*d*) $x^2 + 3$ é uma antiderivada de $2x$, já que $D_x(x^2 + 3) = 2x$.

(*e*) $\operatorname{sen} x$ é uma antiderivada de $\cos x$, uma vez que $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$.

Os exemplos (*a*) e (*d*) mostram que uma função pode ter mais que uma antiderivada. Isso é verdadeiro para todas as funções.* Se $g(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, então $g(x) + C$ também é uma antiderivada de $f(x)$, sendo que C é uma constante qualquer. O motivo é que $D_x(C)$, donde

$$D_x(g(x) + C) = D_x(g(x))$$

Vamos determinar a relação entre duas antiderivadas de uma função.

Teorema 29.1: Se $F'(x) = 0$ para todo x em um intervalo $\mathscr{I}$, então $F(x)$ é uma constante em $\mathscr{I}$.

A hipótese de que $F'(x) = 0$ nos diz que o gráfico de F sempre tem uma tangente horizontal. É óbvio então que o gráfico de F deve ser uma reta horizontal; ou seja, $F(x)$ é uma constante. Para uma demonstração rigorosa, ver Problema 29.4.

Corolário 29.2: Se $g'(x) = h'(x)$ para todo x em um intervalo $\mathscr{I}$, então há uma constante C tal que $g(x) = h(x) + C$ para todo x em $\mathscr{I}$.

De fato,

$$D_x(g(x) - h(x)) = g'(x) - h'(x) = 0$$

donde, pelo Teorema 29.1, $g(x) - h(x) = C$ ou $g(x) = h(x) + C$.

---

* N. de T.: Desde que as funções sejam diferenciáveis.

De acordo com o Corolário 29.2, quaisquer duas antiderivadas de uma dada função diferem apenas por uma constante. Assim, se conhecemos uma antiderivada de uma função, conhecemos todas.

NOTAÇÃO $\int f(x)\,dx$ se refere a *qualquer* antiderivada de f. Logo,

$$D_x\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

OUTRA TERMINOLOGIA Às vezes o termo *integral indefinida* é usado no lugar de antiderivada* e o processo de determinar antiderivadas é chamado de *integração*. Na expressão $\int f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamada de *integrando*. O motivo para essa nomenclatura ficará claro no Capítulo 31.

Exemplos

(*a*) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$. Como $D_x(x^3/3) = x^2$, sabemos que $x^3/3$ é uma antiderivada de x^2. Pelo Corolário 29.2, qualquer outra antiderivada de x^2 é da forma $(x^3/3) + C$, onde C é uma constante.

(*b*) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

(*c*) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

(*d*) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

(*e*) $\displaystyle\int 0\,dx = C$

(*f*) $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$

29.2 REGRAS PARA ANTIDERIVADAS

As regras para derivadas – em particular, a regra da soma-ou-diferença e a regra da cadeia – implicam em regras correspondentes para antiderivadas.

REGRA 1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + C$ para qualquer constante a.

Exemplo

$$\int 3\,dx = 3x + C$$

REGRA 2. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ para qualquer número racional r diferente de -1.

NOTA A antiderivada de x^{-1} será estudada no Capítulo 34.

A Regra 2 segue do Teorema 15.4, segundo o qual

$$D_x(x^{r+1}) = (r+1)x^r \quad \text{ou} \quad D_x\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r$$

Exemplos

(*a*) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

* N. de T.: Outro termo usual para designar uma antiderivada é primitiva.

(*b*) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

REGRA 3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ para qualquer constante a.

Isso segue de $D_x\left(a \cdot \int f(x)\,dx\right) = a \cdot D_x\left(\int f(x)\,dx\right) = af(x)$.

Exemplo

$$\int 5x^2\,dx = 5\int x^2\,dx = 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + C = \frac{5x^3}{3} + C$$

REGRA 4. (i) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(ii) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Pois $D_x\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right) = D_x\left(\int f(x)\,dx\right) \pm D_x\left(\int g(x)\,dx\right) = f(x) \pm g(x)$.

Exemplo

$$\int (x^2 + x^3)\,dx = \int x^2\,dx + \int x^3\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

Observe que determinamos uma antiderivada específica, $x^3/3 + x^4/4$, e então somamos a constante "arbitrária" C.

As regras 1 a 4 nos permitem calcular a antiderivada de qualquer polinômio.

Exemplo $\int \left(3x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 7x^2 + x - 3\right)dx = 3\left(\frac{x^6}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}\right) + 7\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} - 3x + C$

$$= \frac{x^6}{2} - \frac{x^5}{10} + \frac{7}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

A regra a seguir se mostrará extremamente útil.

REGRA 5. (*Fórmula Rápida I*) $\int (g(x))^r g'(x)\,dx = \frac{(g(x))^{r+1}}{r+1} + C$

A regra da cadeia para potências implica que

$$D_x\left(\frac{(g(x))^{r+1}}{r+1}\right) = \frac{1}{r+1}\,D_x(g(x)^{r+1}) = \frac{1}{r+1} \cdot (r+1)(g(x))^r g'(x) = (g(x))^r g'(x)$$

o que nos leva à fórmula rápida I.

Exemplos

(*a*) $\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^7 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^8 + C$

(*b*) $\int \sqrt{2x - 5}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-5)^{1/2}(2)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-5)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + C$

REGRA 6. (*Método da Substituição*) Adiando a formulação geral e justificativa para o Problema 29.18, ilustramos o método por três exemplos.

(i) Calcule $\int x^2 \cos x^3\, dx$. Seja $x^3 = u$. Logo, pela Seção 21.3, o diferencial de u é dado por

$$du = D_x(x^3)\, dx = 3x^2\, dx \qquad \text{ou} \qquad x^2\, dx = \frac{1}{3}\, du$$

Agora substitua x^3 por u e $\frac{1}{3}du$ por $x^2\, dx$,

$$\int x^2 \cos x^3\, dx = \int \frac{1}{3} \cos u\, du = \frac{1}{3}\int \cos u\, du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{3} \operatorname{sen} x^3 + C$$

(ii) Calcule $\int (x^2 + 3x - 5)^3(2x + 3)\, dx$. Faça $u = x^2 + 3x - 5$ e $du = (2x + 3)dx$. Logo,

$$\int (x^2 + 3x - 5)^3(2x + 3)\, dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}(x^2 + 3x - 5)^4 + C$$

(iii) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$. Faça $u = \operatorname{sen} x$. Assim, $du = \cos x\, dx$ e

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

Observe que a fórmula rápida I (Regra 5) é um caso especial da Regra 6, correspondendo à substituição $u = g(x)$. A beleza da fórmula rápida I é que, quando aplicável, nos permite evitar o incômodo de usar o processo de substituição.

Problemas Resolvidos

29.1 Calcule as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\int (\sqrt[3]{x} - 5x^2)\, dx$ (*b*) $\int (4x + \sqrt{x^5} - 2)\, dx$

(*c*) $\int (x^2 - \sec^2 x)\, dx$ (*d*) $\int \frac{2\sqrt{x} + 3x^2}{x}\, dx$

(*a*)
$$\begin{aligned}\int (\sqrt[3]{x} - 5x^2)\, dx &= \int (x^{1/3} - 5x^2)\, dx \\ &= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} - 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + C \qquad \text{[pelas regras 2 e 4]} \\ &= \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{5}{3}x^3 + C\end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\int (4x + \sqrt{x^5} - 2)\, dx &= \int (4x + x^{5/2} - 2)\, dx = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2x + C \\ &= 2x^2 + \frac{2}{7}x^{7/2} - 2x + C\end{aligned}$$

(*c*)
$$\int (x^2 - \sec^2 x)\, dx = \int x^2\, dx - \int \sec^2 x\, dx = \frac{x^3}{3} - \operatorname{tg} x + C$$

(*d*)
$$\begin{aligned}\int \frac{2\sqrt{x} + 3x^2}{x}\, dx &= \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3x\right) dx = 2\int x^{-1/2}\, dx + 3\int x\, dx \qquad \text{[pelas regras 1 e 4]} \\ &= 2\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 3\frac{x^2}{2} + C = 4\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

29.2 Determine as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\displaystyle\int (2x^3 - x)^4(6x^2 - 1)\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x^2 - 1}\; x\,dx$

(*a*) Note que $D_x(2x^3 - x) = 6x^2 - 1$. Portanto, pela fórmula rápida I,

$$\int (2x^3 - x)^4(6x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{5}(2x^3 - x)^5 + C$$

(*b*) Observe que $D_x(5x^2 - 1) = 10x$. Então, pela Regra 1,

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{5x^2 - 1}\; x\,dx &= \int (5x^2 - 1)^{1/3}\, x\,dx = \frac{1}{10}\int (5x^2 - 1)^{1/3}\, 10x\,dx \\ &= \frac{1}{10}\,\frac{(5x^2 - 1)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C \qquad \text{[pela fórmula rápida I]} \\ &= \frac{3}{40}(5x^2 - 1)^{4/3} + C = \frac{3}{40}(\sqrt[3]{5x^2 - 1})^4 + C \\ &= \frac{3}{40}\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^4} + C\end{aligned}$$

(Para manipulação de potências racionais, rever a Seção 15.2.)

29.3 Use o método da substituição para calcular:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int x\sec^2(3x^2 - 1)\,dx$ (*c*) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x + 2}\,dx$

(*a*) Seja $u = \sqrt{x}$. Logo,

$$du = D_x(\sqrt{x})\,dx = D_x(x^{1/2})\,dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Assim,

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \operatorname{sen} u\,du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

(*b*) Faça $u = 3x^2 - 1$. Então, $du = 6x\,dx$ e

$$\int x\sec^2(3x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{6}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{6}\operatorname{tg} u + C = \frac{1}{6}\operatorname{tg}(3x^2 - 1) + C$$

(*c*) Faça $u = x + 2$. Logo, $du = dx$ e $x = u - 2$. Assim,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x + 2}\,dx &= \int (u - 2)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2 - 4u + 4)u^{1/2}\,du \\ &= \int (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2})\,du \qquad [\text{pela } u^r u^s = u^{r+s}] \\ &= \frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{8}{5}u^{5/2} + \frac{8}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{7}(x + 2)^{7/2} - \frac{8}{5}(x + 2)^{5/2} + \frac{8}{3}(x + 2)^{3/2} + C\end{aligned}$$

A substituição $u = \sqrt{x + 2}$ também funcionaria.

29.4 Demonstre o Teorema 29.1.

Sejam a e b dois números quaisquer em $\mathscr{I}$. Pelo teorema do valor médio (Teorema 17.2), há um número c entre a e b e, portanto, em $\mathscr{I}$, tal que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Mas, por hipótese, $F'(c) = 0$; logo, $F(b) - F(a) = 0$ ou $F(a) = F(b)$.

29.5 Um foguete é disparado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 256 pés por segundo. (*a*) Quando que ele alcança sua altitude máxima? (*b*) Qual a sua altitude máxima? (*c*) Quando retorna ao solo? (*d*) Qual é a sua velocidade ao atingir o solo?

Em problemas de queda livre, $v = \int a\,dt$ e $s = \int v\,dt$ pois, por definição, $a = dv/dt$ e $v = ds/dt$. Como $a = -32$ pés por segundo por segundo (quando é para *cima* o valor é positivo),

$$v = \int -32\,dt = -32t + C_1$$

$$s = \int (-32t + C_1)\,dt = (-32)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2 = -16t^2 + C_1t + C_2$$

nas quais os valores de C_1 e C_2 são determinados pelas condições iniciais do problema. No presente caso, são dadas por $v(0) = 256$ e $s(0) = 0$. Logo $256 = 0 + C_1$ e $0 = 0 + 0 + C_2$, de modo que

$$v = -32t + 256 \tag{1}$$

$$s = -16t^2 + 256t \tag{2}$$

(*a*) Para a altitude máxima, $ds/dt = v = -32t + 256 = 0$. Portanto,

$$t = \frac{256}{32} = 8 \text{ segundos}$$

quando a altura máxima é alcançada.

(*b*) Substituindo $t = 8$ em (*2*),

$$s(8) = -16(8)^2 + 256(8) = -1024 + 2048 = 1024 \text{ pés}$$

(*c*) Fazendo $s = 0$ em (*2*),.

$$-16t^2 + 256t = 0$$
$$-16t(t - 16) = 0$$
$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 16$$

O foguete deixa o solo em $t = 0$ e retorna em $t = 16$.

(*d*) Substituindo $t = 16$ em (*1*), $v(16) = -32(16) + 256$ pés por segundo. A velocidade é a magnitude desse valor, 256 pés por segundo.

29.6 Determine uma equação da curva que passa pelo ponto (2,3) e tem coeficiente angular $3x^3 - 2x + 5$ em cada ponto (x,y).

O coeficiente angular é dado pela derivada. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^3 - 2x + 5$$

Assim,

$$y = \int (3x^3 - 2x + 5)\,dx = \frac{3}{4}x^4 - x^2 + 5x + C$$

Como (2,3) está sobre a curva,

$$3 = \frac{3}{4}(2)^4 - (2)^2 + 5(2) + C = 12 - 4 + 10 + C = 18 + C$$

Logo, $C = -15$ e

$$y = \tfrac{3}{4}x^4 - x^2 + 5x - 15$$

Problemas Complementares

29.7 Encontre as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\int (2x^3 - 5x^2 + 3x + 1)\,dx$ (*b*) $\int \left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ (*c*) $\int 2\sqrt[4]{x}\,dx$

(*d*) $\int 5\sqrt[3]{x^2}\,dx$ (*e*) $\int \frac{3}{x^4}\,dx$ (*f*) $\int (x^2 - 1)\sqrt{x}\,dx$

(*g*) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}\right) dx$ (*h*) $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$ (*i*) $\int (3 \text{ sen } x + 5 \cos x)\,dx$

(*j*) $\int (7 \sec^2 x - \sec x \text{ tg } x)\,dx$ (*k*) $\int (\csc^2 x + 3x^2)\,dx$ (*l*) $\int x\sqrt{3x}\,dx$

(*m*) $\int \frac{1}{\sec x}\,dx$ (*n*) $\int \text{tg}^2 x\,dx$ (*o*) $\int x(x^4 + 2)^2\,dx$

[*Sugestão:* Use o Teorema 28.3 no item (*n*).]

29.8 Calcule as seguintes antiderivadas usando a Regra 5 ou a Regra 6. [No item (*m*), $a \neq 0$.]

(*a*) $\int \sqrt{7x + 4}\,dx$ (*b*) $\int \frac{1}{\sqrt{x - 1}}\,dx$ (*c*) $\int (3x - 5)^{12}\,dx$

(*d*) $\int \text{sen } (3x - 1)\,dx$ (*e*) $\int \sec^2 \frac{x}{2}\,dx$ (*f*) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(*g*) $\int (4 - 2t^2)^7 t\,dt$ (*h*) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 5}\,dx$ (*i*) $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

(*j*) $\int \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}\,dx$ (*k*) $\int (x^4 + 1)^{1/3} x^7\,dx$ (*l*) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}\,dx$

(*m*) $\int x\sqrt{ax + b}\,dx$ (*n*) $\int \frac{\cos 3x}{\text{sen}^2\, 3x}\,dx$ (*o*) $\int \sqrt{1 - x}\, x^2\,dx$

(*p*) $\int (3x - 5)^{12} x\,dx$ (*q*) $\int (4 - 7t^2)^7 t\,dt$ (*r*) $\int \frac{\text{sen } (1/x) \cos (1/x)}{x^2}\,dx$

(*s*) $\int \frac{1}{x^5} \sec^2 \frac{3}{x^4}\,dx$

29.9 Um foguete é lançado verticalmente para cima a partir de uma torre com 240 pés de altura e com uma velocidade inicial de 224 pés por segundo. (*a*) Quando atingirá sua altura máxima? (*b*) Qual será sua altura máxima? (*c*) Quando atingirá o solo? (*d*) Com qual velocidade que atingirá o solo?

29.10 (*Movimento Retilíneo, Capítulo 18*) Uma partícula se move ao longo do eixo x com aceleração $a = 2t - 3$ pés por segundo por segundo. No instante $t = 0$ está na origem e se movendo com uma velocidade de 4 pés por segundo na direção positiva. (*a*) Encontre uma fórmula para sua velocidade v em termos de t. (*b*) Encontre uma fórmula para sua posição x em termos de t. (*c*) Quando e onde que a partícula muda de direção? (*d*) Em quais instantes que a partícula se move para a esquerda?

29.11 Refaça o Problema 29.10 se $a = t^2 - \frac{13}{3}$ pés por segundo por segundo.

29.12 Um foguete disparado para cima verticalmente a partir do solo atinge o chão 10 segundos depois. (*a*) Qual era sua velocidade inicial? (*b*) Qual altura atingiu?

29.13 Um motorista usa os freios em um carro que se move a 45 milhas por hora em uma estrada retilínea e os freios provocam uma desaceleração constante de 22 pés por segundo por segundo. (*a*) Em quantos segundos que o carro irá parar? (*b*) Quantos pés o carro terá percorrido após o momento em que os freios foram aplicados? [*Sugestão:* Considere a origem no ponto onde os freios foram incialmente usados e faça $t = 0$ nesse ponto. Observe que velocidade e desaceleração estão expressos em diferentes unidades de distância e tempo; mude a velocidade para pés por segundo.]

29.14 Uma partícula que se move sobre uma reta tem aceleração $a = 5 - 3t$ e sua velocidade é 7 no instante $t = 2$. Se $s(t)$ é a distância a partir da origem no instante t, calcule $s(2) - s(1)$.

29.15 (*a*) Encontre a equação de uma curva que passa pelo ponto (3,2) e que tem inclinação $2x^2 - 5$ no ponto (x,y).

(*b*) Encontre a equação de uma curva que passa pelo ponto (0,1) e tem inclinação $12x + 1$ no ponto (x,y).

29.16 Uma bola rola por uma reta, com uma velocidade inicial de 10 pés por segundo. Atrito faz com que a velocidade diminua a uma taxa constante de 4 pés por segundo por segundo até a bola parar. Até onde a bola rolará? [*Sugestão:* $a = -4$ e $v_0 = 10$.]

29.17 Uma partícula se move sobre o eixo x com aceleração $a(t) = 2t - 2$ para $0 \le t \le 3$. A velocidade inicial v_0 em $t = 0$ é 0. (*a*) Determine a velocidade $v(t)$. (*b*) Quando que $v(t) < 0$? (*c*) Quando que a partícula muda de direção? (*d*) Encontre o deslocamento entre $t = 0$ e $t = 3$. (*Deslocamento* é a mudança resultante na posição.) (*e*) Determine a distância total percorrida de $t = 0$ a $t = 3$.

29.18 Justifique a seguinte forma para o método da substituição (Regra 6):

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

onde $g(x)$ é substituído por u na integração da direita. A "substituição" seria aplicada no lado esquerdo fazendo $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$. [*Sugestão:* Pela regra da cadeia,

$$D_x\left(\int f(u)\,du\right) = D_u\left(\int f(u)\,du\right)\cdot(du/dx) = f(u)(du/dx) = f(g(x))g'(x).]$$

Capítulo 30

A Integral Definida

30.1 NOTAÇÃO SIGMA

A letra grega maiúscula Σ é usada em matemática para denotar adições repetidas.

Exemplos

(*a*) $\sum_{i=1}^{99} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$

ou seja, a soma dos primeiros 99 inteiros positivos.

(*b*) $\sum_{i=1}^{6} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

ou seja, a soma dos primeiros 6 inteiros positivos ímpares.

(*c*) $\sum_{i=2}^{5} 3i = 6 + 9 + 12 + 15 = 3(2 + 3 + 4 + 5) = 3\sum_{i=2}^{5} i$

(*d*) $\sum_{j=1}^{15} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 15^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 225$

(*e*) $\sum_{j=1}^{5} \operatorname{sen} j\pi = \operatorname{sen} \pi + \operatorname{sen} 2\pi + \operatorname{sen} 3\pi + \operatorname{sen} 4\pi + \operatorname{sen} 5\pi$

Em geral, dada uma função f definida sobre os inteiros e dados inteiros k e $n \geq k$,

$$\sum_{i=k}^{n} f(i) = f(k) + f(k+1) + \cdots + f(n)$$

30.2 ÁREA SOB UMA CURVA

Seja f uma função tal que $f(x) \geq 0$ para todo x no intervalo fechado $[a,b]$. Então seu gráfico é uma curva que se encontra sobre ou acima do eixo x (ver Fig. 30-1). Temos uma idéia intuitiva da *área* A da região $\mathscr{R}$ abaixo da curva, acima do eixo x e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Determinemos um procedimento para calcular o valor da área A.

Selecione pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ em $[a,b]$ (ver Fig. 30-2). Faça $x_0 = a$ e $x_n = b$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Esses dividem $[a,b]$ em n sub-intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Considere que os comprimentos desses sub-intervalos são $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$, onde

$$\Delta_i x \equiv x_i - x_{i-1}$$

Desenhe retas verticais $x = x_i$ do eixo x até o gráfico, dividindo assim a região $\mathscr{R}$ em n tiras. Se $\Delta_i A$ é a área da i-ésima tira, então

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i A$$

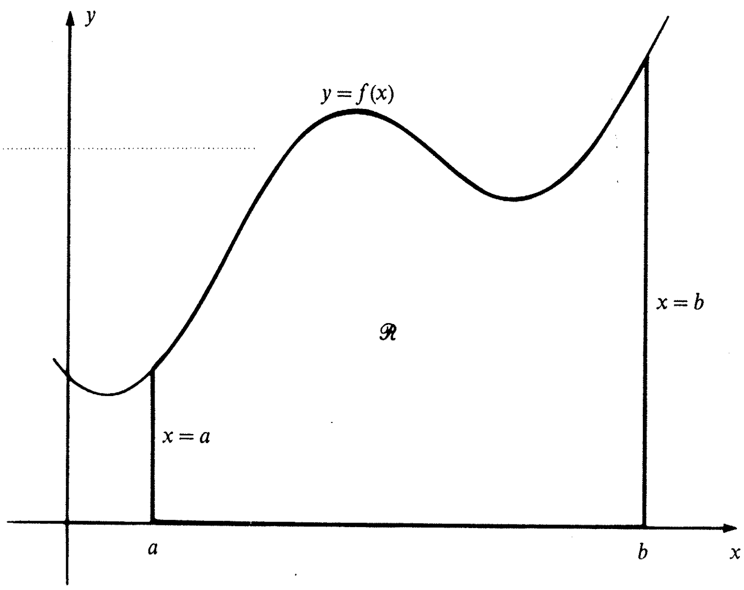


Fig. 30-1

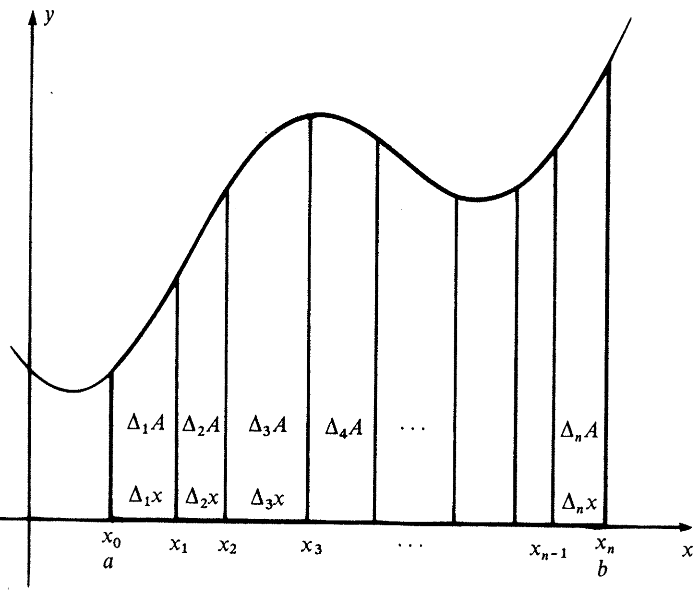


Fig. 30-2

Aproxime a área $\Delta_i A$ como se segue. Escolha qualquer ponto x_i^* no i-ésimo sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e desenhe o segmento de reta vertical do ponto x_i^* até o gráfico (veja as linhas tracejadas no Fig. 30-3); o comprimento desse segmento é $f(x_i^*)$. O retângulo com base $\Delta_i x$ e altura $f(x_i^*)$ tem área $f(x_i^*)\,\Delta_i x$, que é aproximadamente a área $\Delta_i A$ da i-ésima tira. Assim, a área total A sob a curva é aproximadamente a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta_i x = f(x_1^*)\,\Delta_1 x + f(x_2^*)\,\Delta_2 x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta_n x \qquad (30.1)$$

A aproximação fica cada vez melhor se dividimos o intervalo $[a,b]$ em cada vez mais sub-intervalos e se fazemos os comprimentos desses sub-intervalos cada vez menores. Se sucessivas aproximações tendem a um número específico, então esse número é denotado por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

e é chamado de *integral definida de f de a a b*. Tal número não existe para todas as funções f, mas existe, por exemplo, quando a função f é contínua em $[a,b]$.

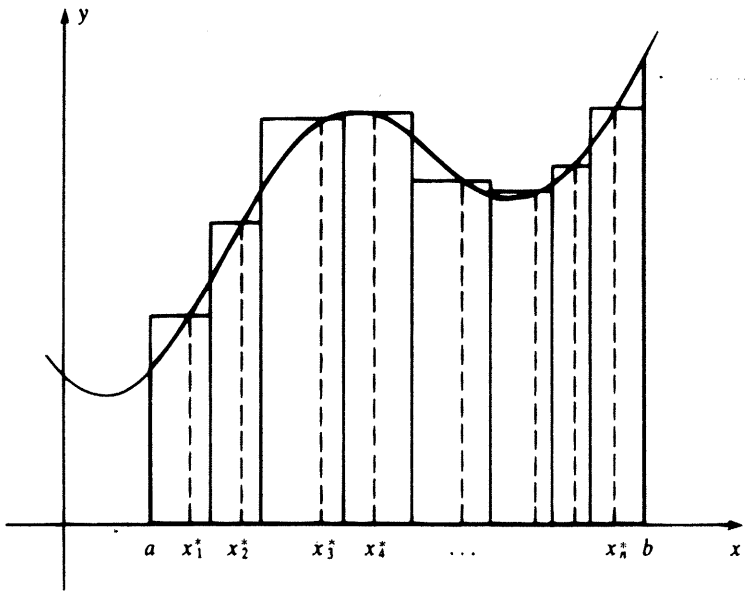


Fig. 30-3

Exemplo Aproximar a integral definida por meio de um número *n pequeno* de áreas retangulares geralmente não dá bons resultados numéricos. Para ver isso, considere a função $f(x) = x^2$ em $[0,1]$. Logo $\int_0^1 x^2\,dx$ é a área sob a parábola $y = x^2$, acima do eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$. Divida $[0,1]$ em $n = 10$ sub-intervalos iguais dados pelos pontos 0, 1, 0, 2, ..., 0,9 (ver Fig. 30-4). Assim, cada $\Delta_i x$ é igual a 1/10. No i-ésimo sub-intervalo, escolha x_i^* como sendo o extremo esquerdo $(i-1)/10$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta_i x = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{i-1}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{i=1}^{10}\frac{(i-1)^2}{100}\left(\frac{1}{10}\right)\\ &= \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{10}(i-1)^2 \qquad \text{[pelo exemplo (}c\text{) acima]}\\ &= \frac{1}{1000}(0+1+4+\cdots+81) = \frac{1}{1000}(285) = 0{,}285\end{aligned}$$

Como será demonstrado no Problema 30.2, o valor exato é

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

Logo, a aproximação acima não é muito boa. Em termos da Fig. 30-4, há muito espaço não considerado entre a curva e os topos dos retângulos.

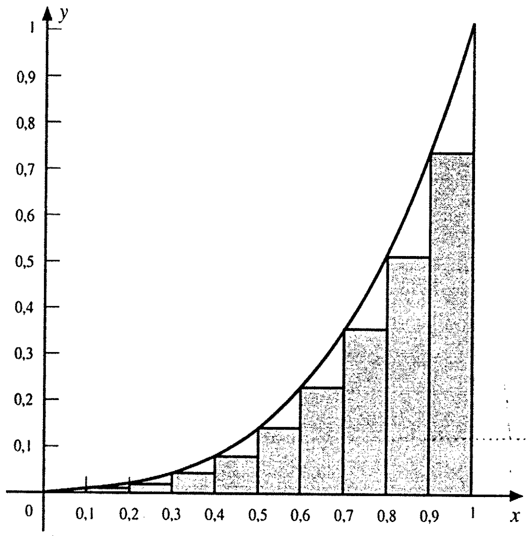


Fig. 30-4

Mas, para uma função f arbitrária (não necessariamente não-negativa) em $[a,b]$ uma soma da forma *(30.1)* pode ser definida sem qualquer referência ao gráfico de f ou à noção de área. O procedimento preciso em termos de épsilon e delta, como no Problema 8.4(*a*), pode ser usado para determinar se essa soma tende a um valor limite quando n se aproxima de ∞ e quando o maior dos comprimentos $\Delta_i x$ tende a 0. Se isso ocorre, f é dita ser *integrável* em $[a,b]$ e o limite é chamado de *integral definida de* f em $[a,b]$ e é denotado por[1]

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Na próxima seção deveremos estabelecer diversas propriedades da integral definida, omitindo qualquer prova que dependa da definição precisa e preferindo a visão intuitiva da integral definida como uma área [quando $f(x) \geq 0$].

30.3 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 30.1: Se f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Teorema 30.2: $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ para qualquer constante c.

Obviamente, os limites gozam dessas relações uma vez que suas respectivas aproximações por somas também satisfazem as mesmas [exemplo (*c*) acima].

[1] A integral definida é também chamada de *integral de Riemann de* f em $[a,b]$ e as somas *(30.1)* são ditas *somas de Riemann* de f em $[a,b]$.

Exemplo Suponha que $f(x) \leq 0$ para todo x em $[a,b]$. O gráfico de f – bem como sua imagem espelhada, o gráfico de $-f$ – é exibido na Fig. 30-5. Como $-f(x) \geq 0$,

$$\int_a^b -f(x)\,dx = \text{área } B$$

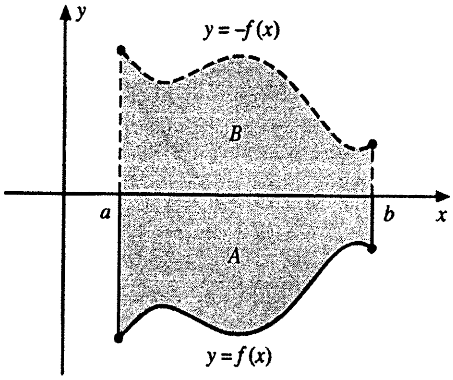


Fig. 30-5

Mas, por simetria, área B = área A; e, pelo Teorema 30.2, com $c = -1$,

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Segue-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -(\text{área } A)$$

Em outras palavras, a integral definida de uma função não positiva é o *negativo* da área *acima* do gráfico da função e *abaixo* do eixo x.

Teorema 30.3: Se f e g são integráveis em $[a,b]$, então também são $f + g$ e $f - g$ e

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Novamente, essa propriedade é conseqüência da correspondente propriedade das somas aproximadas,

$$\sum_{i=1}^{n} [P(i) \pm Q(i)] = \sum_{i=1}^{n} P(i) \pm \sum_{i=1}^{n} Q(i)$$

Teorema 30.4: Se $a < c < b$ e se f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Para $f(x) \geq 0$, o teorema é óbvio: a área sob o gráfico de a a b deve ser a soma das áreas de a a c e de c a b.

Exemplo O Teorema 30.4 nos leva a uma interpretação geométrica para integral definida quando o gráfico de f tem o aspecto mostrado na Fig. 30-6. Aqui,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{c_4} f(x)\,dx + \int_{c_4}^{b} f(x)\,dx \\ &= A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5\end{aligned}$$

Ou seja, a integral definida pode ser considerada uma área total, na qual as áreas *acima* do eixo x são consideradas como *positivas* e área *abaixo* do eixo x são consideradas *negativas*.

Assim, podemos inferir da Fig. 27-2(*b*) que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0$$

pois a área positiva de 0 a π é cancelada pela área negativa de π a 2π.

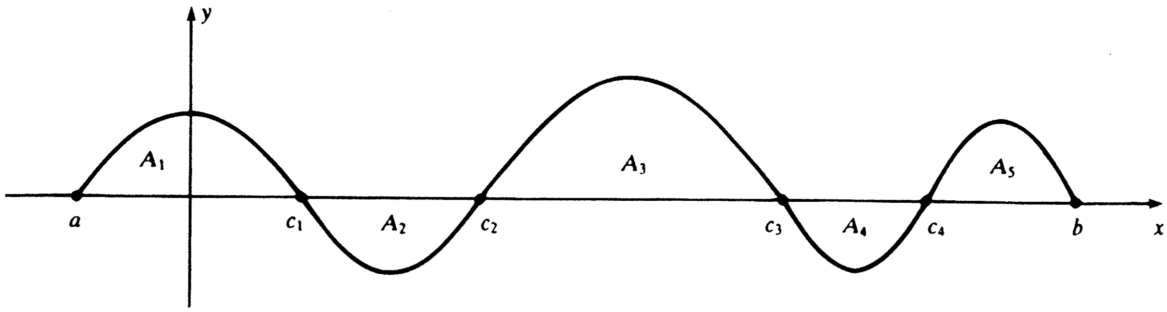


Fig. 30-6

Limites de Integração Arbitrários

Ao se definir $\int_a^b f(x)\,dx$, assumimos que os *limites de integração a* e *b* são tais que $a < b$. Estendemos a definição como se segue:

(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

(2) Se $a > b$, faça $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (sendo que a integral definida à direita recai no caso da definição original).

Sob o ponto de vista dessa definição estendida, *a permuta dos limites de integração em qualquer integral definida inverte o sinal da integral*. Além disso, as equações dos Teoremas 30.2, 30.3 e 30.4 agora valem para limites arbitrários de integração *a*, *b* e *c*.

Problemas Resolvidos

30.1 Mostre que $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = b - a$.

Para qualquer sub-divisão $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a,b]$, a soma aproximada *(30.1)* é

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x \qquad \text{[já que } f(x) = 1 \text{ para todo } x]$$

$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Como toda soma aproximada é igual a $b - a$,

$$\int_a^b 1\,dx = b - a$$

Para uma demonstração intuitiva alternativa, observe que $\int_a^b 1\,dx$ é igual à área de um retângulo com base de comprimento $b - a$ e altura 1, uma vez que o gráfico da função constante 1 é a reta $y = 1$. Essa área é $(b - a)(1) = b - a$ (ver Fig. 30-7).

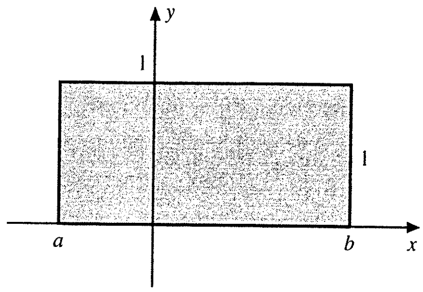


Fig. 30-7

30.2 Calcule $\int_0^1 x^2\,dx$. [O leitor pode considerar a fórmula $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ a qual foi estabelecida no Problema 30.12(*a,ii*).]

Divida o intervalo [0,1] em n partes iguais, como indicado na Fig. 30-8, fazendo cada $\Delta_i x = 1/n$. No i-ésimo subintervalo $[(i-1)/n, i/n]$, seja x_i^* o extremo direito i/n. Logo, (*30.1*) fica

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta_i x &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

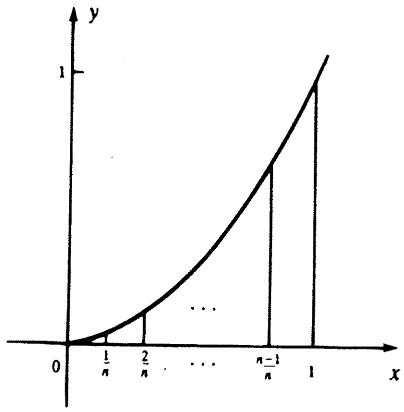


Fig. 30-8

Podemos tornar a subdivisão cada vez mais fina, fazendo n tender a infinito. Logo,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}(1)(2) = \frac{1}{3}$$

Esse tipo de cálculo direto de uma integral definida é possível somente para as mais simples funções $f(x)$. Um método muito mais abrangente será explicado no Capítulo 31.

30.3 Sejam $f(x)$ e $g(x)$ integráveis em $[a,b]$.

(*a*) Se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, mostre que

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(*b*) Se $f(x) \leq g(x)$ em $[a,b]$, mostre que

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(*c*) Se $m \leq f(x) \leq M$ em $[a,b]$, mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(*a*) A integral definida, sendo a área sob o gráfico de f, não pode ser negativa. Mais rigorosamente, toda soma aproximada (*30.1*) é não-negativa, uma vez que $f(x_i^*) \geq 0$ e $\Delta_i x > 0$. Logo (como mostrado no Problema 9.10), o valor limite das somas aproximadas também é não-negativo.

(*b*) Como $g(x) - f(x) \geq 0$ em $[a,b]$

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0 \qquad \text{[por (}a\text{)]}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \qquad \text{[pelo Teorema 30.3]}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \qquad \text{[por (}b\text{)]}$$

$$m\int_a^b 1\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b 1\,dx \qquad \text{[pelo Teorema 30.2]}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad \text{[pelo Teorema 30.1]}$$

Problemas Complementares

30.4 Calcule:

(*a*) $\int_2^5 8\,dx$ (*b*) $\int_0^1 5x^2\,dx$ (*c*) $\int_0^1 (x^2+4)\,dx$

[*Sugestão:* Use os Problemas 30.1 e 30.2.]

30.5 Para a função f representada graficamente na Fig. 30-9, expresse $\int_0^5 f(x)\,dx$ em termos das áreas A_1, A_2, A_3.

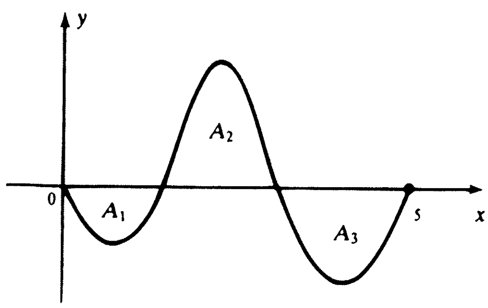


Fig. 30-9

30.6 (*a*) Mostre que $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$. Você pode assumir a fórmula $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ demonstrada no Problema 30.12(*a*). Verifique seu resultado usando a fórmula usual para área de um triângulo. [*Sugestão:* Divida o intervalo $[0,b]$ em n sub-intervalos iguais e escolha $x_i^* = ib/n$, o extremo direito do i-ésimo sub-intervalo.]

(*b*) Mostre que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$. [*Sugestão:* Use (*a*) e o Teorema 30.4.]

(*c*) Calcule $\int_1^3 5x\,dx$. [*Sugestão:* Use o Teorema 30.2 e (*b*).]

30.7 Mostre que a equação do Teorema 30.4,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

vale para quaisquer números a, b, c, tais que as duas integrais definidas à esquerda podem ser definidas no sentido estendido. [*Sugestão:* Considere todos os seis arranjos entre diferentes a, b, c: $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, $c < b < a$. Também considere os casos nos quais dois dos números são iguais ou todos os três são iguais.]

30.8 Prove que $1 \le \int_1^2 x^3\,dx \le 8$. [*Sugestão:* Use o Problema 30.3(*c*).]

30.9 (*a*) Calcule $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ usando uma fórmula da geometria. [*Sugestão:* Qual curva representa o gráfico de $y = \sqrt{4 - x^2}$?]

(*b*) A partir do item (*a*) mostre que $0 \le \pi \le 4$. (Estimativas muito melhores para π são conseguidas desse modo.)

30.10 Calcule:

(*a*) $\sum_{i=1}^{3} (3i - 1)$ (*b*) $\sum_{k=0}^{4} (3k^2 + 4)$ (*c*) $\sum_{j=0}^{3} \operatorname{sen}\frac{j\pi}{6}$ (*d*) $\sum_{n=1}^{5} f\left(\frac{1}{n}\right)$ se $f(x) = \frac{1}{x}$

30.11 Se f é contínua em $[a,b]$, $f(x) \ge 0$ em $[a,b]$ e $f(x) > 0$ para algum x em $[a,b]$, prove que

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

[*Sugestão:* Por continuidade, $f(x) > K > 0$ em algum intervalo fechado dentro de $[a,b]$. Use o Teorema 30.4 e o Problema 30.3(*c*).]

30.12 (*a*) Use indução matemática (ver Problema 12.2) para provar que:

(i) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(*b*) Observando os casos em que $n = 1, 2, 3, 4, 5$, procure adivinhar uma fórmula para $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ e então demonstre-a por indução matemática. [*Sugestão:* Compare os valores da fórmula (i) no item (*a*) para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.]

30.13 Se o gráfico de f entre $x = 1$ e $x = 5$ é como o mostrado na Fig. 30-10, calcule $\int_1^5 f(x)\, dx$.

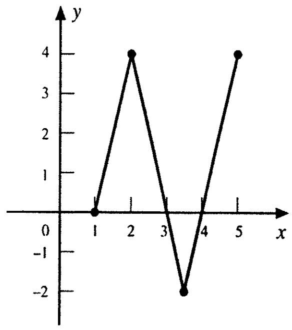


Fig. 30-10

30.14 Seja $f(x) = 3x + 1$ para $0 \leq x \leq 1$. Se o intervalo $[0,1]$ é dividido em cinco sub-intervalos de mesmo comprimento, qual é a menor soma de Riemann (*30.1*) correspondente?

Capítulo 31

O Teorema Fundamental do Cálculo

31.1 CÁLCULO DA INTEGRAL DEFINIDA

Desenvolvemos aqui um método simples para calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

um método baseado em uma profunda e surpreendente conexão entre derivação e integração. Essa conexão, descoberta por Isaac Newton e Gottfried von Leibniz, os inventores simultâneos do cálculo, é expressa da seguinte forma:

Teorema 31.1: Seja f contínua em $[a,b]$. Logo, para todo x em $[a,b]$,

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

é uma função de x tal que

$$D_x\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Uma demonstração pode ser encontrada no Problema 31.5.

Agora, para o cálculo da integral definida, seja $F(x) = \int f(x)\,dx$ alguma antiderivada de $f(x)$ (para x em $[a,b]$). De acordo com o Teorema 31.1, a função $\int_a^x f(t)\,dt$ também é uma antiderivada de $f(x)$. Logo, pelo Corolário 29.2,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

para alguma constante C. Quando $x = a$,

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \qquad \text{ou} \qquad C = -F(a)$$

Assim, quando $x = b$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

e desse modo provamos o:

Teorema 31.2 (*Teorema Fundamental do Cálculo*): Seja f contínua em $[a,b]$ e seja $F(x) = \int f(x)\,dx$. Logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

NOTAÇÃO A diferença $F(b) - F(a)$ será freqüentemente denotada por $F(x)]_a^b$, e o teorema fundamental do cálculo pode ser reescrito como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left.\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

Exemplos

(*a*) Lembre-se do complicado cálculo de $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ no Problema 30.2. Se, em contrapartida, escolhermos a antiderivada $x^3/3$ e aplicarmos o teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

(*b*) Determinemos a área A sob um arco da curva $y = \text{sen } x$; digamos, o arco de $x = 0$ a $x = \pi$. Com $\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + \sqrt{5}$ o teorema fundamental do cálculo nos dá

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \text{sen } x\,dx = (-\cos x + \sqrt{5})\Big]_0^\pi = (-\cos \pi + \sqrt{5}) - (-\cos 0 + \sqrt{5}) \\ &= [-(-1) + \sqrt{5}] - (-1 + \sqrt{5}) = 1 + 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 2 \end{aligned}$$

Observe que os termos com $\sqrt{5}$ se cancelaram no cálculo de A. Grosseiramente falando, usamos a antiderivada "mais simples" (no caso, $-\cos x$) para empregar no teorema fundamental do cálculo.

31.2 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

O *valor médio* ou a *média* entre dois números a_1 e a_2 é

$$\frac{a_1 + a_2}{2}$$

Para n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, o valor médio é

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Agora considere a função f definida em um intervalo $[a,b]$. Como f pode assumir infinitos valores, não podemos usar diretamente a definição acima para falar sobre a média de todos os valores de f. No entanto, vamos dividir o intervalo $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais, sendo que cada um tem comprimento

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Escolha um ponto arbitrário x_i^* no i-ésimo sub-intervalo. Logo, a média dos n números $f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*)$ é

$$\frac{f(x_1^*)+f(x_2^*)+\cdots+f(x_n^*)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

Se n é grande, esse valor deveria ser uma boa aproximação da idéia intuitiva de "valor médio de f em $[a,b]$". Mas,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \qquad \left[\text{uma vez que } \frac{1}{n}=\frac{1}{b-a}\,\Delta x\right]$$

Quando n tende a infinito, a soma à direita se aproxima de $\int_a^b f(x)\,dx$ (pela definição da integral definida), e somos levados a:

Definição: O valor médio de f em $[a,b]$ é $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Exemplos

(a) O valor médio V de sen x em $[0,\pi]$ é

$$V=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\text{sen } x\,dx=\frac{1}{\pi}(2) \qquad \text{[pelo exemplo } (b) \text{ acima]}$$
$$=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}64$$

(b) O valor médio V de x^3 em $[0,1]$ é

$$V=\frac{1}{1-0}\int_0^1 x^3\,dx=\int_0^1 x^3\,dx$$

Mas $\int x^3\,dx = x^4/4$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$V=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\bigg]_0^1=\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}$$

Com o valor médio de uma função definido desse modo, temos o útil

Teorema 31.3 (*Teorema do Valor Médio para Integrais*) Se uma função f é contínua em $[a,b]$, então assume seu valor médio em $[a,b]$; ou seja,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(c)$$

para algum c tal que $a \le c \le b$.

Para a demonstração, ver Problema 31.4. Observe que, em contraste, a média de um conjunto finito de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em geral não coincide com qualquer um dos a_i.

31.3 MUDANÇA DE VARIÁVEL EM UMA INTEGRAL DEFINIDA

Para calcular uma integral definida pelo teorema fundamental do cálculo, uma antiderivada $\int f(x)\,dx$ se faz necessária. Foi visto no Capítulo 29 que a substituição por uma nova variável u pode ser útil para encontrar $\int f(x)\,dx$. Quando a substituição é feita também na integral definida, os limites de integração a e b devem ser substituídos pelos valores correspondentes relativamente a u.

Exemplos Calculemos

$$\int_0^1 \sqrt{5x+4}\, dx$$

Faça $u = 5x + 4$; logo, $du = 5\, dx$. Considere os limites de integração: quando $x = 0$, $u = 4$; quando $x = 1$, $u = 9$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{5x+4}\, dx &= \int_4^9 \sqrt{u}\,\frac{1}{5}\, du = \frac{1}{5}\int_4^9 u^{1/2}\, du = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big]_4^9 \\
&= \frac{2}{15}(9^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{2}{15}[(\sqrt{9})^3 - (\sqrt{4})^3] \\
&= \frac{2}{15}(3^3 - 2^3) = \frac{2}{15}(27-8) = \frac{2}{15}(19) = \frac{38}{15}
\end{aligned}$$

Ver o Problema 31.6 para uma justificativa desse procedimento.

Problemas Resolvidos

31.1 Calcule a área A sob a parábola $y = x^2 + 2x$ e acima do eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$.

Como $x^2 + 2x \geq 0$ para $x \geq 0$, sabemos que o gráfico de $y = x^2 + 2x$ está sobre ou acima do eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$. Logo, a área é dada pela integral definida

$$\int_0^1 (x^2 + 2x)\, dx$$

Usando o teorema fundamental,

$$A = \int_0^1 (x^2+2x)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0^2\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

31.2 Calcule $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$. (Compare com o exemplo que segue o Teorema 30.4, onde $a = 0$.)

Pelo teorema fundamental,

$$\int_a^{a+2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big]_a^{a+2\pi} = 0$$

uma vez que a função co-seno tem período 2π.

31.3 Calcule o valor médio V de $\sqrt{x}$ em $[0,4]$. Para qual x em $[0,4]$ que o valor ocorre (conforme garantido pelo Teorema 31.3)?

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^4 x^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big]_0^4 \\
&= \frac{1}{6}(4^{3/2} - 0^{3/2}) = \frac{1}{6}[(\sqrt{4})^3 - 0] = \frac{1}{6}(2^3) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Esse valor médio, $\frac{4}{3}$, é o valor de $\sqrt{x}$ quando $x = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$. Observe que $0 < \frac{16}{9} < 4$.

31.4 Prove o teorema do valor médio para integrais (Teorema 31.3).

Escreva
$$V \equiv \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Sejam m e M os valores mínimo e máximo de f em $[a,b]$. (A existência de m e M é garantida pelo Teorema 14.2.) Logo, $m \leq f(x) \leq M$ para todo x em $[a,b]$, de modo que o Problema 30.3(c) nos dá

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad \text{ou} \qquad m \leq V \leq M$$

Mas então, pelo teorema do valor intermediário (Teorema 17.4), o valor V é assumido por f em algum ponto de $[a,b]$

31.5 Demonstre o Teorema 31.1.

Escreva
$$g(x) \equiv \int_a^x f(t)\,dt$$

Então,
$$\begin{aligned} g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{[pelo Teorema 30.4]} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, a última integral é igual a $hf(x^*)$ para algum x^* entre x e $x+h$. Portanto,

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x^*)$$

e

$$D_x\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = D_x(g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x^*)$$

Mas quando $h \to 0$, $x+h \to x$, e, assim, $x^* \to x$ (já que x^* está entre x e $x+h$). Como f é contínua,

$$\lim_{h\to 0} f(x^*) = f(x)$$

e a demonstração está completa.

31.6 (*Mudança de Variáveis*) Considere $\int_a^b f(x)\,dx$. Seja $x = g(u)$, de forma que quando x varia de a a b, u aumenta ou diminui de c para d. [Ver Fig. 31-1; com efeito, descartamos $g'(u) = 0$ em $[c,d]$.] Mostre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

[O lado direito é obtido substiuindo x por $g(u)$ e dx por $g'(u)\,du$ e mudando os limites de integração a e b por c e d.]

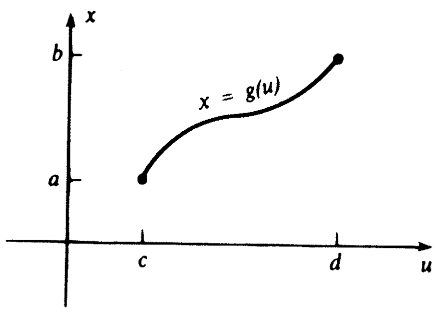


Fig. 31-1

Faça

$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad F'(x) = f(x)$$

A regra da cadeia nos dá

$$D_u(F(g(u))) = F'(g(u))g'(u) = f(g(u))g'(u)$$

Logo,

$$\int f(g(u))g'(u)\,du = F(g(u))$$

Pelo teorema fundamental,

$$\int_c^d f(g(u))g'(u)\,du = F(g(u))\Big]_c^d = F(g(d)) - F(g(c))$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

31.7 Calcule $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,x\,dx$.

Vamos determinar a antiderivada de $\sqrt{x^2+1}\,x$ fazendo a substituição $u = x^2 + 1$. Logo, $du = 2x\,dx$, e

$$\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{3}\,u^{3/2} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3$$

Assim, pelo teorema fundamental,

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}((\sqrt{1^2+1})^3 - (\sqrt{0^2+1})^3)$$
$$= \frac{1}{3}((\sqrt{2})^3 - (\sqrt{1})^3) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

ÁLGEBRA $\quad (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad$ e $\quad (\sqrt{1})^3 = 1^3 = 1$

Método Alternativo: Faça a mesma substituição acima, mas diretamente na integral definida, mudando adequadamente os limites de integração. Quando $x = 0$, $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$; quando $x = 1$, $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$. Assim, a primeira linha do cálculo acima nos leva a

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big]_1^2 = \frac{1}{3}\,u^{3/2}\Big]_1^2$$
$$= \frac{1}{3}((\sqrt{2})^3 - (\sqrt{1})^3) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

31.8 (*a*) Se f é uma função par (Seção 7.3), mostre que, para qualquer $a > 0$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(*b*) Se f é uma função ímpar (Seção 7.3), mostre que, para qualquer $a > 0$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Se $u = -x$, então $du = -dx$. Logo, para qualquer função integrável $f(x)$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = -\int_a^0 f(-u)\,du = \int_0^a f(-u)\,du$$

NOTAÇÃO Mudar o nome da variável em uma integral definida não afeta o valor da integral:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b g(\theta)\,d\theta = \cdots$$

Assim, mudando de u para x,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx \tag{1}$$

e assim

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx && \text{[pelo Teorema 30.4]}\\ &= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx && \text{[de acordo com (1)]}\\ &= \int_0^a (f(x) + f(-x))\,dx && \text{[pelo Teorema 30.3]}\end{aligned}$$

(a) Para uma função par, $f(x) + f(-x) = 2f(x)$, donde,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a 2f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Para uma função ímpar, $f(x) + f(-x) = 0$, donde,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a 0\,dx = 0\int_0^a dx = 0$$

NOTAÇÃO Normalmente se escreve

$$\int_a^b dx \quad \text{no lugar de} \quad \int_a^b 1\,dx$$

31.9 (a) Seja $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$ e considere $[a,b]$ dividido em n partes iguais, de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$, por meio de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ [ver Fig. 31-2(a)]. Prove que

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) \qquad \textit{regra trapezoidal}$$

(b) Use a regra trapezoidal, com $n = 10$, para estimar

$$\int_0^1 x^2\,dx \quad (= 0{,}333\ldots)$$

(a) A área da faixa sobre o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é aproximadamente a área do trapezóide $ABCD$ na Fig. 31-2(b), que é

$$\frac{\Delta x}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

GEOMETRIA A área de um trapezóide de altura h e bases b_1 e b_2 é

$$\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

onde consideramos $x_0 = a$, $x_n = b$. A área sob a curva é então aproximada pela soma das áreas dos trapézios,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\{(f(x_0)+f(x_1)) + (f(x_1)+f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1})+f(x_n))\}$$
$$= \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

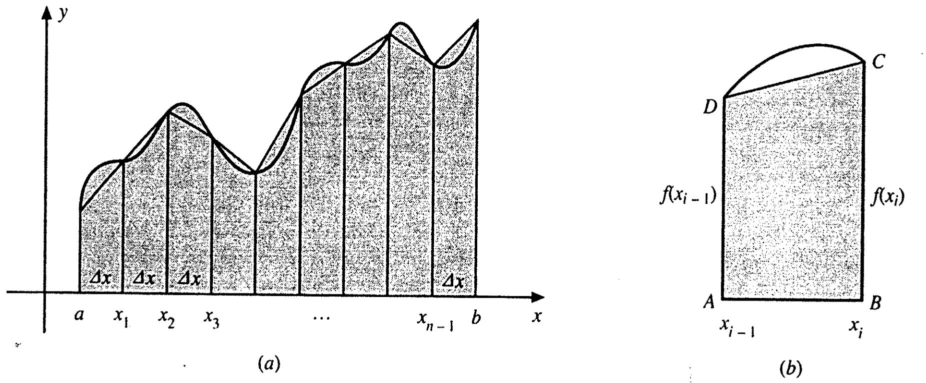


Fig. 31-2

(*b*) Pela regra trapezoidal, com $n = 10$, $a = 0$, $b = 1$, $\Delta x = 1/10$, $x_i = i/10$,

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{20}\left(0^2 + 2\sum_{i=1}^{9}\frac{i^2}{100} + 1^2\right) = \frac{1}{20}\left(\frac{2}{100}\sum_{i=1}^{9} i^2 + 1\right)$$
$$= \frac{1}{20}\left(\frac{2}{100}(285) + 1\right) \quad \text{[usando aritmética ou o Problema 30.12(}a\text{, ii)]}$$
$$= \frac{285}{1000} + \frac{1}{20} = 0{,}285 + 0{,}050 = 0{,}335$$

sendo que o valor exato é 0,333....[1]

Problemas Complementares

31.10 Use o teorema fundamental para calcular as seguintes integrais definidas:

(*a*) $\int_{-1}^{3}(3x^2 - 2x + 1)\,dx$ (*b*) $\int_0^{\pi/4}\cos x\,dx$ (*c*) $\int_0^{\pi/3}\sec^2 x\,dx$

(*d*) $\int_1^{16} x^{3/2}\,dx$ (*e*) $\int_4^5\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\right)dx$ (*f*) $\int_0^1\sqrt{x^2 - 6x + 9}\,dx$

31.11 Calcule as áreas sob os gráficos das seguintes funções, acima do eixo *x* e entre os dois valores indicados de *x*, *a* e *b*. [No item (*g*), a área *abaixo* do eixo *x* é negativa.]

(*a*) $f(x) = \text{sen}\,x \quad \left(a = \frac{\pi}{6},\ b = \frac{\pi}{3}\right)$ (*b*) $f(x) = x^2 + 4x \quad (a = 0,\ b = 3)$

(*c*) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (a = 1,\ b = 8)$ (*d*) $f(x) = \sqrt{4x+1} \quad (a = 0,\ b = 2)$

(*e*) $f(x) = x^2 - 3x \quad (a = 3,\ b = 5)$ (*f*) $f(x) = \text{sen}^2 x\cos x \quad \left(a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}\right)$

(*g*) $f(x) = x^2(x^3 - 2) \quad (a = 1,\ b = 2)$ (*h*) $f(x) = 4x - x^2 \quad (a = 0,\ b = 3)$

[1] Quando f tem uma derivada segunda contínua, pode ser demonstrado que o erro ao se aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ pela regra trapezoidal é no máximo $((b-a)/12n^2)M$, onde M é o máximo de $|f''(x)|$ em $[a,b]$ e n é o número de sub-intervalos.

31.12 Calcule as seguintes integrais definidas:

(*a*) $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} x\, dx$ (*b*) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx$ (*c*) $\int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2 - 2x + 3}\,(3x - 1)\, dx$

(*d*) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x + 1} \cos x\, dx$ (*e*) $\int_{-1}^{2} \sqrt{x + 2}\, x^2\, dx$ (*f*) $\int_2^{5} \sqrt{x^3 - 4}\, x^5\, dx$

(*g*) $\int_3^{15} \sqrt[3]{x^2 - 9}\, x^3\, dx$ (*h*) $\int_0^{1} \frac{x}{(2x^2 + 1)^3}\, dx$ (*i*) $\int_0^{8} \frac{x}{(x + 1)^{3/2}}\, dx$

(*j*) $\int_{-1}^{2} |x - 1|\, dx$ (*k*) $\int_1^{2} \frac{x^7 - 2x + 1}{4x^3}\, dx$ (*l*) $\int_{-2}^{0} (x + 2)\sqrt{x + 3}\, dx$

(*m*) $\int_2^{5} \sqrt{x^3 - 4}\, x^5\, dx$ (*n*) $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x \operatorname{tg}^3 2x\, dx$

[*Sugestão:* Aplique o Teorema 30.4 ao item (*j*).]

31.13 Calcule o valor médio de cada uma das funções no intervalo dado:

(*a*) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $[0,1]$ (*b*) $f(x) = \sec^2 x$ em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(*c*) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ em $[-2,3]$ (*d*) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ em $[0,\pi]$

31.14 Verifique o teorema do valor médio para integrais nos seguintes casos:

(*a*) $f(x) = x + 2$ em $[1,2]$

(*b*) $f(x) = x^3$ em $[0,1]$

(*c*) $f(x) = x^2 + 5$ em $[0,3]$

31.15 Calcule usando a técnica de mudança de variável:

(*a*) $\int_{1/2}^{3} \sqrt{2x + 3}\, x^2\, dx$ (*b*) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos x\, dx$

31.16 Usando apenas raciocínio geométrico, calcule o valor médio de $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ em $[0,2]$. [*Sugestão:* Se $y = f(x)$, então $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Desenhe o gráfico.]

31.17 Se, em um período de tempo T, um objeto se move ao longo do eixo x de x_1 a x_2, calcule sua velocidade média. [*Sugestão:* $\int v\, dt = x$.]

31.18 Calcule:

(*a*) $D_x\left(\int_2^{x} \sqrt{5 + 7t^2}\, dt\right)$ (*b*) $D_x\left(\int_x^{1} \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)$ (*c*) $D_x\left(\int_{-x}^{x} \sqrt[3]{t^4 + 1}\, dt\right)$

[*Sugestão:* No item (*c*), use o Problema 31.8(*a*).]

31.19 Calcule $\int_{-3}^{3} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.

31.20 (*a*) Calcule $D_x\left(\int_1^{3x^2} \sqrt{t^5 + 1}\, dt\right)$. [*Sugestão:* Com $u = 3x^2$, a regra da cadeia nos dá $D_x\left(\int_1^{u} \sqrt{t^5 + 1}\, dt\right) = D_u\left(\int_1^{u} \sqrt{t^5 + 1}\, dt\right) \cdot \frac{du}{dx}$, e o Teorema 31.1 se aplica ao lado direito.]

(*b*) Encontre uma fórmula para $D_x\left(\int_a^{h(x)} f(t)\, dt\right)$.

(*c*) Determine $D_x\left(\int_0^{3x} \sqrt{t}\, dt\right)$ e $D_x\left(\int_{5x}^{1} \left(\frac{t}{t^3} + 1\right) dt\right)$.

31.21 Isole b: $\int_1^b x^{n-1}\,dx = \frac{2}{n}$.

31.22 Se $\int_3^5 f(x-k)\,dx = 1$, calcule

$$\int_{3-k}^{5-k} f(x)\,dx$$

[*Sugestão:* Faça $x = u - k$.]

31.23 Se $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{para } x < 0 \\ 3x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$, calcule $\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\,dx$.

31.24 Sabendo-se que $2x^2 - 8 = \int_a^\pi f(t)\,dt$, determine: (*a*) uma fórmula para $f(x)$; (*b*) o valor de a.

31.25 Defina $H(x) \equiv \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

(*a*) Calcule $H(1)$

(*b*) Calcule $H'(1)$

(*c*) Mostre que $H(4) - H(2) < \frac{2}{5}$

31.26 Se o valor médio de $f(x) = x^3 + bx - 2$ em $[0,2]$ é 4, calcule b.

31.27 Calcule $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_2^{2+h} \sqrt[3]{x^2+2}\,dx\right)$.

31.28 Se g é contínua, quais das seguintes integrais são iguais?

(*a*) $\int_a^b g(x)\,dx$ (*b*) $\int_{a+1}^{b+1} g(x-1)\,dx$ (*c*) $\int_0^{b-a} g(x+a)\,dx$

31.29 A região acima do eixo x e sob a curva $y = \operatorname{sen} x$, entre $x = 0$ e $x = \pi$, é dividida em duas partes pela reta $x = c$. A área da parte esquerda é $\frac{1}{3}$ da área da parte direita. Calcule c.

31.30 Encontre o(s) valor(es) de k para o(s) qual(is)

$$\int_0^2 x^k\,dx = \int_0^2 (2-x)^k\,dx$$

31.31 A velocidade v de um objeto que se move sobre o eixo x é $\cos 3t$. Está na origem em $t = 0$. (*a*) Encontre uma fórmula para a posição x em qualquer instante t. (*b*) Calcule a média da posição no intervalo $0 \leq t \leq \pi/3$. (*c*) Para quais valores de t em $[0,\pi/3]$ que o objeto se move para a direita? (*d*) Quais são as coordenadas x máxima e mínima do objeto?

31.32 Um objeto se move em uma linha reta com velocidade $v = 3t - 1$, onde v é medida em metros por segundo. Quanto o objeto se desloca no período de $0 \leq t \leq 2$ segundos? [*Sugestão:* Aplique o teorema fundamental do cálculo.]

31.33 Calcule:

(*a*) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$

(*b*) $\lim_{n\to+\infty} \left\{\sec^2\left(\frac{\pi}{4n}\right) + \sec^2\left(2\frac{\pi}{4n}\right) + \cdots + \sec^2\left((n-1)\frac{\pi}{4n}\right) + 2\right\}\frac{\pi}{4n}$

31.34 (*Regra do Ponto Médio*) Em uma soma de Riemann (*30.1*), $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\ \Delta_i x$, se escolhemos x_i^* como o ponto médio do i-ésimo sub-intervalo, então a soma resultante é dita ser conseguida pela *regra do ponto médio*. Use essa regra para estimar $\int_0^1 x^2\, dx$, usando uma divisão em cinco sub-intervalos iguais e compare com o resultado exato obtido pelo teorema fundamental.

31.35 (*Regra de Simpson*) Se dividimos $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais por meio dos pontos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ e n é par, então a aproximação para $\int_a^b f(x)\, dx$ dada por

$$\frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

é dita ser conseguida pela *regra de Simpson*. Com exceção do primeiro e do último termos, os coeficientes consistem de 4s e 2s alternados. (A idéia por trás disso é usar parábolas como arcos que se aproximam da curva no lugar de segmentos de reta, como na regra trapezoidal.)[2] Aplique a regra de Simpson para aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$, com $n = 4$ e compare o resultado com a resposta exata obtido pelo teorema fundamental.

31.36 Considere a integral $\int_0^1 x^3\, dx$.

(*a*) Use a regra trapezoidal [Problema 31.9(*a*)], com $n = 10$, para aproximar a integral e compare o resultado com a resposta exata obtida pelo teorema fundamental. [*Sugestão:* O leitor pode assumir a fórmula $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.]

(*b*) $\boxed{\text{CG}}$ Estime a integral pela regra do ponto médio com $n = 10$.

(*c*) $\boxed{\text{CG}}$ Estime a integral pela regra de Simpson com $n = 10$.

[2] Em geral a regra de Simpson é mais precisa que a regra do ponto médio ou a regra trapezoidal. Se f tem uma derivada quarta contínua em $[a,b]$, então o erro ao aproximar $\int_a^b f(x)\, dx$ pela regra de Simpson é, no máximo, $((b-a)^5/180n^4)M_4$, onde M_4 é o máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em $[a,b]$ e n é o número de sub-intervalos.)

Capítulo 32

Aplicações de Integração I: Área e Comprimento de Arco

32.1 ÁREA ENTRE UMA CURVA E O EIXO *y*

Já aprendemos como encontrar a área de uma região como a mostrada na Fig. 32-1. Agora vejamos o que acontece quando x e y são permutados.

Exemplos

(*a*) O gráfico de $x = y^2 + 1$ é uma parábola com seu "nariz" em (1,0) e tendo o eixo positivo x como seu eixo de simetria (ver Fig. 32-2). Considere a região $\mathscr{R}$ consistindo de todos os pontos à esquerda desse gráfico, à direita do eixo y e entre $y = -1$ e $y = 2$. Se aplicamos o raciocínio usado para calcular a área de uma região como aquela mostrada na Fig. 32-1, mas com x e y permutados, devemos integrar "ao longo do eixo y". Logo, a área de $\mathscr{R}$ é dada pela integral definida

$$\int_{-1}^{2} (y^2 + 1)\, dy$$

O teorema fundamental nos dá

$$\int_{-1}^{2} (y^2 + 1)\, dy = \left(\frac{y^3}{3} + y\right)\Big]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right)$$
$$= \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{9}{3} + 3 = 3 + 3 = 6$$

(*b*) Encontre a área da região acima da reta $y = x - 3$ no primeiro quadrante e abaixo da reta $y = 4$ (a região sombreada da Fig. 32-3). Considerando x como uma função de y, ou seja, $x = y + 3$, podemos expressar a área como

$$\int_{0}^{4} (y + 3)\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + 3y\right)\Big]_{0}^{4}$$
$$= \left(\frac{4^2}{2} + 3(4)\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 3(0)\right) = \frac{16}{2} + 12 = 20$$

Verifique esse resultado calculando a área do trapezóide *OBCD* pela fórmula geométrica dada no Problema 31.9.

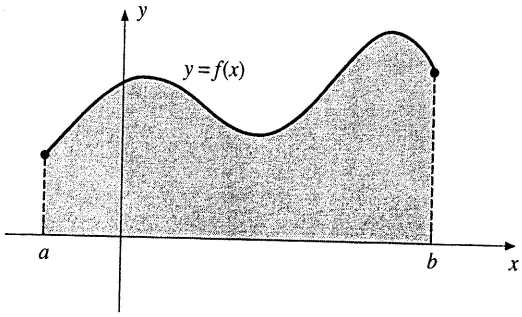


Fig. 32-1

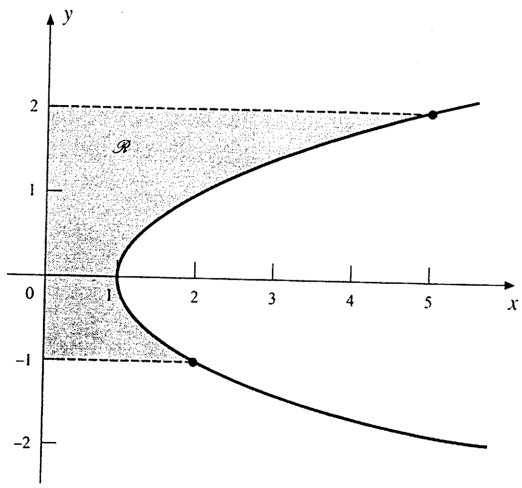


Fig. 32-2

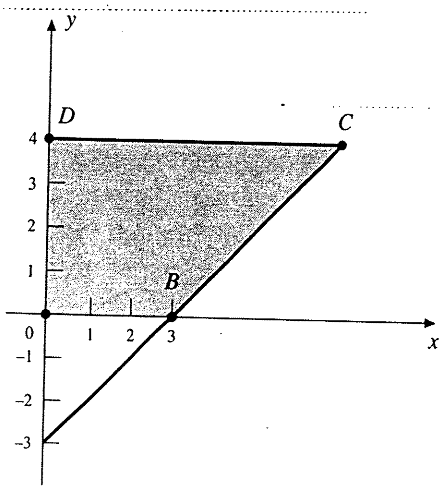


Fig. 32-3

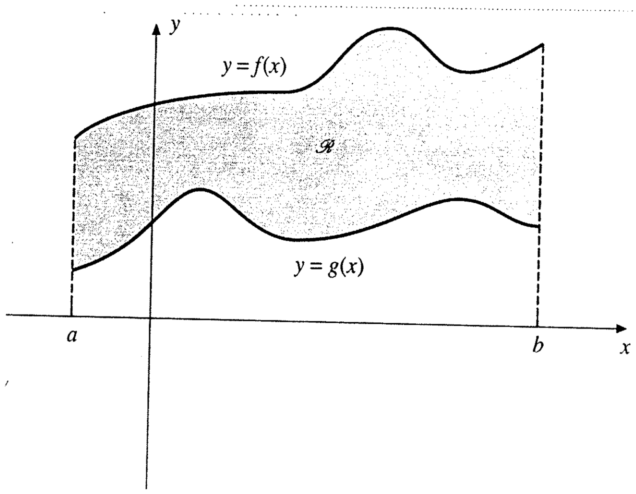


Fig. 32-4

32.2 ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

Considere que $0 \le g(x) \le f(x)$ para x em $[a,b]$. Determinemos a área A da região $\mathscr{R}$ que consiste de todos os pontos entre os gráficos de $y = g(x)$ e $y = f(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$. Como pode ser visto na Fig. 32-4, A é a área sob a curva superior $y = f(x)$ menos a área sob a curva inferior $y = g(x)$; ou seja,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \qquad (32.1)$$

Exemplo A Fig. 32-5 mostra a região $\mathscr{R}$ sob a reta $y = \frac{1}{2}x + 2$, acima da parábola $y = x^2$, e entre o eixo y e $x = 1$. Sua área é

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^2}{4} + 2(1) - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{4} + 2(0) - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{9}{4} - \frac{1}{3} = \frac{27 - 4}{12} = \frac{23}{12}$$

A fórmula (*32.1*) ainda é válida quando a condição sobre as duas funções é enfraquecida para

$$g(x) \leq f(x)$$

ou seja, quando as duas curvas ocorrem parcial ou totalmente abaixo do eixo x, como na Fig. 32-6. Ver Problema 32.3 para uma demonstração dessa afirmação.

Outra aplicação de (*32.1*) é determinar a área de uma região delimitada por duas curvas.

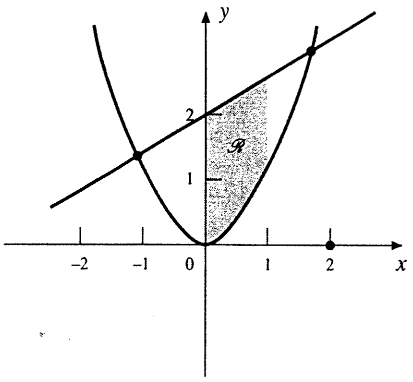


Fig. 32-5

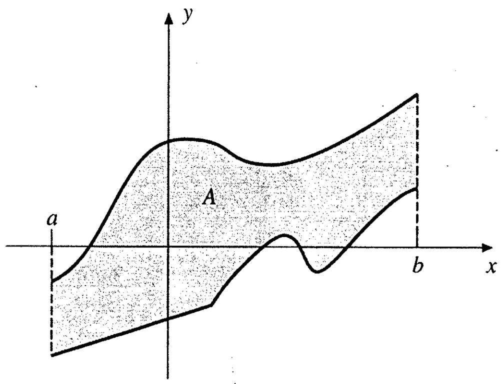


Fig. 32-6

Exemplo Calcule a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$ (ver Fig. 32-7).

Os limites de integração a e b em (*32.1*) devem ser as coordenadas x dos pontos de interseção P e Q, respectivamente. Esses são determinados resolvendo simultaneamente as equações das curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$. Logo,

$$x^2 = x + 2 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad (x - 2)(x + 1) = 0$$

donde, $x = a = -1$ e $x = b = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2]\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 2(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} + 6 - \frac{9}{3} \\ &= \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

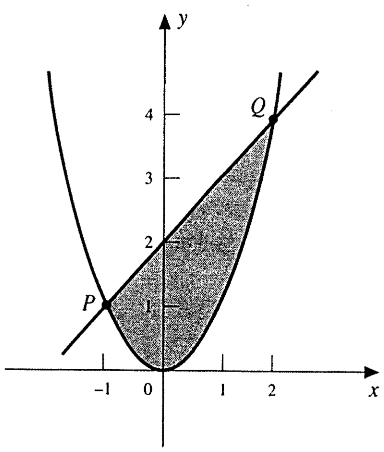


Fig. 32-7

32.3 COMPRIMENTO DE ARCO

Considere uma função f diferenciável (não apenas contínua) em um intervalo fechado $[a,b]$. O gráfico de f é uma curva que conecta $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$. Devemos encontrar uma fórmula para o comprimento L dessa curva.

Divida $[a,b]$ em n partes iguais, cada uma com comprimento Δx. Para cada ponto x_i nessa sub-divisão corresponde o ponto $P_i(x_i, f(x_i))$ na curva (ver Fig. 32-8). Para n grande, a soma $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$ dos comprimentos dos segmentos de reta $P_{i-1}P_i$ é uma aproximação do comprimento da curva. Mas, pela fórmula de distância (*2.1*),

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

No entanto, $x_i - x_{i-1} = \Delta x$; além disso, pelo teorema do valor médio (Teorema 17.2),

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(x_i^*) = (\Delta x)f'(x_i^*)$$

para algum x_i^* em (x_{i-1}, x_i). Logo,

$$\begin{aligned}\overline{P_{i-1}P_i} &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2(f'(x_i^*))^2} = \sqrt{\{1 + (f'(x_i^*))^2\}(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,\Delta x\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,\Delta x$$

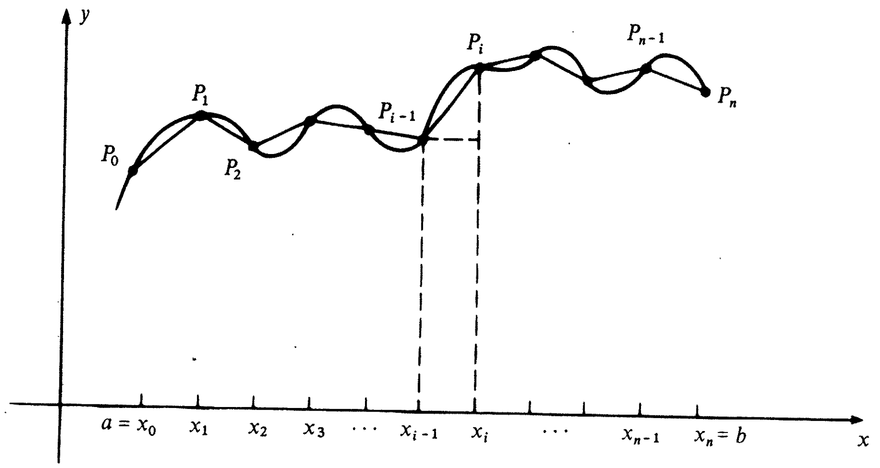


Fig. 32-8

A soma à direita se aproxima da integral definida

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

Logo, fazendo $n \to \infty$, temos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \quad \textit{fórmula de comprimento de arco} \qquad (32.2)$$

Exemplo Determine o comprimento do arco do gráfico de $y = x^{3/2}$ de $(1,1)$ a $(4,8)$.

Temos

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} \quad \text{e} \quad (y')^2 = \frac{9}{4}x$$

Logo, pela fórmula de comprimento de arco,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Seja $\qquad u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad du = \frac{9}{4}dx \qquad dx = \frac{4}{9}du$

Quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Assim,

$$L = \int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,\frac{4}{9}\,du = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} u^{1/2}\,du = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Bigg]_{13/4}^{10}$$
$$= \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right) = \frac{8}{27}\left((\sqrt{10})^3 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^3\right)$$
$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \frac{13\sqrt{13}}{8}\right) = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$$

sendo que, no penúltimo passo, usamos a identidade $(\sqrt{c})^3 = (\sqrt{c})^2(\sqrt{c}) = c\sqrt{c}$.

Problemas Resolvidos

32.1 Calcule a área A da região à esquerda da parábola $x = -y^2 + 4$ e à direita do eixo y.

A região é mostrada na Fig. 32-9. Observe que a parábola corta o eixo y em $y = \pm 2$. (Faça $x = 0$ na equação da curva.) Logo,

$$A = \int_{-2}^{2}(-y^2 + 4)\,dy = 2\int_0^2(-y^2+4)\,dy \qquad \text{[pelo Problema 31.8}(a)\text{]}$$
$$= 2\left(-\frac{y^3}{3} + 4y\right)\Bigg]_0^2 = 2\left\{\left(-\frac{2^3}{3} + 4(2)\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 4(0)\right)\right\}$$
$$= 2\left(-\frac{8}{3} + 8\right) = 2\left(-\frac{8}{3} + \frac{24}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

32.2 Calcule a área da região entre as curvas $y = x^3$ e $y = 2x$, entre $x = 0$ e $x = 1$ (ver Fig. 32-10).

Para $0 \le x \le 1$,

$$2x - x^3 = x(2 - x^2) = x(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x) \ge 0$$

uma vez que todos os três fatores são não-negativos. Logo, $y = x^3$ é a curva mais baixa e $y = 2x$ é a curva mais alta. De acordo com (*32.1*),

$$A = \int_0^1 (2x - x^3)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^1 = \left(1^2 - \frac{1^4}{4}\right) - \left(0^2 - \frac{0^4}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

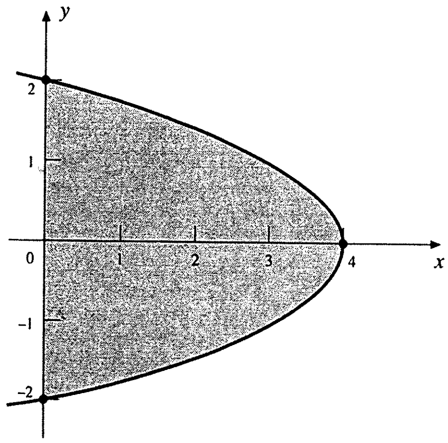


Fig. 32-9

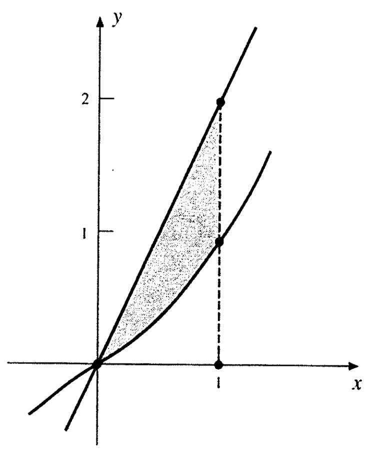


Fig. 32-10

32.3 Prove que a fórmula para a área $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ vale sempre que $g(x) \leq f(x)$ em $[a,b]$.

Seja $m < 0$ o mínimo absoluto de g em $[a,b]$ [ver Fig. 32-11(a)]. (Se $m \geq 0$, ambas as curvas estão sobre ou acima do eixo x e esse caso já é conhecido.) "Levante" ambas as curvas $|m|$ unidades; os novos gráficos, mostrados na Fig. 32-11(b), estão sobre ou acima do eixo x e delimitam a mesma área dos gráficos originais. Assim, de acordo com (*32.1*),

$$A = \int_a^b \{(f(x) + |m|) - (g(x) + |m|)\}\,dx$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x) + 0)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

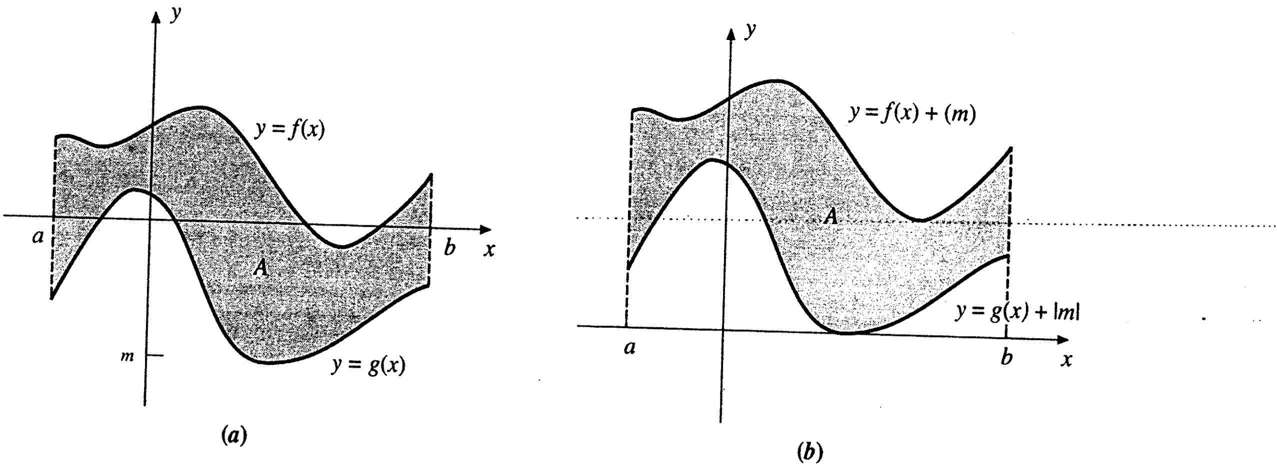


Fig. 32-11

32.4 Determine a área A entre as parábolas $y = x^2 - 1$ e $y = -(x^2 - 1)$.

Da simetria da Fig. 32-12 está claro que A será igual a quatro vezes a área da região sombreada,

$$A = 4\int_0^1 -(x^2 - 1)\,dx = 4\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1$$
$$= 4\left(\left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

32.5 Encontre a área entre a parábola $x = y^2$ e a reta $y = 3x - 2$ (ver Fig. 32-13).

Encontre os pontos de interseção. $x = y^2$ e $y = 3x - 2$ implicam em

$$y = 3y^2 - 2$$
$$3y^2 - y - 2 = 0$$
$$(3y + 2)(y - 1) = 0$$
$$3y + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad y - 1 = 0$$
$$y = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad y = 1$$

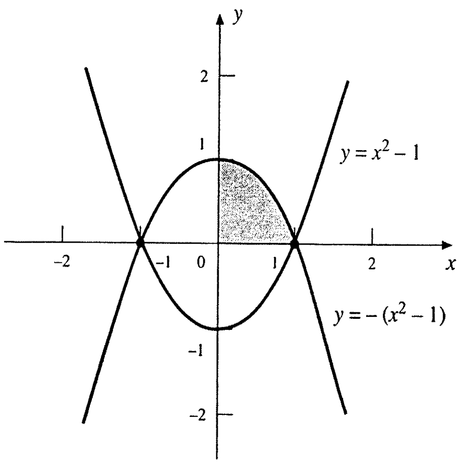


Fig. 32-12

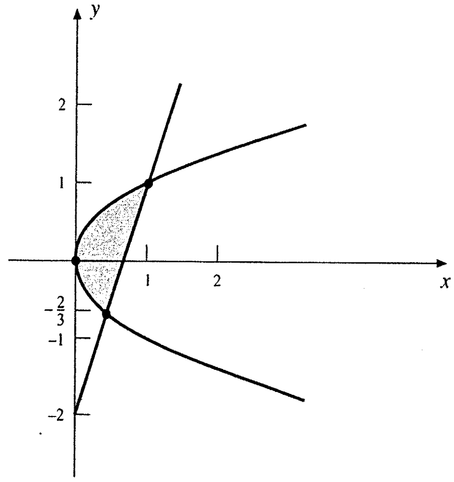


Fig. 32-13

Note que não podemos achar a área integrando "ao longo do eixo x" (a menos que consideremos a região como duas partes). Integração ao longo do eixo y se faz necessária (a qual requer apenas as ordenadas dos pontos de interseção),

$$A = \int_{-2/3}^{1} \left(\frac{y+2}{3} - y^2\right) dy = \int_{-2/3}^{1} \left(\frac{y}{3} + \frac{2}{3} - y^2\right) dy$$

Aqui a curva "superior" é a reta $y = 3x - 2$. Tínhamos que resolver essa equação isolando x em termos de y, obtendo $x = (y + 2)/3$. Calculando pelo teorema fundamental,

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{y^2}{6} + \frac{2}{3}y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_{-2/3}^{1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{6}\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right) \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{81}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{6}{81} - \frac{36}{81} + \frac{8}{81}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{-22}{81}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{22}{81} = \frac{81 + 44}{162} = \frac{125}{162}
\end{aligned}$$

32.6 Calcule o comprimento da curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^{-1} \qquad y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(y')^2 &= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} \\
1 + (y')^2 &= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2 \\
\sqrt{1 + (y')^2} &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^{-2}
\end{aligned}$$

Assim, a fórmula de comprimento de arco nos dá

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2 + x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x^{-1}\right)\Bigg]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{17}{12}
\end{aligned}$$

Problemas Complementares

32.7 Esboce o gráfico e encontre a área: (*a*) da região à esquerda da parábola $x = 2y^2$, à direita do eixo y e entre $y = 1$ e $y = 3$; (*b*) da região acima da reta $y = 3x - 2$, no primeiro quadrante e abaixo da reta $y = 4$; (*c*) da região entre a curva $y = x^3$ e as retas $y = -x$ e $y = 1$.

32.8 Esboce as seguintes regiões e encontre suas áreas:

(*a*) A região entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

(*b*) A região entre a parábola $y = 4x^2$ e a reta $y = 6x - 2$.

(*c*) A região entre as curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ e $x = 4$.

(*d*) A região sob a curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ e no primeiro quadrante.

(*e*) A região entre as curvas $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/4$.

(*f*) A região entre a parábola $x = -y^2$ e a reta $y = x + 6$.

(*g*) A região entre a parábola $y = x^2 - x - 6$ e a reta $y = -4$.

(*h*) A região entre as curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

(*i*) A região no primeiro quadrante entre as curvas $4y + 3x = 7$ e $y = x^{-2}$.

(*j*) A região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 6x$.

(*k*) A região delimitada pela parábola $x = y^2 + 2$ e pela reta $y = x - 8$.

(*l*) A região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - x$ e $y = x - x^2$.

(*m*) A região no primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x^4$.

(*n*) A região entre a curva $y = x^3$ e as retas $y = -x$ e $y = 1$.

32.9 Calcule os comprimentos das seguintes curvas:

(*a*) $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{1}{4x^2}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

(*b*) $y = 3x - 2$ de $x = 0$ a $x = 1$.

(*c*) $y = = x^{2/3}$ de $x = 1$ a $x = 8$.

(*d*) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ de $x = 1$ a $x = 8$.

(*e*) $y = \dfrac{x^5}{15} + \dfrac{1}{4x^3}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

(*f*) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}(3 - x)$ de $x = 0$ a $x = 3$.

(*g*) $24xy = x^4 + 48$ de $x = 2$ a $x = 4$.

(*h*) $y = \dfrac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$.

32.10 Use a regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco da curva $y = f(x)$ no intervalo dado.

(*a*) $y = x^2$ em $[0,1]$

(*b*) $y = \text{sen}\, x$ em $[0,\pi]$

(*c*) $y = x^3$ em $[0,5]$

Capítulo 33

Aplicações de Integração II: Volume

Os volumes de certos tipos de sólidos podem ser calculados por meio de integrais definidas.

33.1 SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Métodos dos Discos e dos Anéis

Seja f uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Considere a região $\mathscr{R}$ sob o gráfico de $y = f(x)$, acima do eixo x e entre $x = a$ e $x = b$ (ver Fig. 33-1). Se $\mathscr{R}$ gira em torno do eixo x, o sólido resultante é chamado de *sólido de revolução*. As regiões $\mathscr{R}$ que geram alguns sólidos de revolução conhecidos são exibidas na Fig. 33.2.

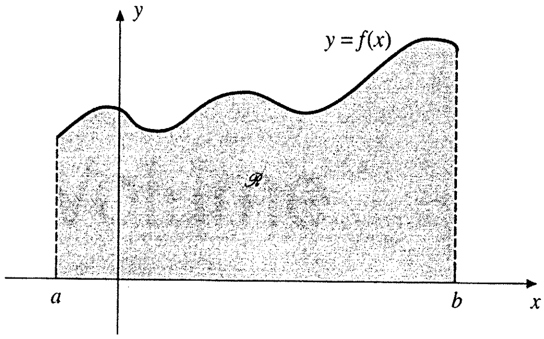
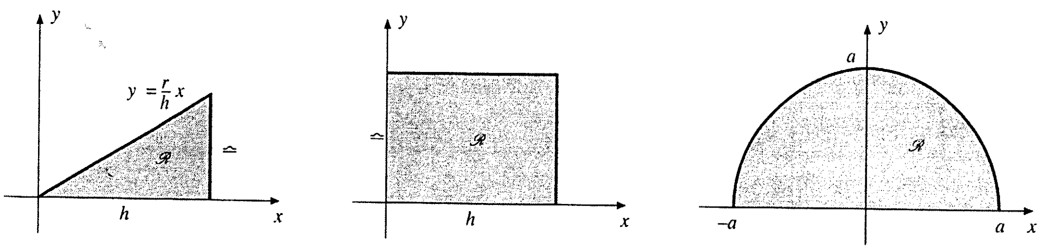


Fig. 33-1



(*a*) Cone (*b*) Cilindro (*c*) Esfera

Fig. 33-2

Teorema 33.1: O volume V do sólido de revolução obtido a partir do giro da região da Fig. 33-1 em torno do eixo x é dado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx \quad \textit{fórmula de disco}$$

Um argumento para a fórmula de disco é esboçado no Problema 33.4.

Se trocamos os papéis de x e y e giramos a área "sob" o gráfico de $x = g(y)$ em torno do eixo y, então o mesmo raciocínio nos leva à fórmula de disco

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2\, dy = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

Exemplos Aplicando a fórmula de disco na Fig. 33-2(a), obtemos

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\, dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - 0\right) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

que é a fórmula usual para o volume de um cone com altura h e raio da base r.

Agora sejam f e g duas funções tais que $0 \le g(x) \le f(x)$ para $a \le x \le b$ e giremos a região $\mathscr{R}$ entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ em torno do eixo x (ver Fig. 33-3). O sólido de revolução resultante tem um volume V que é a diferença entre o volume do sólido de revolução gerado pela região sob $y = f(x)$ e o volume do sólido de revolução gerado pela região sob $y = g(x)$. Logo, pelo Teorema 33.1,

$$V = \pi \int_a^b \{(f(x))^2 - (g(x))^2\}\, dx \quad \textit{fórmula da escova}$$[1]

Exemplos Considere a região $\mathscr{R}$ delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x$ (ver Fig. 33-4). As curvas obviamente se interceptam nos pontos (0,0) e (1,1). O sólido de revolução em forma de tigela obtido pela rotação de $\mathscr{R}$ em torno do eixo x tem volume

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - x^2)\, dx = \pi \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg]_0^1$$
$$= \pi\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0\right) = \frac{\pi}{6}$$

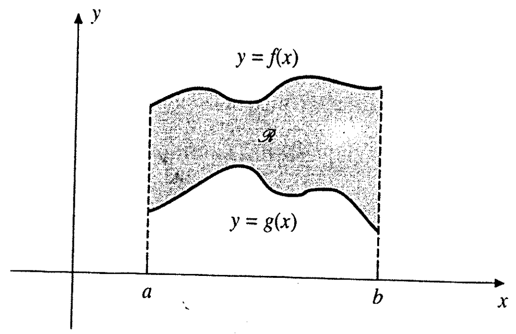


Fig. 33-3

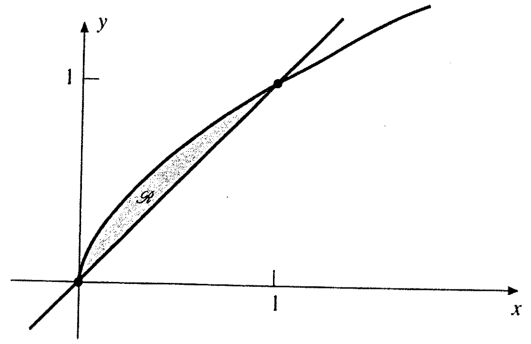


Fig. 33-4

[1] Esse termo é usado no sentido de que ao se girar um segmento vertical, tem-se algo com a forma de uma escova giratória.

Método das Conchas Cilíndricas

Seja f uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, onde $a \geq 0$. Como o usual, seja $\mathscr{R}$ a região sob a curva $y = f(x)$, acima do eixo x e entre $x = a$ e $x = b$ (ver Fig. 33-5). Agora, porém, gire $\mathscr{R}$ em torno do eixo y. O sólido de revolução resultante tem volume

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xy\,dx \quad \text{fórmula da concha cilíndrica}$$

Para a idéia básica por trás dessa fórmula, bem como seu nome, ver o Problema 33.5.

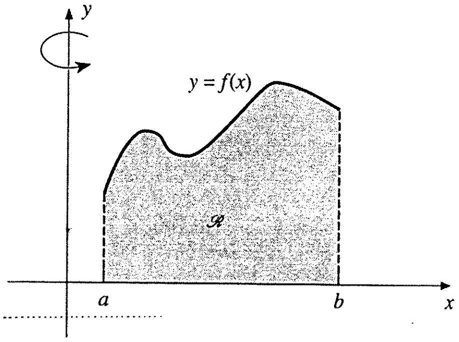


Fig. 33-5

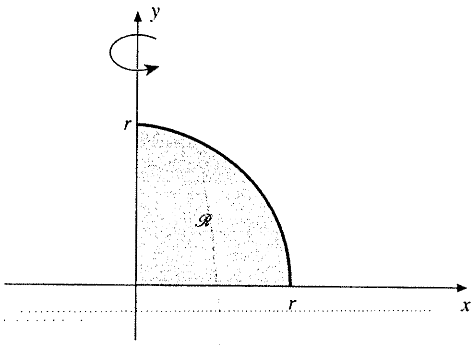


Fig. 33-6

Exemplo Considere a função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ para $0 \leq x \leq r$. O gráfico de f é a parte do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ que está no primeiro quadrante. A revolução da região $\mathscr{R}$ sob o gráfico de f (ver Fig. 33-6) em torno do eixo y, produz um hemisfério sólido de raio r. Pela fórmula da concha cilíndrica

$$V = 2\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Para calcular V substitua $u = r^2 - x^2$. Logo $du = -2x\,dx$ e os limites de integração $x = 0$ e $x = r$ ficam $u = r^2$ e $u = 0$, respectivamente,

$$V = 2\pi \int_{r^2}^0 u^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\,du\right) = -\pi \int_{r^2}^0 u^{1/2}\,du = \pi \int_0^{r^2} u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{2}{3}\pi u^{3/2}\Big]_0^{r^2} = \frac{2}{3}\pi (r^2)^{3/2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

(Esse resultado é mais facilmente obtido pela fórmula do disco $V = \pi \int_0^r x^2\,dy$. Tente.)

33.2 VOLUME BASEADO EM SEÇÕES

Considere que um sólido (não necessariamente de revolução) se encontra inteiramente entre o plano perpendicular ao eixo x em $x = a$ e o plano perpendicular ao eixo x em $x = b$. Para $a \leq x \leq b$, considere que o plano perpendicular ao eixo x naquele valor de x intercepta o sólido em uma região de área $A(x)$, como indicado na Fig. 33-7. Logo, o volume V do sólido é dado por

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \quad \textit{fórmula de seções}$$

Para uma demonstração, ver Problema 33.6.

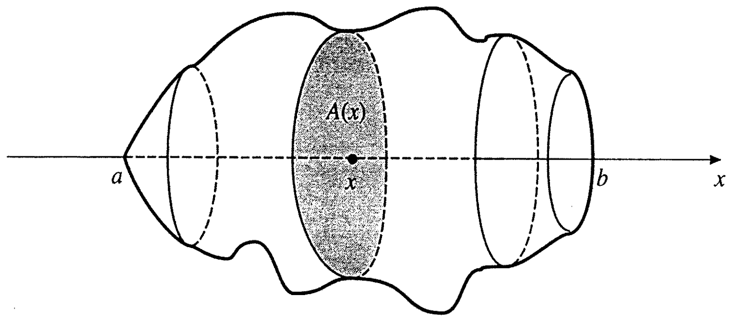


Fig. 33-7

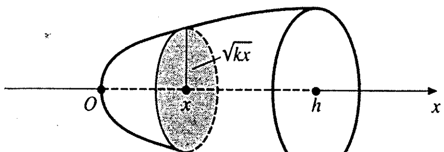


Fig. 33-8

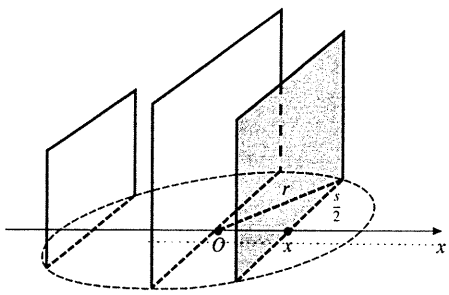


Fig. 33-9

Exemplos

(*a*) Considere que metade de um salame de comprimento h é tal que uma seção perpendicular ao eixo do salame a uma distância x do extremo O é um círculo de raio $\sqrt{kx}$ (ver Fig. 33-8). Logo,

$$A(x) = \pi(\sqrt{kx})^2 = \pi kx$$

e a fórmula de seções nos dá

$$V = \int_0^h \pi kx\ dx = \pi k \int_0^h x\ dx = \pi k \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi kh^2}{2}$$

Observe que para esse sólido de revolução a fórmula de disco daria a mesma expressão para V.

(*b*) Considere que um sólido tem uma base que é um círculo de raio r. Assuma que existe um diâmetro D tal que todas as seções planas do sólido perpendiculares ao diâmetro D são quadrados (ver Fig. 33-9). Calcule o volume.

Considere a origem como o centro do círculo e seja o eixo x o diâmetro especial D. Para um dado valor de x, com $-r \le x \le r$, o lado $s(x)$ da seção quadrada é obtido pelo uso do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo com lados x, $s/2$ e r (ver Fig. 33-9),

$$x^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + \frac{s^2}{4} = r^2$$

$$s^2 = 4(r^2 - x^2) = A(x)$$

Então, pela fórmula de seções,

$$V = \int_{-r}^{r} 4(r^2 - x^2)\ dx$$

$$= 2\int_0^r 4(r^2 - x^2)\ dx \qquad \text{[uma vez que } 4(r^2 - x^2) \text{ é uma função par]}$$

$$= 8\left.\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^r = 8\left\{\left(r^2(r) - \frac{r^3}{3}\right) - (0 - 0)\right\} = 8\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{16}{3}r^3$$

Problemas Resolvidos

33.1 Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região dada em torno do eixo indicado.

(*a*) A região sob a parábola $y = x^2$, acima do eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$; em torno do eixo x.

(*b*) A mesma região do item (*a*), mas em torno do eixo y. A região é mostrada na Fig. 33-10.

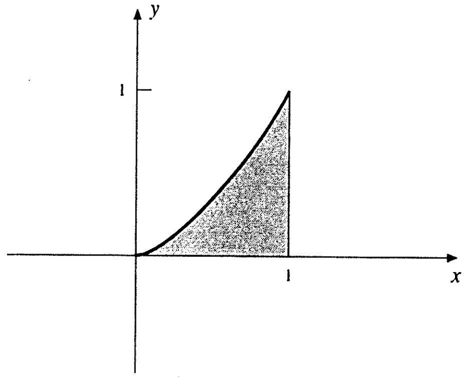


Fig. 33-10

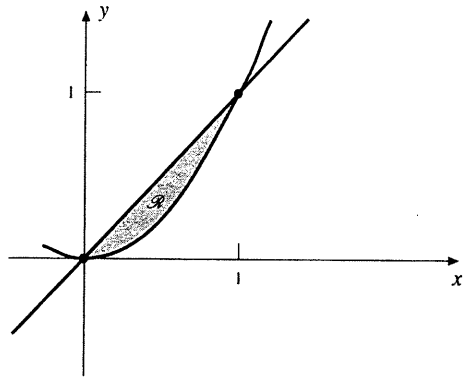


Fig. 33-11

(*a*) Use a fórmula de disco,

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx = \pi \int_0^1 x^4\, dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$$

(*b*) Use a fórmula de conchas cilíndricas,

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 x^3\, dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

33.2 Seja $\mathcal{R}$ a região entre $y = x^2$ e $y = x$ (ver Fig. 33-11). Calcule o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno do: (*a*) eixo x; (*b*) eixo y.

As curvas se interceptam em (0,0) e (1,1).

(*a*) De acordo com a fórmula da escova,

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2)\, dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

(*b*) (*Método 1*) Use a fórmula da escova ao longo do eixo y,

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{y})^2 - y^2)\, dy = \pi \int_0^1 (y - y^2)\, dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

(*Método 2*) Podemos integrar ao longo do eixo x e usar a diferença entre duas fórmulas de conchas cilíndricas,

$$V = 2\pi\left(\int_0^1 x(x)\, dx - \int_0^1 x(x^2)\, dx\right) = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx$$
$$= 2\pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^1 = 2\pi\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0)\right) = 2\pi\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$$

A fórmula usada no método 2 pode ser formulada como se segue:

$$V = 2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x))\, dx \quad \textit{diferença entre conchas cilíndricas}$$

onde V é o volume do sólido obtido pela revolução, em torno do eixo y, da região delimitada acima por $y = g(x)$, abaixo por $y = f(x)$ e lateralmente por $x = a$ e $x = b$, com $0 \le a < b$.

33.3 Calcule o volume do sólido cuja base é um círculo de raio r e tal que toda seção perpendicular a um diâmetro particular fixado D é um triângulo equilátero.

Considere que o centro da base circular é a origem e que o eixo x é o diâmetro D. A área da seção em x é $A(x) = hs/2$ (ver Fig. 33-12). Mas, no triângulo retângulo horizontal,

$$x^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad \frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

e no triângulo retângulo vertical,

$$h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2$$
$$h^2 + \frac{s^2}{4} = s^2$$
$$h^2 = 3\,\frac{s^2}{4}$$
$$h = \sqrt{3}\,\frac{s}{2} = \sqrt{3}\sqrt{r^2 - x^2}$$

Logo, $A(x) = \sqrt{3}(r^2 - x^2)$ – uma função par – e a fórmula de seções nos dá

$$V = \sqrt{3}\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^r$$
$$= 2\sqrt{3}\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}r^3$$

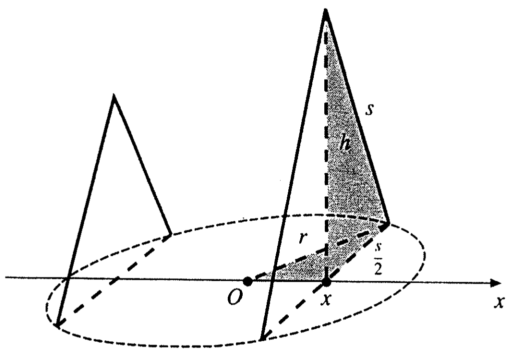


Fig. 33-12

33.4 Demonstre a fórmula de disco $V = \pi \int_2^b (f(x))^2\,dx$.

Assumimos como válida a expressão $\pi r2h$ para o volume de um cilindro de raio r e altura h. Divida o intervalo $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais, cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ (ver Fig. 33-13). Considere o volume V_i obtido pela revolução da região $\mathcal{R}_i$ acima do i-ésimo sub-intervalo em torno do eixo x. Se m_i e M_i denotam o mínimo absoluto e o máximo absoluto de f no i-ésimo sub-intervalo, fica claro que V_i deve estar entre o volume de um cilindro de raio m_i e altura Δx e o volume de um cilindro de raio M_i e altura Δx,

$$\pi m_i^2\,\Delta x \le V_i \le \pi M_i^2\,\Delta x \quad \text{ou} \quad m_i^2 \le \frac{V_i}{\pi\,\Delta x} \le M_i^2$$

O teorema do valor intermediário para a função contínua $(f(x))^2$ garante a existência de algum ponto x_i^* no i-ésimo sub-intervalo tal que

$$\frac{V_i}{\pi\,\Delta x} = (f(x_i^*))^2 \qquad \text{ou} \qquad V_i = \pi(f(x_i^*))^2\,\Delta x$$

Logo,
$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*))^2\,\Delta x$$

Como essa relação vale (para números adequados x_i^*) para qualquer n, deve valer no limite em que $n \to \infty$,

$$V = \pi \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*))^2\,\Delta x \right) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

que é a fórmula de disco. O nome surge a partir do uso de *discos* cilíndricos (de espessura Δx) para aproximar o volume V_i.

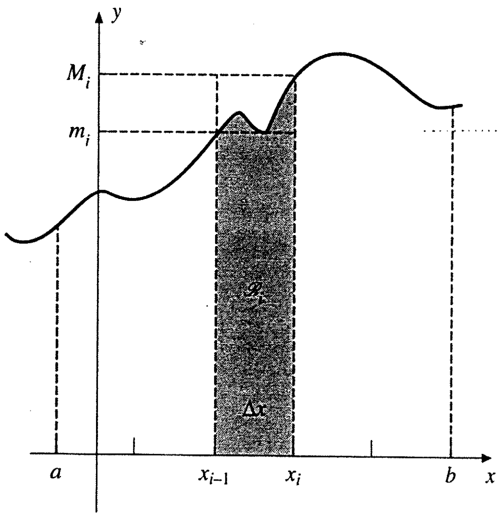


Fig. 33-13

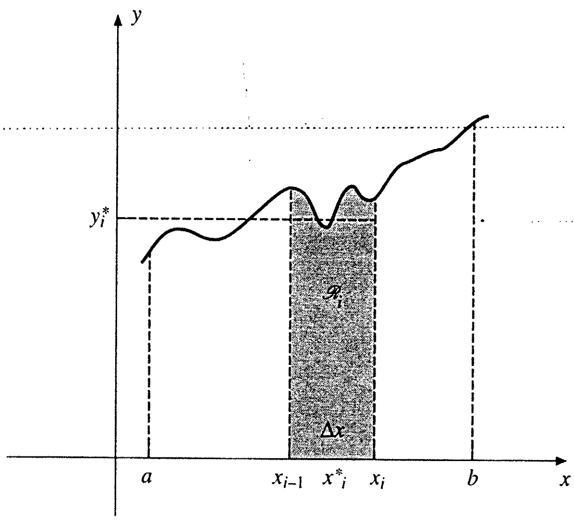


Fig. 33-14

33.5 Estabeleça a fórmula da concha cilíndrica $V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$.

Divida o intervalo $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais, cada um com comprimento Δx. Seja $\mathcal{R}_i$ a região acima do i-ésimo sub-intervalo (ver Fig. 33-14). Considere ainda x_i^* como o ponto médio do i-ésimo sub-intervalo, $x_i^* = (x_{i-1} + x_i)/2$.

Agora o sólido obtido pela revolução da região $\mathcal{R}_i$ em torno do eixo y é aproximadamente o sólido obtido pela revolução do retângulo com base Δx e altura $y_i^* = f(x_i^*)$. O último sólido é uma *concha cilíndrica*; ou seja, é a diferença entre os cilindros obtidos pela rotação de retângulos com a mesma altura e com bases $f(x_i^*)$, $[0, x_{i-1}]$ e $[0, x_i]$. Logo, tem volume

$$\begin{aligned}\pi x_i^2 f(x_i^*) - \pi x_{i-1}^2 f(x_i^*) &= \pi f(x_i^*)(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi f(x_i^*)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \pi f(x_i^*)(2x_i^*)(\Delta x) = 2\pi x_i^* f(x_i^*)\,\Delta x\end{aligned}$$

Assim, o total V é aproximado por

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^* f(x_i^*)\,\Delta x$$

que, por sua vez, se aproxima da integral definida $2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$.

33.6 Estabeleça a fórmula de seções $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

Divida o intervalo $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais $[x_{i-1}, x_i]$, cada um com comprimento Δx. Escolha um ponto x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$. Se n é grande, fazendo Δx pequeno, o pedaço do sólido entre x_{i-1} e x_i será muito parecido com um disco (não circular) de espessura Δx e área da base $A(x_i^*)$ (ver Fig. 33-15). Esse disco tem volume $A(x_i^*)\Delta x$. Logo,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x \to \int_a^b A(x)\,dx$$

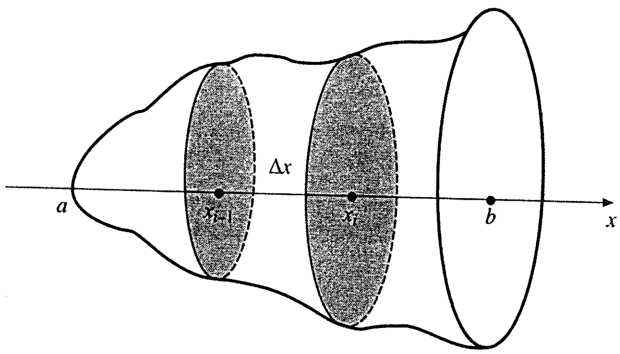


Fig. 33-15

33.7 (*Sólidos de Revolução em Torno de Retas Paralelas a um Eixo Coordenado*) Se uma região é rotacionada em torno de uma reta paralela a um eixo coordenado, transladamos a reta (bem como a região) de modo que irá girar em torno do eixo coordenado. As funções que definem a fronteira da região devem ser refeitas. O volume obtido pela rotação da nova região em torno da nova reta é idêntico ao volume procurado.

(*a*) Considere a região $\mathcal{R}$ delimitada acima pela parábola $y = x^2$, abaixo pelo eixo x e lateralmente por $x = 0$ e $x = 1$ [ver Fig. 33-16(*a*)]. Calcule o volume obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno da reta horizontal $y = -1$.

(*b*) Calcule o volume obtido pela revolução da região $\mathcal{R}$ do item (*a*) em torno da reta vertical $x = -2$.

(*a*) Desloque $\mathcal{R}$ duas unidades para a direita de maneira a formar uma nova região $\mathcal{R}^*$ [ver Fig. 33-16(*b*)]. A reta $x = -2$ se desloca até se tornar o eixo y. $\mathcal{R}^*$ é delimitada acima por $y = x^2 + 1$, abaixo pelo eixo x e lateralmente por $x = 2$ e $x = 3$.

$$V = \pi\int_0^1 ((x^2+1)^2 - 1^2)\,dx = \pi\int_0^1 (x^4 + 2x^2)\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{13\pi}{15}$$

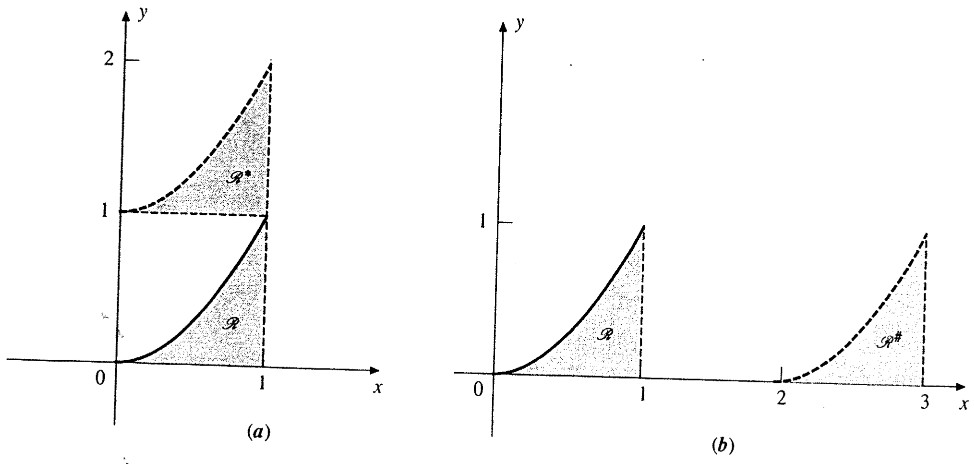


Fig. 33-16

O volume que queremos é conseguido pela rotação de $\mathcal{R}^*$ em torno do eixo y. A fórmula das conchas cilíndricas se aplica,

$$V = 2\pi\int_2^3 x(x-2)^2\,dx = 2\pi\int_2^3 (x^3-4x^2+4x)\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right)\Bigg]_2^3$$
$$= 2\pi\left(\left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{4}{3}(3)^3 + 2(3)^2\right) - \left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{4}{3}(2)^3 + 2(2)^2\right)\right) = 2\pi\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11\pi}{6}$$

Problemas Complementares

Estratégia: Ao se calcular o volume de um sólido de revolução geralmente aplicamos a fórmula de disco (ou a fórmula da escova) ou a fórmula das conchas cilíndricas (ou a diferença entre fórmulas de conchas cilíndricas). Para decidir qual fórmula usar:

(1) Decida qual o eixo ao longo do qual você irá integrar. Isso depende da forma e posição da região $\mathcal{R}$ que é rotacionada.

(2) (i) Use a fórmula de disco (ou a fórmula da escova) se a região é rotacionada *perpendicularmente* em relação ao eixo de integração.

(ii) Use a fórmula das conchas cilíndricas (ou a diferença de fórmulas de conchas cilíndricas) se a região $\mathcal{R}$ é rotacionada *paralelamente* em relação ao eixo de integração.

33.8 Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região dada em torno do eixo dado.

(*a*) A região acima da curva $y = x^3$, sob a reta $y = 1$ e entre $x = 0$ e $x = 1$; em torno do eixo x.

(*b*) A região do item (*a*); em torno do eixo y.

(*c*) A região abaixo da reta $y = 2x$, acima do eixo x e entre $x = 0$ e $x = 1$; em torno do eixo y.

(*d*) A região entre as parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$; em torno do eixo x ou do eixo y.

(*e*) A região (ver Fig. 33-17) dentro do círculo $x^2 + y^2 = r^2$, com $0 \le x \le a$; em torno do eixo y. (Isso corresponde ao volume de um corte em uma esfera de raio r feito por um cano de raio a cujo eixo é um diâmetro da esfera.)

(*f*) A região (ver Fig. 33-18) dentro do círculo $x^2 + y^2 = r^2$, com $x \ge 0$ e $y \ge 0$ e acima da reta $y = a$, onde $0 \le a < r$; em torno do eixo y. (Isso dá o volume de uma calota polar de uma esfera.)

(*g*) A região delimitada por $y = 1 + x^2$ e $y = 5$; em torno do eixo x.

(*h*) A região (ver Fig. 33-19) dentro do círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, com $0 < a < b$; em torno do eixo x. [*Sugestão:* Quando você obtiver uma integral da forma $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, observe que essa é a área de um semi-círculo de raio a.] Esse problema dá o volume de um toróide.

(*i*) A região delimitada por $x^2 = 4y$ e $y = x/2$; em torno do eixo y.

(*j*) A região delimitada por $y = 4/x$ e $y = (x-3)^2$; em torno do eixo x. (Note que as curvas se interceptam quando $x = 1$ e $x = 4$. O que há de especial na interseção em $x = 1$?)

(*k*) A região do item (*j*); em torno do eixo y.

(*l*) A região delimitada por $xy = 1$, $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$; em torno do eixo x.

(*m*) A região do item (*l*); em torno do eixo y.

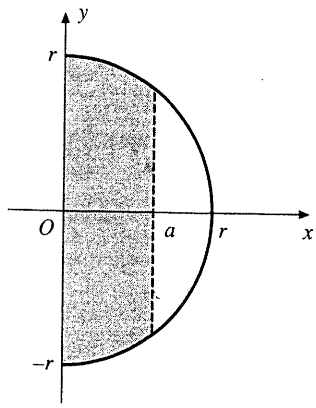


Fig. 33-17

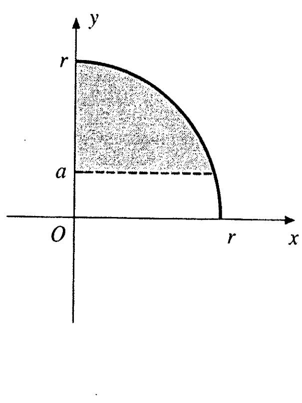


Fig. 33-18

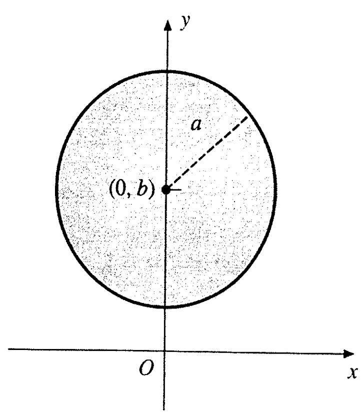


Fig. 33-19

33.9 Use a fórmula de seções para encontrar o volume dos seguintes sólidos.

(*a*) O sólido tem uma base que é um círculo de raio r. Cada seção perpendicular a um diâmetro fixo do círculo é um triângulo isósceles com altura igual a metade de sua base.

(*b*) O sólido é uma fatia cortada de uma árvore perfeitamente cilíndrica, de raio r, por dois planos, um deles perpendicular ao eixo da árvore e o outro interceptando o primeiro plano em um ângulo de 30° ao longo de um diâmetro (ver Fig. 33-20).

(*c*) Uma pirâmide de base quadrada com uma altura de h unidades e uma base com aresta de r unidades. [*Sugestão:* Posicione o eixo x como na Fig. 33-21. Por semelhança de triângulos,

$$\frac{d}{e} = \frac{h-x}{h}$$

e

$$\frac{A(x)}{r^2} = \left(\frac{d}{e}\right)^2$$

o que determina $A(x)$.]

(*d*) O tetraedro (ver Fig. 33-22) formado por três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares de comprimentos a, b, c. [*Sugestão:* Outra pirâmide; proceda como no item (*c*).]

33.10 (*a*) Seja $\mathscr{R}$ a região entre $x = 0$ e $x = 1$ e delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x$. Encontre o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathscr{R}$ em torno do eixo y. (*b*) Seja $\mathscr{R}$ a região entre as curvas $y = 2x - x^2$ e $y = \frac{1}{2}x$. Calcule o volume do sólido conseguido pela revolução de $\mathscr{R}$ em torno do eixo y.

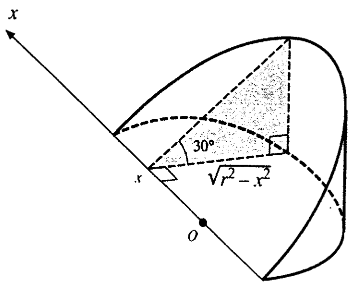


Fig. 33-20

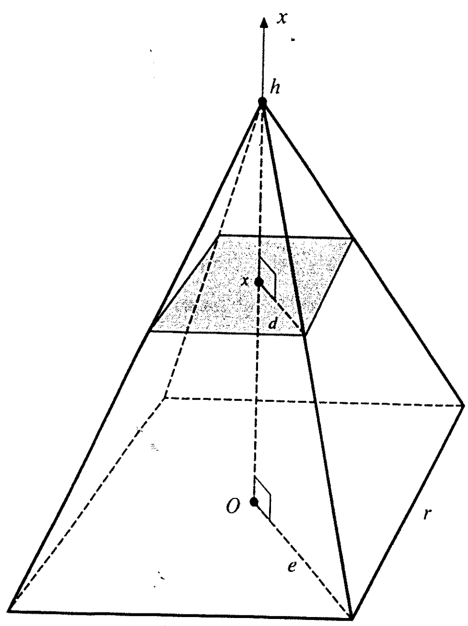


Fig. 33-21

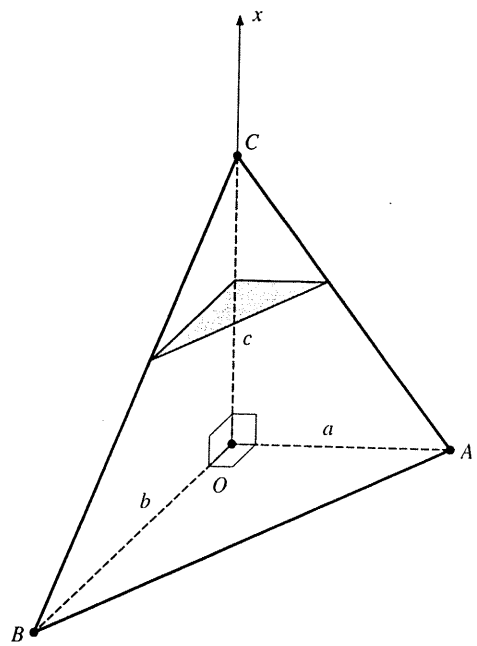


Fig. 33-22

33.11 Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante delimitada por $y = x^3 + x$, $x = 2$ e pelo eixo x. (*a*) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = -3$. (*b*) Encontre o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = -1$.

33.12 Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante delimitada por $x = 4 - y^2$ e $y^2 = 4 - 2x$. (*a*) Esboce $\mathcal{R}$. (*b*) Encontre o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno do: (i) eixo x; (ii) eixo y.

33.13 Seja $\mathcal{R}$ a região no segundo quadrante delimitada por $y = 2x^2$, $y = x^2 + x + 2$, e pelo eixo y. (*a*) Esboce $\mathcal{R}$. (*b*) Encontre o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

33.14 Seja $\mathcal{R}$ a região no segundo quadrante delimitada por $y = 1 + x^2$ e $y = 10$. (*a*) Esboce $\mathcal{R}$. Em seguida calcule o volume do sólido obtido pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno: (*b*) do eixo x; (*c*) do eixo y; (*d*) da reta $y = -1$; (*e*) da reta $x = 1$.

Capítulo 34

O Logaritmo Natural

34.1 DEFINIÇÃO

Já conhecemos a fórmula

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad [r \neq -1]$$

Ainda permanece o problema de encontrar uma antiderivada para $x - 1$.

A Figura 34-1 mostra o gráfico de $y = 1/t$, para $t > 0$; é um ramo de uma hipérbole. Para $x > 1$, a integral definida

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

representa a área sob a curva $y = 1/t$ e acima do eixo t, entre $t = 1$ e $t = x$.

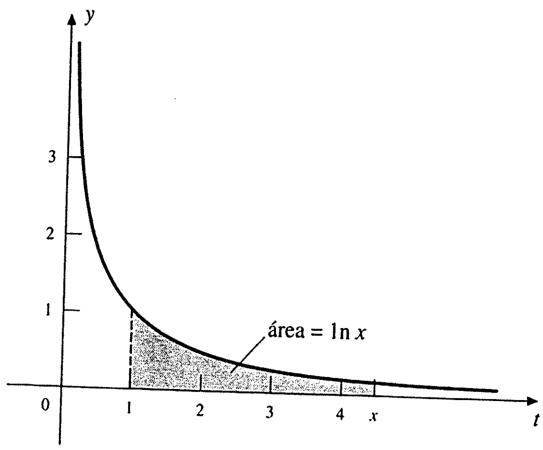


Fig. 34-1

Definição:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad [x > 0]$$

A função $\ln x$ é chamada de *logaritmo natural*. Pelo Teorema 31.1,

$$D_x(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad [x > 0] \tag{34.1}$$

e assim o logaritmo natural é a antiderivada procurada de $x - 1$, *mas apenas em* $(0, \infty)$. Uma antiderivada para todo $x \neq 0$ será definida na próxima seção.

34.2 PROPRIEDADES

PROPRIEDADE 1. $\ln 1 = 0$.

Isso segue de $\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$.

PROPRIEDADE 2. Se $x > 1$, $\ln x > 0$.

Isso é perceptível a partir da interpretação de integral como área (Fig. 34-1) ou, mais rigorosamente falando, do Problema 30.11.

PROPRIEDADE 3. Se $0 < x < 1$, $\ln x < 0$.

De fato, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$ [trocando os limites de integração]

e, para $0 < x < 1$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt > 0$$

pelo Problema 30.11.

PROPRIEDADE 4. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad [x \neq 0]$.

Em outras palavras, $\ln|x|$ é uma antiderivada de x^{-1} para todo x não-nulo. A demonstração é simples. Quando $x > 0$, então $|x| = x$ e assim,

$$D_x(\ln|x|) = D_x(\ln x) = \frac{1}{x} \text{ [devido a } (34.1)]$$

Quando $x < 0$, então $|x| = -x$ e assim,

$$\begin{aligned} D_x(\ln|x|) &= D_x(\ln(-x)) = D_u(\ln u)D_x(u) && \text{[pela regra da cadeia; } u = -x > 0] \\ &= \left(\frac{1}{u}\right)(-1) && \text{[devido a (34.1)]} \\ &= \frac{1}{-u} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

PROPRIEDADE 5. $\ln uv = \ln u + \ln v$.

Para uma demonstração, ver Problema 34.2.

PROPRIEDADE 6. $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$.

Demonstração: Na Propriedade 5, substitua u por $\frac{u}{v}$.

PROPRIEDADE 7. $\ln \frac{1}{v} = -\ln v$.

Demonstração: Faça $u = 1$ na Propriedade 6 e use a Propriedade 1.

PROPRIEDADE 8. Para qualquer número racional r, $\ln x^r = r \ln x$.

Ver Problema 34.3 para uma demonstração.

PROPRIEDADE 9. $\ln x$ é uma função crescente.

Demonstração: Como $D_x(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$, $\ln x$ deve ser uma função crescente.

PROPRIEDADE 10. $\ln u = \ln v$ implica em $u = v$.

Isso segue da Propriedade 9. Como $\ln x$ é crescente, jamais pode repetir um valor.

PROPRIEDADE 11. $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.

Demonstração: O máximo de $1/t$ em $[1,2]$ é 1 e o mínimo é $\frac{1}{2}$. Logo, pelo Problema 30.3(*b*), $\frac{1}{2}(2-1) < \int_1^2 (1/t)\, dt < 1(2-1)$; isto é, $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$. As desigualdades sem a possibilidade de igualdade seguem do Problema 30.11.

Uma demonstração mais intuitiva faria uso da interpretação de $\int_1^2 (1/t)\, dt$ em termos de área.

Devemos ver mais adiante que $\ln 2$ é 0,693..., e faremos uso desse valor no que se segue.

PROPRIEDADE 12. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Demonstração: Pela Propriedade 9, precisamos apenas mostrar que $\ln x$ eventualmente excede qualquer inteiro positivo k dado. Para $x > 2^{2k}$,

$$\begin{aligned} \ln x &> \ln 2^{2k} = 2k \ln 2 && \text{[pela Propriedade 8]} \\ \ln x &> 2k\left(\frac{1}{2}\right) = k && \text{[pela Propriedade 11]} \end{aligned}$$

Logo,

PROPRIEDADE 13. $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

Demonstração: Seja $u = \frac{1}{x}$. Quando $x \to 0^+$, $u \to +\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} \ln x &= \lim_{u\to+\infty} \ln \frac{1}{u} = \lim_{u\to+\infty} -\ln u && \text{[pela Propriedade 7]} \\ &= -\lim_{u\to+\infty} \ln u = -\infty && \text{[pela Propriedade 12]} \end{aligned}$$

Problemas Resolvidos

34.1 Esboce o gráfico de $y = \ln x$.

Sabemos que $\ln x$ é crescente (Propriedade 9), que $\ln 1 = 0$ (Propriedade 1) e que $\frac{1}{2}$ (Propriedade 11). A partir do valor $y = \ln 2 = 0{,}693...$ podemos estimar os valores y em $x = 4, 8, 16,...$ e em $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},...$ pela Propriedade 8,

$$\ln 4 = 2 \ln 2 \qquad \ln 8 = 3 \ln 2 \qquad \ln 16 = 4 \ln 2 \ldots$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad \ln \frac{1}{4} = -2 \ln 2 \qquad \ln \frac{1}{8} = -3 \ln 2 \ldots$$

$D_x^2(\ln x) = D_x(x^{-1}) = -x^{-2} = -1/x^2 < 0$ e, portanto, o gráfico é côncavo para baixo. Não existe qualquer assíntota horizontal (pela Propriedade 12), mas o eixo y negativo é uma assíntota vertical (pela Propriedade 13). O gráfico é esboçado na Fig. 34-2. *Note que* $\ln x$ *assume todos os reais negativos como valores.*

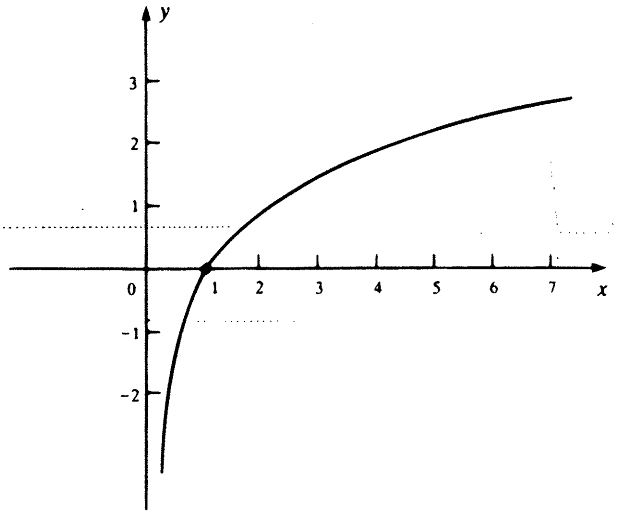


Fig. 34-2

34.2 Prove: $\ln uv = \ln u + \ln v$.

Em

$$\ln v = \int_1^v \frac{1}{t}\, dt$$

faça a mudança de variável $w = ut$ (u fixo). Logo, $dw = u\,dt$ e os limites de integração $t = 1$ e $t = v$ ficam $w = u$ e $w = uv$, respectivamente,

$$\ln v = \int_u^{uv} \frac{u}{w}\frac{1}{u}\, dw = \int_u^{uv} \frac{1}{w}\, dw = \int_u^{uv} \frac{1}{t}\, dt$$

Logo, pelo Teorema 30.4,

$$\ln u + \ln v = \int_1^u \frac{1}{t}\, dt + \int_u^{uv} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{uv} \frac{1}{t}\, dt = \ln uv$$

34.3 Prove: $\ln x^r = r \ln x$ para todo racional r.

Pela regra cadeia,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} D_x(x^r) = \frac{1}{x^r}(rx^{r-1}) = r\frac{1}{x} = rD_x(\ln x) = D_x(r \ln x)$$

Então, pelo Corolário 29.2, $\ln x^r = r \ln x + C$, para alguma constante C. Substituindo $x = 1$, descobrimos que $C = 0$, e a demonstração está completa.

34.4 Calcule:

(*a*) $D_x(\ln(x^3 - 2x))$ (*b*) $D_x(\ln(\text{sen } x))$ (*c*) $D_x(\cos(\ln x))$

(*a*) $D_x(\ln(x^3 - 2x)) = \dfrac{1}{x^3 - 2x} D_x(x^3 - 2x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x}(3x^2 - 2) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x}$

(*b*) $D_x(\ln(\text{sen } x)) = \dfrac{1}{\text{sen } x} D_x(\text{sen } x) = \dfrac{1}{\text{sen } x}(\cos x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$

(*c*) $D_x(\cos(\ln x)) = -(\text{sen}(\ln x)) \cdot D_x(\ln x) = -(\text{sen}(\ln x)) \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\text{sen}(\ln x)}{x}$

34.5 *Fórmula Rápida II:* $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$

Demonstração: $D_x(\ln|f(x)|) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ [pela regra da cadeia]

34.6 Calcule as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\displaystyle\int \text{tg } x\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int \text{cotg } x\,dx$ (*c*) $\displaystyle\int \frac{1}{3x - 1}\,dx$ (*d*) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 5}\,dx$

(*a*) Como $D_x(\cos x) = -\text{sen } x$,

$$\begin{aligned}\int \text{tg } x\,dx &= \int \frac{\text{sen } x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\text{sen } x}{\cos x}\,dx \\ &= -\ln|\cos x| + C && \text{[pela fórmula rápida II]} \\ &= \ln|\cos x|^{-1} + C && \text{[pela Propriedade 7]} \\ &= \ln|\sec x| + C && \text{[já que } \sec x = (\cos x)^{-1}\text{]}\end{aligned}$$

(*b*) Como $D_x(\text{sen } x) = \cos x$,

$$\int \text{cotg } x\,dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx = \ln|\text{sen } x| + C \quad \text{[pela fórmula rápida II]}$$

(*c*) $\displaystyle\int \frac{1}{3x - 1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x - 1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x - 1| + C$ [pela fórmula rápida II]

(*d*) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 - 5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 5| + C$ [pela fórmula rápida II]

34.7 Calcule $\displaystyle\int \sec x\,dx$.

A solução depende de uma ardilosa manipulação,

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int (\sec x)\frac{\sec x + \text{tg } x}{\sec x + \text{tg } x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \,\text{tg } x}{\sec x + \text{tg } x}\,dx \\ &= \ln|\sec x + \text{tg } x| + C\end{aligned}$$

Aqui empregamos a fórmula rápida II, usando o fato de que $D_x(\sec x + \text{tg } x) = \sec x \,\text{tg } x + \sec^2 x$.

34.8 (*Derivação Logarítmica*) Calcule a derivada de

$$y = \frac{x^2\sqrt{8x + 5}}{(2x - 1)^3}$$

Ao invés de usar a regra do produto e do quociente para derivação, é mais fácil encontrar o logaritmo dos valores absolutos,[1]

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \ln\left|\frac{x^2\sqrt{8x+5}}{(2x-1)^3}\right| \\ &= \ln(x^2\sqrt{8x+5}) - \ln|2x-1|^3 && \text{[pela Propriedade 6]} \\ &= \ln(x^2) + \ln(8x+5)^{1/2} - \ln|2x-1|^3 && \text{[pela Propriedade 5]} \\ &= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(8x+5) - 3\ln|2x-1| && \text{[pela Propriedade 8]}\end{aligned}$$

e então derivar,

$$\frac{1}{y}D_x y = 2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8x+5}\cdot 8\right) - 3\left(\frac{1}{2x-1}\cdot 2\right) = \frac{2}{x} + \frac{4}{8x+5} - \frac{6}{2x-1}$$

Portanto,

$$D_x y = y\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{8x+5} - \frac{6}{2x-1}\right) = \frac{x^2\sqrt{8x+5}}{(2x-1)^3}\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{8x+5} - \frac{6}{2x-1}\right)$$

Esse procedimento de primeiro determinar o logaritmo, e então derivar, é chamado de *derivação logarítmica*.

34.9 Mostre que $1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1$ para $x > 0$.

Para $x \ge 1$, note que $1/t$ é uma função decrescente em $[1,x]$ e, portanto, seu mínimo em $[1,x]$ é $1/x$ e seu máximo é 1. Logo, pelo Problema 30.3(*c*),

$$\frac{1}{x}(x-1) \le \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \le 1(x-1)$$

$$1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1$$

Observe que $1 - 1/x < \ln x < x-1$ para $x > 1$, de acordo com o Problema 30.11. Para $0 < x < 1$, $-1/t$ é uma função crescente em $[x,1]$. Pelo Problema 30.3(*c*),

$$-\frac{1}{x}(1-x) \le \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_x^1 \left(-\frac{1}{t}\right)dt \le -1(1-x)$$

Logo, $1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1$.

Problemas Complementares

34.10 Calcule as derivadas das seguintes funções:

(*a*) $\ln(4x-1)$ (*b*) $(\ln x)^3$ (*c*) $\sqrt{\ln x}$ (*d*) $\ln(\ln x)$

(*e*) $x^2 \ln x$ (*f*) $\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ (*g*) $\ln|5x-2|$ (*h*) $\ln(\operatorname{sen}^2 x)$

[1] Usamos os valores absolutos para garantir que o logaritmo está definido. Na prática, devemos omitir os valores absolutos quando está claro que as funções são não-negativas.)

34.11 Calcule as seguintes antiderivadas. Use a fórmula rápida II sempre que possível.

(*a*) $\int \frac{1}{3x}\,dx$ (*b*) $\int \frac{1}{7x-2}\,dx$ (*c*) $\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx$ (*d*) $\int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\,dx$

(*e*) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ (*f*) $\int \frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}\,dx$ (*g*) $\int \frac{3x^5+2x^2-3}{x^3}\,dx$

(*h*) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx$ (*i*) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}\,dx$ (*j*) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

34.12 Use derivação logarítmica para determinar y':

(*a*) $y = x^3\sqrt{4-x^2}$ (*b*) $y = \dfrac{(x-2)^4\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{x^2+4}}$

(*c*) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{sen} x}{(2x+3)^4}$ (*d*) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$

34.13 (*a*) Mostre que $\ln x < x$. [*Sugestão:* Use o Problema 34.9.]

(*b*) Prove que $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. [*Sugestão:* Substitua x por $\sqrt{x}$ no item (*a*).]

(*c*) Demonstre: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. [*Sugestão:* Use o item (*b*).]

(*d*) Prove: $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0$. [*Sugestão:* Substitua x por $\dfrac{1}{y}$ no item (*c*).]

(*e*) Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

34.14 Calcule em termos de ln 2 e ln 3:

(*a*) $\ln(2^{12})$ (*b*) $\ln \frac{2}{9}$

34.15 Calcule em termos de ln 2 e ln 5:

(*a*) $\ln 10$ (*b*) $\ln \frac{1}{2}$ (*c*) $\ln \frac{1}{5}$ (*d*) $\ln 25$

(*e*) $\ln \sqrt{2}$ (*f*) $\ln \sqrt[3]{5}$ (*g*) $\ln \frac{1}{20}$ (*h*) $\ln 2^7$

34.16 Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \ln x$ no ponto (1,0).

34.17 Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 1/x$ e $x = \frac{1}{2}$.

34.18 Determine o valor médio de $1/x$ em [1,4].

34.19 Ache o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região no primeiro quadrante, sob $y = x^{-1/2}$ e entre $x = \frac{1}{4}$ e $x = 1$.

34.20 Esboce os gráficos de:

(*a*) $y = \ln(x+1)$ (*b*) $y = \ln \frac{1}{x}$ (*c*) $y = x - \ln x$ (*d*) $y = \ln(\cos x)$

34.21 Um objeto se move ao longo do eixo x com aceleração $a = t - 1 + \frac{6}{t}$. (*a*) Encontre uma fórmula para a velocidade $v(t)$ se $v(1) = 1{,}5$. (*b*) Qual é o valor máximo de v no intervalo [1,9]?

34.22 Use derivação implícita para encontrar y':

(a) $y^2 = \ln(x^2 + y^2)$ (b) $\ln xy + 2x - y = 1$ (c) $\ln(x + y^2) = y^3$

34.23 Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{1}{h} \ln \dfrac{3+h}{3} \right)$.

34.24 Deduza a fórmula $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \operatorname{cotg} x| + C$. [*Sugestão:* Semelhante ao Problema 34.7.]

34.25 Calcule: (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4+x}$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{1-2x^2}$.

34.26 $\boxed{\text{CG}}$ Estime $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 (1/x)\,dx$ das seguintes maneiras:

(a) Pela regra trapezoidal [Problema 31.9(a)], com $n = 10$.
(b) Pela regra do ponto médio (Problema 31.34), com $n = 10$.
(c) Pela regra de Simpson (Problema 31.35), com $n = 10$.

34.27 $\boxed{\text{CG}}$ Use o método de Newton para estimar uma solução de: (a) $\ln x + x = 0$; (b) $\ln x = 1/x$.

Capítulo 35

Funções Exponenciais

35.1 INTRODUÇÃO

Seja a qualquer número real positivo. Queremos definir uma função a^x que tem o significado usual no caso em que x é racional. Por exemplo, queremos obter os resultados

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \qquad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \qquad 8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

Além disso, uma expressão como $5^{\sqrt{2}}$, que ainda não tem qualquer significado, terá um valor sensato por meio da nova definição.

Definição: a^x é o único número real positivo tal que

$$\ln a^x = x \ln a \tag{35.1}$$

Para ver que essa definição faz sentido, observe que a equação $\ln y = x \ln a$ deve ter exatamente uma solução positiva y para cada número real x. Isso segue do fato que $\ln y$ é uma função crescente com domínio $(0, +\infty)$ e imagem igual ao conjunto de todos os números reais. (Veja o gráfico da função logaritmo natural na Fig. 34-2.)

35.2 PROPRIEDADES DE a^x

Demonstra-se no Problema 35.4 que a função a^x tem todas as propriedades usuais de potências:

(I) $a^0 = 1$

(II) $a^1 = a$

(III) $a^{u+v} = a^u a^v$

(IV) $a^{u-v} = \dfrac{a^u}{a^v}$

(V) $a^{-v} = \dfrac{1}{a^v}$

(VI) $(ab)^x = a^x b^x$

(VII) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

(VIII) $(a^u)^v = a^{uv}$

35.3 A FUNÇÃO e^x

Para uma escolha particular do número real positivo a, a função a^x se torna a *inversa* da função $\ln x$.

TERMINOLOGIA Duas funções f e g são inversas uma da outra se f desfaz o efeito de g e g desfaz o efeito de f. Em termos de composição (Seção 15.1), isso significa que:

$$f(g(x)) = x \quad \text{e} \quad g(f(x)) = x$$

Definição: Seja e o único número real positivo tal que

$$\ln e = 1 \tag{35.2}$$

Como a imagem de $\ln x$ é o conjunto de todos os números reais, deve existir tal número e. É possível mostrar que $e = 2{,}718\ldots$. [Ver Problema 35.30(*c*).]

Teorema 35.1: As funções e^x e $\ln x$ são inversas uma da outra:

$$\ln e^x = x \qquad \text{e} \qquad e^{\ln x} = x$$

De fato, substituindo a por e em (*35.1*),

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x$$

Se substituímos x nesse resultado por $\ln x$,

$$\ln e^{\ln x} = \ln x$$

Logo, $\quad e^{\ln x} = x \quad$ [já que $\ln u = \ln v$ implica em $u = v$ de acordo com a Propriedade 10 da Seção 34.2]

O Teorema 35.1 mostra que o logaritmo natural $\ln x$ é aquilo que se poderia chamar de "logaritmo na base e"; isto é, $\ln x$ é a potência à qual e deve ser elevado para se obter x: $e^{\ln x} = x$.

Teorema 35.2: $a^x = e^{x \ln a}$.

Desse modo, toda função potência a^x é definível em termos da função exponencial e^x, a qual por essa razão é freqüentemente chamada de *a* função exponencial. Para perceber porque o Teorema 35.2 é verdadeiro, note que, pelo Teorema 35.1,

$$\ln e^{x \ln a} = x \ln a$$

Mas $y = a^x$ é a *única* solução da equação $\ln y = x \ln a$. Portanto,

$$e^{x \ln a} = a^x$$

No Problema 35.9 prova-se que e^x é diferenciável e que:

Teorema 35.3: $D_x(e^x) = e^x$.

Assim, e^x tem a propriedade de ser sua própria derivada. Todos os múltiplos constantes Ce^x têm essa mesma propriedade, uma vez que $D_x(Ce^x) = C \cdot D_x(e^x) = Ce^x$. O Problema 35.28 mostra que essas são as *únicas* funções com tal propriedade.

A partir do Teorema 35.3 temos

$$\int e^x\, dx = e^x + C \tag{35.3}$$

Conhecendo a derivada de e^x, obtemos do Teorema 35.2

$$\begin{aligned} D_x(a^x) &= D_x(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \cdot D_x(x \ln a) \quad \text{[pela regra da cadeia]} \\ &= e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a \end{aligned}$$

Isso prova o:

Teorema 35.4: $D_x(a^x) = (\ln a)a^x$

ou, em termos de antiderivadas,
$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{35.4}$$

Sabemos que $D_x(x^r) = rx^{r-1}$ para qualquer número racional r. Agora a fórmula pode ser estendida para expoentes arbitrários. Se, no Teorema 35.2, substituímos x por r e a por x (tornando assim x positivo), obtemos $x^r = e^r$. Logo,

$$\begin{aligned} D_x(x^r) &= D_x(e^{r \ln x}) = e^{r \ln x} D_x(r \ln x) \qquad \text{[pela regra da cadeia]} \\ &= e^{r \ln x}\left(r\,\frac{1}{x}\right) = x^r\left(r\,\frac{1}{x}\right) = rx^{r-1} \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte:

Teorema 35.5: Para qualquer número real r e todos os positivos x,

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Problemas Resolvidos

35.1 Desenvolva: (*a*) $e^{2 \ln x}$; (*b*) $\ln e^2$; (*c*) $e^{(\ln u)-1}$; (*d*) 1^x.

(*a*) $e^{2 \ln x} = (e^{\ln x})^2$ [pela Propriedade (VIII)]

$= x^2$ [pelo Teorema 35.1]

(*b*) $\ln e^2 = 2$ [pelo Teorema 35.1]

(*c*) $e^{(\ln u)-1} = \dfrac{e^{\ln u}}{e^1}$ [pela Propriedade (IV)]

$= \dfrac{u}{e}$ [pelo Teorema 35.1 e pela Propriedade (II)]

(*d*) Por definição, $\ln 1^x = x(\ln 1) = x(0) = 0 = \ln 1$. Logo, $1^x = 1$.

35.2 Calcule as derivadas de: (*a*) $e^{\sqrt{x}}$; (*b*) 3^{2x}; (*c*) xe^x; (*d*) $3x^{\sqrt{2}}$.

(*a*) $D_x(e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}}D_x(\sqrt{x})$ [pela regra da cadeia]

$= e^{\sqrt{x}}D_x(x^{1/2}) = e^{\sqrt{x}}\dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

(*b*) $D_x(3^{2x}) = (\ln 3)3^{2x}D_x(2x)$ [pela regra da cadeia e pelo Teorema 35.4]

$= (\ln 3)3^{2x}(2) = (2\ln 3)3^{2x}$

(*c*) $D_x(xe^x) = xD_x(e^x) + D_x(x)e^x$ [pela regra do produto]

$= xe^x + (1)e^x = e^x(x+1)$

(*d*) $D_x(3x^{\sqrt{2}}) = 3D_x(x^{\sqrt{2}}) = 3(\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}) = 3\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$

35.3 Calcule as seguintes antiderivadas (e^{x^2} corresponde a $e^{(x^2)}$): (*a*) $\int 10^x\,dx$; (*b*) $\int xe^{x^2}\,dx$.

(*a*) Pelo Teorema 35.4,

$$\int 10^x\,dx = \frac{1}{\ln 10}10^x + C$$

(*b*) Faça $u = x^2$. Logo, $du = 2x\,dx$ e

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

35.4 Demonstre as Propriedades (I)-(VIII) de a^x (Seção 35.2).
Por definição, $\ln a^x = x\ln a$. Usaremos o fato que $\ln u = \ln v$ implica em $u = v$.

(I) $a^0 = 1$

$$\ln 1 = 0 = 0\cdot(\ln a) = \ln a^0.\ \text{Logo, } 1 = a^0.$$

(II) $a^1 = a$

$$\ln a = 1\cdot\ln a = \ln a^1$$

Portanto, $a = a^1$.

(III) $a^{u+v} = a^u a^v$

$$\ln(a^u a^v) = \ln a^u + \ln a^v = u\ln a + v\ln a$$
$$= (u+v)\ln a = \ln a^{u+v}$$

Assim, $a^{u+v} = a^u a^v$.

(IV) $a^{u-v} = \dfrac{a^u}{a^v}$

De acordo com (III), $a^{u-v}a^v = a^{(u-v)+v} = a^u$. Agora divida por a^v.

(V) $a^{-v} = \dfrac{1}{a^v}$

Faça $u = 0$ em (IV) e use (I).

(VI) $(ab)^x = a^x b^x$

$$\ln(a^x b^x) = \ln a^x + \ln b^x = x\ln a + x\ln b$$
$$= x(\ln a + \ln b) = x\ln(ab) = \ln(ab)^x$$

Logo, $(ab)^x = a^x b^x$.

(VII) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

De acordo com (VI), $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x b^x = \left(\dfrac{a}{b}\cdot b\right)^x = a^x$. Agora divida por b^x.

(VIII) $(a^u)^v = a^{uv}$

$$\ln (a^u)^v = v \ln a^u = v(u \ln a) = uv(\ln a) = \ln a^{uv}$$

Portanto, $(a^u)^v = a^{uv}$.

35.5 Mostre que $\displaystyle\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C$.

Pelo Teorema 35.3 e pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)}g'(x)$$

Logo, $e^{g(x)}$ é uma antiderivada de $g'(x)e^{g(x)}$ e, assim, $e^{g(x)} + C$ é a antiderivada generalizada.

35.6 Use derivação logarítmica para calcular $\dfrac{dy}{dx}$: (*a*) $y = x^x$; (*b*) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\,e^{5x}}{2^{\sqrt{x}}}$.

(*a*) $\ln y = \ln x^x = x \ln x$. Agora derive,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = xD_x(\ln x) + D_x(x)(\ln x) = x\frac{1}{x} + 1(\ln x) = 1 + \ln x$$
$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

(*b*) $\ln y = \ln(\sqrt{x+1}\,e^{5x}) - \ln 2^{\sqrt{x}} = \ln\sqrt{x+1} + \ln e^{5x} - \sqrt{x}\ln 2$

$= \ln (x+1)^{1/2} + 5x - (\ln 2)\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + 5x - (\ln 2)x^{1/2}$

Derive,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + 5 - \frac{\ln 2}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2(x+1)} + 5 - \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{2(x+1)} + 5 - \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x+1}\,e^{5x}}{2^{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{2(x+1)} + 5 - \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}\right)$$

35.7 Prove os seguintes fatos sobre e^x:

(*a*) $e^x > 0$ (*b*) e^x é crescente (*c*) $e^x > x$ (*d*) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (*e*) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

(*a*) $a^x > 0$, por definição (Seção 35.1).

(*b*) $D_x(e^x) = e^x > 0$, e uma função com derivada positiva é crescente. Mais genericamente, a definição de a^x, junto com o fato que $\ln y$ é crescente, implica que a^x é crescente se $a > 1$.

(*c*) Sabemos (Problema 34.8) que $\ln u < u$. Logo, $x = \ln e^x < e^x$.

(*d*) Essa é uma conseqüência direta do item (*c*).

(*e*) Faça $u = -x$; logo, pelo Propriedade (V),

$$e^x = e^{-u} = \frac{1}{e^u}$$

Quando $x \to -\infty$, $u \to +\infty$ e o denominador à direita se torna arbitrariamente grande [de acordo com o item (*d*)]. Logo, a fração se torna arbitrariamente pequena.

35.8 Esboce o gráfico de $y = e^x$ e mostre que é o reflexo em relação à diagonal $y = x$ do gráfico de $y = \ln x$.

Do Problema 35.7 sabemos que e^x é positiva e crescente e que se aproxima de $+\infty$ pela direita e de 0 pela esquerda. Além disso, como $D_x^2(e^x) = e^x > 0$, o gráfico será côncavo para cima para todo x. O gráfico é exibido na Fig. 35-1(*a*).

Pelo Teorema 35.1, $y = e^x$ é equivalente a $x = \ln y$. Portanto, um ponto (a,b) está sobre o gráfico de $y = e^x$ se, e somente se, (b,a) está sobre o gráfico de $y = \ln x$. Mas os pontos (a,b) e (b,a) são simétricos em relação à reta $y = x$, de acordo com o Problema 6.4.

Em geral, os gráficos de qualquer par de funções inversas são imagens espelhadas uma da outra relativamente à reta $y = x$.

35.9 Prove: (*a*) e^x é contínua; (*b*) e^x é diferenciável e $D_x(e^x) = e^x$.

(*a*) Seja $\varepsilon > 0$. Para provar a continuidade em x, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $|u - x| < \delta$ implica em $|e^u - e^x| < \varepsilon$. Seja ε_1 o menor entre $\varepsilon/2$ e $e^x/2$. Como ln é crescente e contínua, a imagem de ln em $(e^x - \varepsilon_1, e^x + \varepsilon_1)$ é um intervalo (c,d) contendo x. Seja $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta)$ está dentro de (c,d). Logo, para qualquer u, se $|u - x| < \delta$, segue que $|e^u - e^x| < \varepsilon_1 < \varepsilon$.

(*b*) A demonstração consiste em mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$$

Como $\dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \dfrac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \dfrac{e^h - 1}{h}$, basta demonstrar que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

Seja $k = e^h - 1$. Logo, $e^h = 1 + k$ e, assim, $h = \ln(1 + k)$, pelo Teorema 35.1. Como e^x é contínua e $e^0 = 1$, $k \to 0$ quando $h \to 0$. Logo,

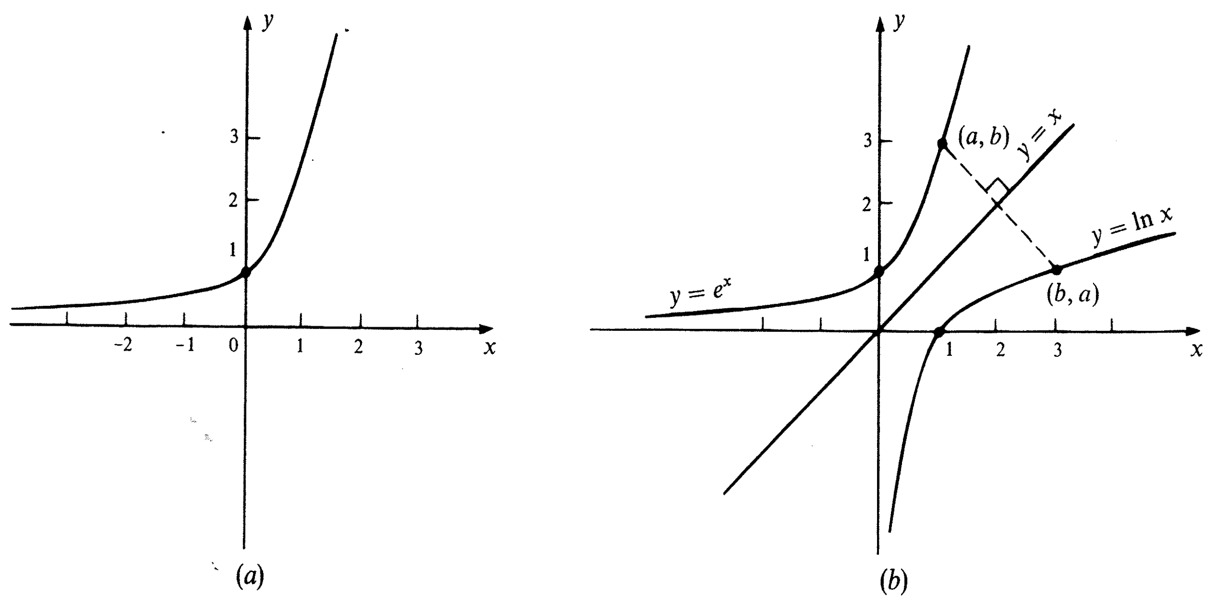


Fig. 35-1

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{\ln(1+k)}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+k)-\ln 1}{k}} \qquad \text{[uma vez que } \ln 1 = 0\text{]}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\ln(1+k)-\ln 1}{k}}$$

Mas $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\ln(1+k)-\ln 1}{k}$ é a derivada $D_x(\ln x)=\dfrac{1}{x}$ em $x = 1$; ou seja, é igual a 1. Logo, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

35.10 (*a*) Calcule: (i) $e^{2\ln 3}$; (ii) $\ln e^2$.

(*b*) Isole x em: (i) $\ln x^2 = 5$; (ii) $\ln(\ln x + 1) = 3$; (iii) $e^x - 6e^{-x} = 5$.

(*a*) (i) Pela Propriedade (VIII) e pelo Teorema 35.1, $e^{2\ln 3}=(e^{\ln 3})^2=3^2=9$. (ii) Pelo Teorema 35.1, $\ln e^2 = 2$.

(*b*) (i)
$$\ln x^2 = 5$$
$$2\ln x = 5$$
$$\ln x = \tfrac{5}{2}$$
$$x = e^{5/2} \qquad \text{[uma vez que } \ln u = b \text{ implica em } u = e^b\text{]}$$

(ii)
$$\ln(\ln x + 1) = 3$$
$$\ln x + 1 = e^3$$
$$\ln x = e^3 - 1$$
$$x = e^{e^3-1}$$

(iii)
$$e^x - 6e^{-x} = 5$$
$$e^{2x} - 6 = 5e^x \qquad \text{[multiplique por } e^x\text{]}$$
$$e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$$
$$(e^x - 6)(e^x + 1) = 0$$
$$e^x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad e^x + 1 = 0$$
$$e^x = 6 \qquad [e^x + 1 > 0,\ \text{já que } e^x > 0]$$
$$x = \ln 6 \qquad [e^u = b \text{ implica em } u = \ln b]$$

Problemas Complementares

35.11 Desenvolva as seguintes expressões:

(*a*) $e^{-\ln x}$ (*b*) $\ln e^{-x}$ (*c*) $(e^4)^{\ln x}$ (*d*) $(3e)^{\ln x}$

(*e*) $e^{\ln(x-1)}$ (*f*) $\ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ (*g*) $e^{\ln(2x)}$ (*h*) $\ln\sqrt[3]{e}$

35.12 Calcule as derivadas das seguintes funções:

(*a*) e^{-x} (*b*) $e^{1/x}$ (*c*) $e^{\cos x}$ (*d*) $\operatorname{tg} e^x$ (*e*) $\dfrac{e^x}{x}$

(*f*) $e^x \ln x$ (*g*) x^π (*h*) π^x (*i*) $\ln e^{2x}$ (*j*) $e^x - e^{-x}$

35.13 Calcule as seguintes antiderivadas:

(a) $\int e^{3x}\,dx$ (b) $\int e^{-x}\,dx$ (c) $\int e^x\sqrt{e^x-2}\,dx$

(d) $\int e^{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx$ (e) $\int 3^{2x}\,dx$ (f) $\int \sqrt{e^x}\,dx$

(g) $\int x^{\pi}\,dx$ (h) $\int e^x e^{2x}\,dx$ (i) $\int \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

(j) $\int x^2 2^{x^3}\,dx$ (k) $\int x^3 e^{-x^4}\,dx$

35.14 Use derivação implícita para encontrar y':

(a) $e^y = y + \ln x$ (b) $\text{tg}\, e^{y-x} = x^2$ (c) $e^{1/y} + e^y = 2x$
(d) $x^2 + e^{xy} + y^2 = 1$ (e) $\text{sen}\, x = e^y$

35.15 Use derivação logarítmica para encontrar y':

(a) $y = 3^{\text{sen}\,x}$ (b) $y = (\sqrt{2})^{e^x}$ (c) $y = x^{\ln x}$
(d) $y = (\ln x)^{\ln x}$ (e) $y^2 = (x+1)(x+2)$

35.16 Resolva as seguintes equações isolando x:

(a) $e^{3x} = 2$ (b) $\ln x^3 = -1$ (c) $e^x - 2e^{-x} = 1$ (d) $\ln(\ln x) = 1$ (e) $\ln(x-1) = 0$

35.17 Considere a região $\mathcal{R}$ sob a curva $y = e^x$, acima do eixo x e entre $x = 0$ e $x = 1$. Calcule: (a) a área de $\mathcal{R}$; (b) o volume do sólido gerado pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

35.18 Considere a região $\mathcal{R}$ delimitada pela curva $y = e^{x/2}$, pelo eixo y e pela reta $y = e$. Calcule: (a) a área de $\mathcal{R}$; (b) o volume do sólido gerado pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

35.19 Seja $\mathcal{R}$ a região delimitada pela curva $y = e^{x^2}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$. Calcule o volume do sólido gerado pela revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

35.20 Determine os extremos absolutos de $y = e^{\text{sen}\,x}$ no intervalo $[-\pi,\pi]$. [*Sugestão:* e^u é uma função crescente de u.]

35.21 Se $y = e^{nx}$, onde n é um inteiro positivo, determine a n-ésima derivada $y^{(n)}$.

35.22 Seja $y = 2\,e^{\text{sen}\,x}$. (a) Calcule y' e y''. (b) Considere que x e y variam com o tempo e que y aumenta a uma taxa constante de quatro unidades por segundo. Qual a taxa de variação de x quando $x = \pi$?

35.23 A aceleração de um objeto que se move sobre o eixo x é $9e^{3t}$. (a) Se a velocidade no instante $t = 0$ é quatro unidades por segundo, encontre uma fórmula para a velocidade $v(t)$. (b) Até onde o objeto se move enquanto sua velocidade aumenta de quatro para dez unidades por segundo? (c) Se o objeto está na origem quando $t = 0$, encontre uma fórmula para sua posição $x(t)$.

35.24 Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2e^x$ no ponto (0,2).

35.25 Esboce os gráficos das seguintes funções, indicando extremos relativos, pontos de inflexão e assíntotas:

(a) $y = e^{-x^2}$ (b) $y = x\ln x$ (c) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = (1-\ln x)^2$ (f) $y = \dfrac{1}{x} + \ln x$

[*Sugestão:* Para os itens (b) e (c) você precisará dos resultados do Problema 34.13(d) e (c).]

35.26 Esboce os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$. [*Sugestão:* $a^x = e^{x\ln a}$.]

35.27 Para $a > 0$ e $a \neq 1$, defina $\log_a x \equiv \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Essa função é chamada de *logaritmo de x na base a* ($\log_{10} x$ é chamado de *logaritmo comum de x*). Prove as seguintes propriedades:

(*a*) $D_x(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ (*b*) $a^{\log_a x} = x$ (*c*) $\log_a a^x = x$

(*d*) $\log_e x = \ln x$ (*e*) $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$ (*f*) $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

(*g*) $\log_a u^r = r \log_a u$ (*h*) $\ln x = \dfrac{\log_a x}{\log_a e}$

35.28 Mostre que as únicas funções $f(x)$ tais que $f'(x) = f(x)$ são as funções Ce^x, onde C é uma constante. [*Sugestão:* Seja $F(x) = f(x)/e^x$ e calcule $F'(x)$.]

35.29 Determine os extremos relativos de $f(x) = (\ln x)^2/x$ em $[1,e]$.

35.30 (*a*) Prove $e^x = \lim\limits_{u \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{u}\right)^u$. [*Sugestão:* Seja $y = \left(1 + \dfrac{x}{u}\right)^u$. Logo,

$$\ln y = u \ln \left(1 + \frac{x}{u}\right) = u(\ln (u + x) - \ln u) = u \cdot x \cdot \frac{1}{u^*} \quad \text{[pelo teorema do valor médio]}$$

onde $u < u^* < u + x$ se $x > 0$ e $u + x < u^* < u$ se $x < 0$. Logo, $1 < \dfrac{u^*}{u} < 1 + \dfrac{x}{u}$ se $x > 0$ ou $1 + \dfrac{x}{u} < \dfrac{u^*}{u} < 1$ se $x < 0$. Em qualquer caso, $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{u^*}{u} = 1$. Portanto, $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln y = x$ e, assim, $\lim\limits_{u \to +\infty} y = \lim\limits_{u \to +\infty} e^{\ln y} = e^x$.]

(*b*) Prove que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. [*Sugestão:* Use o item (*a*).]

(*c*) $\boxed{\text{CG}}$ Aproxime e determinando $\left(1 + \left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$ para valores grandes de n (digamos, $n \geq 10000$).

35.31 Mostre que, para qualquer n positivo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

[*Sugestão:* $\dfrac{x^n}{e^x} = \dfrac{e^{n \ln x}}{e^x} = \dfrac{1}{e^{x - n \ln x}} = \dfrac{1}{e^{x(1 - n \ln x/x)}}$. Agora aplique os Problemas 34.13(*c*) e 35.7(*d*).]

35.32 Calcule as seguintes integrais definidas:

(*a*) $\displaystyle\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x}\, dx$ (*b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$ (*c*) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{e^{x^2}}\, dx$

35.33 Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{n/n})$.

35.34 Mostre que $e^\pi > \pi^e$. [*Sugestão:* Prove que $u^v > v^u$ quando $v > u \geq e$. $(u/e)^{v-u} \geq 1$ uma vez que $u/e \geq 1$ e $v > u$. Logo,

$$u^v e^u \geq e^v u^u \tag{1}$$

Pelo Problema 34.9, $\dfrac{v}{u} - 1 > \ln \dfrac{v}{u}$, $\dfrac{v}{u} > \ln \dfrac{v}{u} + 1 = \ln \dfrac{ve}{u}$, $e^{v/u} > \dfrac{ve}{u}$ e, assim,

$$e^v u^u > e^u v^u \tag{2}$$

De (*1*) e (*2*), $u^v e^u > e^u v^u$, $u^v > v^u$.]

35.35 Se juros são pagos a r por cento ao ano e são capitalizados n vezes ao ano, então P reais se tornam $P\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$ reais após um ano. Se fazemos $n \to \infty$, então os juros resultantes são ditos *continuamente capitalizados.*

(a) Mostre que, se continuamente capitalizados a r por cento ao ano, P reais se tornam Pe^r reais após um ano. [*Sugestão:* Use o Problema 35.30.] Então, após t anos, P reais ficariam Pe^{rt} reais.

(b) Continuamente capitalizados a 6% ao ano, quanto tempo demoraria para dobrar uma dada quantia de dinheiro?

(c) $\boxed{\text{CG}}$ Quando $r = 5\%$, compare o resultado entre capitalização contínua e aquela na qual a capitalização ocorre uma vez por ano e aquela em que a capitalização é mensal.

36.36 $\boxed{\text{CG}}$ Use o Método de Newton para aproximar uma solução de: (a) $e^x = 1/x$; (b) $e^{-x} = \ln x$.

35.37 $\boxed{\text{CG}}$ Use a regra de Simpson com $n = 4$ para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx$.

Capítulo 36

Regra de L'Hospital; Crescimento e Decaimento Exponenciais

36.1 REGRA DE L'HOSPITAL

O teorema a seguir nos permite calcular limites da forma

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

no "caso indeterminado" em que o numerador $f(x)$ e o denominador $g(x)$ se aproximam ambos de 0 ou ambos de $\pm\infty$.

Teorema 36.1 (*Regra de L'Hospital*): Se $f(x)$ e $g(x)$ se aproximam ambas de 0 ou ambas de $\pm\infty$ então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Na regra de L'Hospital o operador "lim" se refere a qualquer uma das seguintes formas:

$$\lim_{x\to+\infty} \qquad \lim_{x\to-\infty} \qquad \lim_{x\to a} \qquad \lim_{x\to a^+} \qquad \lim_{x\to a^-}$$

Ver Problema 36.21 para um esboço da demonstração. Assume-se no Teorema 36.1 que $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente próximo de a.

Exemplos Verifiquemos a regra de L'Hospital para quatro limites calculados anteriormente por outros métodos.

(*a*) Ver Problema 9.4(*a*),

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5}{4x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{8x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(*b*) Ver Problema 27.4,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta}{1} = \cos 0 = 1$$

(*c*) Ver Problema 34.13(*d*). Para aplicar o Teorema 36.1, devemos reescrever a função como uma fração que se torna indeterminada,

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} \qquad [D_x(\ln x) = x^{-1}]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x \qquad \left[\text{já que } \frac{x^{-1}}{x^{-2}} = x^{-1-(-2)} = x^1 = x\right]$$

$$= 0$$

(*d*) Ver Problema 35.31, onde agora n é considerado um inteiro. Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}$$

Como o lado direito é indeterminado, a regra de L'Hospital pode ser aplicada novamente,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$$

Continuando desse modo, conseguimos, após n passos,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n(n-1)\cdots(2)(1)}{e^x} = n!\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = n!(0) = 0$$

Esse exemplo ilustra a importância de se ter a função expressa como uma fração "do modo certo". Suponha que tivéssemos escolhido "o modo errado" e tentássemos calcular o mesmo limite como $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-n}}$. Então, a repetida aplicação da regra de L'Hospital teria dado

$$\lim \frac{e^{-x}}{x^{-n}} = \lim \frac{(-1)e^{-x}}{(-n)x^{-(n+1)}} = \lim \frac{(-1)^2 e^{-x}}{(-1)^2(n)(n+1)x^{-(n+2)}} = \cdots$$

e jamais chegaríamos a um valor definido.

(*e*) Ver Problema 34.13(*c*). Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Outros Exemplos

(1) Calcule $\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{1/x}$.

Como $\ln x \to +\infty$ e $1/x \to 0$, não está claro qual é o limite. Faça $y = (\ln x)^{1/x}$. Logo, $\frac{1}{x}\ln(\ln x)$. Assim, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to +\infty} \ln y = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

(2) Calcule $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$.

Como $x \to +\infty$ e $1/x \to 0$, o limite não é óbvio. Faça $y = x^{1/x}$. Logo, $\ln y = \frac{1}{x}\ln x$, e

$\lim_{x\to +\infty} \ln y = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ de acordo com (*e*) acima. Assim, $\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1$.

Cuidado: Quando as condições para a regra de L'Hospital não são satisfeitas, o uso da regra geralmente conduz a resultados falsos.

Exemplo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2^2+1}{2^2-1} = \frac{5}{3}$$

Se usássemos a regra de L'Hospital, concluiríamos erroneamente que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to 2} 1 = 1$$

36.2 CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAIS

O exemplo (*d*) acima mostra que e^x cresce muito mais rápido que qualquer potência de x. Há muitos processos naturais, tais como crescimento de bactérias e decaimento radioativo, nos quais quantidades crescem ou decrescem a uma "taxa exponencial".

Definição: Considere que uma quantidade y varia com o tempo t. y é dito *crescer ou decair exponencialmente* se sua taxa de variação instantânea (Capítulo 19) é diretamente proporcional ao seu valor instantâneo; ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = Ky \tag{36.1}$$

onde K é uma constante.

Suponha que y satisfaz (*36.1*). Façamos a mudança de variável $u = Kt$. Logo, pela regra da cadeia,

$$Ky = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{du}K \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{du} = y$$

e assim, pelo Problema 35.28,

$$y = Ce^u = Ce^{Kt} \tag{36.2}$$

onde C é outra constante.

Podemos agora perceber porque o processo y é chamado de *exponencial*. Se $K > 0$, K é dita *constante de crescimento* e y aumenta exponencialmente com o tempo. Se $K < 0$, K é dita *constante de decaimento* e y decresce exponencialmente com o tempo.

Seja y_0 o valor de y em $t = 0$. Substituindo t por 0 em (*36.2*), obtemos

$$y_0 = Ce^0 = C(1) = C$$

de modo que (*36.2*) pode ser reescrita como

$$y = y_0 e^{Kt} \tag{36.3}$$

Exemplos

(*a*) Considere que uma cultura de 1000 bactérias aumenta exponencialmente com uma constante de crescimento $K = 0{,}02$, sendo que o tempo é medido em horas. Determinemos uma fórmula para o número y de bactérias presentes após t horas e calculemos quanto tempo demorará até que 100 000 bactérias estejam presentes na cultura.[1]

Como $y_0 = 1000$, a fórmula procurada para y é dada por (*36.3*),

$$y = 1000e^{0{,}02t}$$

[1] Apesar de populações serem medidas em termos de inteiros positivos, (*36.3*) parece ser aplicável apesar da fórmula ter sido deduzida para uma quantidade medida em números reais.

Agora faça $y = 100\,000$ e isole t,

$$\begin{aligned} 100\,000 &= 1000e^{0,02t} \\ 100 &= e^{0,02t} \\ \ln 100 &= \ln e^{0,02t} \\ 2 \ln 10 &= 0{,}02t \qquad [\ln 10^2 = 2 \ln 10;\ \ln e^u = u] \\ t &= 100 \ln 10 \end{aligned}$$

O Apêndice E fornece o valor aproximado de 2,3026 para ln 10. Logo,

$$t \approx 230{,}26 \text{ horas}$$

Observação: Às vezes, no lugar de se especificar a constante de crescimento K, digamos, $K = 0{,}02$, diz-se que a quantidade está crescendo à taxa de 2 % por unidade de tempo. Isso não é muito preciso. Uma taxa de aumento de r por cento por unidade de tempo é aproximadamente o mesmo que $K = 0{,}0r$ quando r é relativamente pequeno (por exemplo, $r \leq 3$). De fato, com uma taxa de crescimento de r por cento, $y = y_0(1 + 0{,}0r)$ após uma unidade de tempo. Como $y = y_0 e^K$ quando $t = 1$, $t = 1$, $e^K = 1 + 0{,}0r$, e, portanto, $K = \ln(1 + 0{,}0r)$. Isso é próximo de $0{,}0r$, já que $\ln(1 + x) \approx x$ para x pequeno. [Por exemplo, $\ln(1{,}02) \approx 0{,}0198$ e $\ln(1{,}03) \approx 0{,}02956$.] Assim, muitos livros-texto interpretam automaticamente uma taxa de crescimento de r por cento por unidade de tempo como sendo equivalente a $K = 0{,}0r$.

(*b*) Se a constante de decaimento de um dado elemento radioativo é $K < 0$, calcule o tempo T necessário para sobrar apenas metade da quantia original.

Em $t = T$, (*36.3*) dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y_0 &= y_0 e^{KT} \\ \frac{1}{2} &= e^{KT} \\ \ln \frac{1}{2} &= KT \\ -\ln 2 &= KT \qquad \left[\ln \frac{1}{x} = -\ln x\right] \\ -\frac{\ln 2}{K} &= T \end{aligned} \tag{36.4}$$

O número T é chamado de *meia-vida* do elemento dado. Conhecendo-se a meia-vida ou a constante de decaimento, podemos determinar a outra a partir de (*36.4*).

Problemas Resolvidos

36.1 Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$ para qualquer inteiro positivo n.

A demonstração será feita por indução matemática (ver Problema 12.2). A sentença é verdadeira para $n = 1$, de acordo com o Problema 34.13(*c*). Assumindo ser verdadeira para $n = k$, temos para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{(k+1)(\ln x)^k x^{-1}}{1} \qquad [\text{pela regra de L'Hospital}] \\ &= (k+1) \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} = (k+1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, a sentença é também verdadeira para $n = k + 1$ e a demonstração está completa.

36.2 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen } x}$.

O numerador e o denominador são funções contínuas, sendo que cada uma delas é 0 em $x = 0$. Logo, a regra de L'Hospital se aplica,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen } x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

36.3 Calcule $\lim_{x\to +\infty} \left(x \text{ sen} \frac{\pi}{x}\right)$.

Como $\pi/x \to 0$, segue que sen $(\pi/x) \to$ sen $0 = 0$ e assim não há qualquer método óbvio para resolver o problema. No entanto, a regra de L'Hospital se mostra aplicável,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x \text{ sen} \frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\text{sen} \frac{\pi}{x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\cos \frac{\pi}{x}\right)(-\pi x^{-2})}{-x^{-2}} = \pi \lim_{x\to +\infty} \cos \frac{\pi}{x}$$
$$= \pi \cos 0 = \pi \cdot 1 = \pi$$

36.4 Calcule $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Pelo exemplo (*c*) na Seção 36.1, $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

36.5 Esboce o gráfico de $y = xe^x$.

Pela regra do produto, $y' = xe^x + e^x = e^x(x + 1)$. Como e^x é sempre positiva, o único ponto crítico ocorre quando $x + 1 = 0$; ou seja, quando $x = -1$. Quando $x = -1$,

$$y = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Novamente pela regra do produto, $y'' = e^x(1) + e^x(x + 1) = e^x(x + 2)$. Quando $x = -1$,

$$y'' = e^{-1}[(-1) + 2] = \frac{1}{e} > 0$$

Assim, pelo teste da derivada segunda, há um mínimo relativo no ponto $P(-1,-1/e)$. Da expressão para y'', a curva é côncava para cima (isto é, $y'' > 0$) quando $x > -2$ e côncava para baixo ($y'' < 0$) quando $x < -2$. Assim, o ponto $I(-2, -2/e^2)$.

Está claro que a curva cresce indefinidamente quando $x \to +\infty$. Para ver o que acontece quando $x \to -\infty$, faça $u = -x$. Logo,

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{u\to +\infty} -ue^{-u} = -\lim_{u\to +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$$

pelo Problema 35.31. Portanto, o eixo x negativo é uma assíntota. Isso nos permite esboçar o gráfico na Fig. 36-1.

36.6 Se $y(t)$ define um processo de crescimento ou decaimento exponencial, encontre uma fórmula para o valor médio de y no intervalo $[0,\tau]$.

Por definição (ver Seção 31.2), o valor médio procurado é dado por

$$y_{\text{médio}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau y\, dt = \frac{1}{K\tau} \int_0^\tau Ky\, dt$$

Mas (*36.1*) estabelece que uma antiderivada de Ky é o próprio y. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$y_{\text{médio}} = \frac{1}{K\tau}\, y\Big]_0^{\tau} = \frac{y(\tau) - y_0}{K\tau}$$

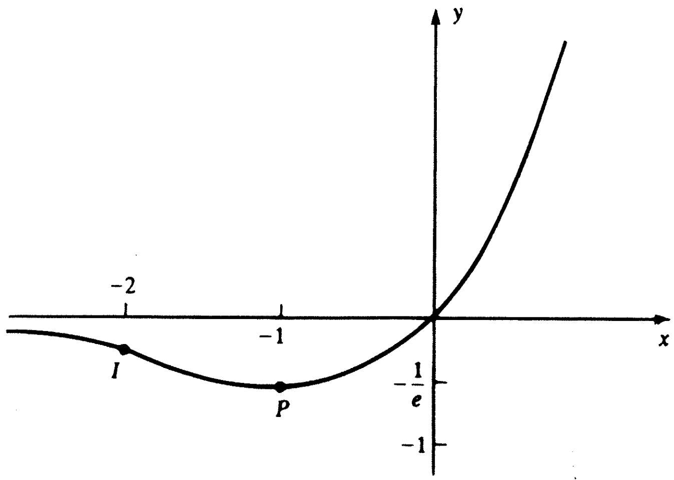


Fig. 36-1

Note que essa relação foi conseguida sem referência à forma explícita de $y(t)$. Reescrita como

$$y_{\text{médio}} = \frac{\Delta y}{K\,\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad \Delta y = K y_{\text{médio}}$$

ela fornece uma descrição útil de processos exponenciais: *a variação de uma quantidade em um intervalo de tempo é proporcional ao tamanho do intervalo e ao valor médio da quantidade ao longo desse intervalo.*

36.7 Se as bactérias em uma cultura crescem exponencialmente e se seu número y dobra em uma hora, quanto tempo levará para atingir 10 vezes a população original?

Sabemos que $y = y_0 e^{Kt}$. Como o número após uma hora é $2y_0$,

$$2y_0 = y_0 e^{K(1)} = y_0 e^{K} \qquad \text{ou} \qquad 2 = e^{K} \qquad \text{ou} \qquad K = \ln 2$$

Assim, $y = y_0 e^{(\ln 2)t}$; e quando y é $10y_0$,

$$\begin{aligned} 10y_0 &= y_0 e^{(\ln 2)t} \\ 10 &= e^{(\ln 2)t} \\ \ln 10 &= (\ln 2)t \\ t &= \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx \frac{2{,}3026}{0{,}6931} \approx 3{,}32 \end{aligned}$$

Logo, demora um pouco menos de $3\frac{1}{3}$ horas para que o número de bactérias cresça dez vezes.

36.8 Sabendo-se que a meia-vida T do elemento rádio é de 1690 anos, quanto restará a partir de 1 grama de rádio após 10 000 anos?

De acordo com (*36.4*), $K = -\frac{\ln 2}{T} = -\frac{\ln 2}{1690}$ e a quantidade de rádio é dada por $y = y_0 e^{Kt} = e^{-(\ln 2)t/1690}$. Depois de 10 000 anos,

$$\begin{aligned} y &= e^{-(\ln 2)(10\,000)/1690} \\ &\approx e^{-6931/1690} \approx e^{-4{,}1} \approx 0{,}0166 \text{ grama} \end{aligned}$$

O Apêndice F foi usado para determinar $e^{-4,1}$. Logo, cerca de 16,6 miligramas sobram após 10 000 anos.

Problemas Complementares

36.9 Calcule os limites indicados:

(*a*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-4x+3}{2x^2-1}$ (*b*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{1+x}$ (*c*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

(*d*) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ (*e*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^x}{x}$ (*f*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{(\ln x)^3}$

(*g*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+\ln x-1}$ (*h*) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right)$ (*i*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

(*j*) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ (*k*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-2^x}{x}$ (*l*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x^2}$

(*m*) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{x-\pi/2}$ (*n*) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (*o*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x+1}$

(*p*) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ (*q*) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$ (*r*) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$

(*s*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{tg} \pi x}$ (*t*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 7x}$ (*u*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg} x}$

(*v*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 2x}{x^2}$ (*w*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

36.10 Esboce os gráficos das seguintes funções, indicando extremos relativos, concavidade, pontos de inflexão e assíntotas:

(*a*) $y=\dfrac{x}{e^x}$ (*b*) $y=x^2e^{-x}$ (*c*) $y=x^3e^{-x}$ (*d*) $y=x^2\ln x$ (*e*) $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$

36.11 Uma cultura de bactérias cresce exponencialmente de modo que o número inicial dobrou em 3 horas. Quantas vezes a população inicial estará presente após 9 horas?

36.12 A meia-vida do rádio é de 1690 anos. Se 10% de uma quantia original de rádio está restando, há quanto tempo que o rádio foi criado?

36.13 Se carbono-14 radioativo tem uma meia-vida de 5750 anos, o que restará de 1 grama após 3000 anos?

36.14 Se 20% de um elemento radioativo desaparece em 1 ano, determine sua meia-vida.

36.15 Drosófilas estão sendo mantidas em um ambiente que pode comportar um máximo de 640 indivíduos. Se essas pequenas moscas crescem exponencialmente com constante de crescimento $K = 0{,}05$ por dia, quanto tempo demorará para uma população inicial de 20 atingir a capacidade máxima do ambiente? (Lembre que $2 \approx 0{,}6931$.)

36.16 Uma certa substância química se decompõe exponencialmente. Considere que 200 gramas se tornem 50 gramas em uma hora. Quanto restará depois de três horas?

36.17 Se 100 bactérias em uma colônia reproduzem exponencialmente e em 12 horas há 300 bactérias, quantas bactérias existem na colônia após 72 horas?

36.18 Se a população mundial em 1990 era de 4,5 bilhões e cresce exponencialmente com constante de crescimento $K = \frac{1}{5}\ln 2$ quando o tempo é medido em anos, determine a população no ano 2020.

36.19 Bactérias em uma cultura que cresce exponencialmente aumentam de 100 para 400 na primeira hora. (*a*) Qual será a população em 1,5 horas? (*b*) Qual é o número médio presente nas primeiras duas horas?

36.20 Prove o teorema do valor médio estendido de Cauchy: Se f e g são diferenciáveis em (a,b) e contínuas em $[a,b]$ e se $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a,b), então existe um ponto c em (a,b) tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[*Sugestão:* Aplique o teorema de Rolle generalizado (Problema 17.19) em

$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

Note que $g(b) \neq g(a)$ uma vez que, caso contrário, o teorema de Rolle generalizado implicaria que $g'(x) = 0$ para algum x em (a,b).]

36.21 Prove a regra de L'Hospital. [*Sugestão:* Considere o caso $\lim_{x\to a^+} (f(x)/g(x))$, onde $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Podemos assumir que $f(a) = g(a) = 0$. Logo, pelo Problema 36.20, $f(x)/g(x) = (f(x)-f(a))/(g(x)-g(a)) = f'(x^*)/g'(x^*)$ para algum x^* entre a e x. Portanto, quando $x \to a^+$, $x^* \to a^+$. Assim, se $\lim_{x\to a^+} (f'(x)/g'(x)) = L$, então $\lim_{x\to a^+} (f(x)/g(x)) = L$. Os outros casos podem ser tratados do mesmo modo ou podem ser reduzidos a esse caso.]

Capítulo 37

Funções Trigonométricas Inversas

37.1 FUNÇÕES UM a UM

Na Seção 35.3 introduzimos a noção de *inversa* de uma função e mostramos que a inversa de $\ln x$ é e^x e vice-versa. No entanto, nem todas as funções têm inversas.

Exemplos

(*a*) Considere a função f tal que $f(x) = x^2$ para todo x. Logo, $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$. Se houvesse uma inversa g de f, então $g(f(x)) = x$. Logo, $g(1) = g(f(1)) = 1$ e $g(1) = g(f(-1)) = -1$, que implica que $1 = -1$, o que é impossível.

(*b*) Seja f uma função periódica, $f(x + p) = f(x)$, para todo x (ver Seção 26.2). O argumento do exemplo (*a*), para dois pontos x_0 e $x_0 + p$, mostra que f não pode ter uma inversa. Mas todas as funções trigonométricas são periódicas (com $p = 2\pi$ ou $p = \pi$). Logo, as funções trigonométricas não admitem inversas!

As funções que têm inversas devem ser funções *um a um.**

Definição: Uma função f é um a um se, sempre que $u \neq v$ implica em

$$f(u) \neq f(v)$$

Assim, uma função um a um assume diferentes valores para diferentes elementos do domínio. Uma função é um a um se, e somente se, seu gráfico intersecta qualquer reta horizontal em *no máximo um* ponto. A Figura 37-1(*a*) é o gráfico de uma função um a um; a Fig. 37-1(*b*) exibe uma função que não é um a um, pois $f(u) = f(v) = c$.

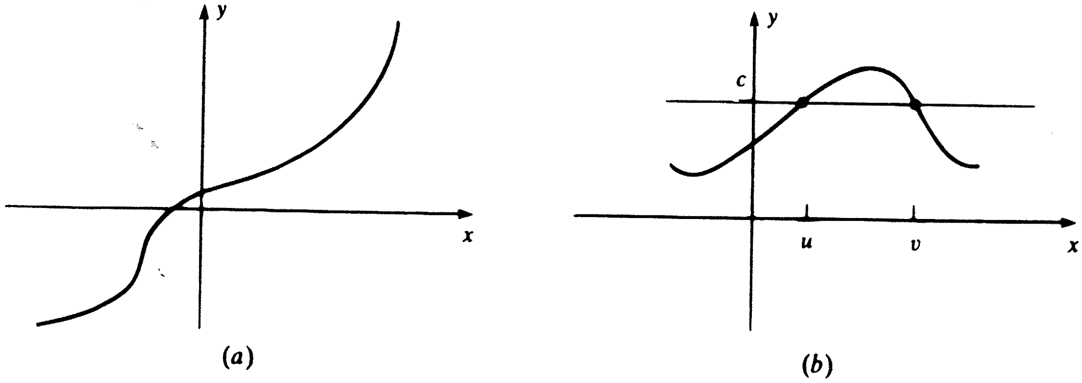


Fig. 37-1

* N. de T.: Também conhecidas como funções bijetoras ou bijetivas.

NOTAÇÃO A inversa de uma função f um a um será denotada por f^{-1}.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Cuidado: Não confunda a inversa f^{-1} com a recíproca $1/f$.

Se uma função um a um é definida por meio de uma fórmula $y = f(x)$, podemos *às vezes* resolver essa equação isolando x em termos de y. Essa solução constitui a fórmula para a função inversa $x = f^{-1}(y)$.

Exemplos

(*a*) Seja $f(x) = 3x + 1$ (uma função um a um). Seja y o valor de $f(x)$; logo, $y = 3x + 1$. Resolva essa equação isolando x em termos de y,

$$y - 1 = 3x$$
$$\frac{y-1}{3} = x$$

Portanto, a inversa f^{-1} é dada pela fórmula

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$$

(*b*) Considere a função um a um $f(x) = 2e^x - 5$,

$$y = 2e^x - 5$$
$$y + 5 = 2e^x$$
$$\frac{y+5}{2} = e^x$$
$$\ln\frac{y+5}{2} = \ln e^x = x$$

Logo,

$$f^{-1}(y) = \ln\frac{y+5}{2}$$

(*c*) Seja $f(x) = x^5 + x$. Como $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, f é uma função crescente e, portanto, um a um (ver Problema 37.12). Mas se escrevemos $y = x^5 + x$, não temos qualquer método óbvio para resolver a equação isolando x em termos de y.

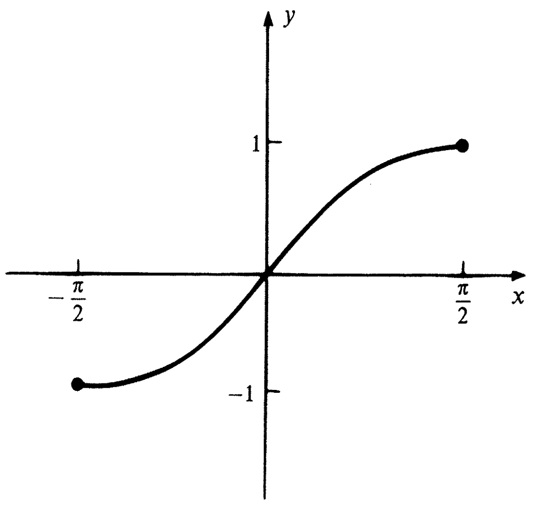
37.2 INVERSAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS RESTRITAS

Para que uma função periódica se torne um a um – e assim admitir inversa – seu domínio deve ser restrito a algum subconjunto de um período.

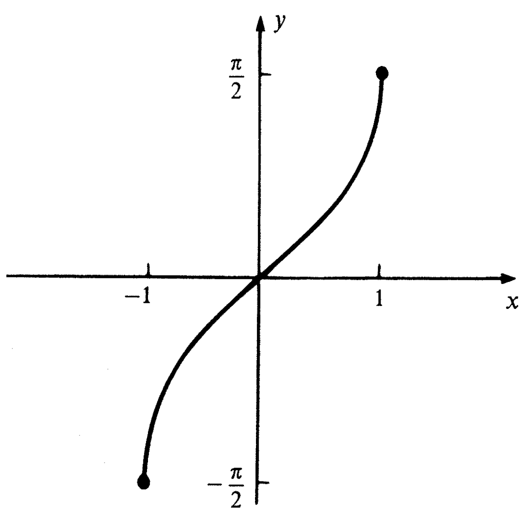
Inversa de Seno

O domínio de $f(x) = \text{sen}\, x$ é restrito a $[-\pi/2, \pi/2]$, no qual a função é um a um [de fato, crescente; ver Fig. 37-2(*a*)]. A inversa $f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1} x$ é chamada de *inversa do seno* de x (ou, algumas vezes, o *arco seno* de x, denotado por arc sen x ou arcsen x). Seu domínio é $[-1,1]$. Logo,

$$y = \text{sen}\, x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{sen}^{-1}\, y \quad (-1 \le y \le 1)$$



(*a*) $y = \operatorname{sen} x$



(*b*) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$

Fig. 37-2

O gráfico de $\operatorname{sen}^{-1} x$ é dado na Fig. 37-2(*b*). Por um teorema geral, a inversa de uma função crescente é ela mesma uma função crescente. O leitor achará isso útil quando imaginar $\operatorname{sen}^{-1} x$ como o ângulo (entre $-\pi/2$ e $\pi/2$) cujo seno é x.

Exemplos

(*a*) $\operatorname{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ (*b*) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ (*c*) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ (*d*) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

(*e*) $\operatorname{sen}^{-1} 0 = 0$ (*f*) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (*g*) $\operatorname{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

A derivada de $\operatorname{sen}^{-1} x$ pode ser encontrada pelo método geral do Problema 35.9(*b*). Neste caso, um cálculo bastante rápido é viável, usando derivação implícita. Seja $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Logo,

$$\operatorname{sen} y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$(\cos y)\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{[pela regra da cadeia]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}$$

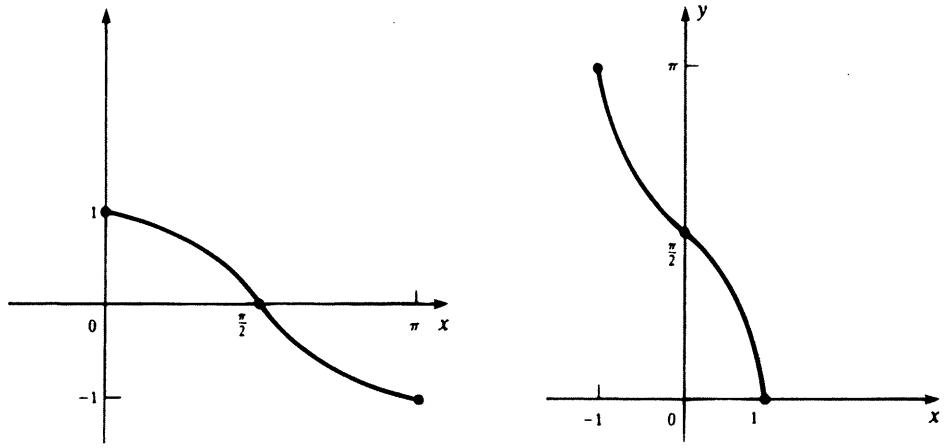
onde a raiz quadrada positiva ocorre porque $\cos y > 0$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Assim, temos

$$D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C \tag{37.1}$$

A importância da função inversa do seno no cálculo reside principalmente na fórmula de integração (*37.1*).

O procedimento para as outras funções trigonométricas é exatamente análogo ao usado na função seno. Em cada caso, uma restrição do domínio é escolhida de modo a permitir uma fórmula simples para a derivada da função inversa.

Inversa de Co-seno (Arco Co-seno)



(*a*) $y = \cos x$ (*b*) $y = \cos^{-1} x$

Fig. 37-3

$$y = \cos x \quad [0 \leq x \leq \pi] \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos^{-1} y \quad [-1 \leq y \leq 1]$$

Interprete $\cos^{-1} x$ como o ângulo (entre 0 e π) cujo co-seno é x. Seja $y = \cos^{-1} x$. Logo,

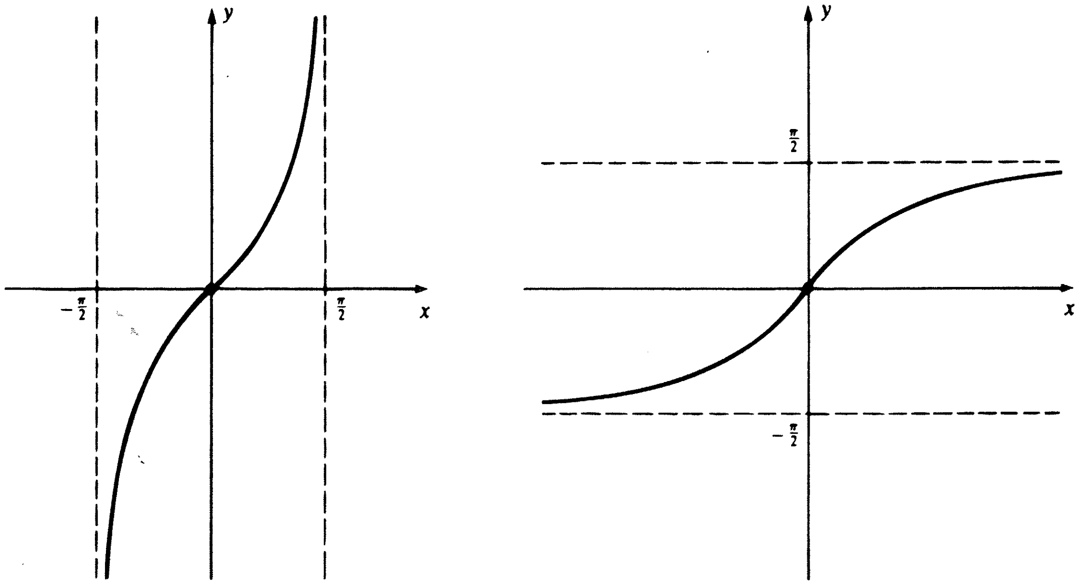
$$\cos y = x$$
$$D_x(\cos y) = D_x(x) = 1$$
$$-\operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Note que $\operatorname{sen} y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$ uma vez que $\operatorname{sen} y > 0$ quando $0 < y < \pi$. Assim

$$D_x(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1} x + C \tag{37.2}$$

Observe que $-\cos^{-1} x$ e $\operatorname{sen}^{-1} x$ têm a mesma derivada; ver Problema 37.17.

Inversa de Tangente (Arco Tangente)



(*a*) $y = \operatorname{tg} x$ (*b*) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

Fig. 37-4

$$y = \text{tg}\ x \quad \left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right] \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{tg}^{-1}\ y \quad [\text{para todos } y]$$

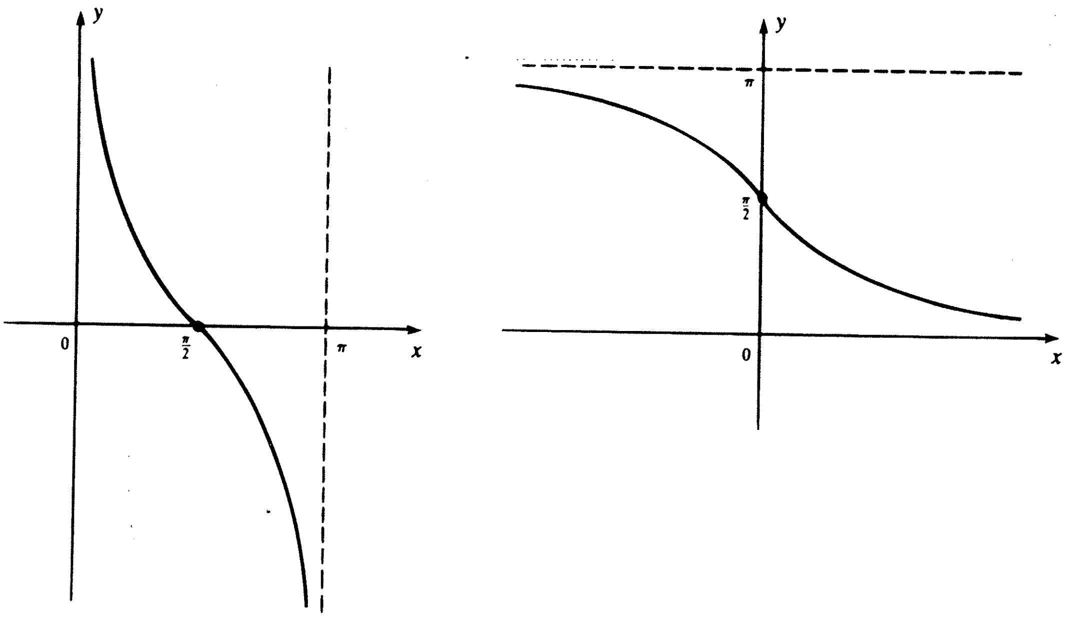
Interprete tg^{-1} como o ângulo (entre $-\pi/2$ e $\pi/2$) cuja tangente é x. Seja $y = \text{tg}^{-1}\ x$. Logo,

$$\text{tg}\ y = x$$
$$D_x(\text{tg}\ y) = 1$$
$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\ y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Assim,

$$D_x(\text{tg}^{-1}\ x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \text{tg}^{-1}\ x + C \tag{37.3}$$

Inversa de Co-tangente (Arco Co-tangente)



(a) $y = \text{cotg}\ x$

(b) $y = \text{cotg}^{-1}\ x$

Fig. 37-5

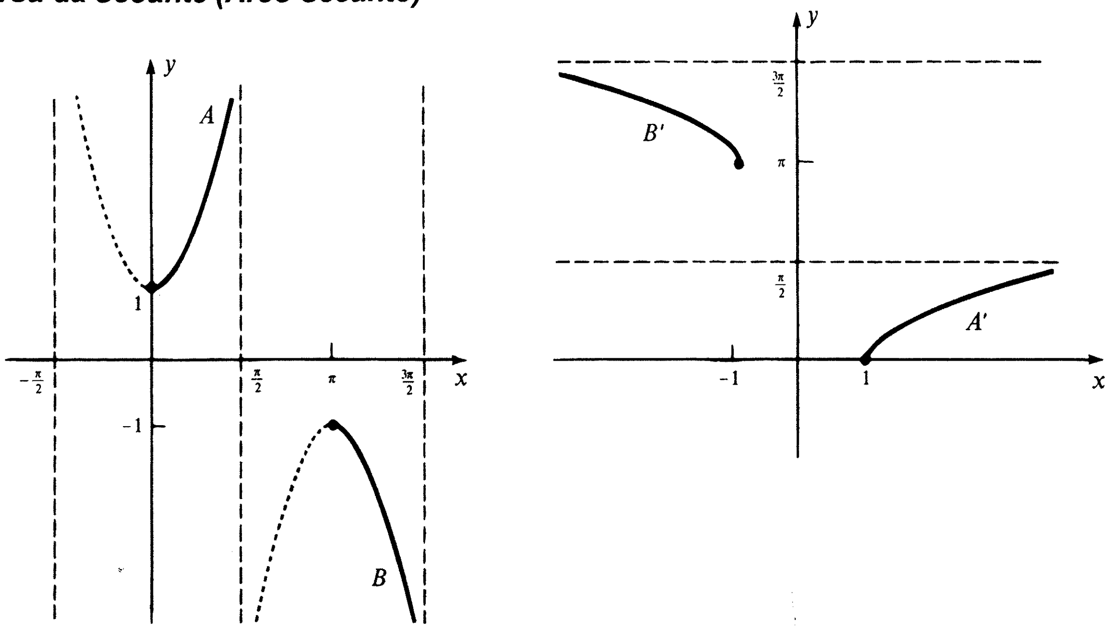
$$y = \text{cotg}\ x\ [0 < x < \pi] \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cotg}^{-1}\ y\ [\text{para todo } y]$$

Interprete cotg^{-1} como o ângulo (entre 0 e π) cuja co-tangente é x. Logo,

$$D_x(\text{cotg}^{-1}\ x) = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = -\text{cotg}^{-1}\ x + C \tag{37.4}$$

Para a relação entre cotg^{-1} e tg^{-1}, ver Problema 37.17.

Inversa da Secante (Arco Secante)



(a) $y = \sec x$ (b) $y = \sec^{-1} x$

Fig. 37-6

A função secante é restrita a dois subintervalos separados do período fundamental $(-\pi/2, 3\pi/2)$,

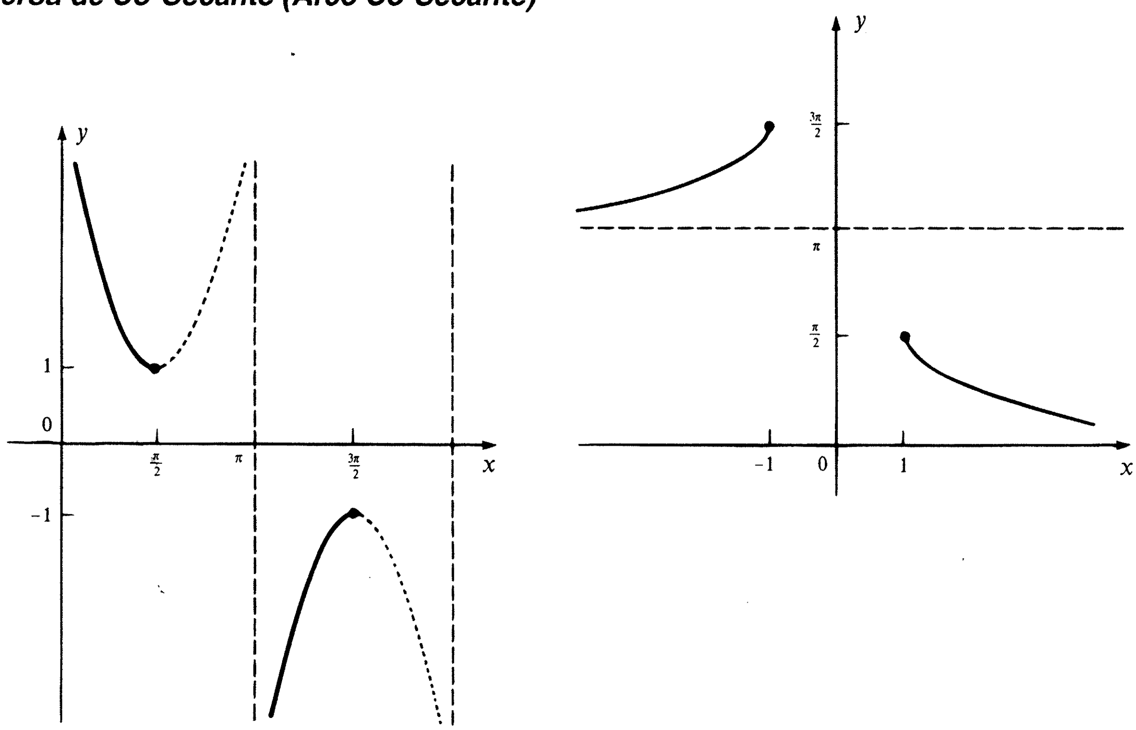
$$y = \sec x \begin{bmatrix} 0 \le x < \pi/2 \\ \text{ou} \\ \pi \le x < 3\pi/2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sec^{-1} y \quad [|y| \ge 1]$$

Interprete $\sec^{-1} x$ como o ângulo (no primeiro ou terceiro quadrante) cuja secante é x. Logo,

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \sec^{-1} x + C \tag{37.5}$$

Ver Problema 37.7.

Inversa de Co-Secante (Arco Co-Secante)



(a) $y = \csc x$ (b) $y = \csc^{-1} x$

Fig. 37-7

$$y = \csc x \quad \begin{bmatrix} 0 < x \le \pi/2 \\ \text{ou} \\ \pi < x \le 3\pi/2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \csc^{-1} y \quad [|y| \ge 1]$$

Interprete $\csc^{-1} x$ como o ângulo (no primeiro ou terceiro quadrante) cuja co-secante é x. Logo,

$$D_x(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = -\csc^{-1} x + C \tag{37.6}$$

Para a relação entre $\csc^{-1} x$ e $\sec^{-1} x$, ver Problema 37.17.

Problemas Resolvidos

37.1 Uma função um a um tem inversa. Prove, reciprocamente, que uma função com inversa é um a um.

Se o domínio de f consiste de um único ponto, não há nada a provar. Considere que f admite a inversa g, mas suponha, por absurdo, que o domínio de f contém dois números distintos, u e v, tais que $f(u) = f(v)$. Logo,

$$u = g(f(u)) = g(f(v)) = v$$

que é uma contradição. Devemos então admitir que $f(u) \neq f(v)$; ou seja, que f é um a um.

37.2 Determine se cada uma das seguintes funções é um a um. Se for, encontre uma fórmula para sua inversa f^{-1}.

(*a*) $f(x) = x^2 + 6x - 7$ (*b*) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (*c*) $f(x) = 5x^3 - 2$

(*a*) $f(x) = x^2 + 6x + 7 = (x + 7)(x - 1)$. Como $f(-7) = 0 = f(1)$, f não é um a um.

(*b*) Obviamente, $f(+1) = f(-1)$; f não é um a um.

(*c*) Se $y = 5x^3 - 2$, então,

$$y + 2 = 5x^3$$
$$\frac{y+2}{5} = x^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{y+2}{5}} = x$$

Assim, $f(x) = 5x^3 - 2$ tem uma inversa,

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+2}{5}}$$

e. assim, pelo Problema 37.1, f é um a um.

37.3 Determine fórmulas para as inversas das seguintes funções um a um:

(*a*) $f(x) = 10x - 4$ (*b*) $f(x) = 3e^x + 1$

(*a*) Seja $y = 10x - 4$. Logo,

$$y + 4 = 10x \quad \text{ou} \quad \frac{y+4}{10} = x$$

Portanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{y+4}{10}$$

(*b*) Seja $y = 3e^x + 1$. Logo,

$$y - 1 = 3e^x \quad \text{ou} \quad \frac{y-1}{3} = e^x \quad \text{ou} \quad \ln\frac{y-1}{3} = x$$

Assim,

$$f^{-1}(y) = \ln \frac{y-1}{3}$$

37.4 Determine os seguintes valores:

(a) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\text{tg}^{-1}(-1)$

(a) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ = o ângulo em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é $-\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

(b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ = o ângulo em $[0,\pi]$ cujo co-seno é $-\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

(c) $\text{tg}^{-1}(-1)$ = o ângulo em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuja tangente é $-1 = -\frac{\pi}{4}$.

37.5 Calcule: (a) $\text{cotg}^{-1}\sqrt{3}$; (b) $\sec^{-1} 2$; (c) $\csc^{-1}(2/\sqrt{3})$.

(a) $\text{cotg}^{-1}\sqrt{3}$ é o ângulo θ entre 0 e π tal que cotg $\theta = \sqrt{3}$. Esse ângulo é $\pi/6$ (ver Fig. 37-8). Note que uma função trigonométrica inversa deve ser representada por um ângulo *em radianos*.

(b) O ângulo θ cuja secante é +2 deve estar no primeiro quadrante. A função secante é negativa no terceiro quadrante. Da Fig. 37-8, $\theta = \pi/3$.

(c) O ângulo θ cuja co-secante é $+2/\sqrt{3}$ deve estar no primeiro quadrante. A função co-secante é negativa no terceiro quadrante. Da Fig. 37-8, $\theta = \pi/3$.

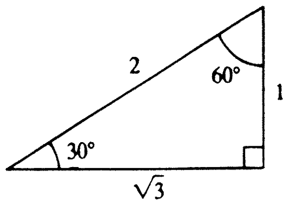


Fig. 37-8

37.6 Calcule as derivadas de:

(a) $\text{sen}^{-1} 2x$ (b) $\cos^{-1} x^2$ (c) $\text{tg}^{-1}\frac{x}{2}$ (d) $\sec^{-1} x^3$

(a)
$$D_x(\text{sen}^{-1} 2x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} D_x(2x) \quad \text{[pela regra da cadeia]}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}(2) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(b)
$$D_x(\cos^{-1} x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} D_x(x^2) \quad \text{[pela regra da cadeia]}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(c)
$$D_x\left(\text{tg}^{-1}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} D_x\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{[pela regra da cadeia]}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{4}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{4+x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4+x^2}$$

(*d*) $$D_x(\sec^{-1} x^3) = \frac{1}{x^3\sqrt{(x^3)^2 - 1}}\, D_x(x^3) \qquad \text{[pela regra da cadeia]}$$
$$= \frac{1}{x^3\sqrt{x^6 - 1}}(3x^2) = \frac{3}{x\sqrt{x^6 - 1}}$$

37.7 Assumindo que $\sec^{-1} x$ é diferenciável, verifique que $D_x(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Seja $y = \sec^{-1} x$. Logo,

$$\sec y = x$$
$$D_x(\sec y) = D_x(x)$$
$$(\sec y \operatorname{tg} y)\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{[pela regra da cadeia]}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} = \frac{1}{x \operatorname{tg} y}$$

Mas a identidade $1 + \operatorname{tg}^2 y = \sec^2 y$ nos dá

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = x^2 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2 y = x^2 - 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

Pela definição de $\sec^{-1} x$, o ângulo y está no primeiro ou terceiro quadrante, onde a tangente é positiva. Logo,

$$\operatorname{tg} y = +\sqrt{x^2 - 1} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

37.8 Prove as seguintes fórmulas para antiderivadas:

(*a*) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(*b*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad [a > 0]$$

(*c*) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad [a > 0]$$

NOTAÇÃO É comum escrever

$$\int \frac{dx}{f(x)} \quad \text{no lugar de} \quad \int \frac{1}{f(x)}\,dx$$

Em cada caso, empregamos a regra da cadeia para mostrar que a antiderivada da função à direita é o integrando à esquerda.

(*a*) $$D_x\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}D_x\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2}$$

(*b*) $$D_x\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left(\frac{1}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2}}\right) \qquad [a > 0 \text{ implica em } a = \sqrt{a^2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad [\sqrt{u}\sqrt{v} = \sqrt{uv}]$$

(c) $$D_x\left(\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}D_x\left(\sec^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2}}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

37.9 Calcule as seguintes antiderivadas:

(a) $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$ (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ (c) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ (d) $\int \frac{2x\,dx}{x^2 - 2x + 7}$

(a) Pelo Problema 37.8(a), com $a = 2$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

(b) Pelo Problema 37.8(b), com $a = 3$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} + C$$

(c) Complete o quadrado: $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$. Logo,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1}$$

Faça $u = x + 2$. Então $du = dx$ e

$$\int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{tg}^{-1} u + C = \operatorname{tg}^{-1}(x + 2) + C$$

(d) Complete o quadrado: $x^2 - 2x + 7 = (x - 1)^2 + 6$. Faça $u = x - 1$, $du = dx$, $2x = 2u + 2$. Logo,

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2 - 2x + 7} = \int \frac{2u + 2}{u^2 + 6}du = \int \frac{2u\,du}{u^2 + 6} + \int \frac{2\,du}{u^2 + 6}$$

$$= \ln(u^2 + 6) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{u}{\sqrt{6}} + C \qquad \text{[pela fórmula rápida II e pelo Problema 37.8(a)][1]}$$

$$= \ln(x^2 - 2x + 7) + \frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x - 1}{\sqrt{6}} + C$$

37.10 Calcule sen $(2\cos^{-1}(-\frac{1}{3}))$.

Seja $\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{3})$. Então, pelos Teoremas 26.8 e 26.1,

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2(\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta})(\cos\theta)$$

Pela definição da função $\cos^{-1}$, o ângulo θ está no segundo quadrante (seu co-seno é negativo), e assim seu seno é positivo. Portanto, o sinal positivo deve ser assumido na fórmula acima,

[1] Escrevemos $(u^2 + 6)$ no lugar de $|u^2 + 6|$ porque $u^2 + 6 > 0$.

$$\begin{aligned}\text{sen } 2\theta &= 2(\sqrt{1-\cos^2\theta})(\cos\theta) = 2\left(\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}\\ &= -\frac{2}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\end{aligned}$$

37.11 Mostre que sen^{-1} e tg^{-1} são funções ímpares.

Mais genericamente, podemos provar que se uma função um a um é ímpar (como o caso das funções restritas sen x e tg x, mas não da *restrita* cotg x), então sua inversa é ímpar. Com efeito, se f é um a um e ímpar e g é sua inversa, então

$$\begin{aligned}g(-f(x)) &= g(f(-x)) \quad [\text{já que } f(x) = -f(-x)]\\ &= -x \quad [\text{já que } g \text{ é a inversa de } f]\\ &= -g(f(x)) \quad [\text{já que } g \text{ é a inversa de } f]\end{aligned}$$

o que mostra que g é ímpar. (Poderia uma função um a um ser *par*?)

Problemas Complementares

37.12 Para cada uma das seguintes funções f, determine se é um a um; e se for, encontre uma fórmula para a inversa f^{-1}.

(*a*) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ (*b*) $f(x) = |x|$ (*c*) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x+2}$

(*d*) $f(x) = (x-1)^4$ (*e*) $f(x) = (x-1)^5$ (*f*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x}$ (*h*) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+4}$ (*i*) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

37.13 Calcule:

(*a*) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (*b*) $\text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (*c*) $\text{tg}^{-1}\, 1$ (*d*) $\text{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(*e*) $\sec^{-1}\sqrt{2}$ (*f*) $\sec^{-1}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ (*g*) $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$ (*h*) $\text{cotg}^{-1}(-1)$

(*i*) $\sec^{-1}(-2)$

37.14 (*a*) Seja $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. Encontre os valores de sen θ, tg θ, cotg θ, sec θ e csc θ.

(*b*) Seja $\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$. Encontre cos θ, tg θ, cotg θ, sec θ e csc θ.

37.15 Calcule os seguintes valores:

(*a*) $\text{sen}\left(\cos^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$ (*b*) $\text{tg}\left(\sec^{-1}\dfrac{13}{5}\right)$ (*c*) $\cos\left(\text{sen}^{-1}\dfrac{3}{5} + \sec^{-1} 3\right)$

(*d*) $\text{sen}\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{5} - \text{tg}^{-1} 2\right)$ (*e*) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\pi)$

[*Sugestões:* No item (*b*) $5^2 + 12^2 = 13^2$; no item (*c*) $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v$; o item (*e*) é uma questão ardilosa.]

37.16 Encontre o domínio e a imagem da função $f(x) = \cos(\text{tg}^{-1} x)$.

37.17 Derive:

(*a*) $\text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$ (*b*) $\text{tg}^{-1} x + \text{cotg}^{-1} x$ (*c*) $\sec^{-1} x + \csc^{-1} x$ (*d*) $\text{tg}^{-1} x + \text{tg}^{-1} \dfrac{1}{x}$

(*e*) Explique o significado de suas respostas.

37.18 Derive:

(*a*) $x\,\text{tg}^{-1} x$ (*b*) $\text{sen}^{-1} \sqrt{x}$ (*c*) $\text{tg}^{-1} (\cos x)$ (*d*) $\ln (\text{cotg}^{-1} 3x)$

(*e*) $e^x \cos^{-1} x$ (*f*) $\ln (\text{tg}^{-1} x)$ (*g*) $\csc^{-1} \dfrac{1}{x}$ (*h*) $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\, \text{sen}^{-1} \dfrac{x}{a}$

(*i*) $\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{a + x}{1 - ax}\right)$ (*j*) $\text{sen}^{-1} \dfrac{1}{x} + \sec^{-1} x$ (*k*) $\text{tg}^{-1} \dfrac{2}{x}$

37.19 Qual identidade é inferida pelo resultado do Problema 37.18(*i*)?

37.20 Calcule as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + x^2}$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$ (*c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ (*d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$

(*e*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 3)\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$ (*f*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$ (*g*) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 7x^2}$ (*h*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

(*i*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 16}}$ (*j*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2}}$ (*k*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}$ (*l*) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 + 9}$

(*m*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}}$ (*n*) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{6x - x^2}}$ (*o*) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + 8x + 20}$ (*p*) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2 - 2x + 4}$

(*q*) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 - x^4}}$ (*r*) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{4 + e^{2x}}$ (*s*) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{5 + \text{sen}^2 x}$ (*t*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$

[*Sugestões:* (*b*) Faça $u = 3x$; (*d*) faça $u = 4x$; (*e*) faça $u = x - 3$; (*l*) faça $u^2 = x^4 + 9$; (*m*) complete o quadrado em $x^2 - 6x$; (*n*) $D_x(6x - x^2) = 6 - 2x$; (*p*) divida x^3 por $x^2 - 2x + 4$.]

37.21 Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico de $y = \text{sen}^{-1} (x/3)$ na origem.

37.22 Uma escada com 13 pés de comprimento se apóia contra uma parede. A base da escada está se afastando da base da parede à taxa de 5 pés por segundo. Quanto varia a medida em radianos do ângulo entre a escada e o chão no momento em que a base da escada está a 12 pés da base da parede?

37.23 O raio de luz de um farol a três milhas de uma costa retilínea gira à taxa de 5 revoluções por minuto. Qual a velocidade do ponto P que o raio de luz atinge na costa quando este ponto está a 4 milhas do ponto A da costa que é projeção ortogonal do farol (ver Fig. 37-9)?

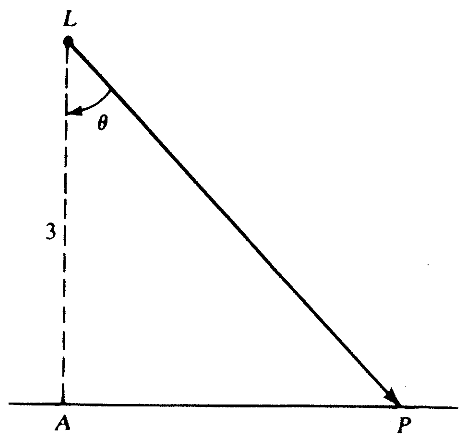


Fig. 37-9

37.24 Calcule a área sob a curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ acima do eixo x e entre as retas $x = 0$ e $x = 1$.

37.25 Calcule a área sob a curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ acima do eixo x e entre as retas $x = 0$ e $x = 1/2$.

37.26 A região $\mathscr{R}$ sob a curva $y = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ acima do eixo x e entre as retas $x = 2/\sqrt{3}$ e $x = 2$, gira em torno do eixo y. Calcule o volume do sólido resultante.

37.27 Use a fórmula de comprimento de arco (*32.2*) para encontrar a circunferência de um círculo de raio r. [*Sugestão:* Determine o comprimento do arco da parte do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ no primeiro quadrante e multiplique por 4.]

37.28 Uma pessoa está vendo uma pintura pendurada em uma parede. A dimensão vertical da pintura é de 2 pés e a base da mesma está 2 pés acima do nível dos olhos do observador. Determine a distância x que o observador deveria ficar da parede para maximizar o tamanho angular θ da pintura. [*Sugestão:* Expresse θ como a diferença entre duas inversas da função cotangente; ver Fig. 37.10.]

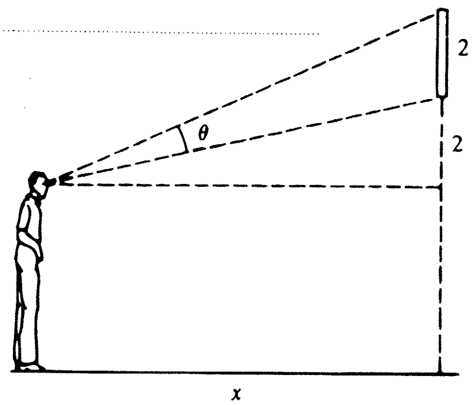


Fig. 37-10

37.29 Para quais valores de x que cada uma das seguintes equações é verdadeira?

(*a*) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x$ (*b*) $\cos^{-1}(\cos x) = x$ (*c*) $\text{sen}^{-1}(-x) = -\text{sen}^{-1} x$

(*d*) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$ (*e*) $\cos(\cos^{-1} x) = x$

(*f*) CG Use uma calculadora gráfica para desenhar o gráfico de $y = \text{sen}^{-1} x$ e reveja sua resposta ao item (*a*).

37.30 Calcule y' por derivação implícita:

(*a*) $x^2 - x\,\text{tg}^{-1} y = \ln y$ (*b*) $\cos^{-1} xy = e^{2y}$

37.31 Esboce o gráfico de $y = \text{tg}^{-1} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

37.32 Assumindo que cotg^{-1} e $\csc^{-1}$ são diferenciáveis, use derivação implícita para obter as fórmulas para suas derivadas.

37.33 Calcule os valores médios de $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ em [–2,2].

37.34 (*a*) Mostre que $\pi = \displaystyle\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2}$. (*b*) Aproxime π usando a regra de Simpson para a integral definida no item (*a*), com $n = 8$.

Capítulo 38

Integração por Partes

Neste capítulo aprenderemos uma das técnicas mais úteis para determinar antiderivadas. Sejam f e g funções diferenciáveis. A regra do produto nos diz que

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

ou, em termos de antiderivadas,

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g'(x) + g(x)f'(x))\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx$$

As substituições $u = f(x)$ e $v = g(x)$ transformam isso em[1]

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du$$

da qual obtemos

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \textit{integração por partes}$$

A idéia por trás da integração por partes é trocar uma integração "difícil" $\int u\, dv$ por uma integração $\int v\, du$. fácil.

[1] Por exemplo, $\int f(x)g'(x)\, dx = \int u\, dv$, onde, no resultado da integração à direita, substituímos u por $f(x)$ e v por $g(x)$. De fato, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}\left(\int u\, dv\right) = \frac{d}{dv}\left(\int u\, dv\right) \cdot \frac{dv}{dx} = u \cdot \frac{d}{dx}[g(x)] = f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)g'(x)\, dx\right)$$

Logo, $\int u\, dv = \int f(x)g'(x)\, dx$. Analogamente, $\int v\, du = \int g(x)f'(x)\, dx$.

Exemplos

(*a*) Calcule $\int xe^x\,dx$. Isso terá a forma $\int u\,dv$ se escolhermos

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = e^x\,dx$$

Como $dv = v'(x)\,dx$ e $dv = e^x\,dx$, devemos ter $v'(x) = e^x$. Logo,

$$v = \int e^x\,dx = e^x + C$$

e assumimos o caso mais simples, $C = 0$, fazendo $v = e^x$.

Como $du = dx$, o procedimento de integração por partes assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int u\,dv &= uv - \int v\,du\\ \int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C\end{aligned}$$

A integração por partes pode ser feita mais facilmente se fizermos um quadro como o que segue abaixo para o exemplo (*a*) dado acima:

$u = x$	$dv = e^x\,dx$
$du = dx$	$v = e^x$

Na primeira linha, colocamos u e dv. Na segunda linha, escrevemos du e v. O resultado $uv - \int v\,du$ é obtido a partir do quadro, multiplicando o canto esquerdo superior u pelo canto direito inferior v e então subtraindo a integral $\int v\,du$ das duas entradas da segunda linha.

Note que tudo depende de uma escolha adequada de u e v. Se tivéssemos, por exemplo, considerado $u = e^x$ e $dv = x\,dx$, então $v = \int x\,dx = x^2/2$ e teríamos

$$\int xe^x\,dx = e^x\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

o que é válido, mas de pouco uso para calcular $\int xe^x\,dx$. Teríamos substituído a integração "difícil" $\int xe^x\,dx$ pela integração ainda mais "difícil" $\int (x^2/2)e^x\,dx$.

(*b*) Determine $\int x\ln x\,dx$. Tentemos $u = \ln x$ e $dv = x\,dx$:

$u = \ln x$	$dv = x\,dx$
$du = \frac{1}{x}\,dx$	$v = \frac{x^2}{2}$

Logo, $v = \int x\,dx = x^2/2$. Assim,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x \ln x\, dx = (\ln x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

(*c*) Calcule $\int \ln x\, dx$. Tentemos $u = \ln x$ e $dv = dx$:

$u = \ln x$	$dv = dx$
$du = \dfrac{1}{x}\, dx$	$v = x$

Logo, $v = \int dx = x$. Assim,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

(*d*) Às vezes duas integrações por partes são necessárias.* Considere $\int e^x \cos x\, dx$. Faça $u = e^x$ e $dv = \cos x\, dx$:

$u = e^x$	$dv = \cos x\, dx$
$du = e^x\, dx$	$v = \operatorname{sen} x$

Logo,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \qquad (1)$$

Tentemos determinar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ por outra integração por partes. Faça $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$:

$u = e^x$	$dv = \operatorname{sen} x\, dx$
$du = e^x\, dx$	$v = -\cos x$

Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x - \int (-e^x \cos x)\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

* N. de T.: Às vezes, muito mais do que duas integrações por partes são necessárias.

Substitua essa expressão para $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ em (*1*) e resolva a equação resultante, isolando a antiderivada pedida,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right)$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$$

Problemas Resolvidos

38.1 Calcule $\int xe^{-x} \, dx$.

Faça

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-x}\,dx \\ du = dx & v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} \end{array}}$$

Integração por partes nos dá

$$\int xe^{-x} \, dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) \, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

Outro método consistiria em fazer a mudança de variáveis $x = -t$ e usar o exemplo (*a*) deste Capítulo.

38.2 (*a*) Estabeleça a *fórmula de redução*

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \, dx \qquad (2)$$

para $\int x^n e^x \, dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

(*b*) Calcule $\int x^2 e^x \, dx$.

(*a*) Faça

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^n & dv = e^x\,dx \\ du = nx^{n-1}\,dx & v = e^x \end{array}}$$

e integre por partes,

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int e^x(nx^{n-1}) \, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \, dx$$

(*b*) Para $n = 1$, (*2*) nos dá

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

como no exemplo (*a*). Omitimos a constante arbitrária C até o final do cálculo. Agora faça $n = 2$ em (*2*),

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2((x-1)e^x)\\ &= (x^2 - 2(x-1))e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x + C\end{aligned}$$

38.3 Calcule $\int \operatorname{tg}^{-1} x\,dx$.

Faça

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{tg}^{-1} x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx & v = x \end{array}}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{-1} x\,dx &= x\operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= x\operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= x\operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \qquad \text{[pela fórmula rápida II, Problema 34.5]}\\ &= x\operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad [\text{já que } 1 + x^2 > 0]\end{aligned}$$

38.4 Calcule $\int \cos^2 x\,dx$.

Faça

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \cos x & dv = \cos x\,dx \\ du = -\operatorname{sen} x\,dx & v = \operatorname{sen} x \end{array}}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \cos x \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)\,dx\\ &= \cos x\operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\,dx\\ &= \cos x\operatorname{sen} x + \int (1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \cos x\operatorname{sen} x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx\end{aligned}$$

Isolando $\int \cos^2 x\,dx$,

$$2\int \cos^2 x\,dx = \cos x\operatorname{sen} x + \int 1\,dx = \cos x\operatorname{sen} x + x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\cos x\operatorname{sen} x + x) + C$$

Esse resultado é mais facilmente obtido pelo uso do Teorema 26.8,

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + 1)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen } 2x}{2} + x\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2 \text{ sen } x \cos x}{2} + x\right) + C = \frac{1}{2}(\text{sen } x \cos x + x) + C$$

38.5 Calcule $\int x \text{ tg}^{-1} x\, dx$.

Faça

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \text{tg}^{-1} x & dv = x\, dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Logo,

$$\int x \text{ tg}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\text{ tg}^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

Mas

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

e, assim,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = x - \text{tg}^{-1} x + C$$

Portanto,

$$\int x \text{ tg}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\text{ tg}^{-1} x - \frac{1}{2}(x - \text{tg}^{-1} x) + C_1$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 \text{ tg}^{-1} x - (x - \text{tg}^{-1} x)) + C_1$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 \text{ tg}^{-1} x - x + \text{tg}^{-1} x) + C_1$$
$$= \frac{1}{2}((\text{tg}^{-1} x)(x^2+1) - x) + C_1$$

Problemas Complementares

38.6 Calcule:

(*a*) $\int x^2 e^{-x}\, dx$ (*b*) $\int e^x \text{ sen } x\, dx$ (*c*) $\int x^3 e^x\, dx$ (*d*) $\int \text{sen}^{-1} x\, dx$

(*e*) $\int x \cos x\, dx$ (*f*) $\int x^2 \text{ sen } x\, dx$ (*g*) $\int \cos(\ln x)\, dx$ (*h*) $\int x \cos(5x - 1)\, dx$

(*i*) $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ (*j*) $\int \text{sen}^2 x\, dx$ (*k*) $\int \cos^3 x\, dx$ (*l*) $\int \cos^4 x\, dx$

(*m*) $\int x e^{3x}\, dx$ (*n*) $\int x \sec^2 x\, dx$ (*o*) $\int x \cos^2 x\, dx$ (*p*) $\int (\ln x)^2\, dx$

(*q*) $\int x \text{ sen } 2x\, dx$ (*r*) $\int x \text{ sen } x^2\, dx$ (*s*) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ (*t*) $\int x^2 e^{3x}\, dx$

(*u*) $\int x^2 \text{ tg}^{-1} x\, dx$ (*v*) $\int \ln(x^2+1)\, dx$ (*w*) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ (*x*) $\int x^2 \ln x\, dx$

[*Sugestão:* Integração por partes não é um método adequado para o item (*r*).]

38.7 Seja $\mathscr{R}$ a região delimitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pela reta $x = e$. (*a*) Determine a área de $\mathscr{R}$. (*b*) Encontre o volume gerado pela revolução de $\mathscr{R}$ em torno (i) do eixo x; (ii) do eixo y.

38.8 Seja $\mathscr{R}$ a região delimitada pela curva $y = x^{-1} \ln x$, pelo eixo x e pela reta $x = e$. Calcule: (*a*) a área de $\mathscr{R}$; (*b*) o volume do sólido gerado pela rotação de $\mathscr{R}$ em torno do eixo y; (*c*) o volume do sólido gerado pela rotação de $\mathscr{R}$ em torno do eixo x. [*Sugestão:* No item (*c*), na integral do volume, faça $u = (\ln x)^2$, $v = -1/x$ e use o Problema 38.6(*s*).]

38.9 Obtenha, a partir do Problema 38.8(*c*), os extremos (adequados): $2{,}5 \leq e \leq 2{,}823$. [*Sugestão:* Pelo Problema 30.3(*c*),

$$0 \leq \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \leq \frac{e-1}{e^2} \quad \text{ou} \quad 0 \leq 2 - \frac{5}{e} \leq \frac{e-1}{e^2}$$

A desigualdade do lado esquerdo nos dá $e \geq \frac{5}{2}$; a desigualdade do lado direito nos dá $e \leq (3 + \sqrt{7})/2$.]

38.10 Seja $\mathscr{R}$ a região sob um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$, acima do eixo x e entre $x = 0$ e $x = \pi$. Encontre o volume do sólido gerado pela revolução de $\mathscr{R}$ em torno do: (*a*) eixo x; (*b*) eixo y.

38.11 Se n é um inteiro positivo, determine:

(*a*) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx$ (*b*) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$

38.12 Para $n = 2, 3, 4, \ldots$, encontre fórmulas de redução para:

(*a*) $\displaystyle\int \cos^n x \, dx$ (*b*) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x \, dx$

(*c*) Use essas fórmulas para verificar as respostas aos Problemas 38.4, 38.6(*k*), 38.6(*l*) e 38.6(*j*).

38.13 (*a*) Encontre uma fórmula de redução para $\int \sec^n x \, dx$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. (*b*) Use essa fórmula, junto com o Problema 34.7, para calcular: (i) $\int \sec^3 x \, dx$; (ii) $\int \sec^4 x \, dx$.

Capítulo 39

Integrandos Trigonométricos e Substituições Trigonométricas

39.1 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Já conhecemos as antiderivadas de algumas combinações simples das funções trigonométricas básicas. Em particular, deduzimos todas as fórmulas dadas na segunda coluna do Apêndice B. Examinemos agora alguns casos mais complicados.

Exemplos

(*a*) Considere $\int \operatorname{sen}^k x \cos^n x\, dx$, onde os inteiros não-negativos k e n *não são pares*. Se, digamos, k for ímpar ($k = 2j + 1$), reescreva a integral como

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2j} x \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^j \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^j \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

Agora, a mudança de variáveis, $u = \cos x$ e $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, produz um integrando polinomial. (Para n ímpar, a substituição $u = \operatorname{sen} x$ deveria ser feita.) Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \operatorname{sen}^5 x\, dx &= \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int u^2(1 - u^2)^2(-1)\, du = -\int u^2(1 - 2u^2 + u^4)\, du \\ &= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du = -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$

(*b*) Considere a mesma antiderivada do item (*a*), mas *ambos, k e n, pares*; digamos, $k = 2p$ e $n = 2q$. Então, tendo em vista as identidades de meio-ângulo

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^k x \cos^n x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^p(\cos^2 x)^q\, dx \\ &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx \\ &= \frac{1}{2^{p+q}}\int (1-\cos 2x)^p(1+\cos 2x)^q\, dx\end{aligned}$$

Quando os binômios são desenvolvidos, o integrando se revelará como um polinômio em $\cos 2x$,

$$1 + (q-p)(\cos 2x) + \cdots \pm (\cos 2x)^{p+q}$$

e assim,

$$\int \operatorname{sen}^k x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2^{p+q}}\left[\int 1\, dx + (q-p)\int (\cos 2x)\, dx + \cdots \pm \int (\cos 2x)^{p+q}\, dx\right] \tag{1}$$

Do lado direito de (*1*) estão antiderivadas de *potências ímpares* de $\cos 2x$, as quais podem ser calculadas pelo método do exemplo (*a*), e antiderivadas de *potências pares* de $\cos 2x$, nas quais a fórmula de meio-ângulo pode ser empregada novamente. Assim, no caso da potência sexta, teríamos

$$\int (\cos 2x)^6\, dx = \int (\cos^2 2x)^3\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^3 dx$$

e expandiríamos o polinômio em $\cos 4x$, e assim por diante. Eventualmente o processo deve terminar em uma resposta final, como mostrado no seguinte caso específico:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int (\cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\int (1(1-2\cos 2x+\cos^2 2x) + (\cos 2x)(1-2\cos 2x+\cos^2 2x))\, dx \\ &= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x+\cos 2x-2\cos^2 2x+\cos^3 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\int 1\, dx - \int \cos 2x\, dx - \int \cos^2 2x\, dx + \int \cos^3 2x\, dx\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx + \int (\cos 2x)(1-\operatorname{sen}^2 2x)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x+\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + \int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int u^2\, du\right) \text{ [fazendo } u = \operatorname{sen} 2x] \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}\right) + C \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right) + C \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C\end{aligned}$$

(*c*) Do Problema 34.6(*a*), sabemos como integrar a primeira potência de $\operatorname{tg} x$,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x| + C$$

Potências maiores são tratadas por meio de uma fórmula de redução. Temos, para $n = 2, 3, \ldots$,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^n x\,dx &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx\\ &= \int u^{n-2}\,du - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \qquad [\operatorname{sen} u = \operatorname{tg} x]\\ &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \end{aligned} \tag{39.1}$$

Analogamente, a partir de

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

e da fórmula de redução do Problema 38.13(a) podemos integrar todas as potências de $\sec x$.

(d) Antiderivadas das formas $\int \operatorname{sen} Ax \cos Bx\,dx$, $\int \operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx\,dx$ e $\int \cos Ax \cos Bx\,dx$ podem ser desenvolvidas usando-se as identidades

$$\operatorname{sen} Ax \cos Bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B)x + \operatorname{sen}(A-B)x)$$

$$\operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx = \frac{1}{2}(\cos(A-B)x - \cos(A+B)x)$$

$$\cos Ax \cos Bx = \frac{1}{2}(\cos(A-B)x + \cos(A+B)x)$$

Por exemplo,

$$\int \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos 5x - \cos 11x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \frac{\operatorname{sen} 11x}{11}\right) + C$$

39.2 SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para encontrar a antiderivada de uma função envolvendo expressões tais como $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$, é geralmente útil substituir x por uma função trigonométrica.

Exemplos

(a) Calcule $\int \sqrt{x^2+2}\,dx$.

Nenhum dos métodos já disponíveis é aplicável aqui. Façamos a substituição $\sqrt{2}$, onde $-\pi/2 < \theta < +/2$. Equivalentemente, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(x/\sqrt{2})$. A Fig. 39-1 ilustra a relação entre x e θ, com θ interpretado como um ângulo. Temos $dx\sqrt{2} = \sec^2\theta\,d\theta$ e, da Fig. 39-1,

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} = \sec\theta \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2}\sec\theta$$

onde $\sec\theta > 0$ (uma vez que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Assim,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2}\,dx &= \int (\sqrt{2}\sec\theta)(\sqrt{2}\sec^2\theta)\,d\theta = 2\int \sec^3\theta\,d\theta\\ &= \sec\theta\operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C \qquad [\text{pelo Problema } 38.13(b)]\\ &= \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{2}} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right| + C\\ &= \frac{x\sqrt{x^2+2}}{2} + \ln\frac{|\sqrt{x^2+2}+x|}{\sqrt{2}} + C \qquad \left[\text{já que}\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\right]\\ &= \frac{x\sqrt{x^2+2}}{2} + \ln|\sqrt{x^2+2}+x| - \ln\sqrt{2} + C\\ &= \frac{x\sqrt{x^2+2}}{2} + \ln|\sqrt{x^2+2}+x| + C_1\end{aligned}$$

Observe como a constante $-\ln\sqrt{2}$ foi absorvida no termo constante no último passo. A notação de valor absoluto no logaritmo pode ser eliminada uma vez que $\sqrt{x^2+2}+x>0$ para todo x. Isso segue do fato de que $\sqrt{x^2+2}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$.

Esse exemplo ilustra a seguinte regra geral: *Se* $\sqrt{x^2+a^2}$ *ocorre em um integrando, tente a substituição* $x = a$ tg θ *com* $-(\pi/2) < \theta < (\pi/2)$.

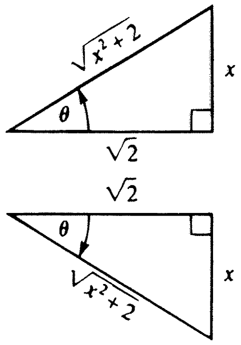


Fig. 39-1

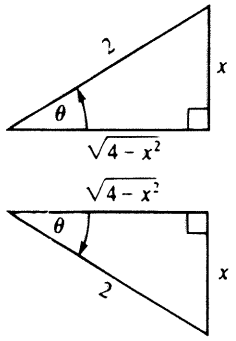


Fig. 39-2

(*b*) Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$.

Faça a substituição $x = 2$ sen θ, onde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$; ou seja, $\theta = \text{sen}^{-1}(x/2)$. A interpretação de θ em termos de ângulo é mostrada na Fig. 39-2. Mas $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ e

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \frac{\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\theta}}{2\,\text{sen}\,\theta} = \frac{2\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}{2\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \text{cotg}\,\theta$$

Note que $\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$, uma vez que $\theta \geq 0$ quando $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx &= \int (\text{cotg}\,\theta)(2\cos\theta)\,d\theta = 2\int\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)(\cos\theta)\,d\theta \\
&= 2\int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta = 2\int\frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta = 2\left(\int \csc\theta\,d\theta - \int \text{sen}\,\theta\,d\theta\right) \\
&= 2(\ln|\csc\theta - \text{cotg}\,\theta| + \cos\theta) + C \\
&= 2\left(\ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + C \\
&= 2\ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C
\end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra a seguinte regra geral: *Se* $\sqrt{a^2-x^2}$ *ocorre em um integrando, tente a substituição* $x = a$ sen θ *com* $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

(*c*) Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$.

Seja $x = 2\sec\theta$, onde $0 \leq \theta < \pi/2$ ou $\pi \leq \theta < 3\pi/2$; ou seja, $\theta = \sec^{-1}$. Então $dx = 2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{\sec^2\theta - 1} = 2\sqrt{\text{tg}^2\theta} = 2|\text{tg}\,\theta| = 2\,\text{tg}\,\theta$$

Observe que tg $\theta > 0$, uma vez que θ está no primeiro o terceiro quadrante. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx &= \int \frac{2\,\text{tg}\,\theta}{8\sec^3\theta}(2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\text{tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \text{sen}^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta) + C = \frac{1}{4}\left(\sec^{-1}\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\frac{2}{x}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\left(\sec^{-1}\frac{x}{2} - \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

A regra geral ilustrada por esse exemplo é: *Se* $\sqrt{x^2 - a^2}$ *ocorre em um integrando, tente a substituição* $x = a \sec \theta$, *com* $0 < \theta < (\pi/2)$ *ou* $\pi \leq \theta < 3\pi/2$.

Problemas Resolvidos

39.1 Calcule $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$.

O expoente de sen x é ímpar. Logo, faça $u = \cos x$. Desse modo, $du = -\text{sen}\, x\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \text{sen}^2 x \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx \\ &= -\int (1 - u^2) u^2 \, du = \int (u^4 - u^2) \, du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

39.2 Calcule $\int \cos^4 x \,\text{sen}^4 x \, dx$.

Os expoentes são ambos pares; além disso são iguais. Isso permite um aperfeiçoamento no método da Seção 39.1, exemplo (*b*).

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \,\text{sen}^4 x \, dx &= \int \left(\frac{\text{sen}\, 2x}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16} \int \text{sen}^4 2x \, dx \\ &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{64} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) \, dx \\ &= \frac{1}{64} \left(\int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos u \, du + \frac{1}{4} \int \cos^2 u \, du \right) \qquad [\text{fazendo } u = 4x] \\ &= \frac{1}{64} \left(x - \frac{1}{2} \text{sen}\, u + \frac{1}{8} (u + \text{sen}\, u \cos u) \right) \\ &= \frac{1}{64} \left(x - \frac{1}{2} \text{sen}\, 4x + \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\, 4x \cos 4x}{8} \right) + C \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{3x}{2} - \frac{\text{sen}\, 4x}{2} + \frac{\text{sen}\, 8x}{16} \right) + C \\ &= \frac{1}{128} \left(3x - \text{sen}\, 4x + \frac{\text{sen}\, 8x}{8} \right) + C\end{aligned}$$

39.3 Calcule: (*a*) $\int \cos^5 x \, dx$; (*b*) $\int \text{sen}^4 x \, dx$.

(*a*) $$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x (\cos x) \, dx = \int (\cos^2 x)^2 (\cos x) \, dx \\ &= \int (1 - \text{sen}^2 x)^2 (\cos x) \, dx = \int (1 - 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x)(\cos x) \, dx\end{aligned}$$

Faça $u = \text{sen}\, x$. Logo, $du = \cos x \, dx$ e

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \\ &= \text{sen}\, x - \frac{2\,\text{sen}^3 x}{3} + \frac{\text{sen}^5 x}{5} + C\end{aligned}$$

(*b*) Essa antiderivada foi essencialmente obtida no Problema 39.2,

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = 2\int \operatorname{sen}^4 (2u)\, du \qquad \left[\text{seja } u = \frac{x}{2}\right]$$
$$= 2 \cdot \frac{16}{128}\left(3u - \operatorname{sen} 4u + \frac{\operatorname{sen} 8u}{8}\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} - \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right) + C$$

39.4 Calcule $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

A partir da fórmula de redução (*39.1*),

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int \operatorname{tg} x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\sec x|$$
$$\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C$$

39.5 Mostre como determinar $\int \operatorname{tg}^p x \sec^q x\, dx$: (*a*) quando q é par; (*b*) quando p é ímpar. (*c*) Ilustre ambas as técnicas com $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx$ e mostre que as duas respostas são equivalentes.

(*a*) Seja $q = 2r$ ($r = 1, 2, 3, \ldots$). Logo

$$\int \operatorname{tg}^p x \sec^{2r} x\, dx = \int \operatorname{tg}^p x \sec^{2(r-1)} x(\sec^2 x)\, dx$$
$$= \int \operatorname{tg}^p x(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{r-1}(\sec^2 x)\, dx$$

uma vez que $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$. Agora, a substituição $u = \operatorname{tg} x$, $du = \sec^2 x\, dx$, produz um integrando polinomial.

(*b*) Seja $p = 2s + 1$ ($s = 0, 1, 2, \ldots$). Logo,

$$\int \operatorname{tg}^{2s+1} x \sec^q x\, dx = \int \operatorname{tg}^{2s} x \sec^{q-1} x(\sec x \operatorname{tg} x)\, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)^s \sec^{q-1} x(\sec x \operatorname{tg} x)\, dx$$

uma vez que $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$. Agora faça $v = \sec x$ e $dv = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$, para obter um integrando polinomial.

(*c*) De acordo com o item (*a*),

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)(\sec^2 x)\, dx$$
$$= \int u^3(1 + u^2)\, du = \int (u^3 + u^5)\, du$$
$$= \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C$$

De acordo com o item (*b*),

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x(\sec x \operatorname{tg} x)\, dx$$
$$= \int (v^2 - 1)v^3\, dv = \int (v^5 - v^3)\, dv$$
$$= \frac{v^6}{6} - \frac{v^4}{4} + C = \frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

Como $1 + u^2 = v^2$,

$$\frac{v^6}{6} - \frac{v^4}{4} = \frac{4v^6 - 6v^4}{24} = \frac{4(1 + u^2)^3 - 6(1 + u^2)^2}{24}$$

ÁLGEBRA	$(1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$

$$= \frac{4(1+3u^2+3u^4+u^6) - 6(1+2u^2+u^4)}{24}$$

$$= \frac{4+12u^2+12u^4+4u^6-6-12u^2-6u^4}{24}$$

$$= \frac{6u^4+4u^6-2}{24} = \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} - \frac{1}{12}$$

e assim as duas expressões para $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx$ são equivalentes. (O $-\frac{1}{12}$ é absorvido pela constante arbitrária C.)

39.6 Calcule $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$.

O Problema 39.5 não ajuda nada aqui.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx = \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \qquad \text{[pelo Problema 38.13(}b\text{)]}$$

$$= \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

39.7 Prove a identidade trigonométrica sen $Ax \cos Bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B)x + \operatorname{sen}(A-B)x)$.

As fórmulas de soma e diferença do Teorema 26.6 nos dão

$$\operatorname{sen}(A+B)x = \operatorname{sen}(Ax+Bx) = \operatorname{sen} Ax \cos Bx + \cos Ax \operatorname{sen} Bx$$
$$\operatorname{sen}(A-B)x = \operatorname{sen}(Ax-Bx) = \operatorname{sen} Ax \cos Bx - \cos Ax \operatorname{sen} Bx$$

e assim, por adição, $\operatorname{sen}(A+B)x + \operatorname{sen}(A-B)x = 2 \operatorname{sen} Ax \cos Bx$.

39.8 Calcule o valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx\, dx$ para inteiros positivos n e k.

Caso 1: $n \neq k$. Pelo Problema 39.7, com $A = n$ e $B = k$,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}(n+k)x + \operatorname{sen}(n-k)x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n+k)x}{n+k} + \frac{\cos(n-k)x}{n-k}\right)\Bigg]_0^{2\pi} = 0$$

pois cos px é, para p inteiro, uma função periódica de período 2π.

Caso 2: $n = k$. Logo, pela fórmula do ângulo duplo para a função seno,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2nx\, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2nx}{2n}\right)\Bigg]_0^{2\pi} = 0$$

39.9 Calcule $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

A presença de $\sqrt{x^2+9}$ sugere fazer $x = 3 \operatorname{tg} \theta$. Assim, $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$, e

$$\sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\operatorname{tg}^2\theta + 9} = \sqrt{9(\operatorname{tg}^2\theta + 1)} = 3\sqrt{\sec^2\theta} = 3\sec\theta$$

Logo,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}\right| + C$$

$$= \ln|\sqrt{x^2+9} + x| + K = \ln(\sqrt{x^2+9} + x) + K$$

NOTA $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}\right| = \ln|\sqrt{x^2+9}+x| - \ln 3$

e a constante – ln 3 pode ser absorvida pela constante arbitrária K. Além disso,

$$\sqrt{x^2+9}+x>0$$

39.10 Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}}$.

A presença de $\sqrt{3-x^2}$ sugere a substituição $x=\sqrt{3}$ sen θ. Desse modo, $dx=\sqrt{3}\cos\theta\, d\theta$.

$$\sqrt{3-x^2}=\sqrt{3-3\,\text{sen}^2\theta}=\sqrt{3(1-\text{sen}^2\theta)}=\sqrt{3}\sqrt{\cos^2\theta}=\sqrt{3}\cos\theta$$

e
$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}}=\int\frac{\sqrt{3}\cos\theta\, d\theta}{(3\,\text{sen}^2\theta)(\sqrt{3}\cos\theta)}=\frac{1}{3}\int\frac{d\theta}{\text{sen}^2\theta}=\frac{1}{3}\int\csc^2\theta\, d\theta$$
$$=-\frac{1}{3}\cot\theta+C$$

Mas
$$\text{cotg}\,\theta=\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}=\frac{\sqrt{3-x^2}/\sqrt{3}}{x/\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3-x^2}}{x}$$

Logo ,
$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}}=-\frac{\sqrt{3-x^2}}{3x}+C$$

39.11 Calcule $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

A ocorrência de $\sqrt{x^2-4}$ sugere a substituição $x=2\sec\theta$. Logo, $dx=2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\, d\theta$.

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4\sec^2\theta-4}=\sqrt{4(\sec^2\theta-1)}=2\sqrt{\text{tg}^2\,\theta}=2\,\text{tg}\,\theta$$

e
$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx=\int\frac{(4\sec^2\theta)(2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta)}{2\,\text{tg}\,\theta}\,d\theta=4\int\sec^3\theta\, d\theta$$
$$=2(\sec\theta\,\text{tg}\,\theta+\ln|\sec\theta+\text{tg}\,\theta|)+C \qquad \text{[pelo Problema 38.13(}b\text{)]}$$
$$=2\left(\frac{x}{2}\,\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|\right)+C$$
$$=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2}+2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C$$
$$=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2}+2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+K$$

onde $K=C-2\ln 2$ (compare com o Problema 39.9).

Problemas Complementares

39.12 Calcule as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\int \text{sen}\, x\cos^2 x\, dx$ (*b*) $\int\cos^2 3x\, dx$ (*c*) $\int\text{sen}^4 x\cos^5 x\, dx$ (*d*) $\int\cos^6 x\, dx$

(*e*) $\int\cos^6 x\,\text{sen}^2 x\, dx$ (*f*) $\int\text{tg}^2\,\frac{x}{2}\, dx$ (*g*) $\int\text{tg}^6 x\, dx$ (*h*) $\int\sec^5 x\, dx$

(*i*) $\int\text{tg}^2 x\sec^4 x\, dx$ (*j*) $\int\text{tg}^3 x\sec^3 x\, dx$ (*k*) $\int\text{tg}^4 x\sec x\, dx$ (*l*) $\int\text{sen}\, 2x\cos 2x\, dx$

(*m*) $\int\text{sen}\,\pi x\cos 3\pi x\, dx$ (*n*) $\int\text{sen}\,5x\,\text{sen}\,7x\, dx$ (*o*) $\int\cos 4x\cos 9x\, dx$

39.13 Prove as seguintes identidades:

(*a*) $\text{sen } Ax \text{ sen } Bx = \frac{1}{2}(\cos (A - B)x - \cos (A + B)x)$

(*b*) $\cos Ax \cos Bx = \frac{1}{2} (\cos (A - B)x + \cos (A + B)x)$

39.14 Calcule as seguintes integrais definidas, onde os inteiros positivos n e k são distintos:

(*a*) $\text{sen } Ax \text{ sen } Bx = \frac{1}{2}(\cos (A - B)x - \cos (A + B)x)$

(*b*) $\cos Ax \cos Bx = \frac{1}{2} (\cos (A - B)x + \cos (A + B)x)$

39.15 Calcule:

(*a*) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$ (*b*) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ (*c*) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx$ (*d*) $\int \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} dx$

(*e*) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$ (*f*) $\int \frac{dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$ (*g*) $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$ (*h*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16 - 9x^2}}$

(*i*) $\int x^2\sqrt{1 - x^2}\, dx$ (*j*) $\int e^{3x}\sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$ (*k*) $\int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 13)^2}$

39.16 Encontre o comprimento de arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4).

39.17 Encontre o comprimento de arco da curva $y = \ln x$ de (1, 0) a (e, 1).

39.18 Encontre o comprimento de arco da curva $y = e^x$ de (0,1) a (1,e).

39.19 Encontre o comprimento de arco da curva $y = \ln \cos x$ de (0, 0) a ($\pi/3$, – ln2).

39.20 Calcule a área envolvida pela elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Capítulo 40

Integração de Funções Racionais; O Método das Frações Parciais

Este capítulo oferecerá um método geral para calcular integrais indefinidas da forma

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

onde $N(x)$ e $D(x)$ são polinômios. Isso significa que mostraremos como encontrar a antiderivada de qualquer função racional $f(x) = N(x)/D(x)$ (ver Seção 9.3). Duas hipóteses serão assumidas, sendo que nenhuma delas é realmente restritiva: (i) o coeficiente do monômio de maior grau em $D(x)$ é $+1$; (ii) $N(x)$ é de menor grau que $D(x)$ [ou seja, $f(x)$ é uma função racional *própria*].

Exemplos

(*a*) $$\frac{8x^4}{-\frac{1}{7}x^{10} + 3x - 11} = \frac{-7}{-7}\,\frac{8x^4}{-\frac{1}{7}x^{10} + 3x - 11} = \frac{-56x^4}{x^{10} - 21x + 77}$$

(*b*) Considere a função racional imprópria $f(x) = \dfrac{x^4 + 7x}{x^2 - 1}$. A divisão longa (ver Fig. 40-1) nos leva a

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{7x + 1}{x^2 - 1}$$

Conseqüentemente,

$$\int f(x)\,dx = \int (x^2 + 1)\,dx + \int \frac{7x + 1}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{7x + 1}{x^2 - 1}\,dx$$

e o problema se reduz a encontrar a antiderivada de uma função racional própria.

$$\begin{array}{rrl|l}
x^4 & & +7x & x^2 - 1 \\ \cline{4-4}
-x^4 & +x^2 & & x^2 + 1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & +7x & \\
 & -x^2 & +1 & \\ \cline{2-3}
 & & 7x + 1 &
\end{array}$$

Fig. 40-1

Os teoremas que se seguem valem para polinômios com coeficientes reais arbitrários. No entanto, para fins de simplificação, exemplificaremos apenas com polinômios cujos coeficientes são inteiros.

Teorema 40.1: Qualquer polinômio $D(x)$ cujo monômio de maior grau tem coeficiente 1 pode ser expresso como o produto de *fatores lineares*, da forma $x - a$, e *fatores quadráticos irredutíveis* (que não podem ser fatorados), da forma $x^2 + bx + c$, sendo que repetição de fatores é permitida.

Como explicado na Seção 7.4, as raízes reais de $D(x)$ determinam seus fatores lineares.

Exemplos

(*a*)
$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Aqui o polinômio tem duas raízes reais (± 1) e, portanto, é um produto entre dois fatores lineares.

(*b*)
$$x^3 + 2x^2 - 8x - 21 = (x - 3)(x^2 + 5x + 7)$$

A raiz $x = 3$, que gera o fator linear $x - 3$, foi encontrada testando os divisores de 21. A divisão de $D(x)$ por $x - 3$ resultou no polinômio. Esse polinômio é irredutível, uma vez que, pela fórmula quadrática, suas raízes são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

que, por sua vez, não são números reais.

Teorema 40.2 (*Representação em Frações Parciais*): Qualquer fração (própria) $f(x) = N(x)/D(x)$ pode ser escrita como uma soma de funções racionais próprias mais simples. Cada parcela tem como denominador *um* dos fatores lineares ou quadráticos de $D(x)$, elevado a alguma potência.

Pelo Teorema 40.2, $\int f(x)dx$ é dada como uma soma de antiderivadas mais simples – antiderivadas que, de fato, podem ser calculadas pelas técnicas já conhecidas até aqui.

Será mostrado agora como construir a representação em frações parciais e integrá-la termo a termo.

Caso 1: *$D(x)$ é um produto de fatores lineares não repetidos.*

A representação de $f(x)$ em frações parciais é

$$\frac{N(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Os numeradores constantes $A_1, \ldots, A_n$ são determinados como no exemplo a seguir.

Exemplo
$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x - 1}$$

Elimine os denominadores multiplicando ambos os lados por $(x + 1)(x - 1)$,

$$(x + 1)(x - 1)\frac{2x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = (x + 1)(x - 1)\frac{A_1}{x + 1} + (x + 1)(x - 1)\frac{A_2}{x - 1}$$
$$2x + 1 = A_1(x - 1) + A_2(x + 1) \tag{1}$$

Em (*1*) substitua individualmente as raízes de $D(x)$. Com $x = -1$,

$$-1 = A_1(-2) + 0 \quad \text{ou} \quad A_1 = \frac{1}{2}$$

e com $x = 1$,

$$3 = 0 + A_2(2) \quad \text{ou} \quad A_2 = \frac{3}{2}$$

Com todas as constantes conhecidas, a antiderivada de $f(x)$ será a soma de termos da forma

$$\int \frac{A}{x - a}\,dx = A \ln|x - a|$$

Caso 2: *$D(x)$ é um produto entre fatores lineares, sendo que pelo menos um deles é repetido.*

Esse é tratado do mesmo modo que no Caso 1, exceto que um fator repetido $(x - a)k$ corresponde a uma soma da forma

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

Exemplo

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2}$$

Multiplique por $(x-1)^2(x-2)$,

$$3x + 1 = A_1(x-1)(x-2) + A_2(x-2) + A_3(x-1)^2 \tag{2}$$

Fazendo $x = 1$,

$$4 = 0 + A_2(-1) + 0 \quad \text{ou} \quad A_2 = -4$$

Fazendo $x = 2$,

$$7 = 0 + 0 + A_3(1) \quad \text{ou} \quad A_3 = 7$$

O último numerador, A_1, é determinado pela condição de que o coeficiente de x^2 do lado direito de (2) é zero (uma vez que é zero do lado esquerdo). Logo,

$$A_1 + A_3 = 0 \quad \text{ou} \quad A_1 = -A_3 = -7$$

[Mais genericamente, usamos todas as raízes de $D(x)$ para determinar alguns dos As e então comparamos coeficientes – de todas as potências necessárias – para encontrar os últimos As.]

Agora as antiderivadas de $f(x)$ consistirão de termos da forma $\ln|x - a|$ adicionado a pelo menos um termo da forma

$$\int \frac{A}{(x-a)^j}\,dx = \frac{B}{(x-a)^{j-1}} \qquad [j \geq 2]$$

Caso 3: $D(x)$ tem fatores quadráticos irredutíveis, mas nenhum é repetido.

Nesse caso, cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ contribui com uma parcela

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

na representação em frações parciais.

Exemplo

$$\frac{x^2 - 1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2+1}$$

Multiplique por $(x^2 + 1)(x + 2)$,

$$x^2 - 1 = A_1(x^2 + 1) + (A_2 x + A_3)(x + 2) \tag{3}$$

Faça $x = -2$,

$$3 = A_1(5) + 0 \quad \text{ou} \quad A_1 = \frac{3}{5}$$

Comparando coeficientes de x^0 (os termos constantes),

$$-1 = A_1 + 2A_3 \quad \text{ou} \quad A_3 = -\frac{1}{2}(1 + A_1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Comparando coeficientes de x^2,

$$1 = A_1 + A_2 \quad \text{ou} \quad A_2 = 1 - A_1 = \frac{2}{5}$$

A soma para $\int f(x)dx$ vai agora incluir, além de termos que surgem de eventuais fatores lineares, pelo menos um termo da forma

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A\left(x+\frac{b}{2}\right)+C}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\delta^2}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} C \equiv B - \frac{Ab}{2} \\ \delta^2 \equiv c - \frac{b^2}{4} > 0 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{Au+C}{u^2+\delta^2}\,du \qquad \left[\text{faça } u = x + \frac{b}{2}\right]$$

$$= A\int \frac{u\,du}{u^2+\delta^2} + C\int \frac{du}{u^2+\delta^2}$$

$$= \frac{A}{2}\ln(u^2+\delta^2) + \frac{C}{\delta}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{\delta}$$

(Para uma garantia de que δ é um número *real* ver Problema 40.7.)

Caso 4: *$D(x)$ tem pelo menos um fator quadrático irredutível repetido.*

Um fator quadrático $(x^2 + bx + c)k$ repetido contribui na representação em frações parciais com a expressão

$$\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c} + \frac{A_3x+A_4}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_{2k-1}x+A_{2k}}{(ax^2+bx+c)^k}$$

O cálculo nesse caso pode ser demorado e cansativo.

Exemplo
$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1x+A_2}{x^2+1} + \frac{A_3x+A_4}{(x^2+1)^2}$$

Multiplique por $(x^2+1)^2$,

$$x^3+1 = (A_1x+A_2)(x^2+1) + A_3x + A_4$$

Compare os coeficientes de x^3,

$$1 = A_1$$

Compare os coeficientes de x^2,

$$0 = A_2$$

Compare os coeficientes de x,

$$0 = A_1 + A_3 \quad \text{ou} \quad A_3 = -A_1 = -1$$

Compare os coeficientes de x^0,

$$1 = A_2 + A_4 \quad \text{ou} \quad A_4 = 1 - A_2 = 1$$

A nova contribuição a $\int f(x)\,dx$ consistirá de um ou mais termos da forma

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^j}\,dx = A\int \frac{u\,du}{(u^2+\delta^2)^j} + C\int \frac{du}{(u^2+\delta^2)^j} \qquad [\text{como no Caso 3}]$$

$$= \frac{E}{(u^2+\delta^2)^{j-1}} + F\int \cos^{2(j-1)}\theta\,d\theta \qquad [\text{faça } u = \delta\,\mathrm{tg}\,\theta]$$

e sabemos como calcular a integral trigonométrica [ver o Problema 38.12(*a*) ou o exemplo (*b*) da Seção 39.1].

Problemas Resolvidos

40.1 Calcule $\int \frac{2x^3 + x^2 - 6x + 7}{x^2 + x - 6}\, dx$.

O numerador tem grau maior que o denominador. Portanto, divida o numerador pelo denominador,

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - 6x + 7 & x^2 + x - 6 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 + 12x \phantom{{}+7} & 2x - 1 \\ \cline{1-1} -x^2 + 6x + 7 & \\ x^2 + x - 6 & \\ \cline{1-1} 7x + 1 & \end{array}$$

Assim,

$$\frac{2x^3 + x^2 - 6x + 7}{x^2 + x - 6} = 2x - 1 + \frac{7x + 1}{x^2 + x - 6}$$

Em seguida, fatore o denominador, $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. A decomposição em frações parciais tem a forma (Caso 1)

$$\frac{7x + 1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A_1}{x + 3} + \frac{A_2}{x - 2}$$

Multiplique pelo denominador $(x + 3)(x - 2)$,

$$7x + 1 = A_1(x - 2) + A_2(x + 3)$$

Faça $x = 2$,

$$15 = 0 + 5A_2 \quad \text{ou} \quad A_2 = 3$$

Faça $x = -3$,

$$20 = -5A_1 + 0 \quad \text{ou} \quad A_1 = 4$$

Logo,

$$\frac{7x + 1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{4}{x + 3} + \frac{3}{x - 2}$$

e

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - 6x + 7}{x^2 + x - 6}\, dx = \int (2x - 1)\, dx + \int \frac{4}{x + 3}\, dx + \int \frac{3}{x - 2}\, dx$$
$$= x^2 - x + 4 \ln|x + 3| + 3 \ln|x - 2| + C$$

40.2 Calcule $\int \frac{x^2\, dx}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$.

Testando os fatores de 27, descobrimos que 3 é uma raiz de $D(x)$. Dividindo $D(x)$ por $x - 3$ nos dá

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x - 3)(x^2 - 9) = (x - 3)(x - 3)(x + 3) = (x - 3)^2(x + 3)$$

e assim a representação em frações parciais é (Caso 2)

$$\frac{x^2}{(x - 3)^2(x + 3)} = \frac{A_1}{x - 3} + \frac{A_2}{(x - 3)^2} + \frac{A_3}{x + 3}$$

Multiplique por $(x - 3)^2(x + 3)$,

$$x^2 = A_1(x - 3)(x + 3) + A_2(x + 3) + A_3(x - 3)^2$$

Faça $x = 3$,

$$9 = 0 + 6A_2 + 0 \quad \text{ou} \quad A_2 = \frac{3}{2}$$

Faça $x = -3$,

$$9 = 0 + 0 + A_3(-6)^2 \quad \text{ou} \quad A_3 = \frac{1}{4}$$

Compare os coeficientes de x^2,

$$1 = A_1 + A_3 \quad \text{ou} \quad A_1 = 1 - A_3 = \frac{3}{4}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} = \frac{3}{4}\frac{1}{x-3} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}$$

e

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} = \frac{3}{4}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$$

40.3 Calcule $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+2)}\,dx$.

Esse é o Caso 3,

$$\frac{x+1}{x(x^2+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2+2}$$

Multiplique por $x(x^2+2)$,

$$x + 1 = A_1(x^2+2) + x(A_2 x + A_3)$$

Faça $x = 0$,

$$1 = 2A_1 + 0 \quad \text{ou} \quad A_1 = \frac{1}{2}$$

Compare os coeficientes de x^2,

$$0 = A_1 + A_2 \quad \text{ou} \quad A_2 = -A_1 = -\frac{1}{2}$$

Compare os coeficientes de x,

$$1 = A_3$$

Logo,

$$\frac{x+1}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})x + 1}{x^2+2}$$

e

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2}$$

Como o fator quadrático $x^2 + 2$ é um quadrado completo, pdemos fazer a integração do lado direito sem uma mudança de variáveis,

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{tg}^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

40.4 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \text{sen}\,x + \cos x}\,dx$.

Observe que o integrando é uma *função racional* de sen x *e* de cos x. Qualquer função racional das seis funções trigonométricas se reduz a uma função desse tipo e o método que usaremos para resolver esse problema em particular funcionará para qualquer função dessa forma.

Faça a mudança de variáveis $z = \text{tg}\,(x/2)$; ou seja, $. = 2\,\text{tg}^{-1}\,z$. Logo,

$$dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

e, pelo Teorema 26.8,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sec^2(x/2)}\\ &= 2\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2z}{1+z^2}\\ \cos x &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - 2\frac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{\sec^2(x/2)}\\ &= 1 - 2\frac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = 1 - \frac{2z^2}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned}$$

Quando essa substituições são feitas, o integrando resultante será uma função racional de z (pois composições e produtos de funções racionais são funções racionais). O método das frações parciais pode então ser aplicado,

$$\begin{aligned}\int (1 - \operatorname{sen} x + \cos x)^{-1}\,dx &= \int\left(1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^{-1}\frac{2}{1+z^2}\,dz\\ &= \int\left(\frac{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)}{1+z^2}\right)^{-1}\frac{2}{1+z^2}\,dz\\ &= \int\left(\frac{2-2z}{1+z^2}\right)^{-1}\frac{2}{1+z^2}\,dz = \int\frac{1+z^2}{2-2z}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz\\ &= \int\frac{1}{1-z}\,dz = -\ln|1-z| + C\\ &= -\ln\left|1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

40.5 Calcule $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}$.

Esse é o Caso 4 para $D(x)$ e, portanto,

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2x + A_3}{x^2+2x+2} + \frac{A_4x + A_5}{(x^2+2x+2)^2}$$

Multiplique por $(x+1)(x^2+2x+2)^2$,

$$x = A_1(x^2+2x+2)^2 + (A_2x + A_3)(x+1)(x^2+2x+2) + (A_4x + A_5)(x+1)$$

ou, parcialmente expandindo o lado direito,

$$4x^3 + 8x^2 + 8x + 4) + (A_2x + A_3)(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + (A_4x + A_5)(x+1) \qquad (1)$$

Em (*1*), faça $x = -1$, $\quad -1 = A_1(1) = A_1$

Compare os coeficientes de x^4,

$$0 = A_1 + A_2 \quad \text{ou} \quad A_2 = -A_1 = 1$$

Compare os coeficientes de x^3,

$$0 = 4A_1 + 3A_2 + A_3 \quad \text{ou} \quad A_3 = -4A_1 - 3A_2 = 1$$

Compare os coeficientes de x^2,

$$0 = 8A_1 + 4A_2 + 3A_3 + A_4 \quad \text{ou} \quad A_4 = -8A_1 - 4A_2 - 3A_3 = 1$$

Compare os coeficientes de x^0,

$$0 = 4A_1 + 2A_3 + A_5 \quad \text{ou} \quad A_5 = -4A_1 - 2A_3 = 2$$

Portanto,

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = -1\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+2} + \int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= -\ln|x+1| + \int \frac{u\,du}{u^2+1} + \int \frac{u\,du}{(u^2+1)^2} + \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

[pelas fórmulas rápidas II e I]

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2+1}\right) + \int \cos^2\theta\,d\theta$$

[Caso 4: faça $u = \operatorname{tg}\theta$]

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right) + \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + C$$

Mas

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} u = \operatorname{tg}^{-1}(x+1)$$

e (ver Problema 40.4)

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$$

de modo que finalmente temos

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+2x+2) + \frac{x}{x^2+2x+2} + \operatorname{tg}^{-1}(x+1)\right) - \ln|x+1| + C$$

Problemas Complementares

40.6 Calcule as seguintes antiderivadas:

(*a*) $\int \frac{dx}{x^2-9}$ (*b*) $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$ (*c*) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}\,dx$

(*d*) $\int \frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$ (*e*) $\int \frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$ (*f*) $\int \frac{x^3+1}{x(x+3)(x+2)(x-1)}\,dx$

(*g*) $\int \frac{x\,dx}{x^4-13x^2+36}$ (*h*) $\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}\,dx$ (*i*) $\int \frac{2x\,dx}{(x-2)^2(x+2)}$

(*j*) $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+9x}\,dx$ (*k*) $\int \frac{x^4\,dx}{x^3-2x^2-7x-4}$ (*l*) $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}$

(*m*) $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+4x+5)}$ (*n*) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ (*o*) $\int \frac{x^4+1}{x^3+9x}\,dx$

(*p*) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ (*q*) $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+4)^2}$ (*r*) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx$

(*s*) $\int \frac{x-1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$ (*t*) $\int \frac{x^2+2}{x(x^2+5x+6)}\,dx$ (*u*) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

40.7 Mostre que $p(x) = x^2 + bx + c$ é irredutível se, e somente se, $c - (b^2/4) > 0$. [*Sugestão:* Um polinômio quadrático é irredutível se, e somente se, não admite fator linear; ou seja, (pelo Teorema 7.2) se, e somente se, não admite raiz real.]

40.8 (*a*) Calcule a área da região no primeiro quadrante sob a curva $y = 1/(x^3 + 27)$ e à esquerda da reta $x = 3$.

(*b*) Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região do item (*a*) em torno do eixo y.

40.9 Calcule $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$. [*Sugestão:* Ver Problema 40.4.]

40.10 Calcule $\int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x - 1}$. (*a*) Use o método do problema 40.4. (*b*) Use a fórmula rápida II. (*c*) Verifique que suas respostas são equivalentes.

40.11 Calcule as seguintes integrais envolvendo potências não-inteiras:

(*a*) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$ (*b*) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x - 1}}$ (*c*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 3x}}$ (*d*) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$

(*e*) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$ (*f*) $\int \sqrt{1 + e^x}\, dx$ (*g*) $\int \frac{x^{2/3}\, dx}{x + 1}$

[*Sugestões:* No item (*a*), faça $x = z^3$; no item (*b*) faça $x - 1 = z^4$; no item (*c*) faça $x = z^6$.]

Apêndice A

Fórmulas Trigonométricas

$\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$

$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

$\text{sen}\,(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v$

$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v$

$\text{sen}\,(u+v) = \text{sen}\,u \cos v + \cos u\,\text{sen}\,v$

$\text{sen}\,(u-v) = \text{sen}\,u \cos v - \cos u\,\text{sen}\,v$

$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{1}{\text{cotg}\,x}$$

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\text{tg}\,x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

$\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\,x$

$\text{tg}\,(x+\pi) = \text{tg}\,x$

$1 + \text{tg}^2\,x = \sec^2 x$

$1 + \text{cotg}^2\,x = \csc^2 x$

$$\text{tg}\,(u+v) = \frac{\text{tg}\,u + \text{tg}\,v}{1 - \text{tg}\,u\,\text{tg}\,v}$$

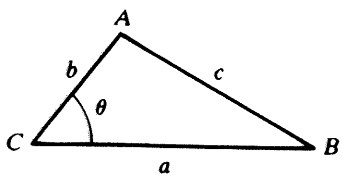
$$\text{tg}\,(u-v) = \frac{\text{tg}\,u + \text{tg}\,v}{1 + \text{tg}\,u\,\text{tg}\,v}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta;\ \text{sen}\,(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta;\ \text{sen}\,(\theta + \pi) = -\text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta;\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta;\ \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$$

Lei dos co-senos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

Lei dos senos : $\dfrac{\text{sen}\,A}{a} = \dfrac{\text{sen}\,B}{b} = \dfrac{\text{sen}\,C}{c}$



Apêndice B

Fórmulas Básicas de Integração

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad [r \neq -1]$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad [a > 0]$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad [a > 0]$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad [a > 0]$$

$$\int xe^x\,dx = e^x(x - 1) + C$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \mathrm{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \mathrm{sen}\,x + C$$

$$\int \quad x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C$$

$$\int \mathrm{cotg}\,x\,dx = \ln|\mathrm{sen}\,x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \mathrm{cotg}\,x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\mathrm{cotg}\,x + C$$

$$\int \sec x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x\,\mathrm{cotg}\,x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \mathrm{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2x}{4} + C$$

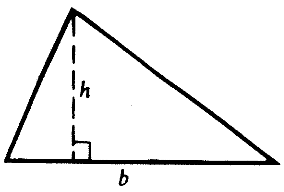
$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x - x + C$$

Apêndice C

Fórmulas Geométricas

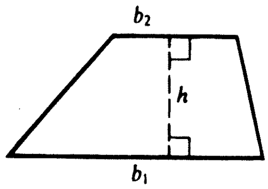
(A = área, C = circunferência, V = volume, S = área da superfície lateral)

Triângulo



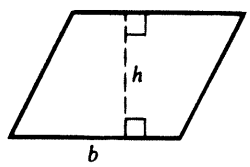
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Trapezóide



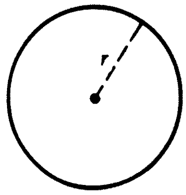
$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Paralelogramo



$$A = bh$$

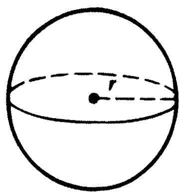
Círculo



$$A = \pi r^2$$

$$C = 2\pi r$$

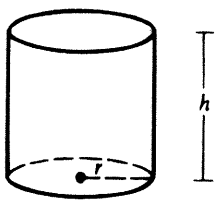
Esfera



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

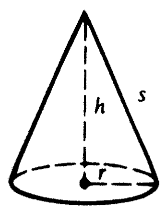
Cilindro



$$V = \pi r^2 h$$

$$S = 2\pi rh$$

Cone



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi rs = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

Apêndice D

Funções Trigonométricas

	sen	cos	tg	cotg	sec	csc	
0°	0,0000	1,0000	0,0000	. . .	1,000	. . .	90°
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,29	1,000	57,30	89°
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,64	1,001	28,65	88°
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,08	1,001	19,11	87°
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,30	1,002	14,34	86°
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,43	1,004	11,47	85°
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,514	1,006	9,567	84°
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,144	1,008	8,206	83°
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	1,010	7,185	82°
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	1,012	6,392	81°
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	1,015	5,759	80°
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	1,019	5,241	79°
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	1,022	4,810	78°
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,331	1,026	4,445	77°
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	1,031	4,134	76°
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	1,035	3,864	75°
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	1,040	3,628	74°
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	1,046	3,420	73°
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	1,051	3,236	72°
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,904	1,058	3,072	71°
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	1,064	2,924	70°
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,605	1,071	2,790	69°
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,475	1,079	2,669	68°
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,356	1,086	2,559	67°
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	1,095	2,459	66°
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,145	1,103	2,366	65°
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	1,113	2,281	64°
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	1,122	2,203	63°
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	1,133	2,130	62°
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	1,143	2,063	61°
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	1,155	2,000	60°
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	1,167	1,942	59°
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	1,179	1,887	58°
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,540	1,192	1,836	57°
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,483	1,206	1,788	56°
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,428	1,221	1,743	55°
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,376	1,236	1,701	54°
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,327	1,252	1,662	53°
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,280	1,269	1,624	52°
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,235	1,287	1,589	51°
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	1,305	1,556	50°
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,150	1,325	1,524	49°
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,111	1,346	1,494	48°
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,072	1,367	1,466	47°
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,036	1,390	1,440	46°
45°	0,7071	0,7071	1,000	1,000	1,414	1,414	45°
	cos	sen	cotg	tg	csc	sec	

Apêndice E

Logaritmos Naturais

n	ln n	n	ln n	n	ln n
0,0	—	4,5	1,5041	9,0	2,1972
0,1	−2,3026	4,6	1,5261	9,1	2,2083
0,2	−1,6094	4,7	1,5476	9,2	2,2192
0,3	−1,2040	4,8	1,5686	9,3	2,2300
0,4	−0,9163	4,9	1,5892	9,4	2,2407
0,5	−0,6931	5,0	1,6094	9,5	2,2513
0,6	−0,5108	5,1	1,6292	9,6	2,2618
0,7	−0,3567	5,2	1,6487	9,7	2,2721
0,8	−0,2231	5,3	1,6677	9,8	2,2824
0,9	−0,1054	5,4	1,6864	9,9	2,2925
1,0	0,0000	5,5	1,7047	10	2,3026
1,1	0,0953	5,6	1,7228	11	2,3979
1,2	0,1823	5,7	1,7405	12	2,4849
1,3	0,2624	5,8	1,7579	13	2,5649
1,4	0,3365	5,9	1,7750	14	2,6391
1,5	0,4055	6,0	1,7918	15	2,7081
1,6	0,4700	6,1	1,8083	16	2,7726
1,7	0,5306	6,2	1,8245	17	2,8332
1,8	0,5878	6,3	1,8405	18	2,8904
1,9	0,6419	6,4	1,8563	19	2,9444
2,0	0,6931	6,5	1,8718	20	2,9957
2,1	0,7419	6,6	1,8871	25	3,2189
2,2	0,7885	6,7	1,9021	30	3,4012
2,3	0,8329	6,8	1,9169	35	3,5553
2,4	0,8755	6,9	1,9315	40	3,6889
2,5	0,9163	7,0	1,9459	45	3,8067
2,6	0,9555	7,1	1,9601	50	3,9120
2,7	0,9933	7,2	1,9741	55	4,0073
2,8	1,0296	7,3	1,9879	60	4,0943
2,9	1,0647	7,4	2,0015	65	4,1744
3,0	1,0986	7,5	2,0149	70	4,2485
3,1	1,1314	7,6	2,0281	75	4,3175
3,2	1,1632	7,7	2,0142	80	4,3820
3,3	1,1939	7,8	2,0541	85	4,4427
3,4	1,2238	7,9	2,0669	90	4,4998
3,5	1,2528	8,0	2,0794	95	4,5539
3,6	1,2809	8,1	2,0919	100	4,6052
3,7	1,3083	8,2	2,1041	200	5,2983
3,8	1,3350	8,3	2,1163	300	5,7038
3,9	1,3610	8,4	2,1282	400	5,9915
4,0	1,3863	8,5	2,1401	500	6,2146
4,1	1,4110	8,6	2,1518	600	6,3069
4,2	1,4351	8,7	2,1633	700	6,5511
4,3	1,4586	8,8	2,1748	800	6,6846
4,4	1,4816	8,9	2,1861	900	6,8024

Apêndice F

Funções Exponenciais

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	2,5	12,182	0,0821
0,05	1,0513	0,9512	2,6	13,464	0,0743
0,10	1,1052	0,9048	2,7	14,880	0,0672
0,15	1,1618	0,8607	2,8	16,445	0,0608
0,20	1,2214	0,8187	2,9	18,174	0,0550
0,25	1,2840	0,7788	3,0	20,086	0,0498
0,30	1,3499	0,7408	3,1	22,198	0,0450
0,35	1,4191	0,7047	3,2	24,533	0,0408
0,40	1,4918	0,6703	3,3	27,113	0,0369
0,45	1,5683	0,6376	3,4	29,964	0,0334
0,50	1,6487	0,6065	3,5	33,115	0,0302
0,55	1,7333	0,5769	3,6	36,598	0,0273
0,60	1,8221	0,5488	3,7	40,447	0,0247
0,65	1,9155	0,5220	3,8	44,701	0,0224
0,70	2,0138	0,4966	3,9	49,402	0,0202
0,75	2,1170	0,4724	4,0	54,598	0,0183
0,80	2,2255	0,4493	4,1	60,340	0,0166
0,85	2,3396	0,4274	4,2	66,686	0,0150
0,90	2,4596	0,4066	4,3	73,700	0,0136
0,95	2,5857	0,3867	4,4	81,451	0,0123
1,0	2,7183	0,3679	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,0042	0,3329	4,6	99,484	0,0101
1,2	3,3201	0,3012	4,7	109,95	0,0091
1,3	3,6693	0,2725	4,8	121,51	0,0082
1,4	4,0552	0,2466	4,9	134,29	0,0074
1,5	4,4817	0,2231	5	148,41	0,0067
1,6	4,9530	0,2019	6	403,43	0,0025
1,7	5,4739	0,1827	7	1096,6	0,0009
1,8	6,0496	0,1653	8	2981,0	0,0003
1,9	6,6859	0,1496	9	8103,1	0,0001
2,0	7,3891	0,1353	10	22026	0,00005
2,1	8,1662	0,1225			
2,2	9,0250	0,1108			
2,3	9,9742	0,1003			
2,4	11,023	0,0907			

Respostas dos Problemas Complementares

Capítulo 1

1.9 (*a*) $u \leq 0$; (*b*) $x \geq 3$; (*c*) $x \leq 3$.

1.10 Use (*1.3*): (*a*) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{7}{2}$; (*b*) $x = \frac{8}{5}$ ou $x = \frac{6}{5}$.

1.11 (*a*) $0 < x < 2$; (*b*) $-3 \leq x \leq -\frac{1}{3}$; (*c*) $x < -6$ ou $x > -2$; (*d*) $x \leq 1$ ou $x \geq 4$; (*e*) $2 \leq x \leq 4$ ou $-4 \leq x \leq -2$; (*f*) $-8 < x < -4$.

1.12 (*a*) $x > -5$; (*b*) $-13 < x < -3$; (*c*) $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{1}{6}$; (*d*) $-1 < x < 3$; (*e*) $-1 < x < 1$; (*f*) $1 \leq x < \frac{3}{2}$.

1.13 (*a*) $x > 0$ ou $x < -2$; (*b*) $-4 < x < 1$; (*c*) $x < 1$ ou $x > 5$; (*d*) $-8 < x < 1$; (*e*) $-1 < x < 4$; (*f*) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$; (*g*) $x < -7$ ou $-\frac{1}{2} < x < 3$.

1.14 $|b| \cdot \left|\frac{a}{b}\right| = \left|b \cdot \frac{a}{b}\right| = |a|$

1.15 (*a*) Usando (*1.5*). (*b*) De acordo com (*1.5*) e (*a*), $|a^3| = |a^2a| = |a^2||a| = |a|^2|a| = |a|^3$.

(*c*) $|a^n| = |a|^n$ para todos os inteiros positivos n.

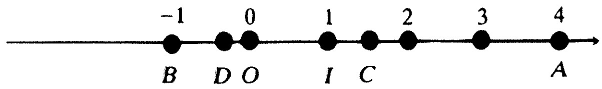
1.16 Use (*1.3*): (*a*) $x = 5$ ou $x = \frac{1}{3}$; (*b*) $x = \frac{9}{4}$ ou $x = \frac{1}{10}$; (*c*) $x = 8$.

1.17 (*a*) $\frac{1}{3} < x < 5$; (*b*) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

1.19 Sim: $(a^2)^2 = a^4$ e $a^2 \geq 0$.

1.20 Não: $\sqrt{a^2}$ implica em $|a|<|b|$, mas $a<b$ não vale quando, por exemplo, $a = 1$ e $b = -2$.

1.21



$\overline{IA} = 3, \overline{AI} = 3, \overline{OC} = \frac{3}{2}, \overline{BC} = \frac{5}{2}, \overline{IB} + \overline{BD} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}, \overline{ID} = \frac{4}{3}, \overline{IB} + \overline{BC} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}, \overline{IC} = \frac{1}{2}.$

1.22 (*a*) $b = 10$; (*b*) $b = -5$; (*c*) $b = -5$.

Capítulo 2

2.4 $A(0,4)$, $B(2,2)$, $C(4,0)$, $D(-3,1)$, $E(0,-4)$, $F(2,-3)$.

2.6 (*a*) 5; (*b*) 5; (*c*) 2; (*d*) 8.

2.7 Área (triângulo retângulo) = $\frac{1}{2}(\overline{AC})(\overline{AB}) = \frac{1}{2}(5)(10) = 25$

2.8 (3,4).

2.9 (–1,1) e (3,0).

2.10 (0,2), (6,2), (4,–4).

2.11 $(2,y)$ para algum número real y.

2.12 (*a*) $\sqrt{34}$; (*b*) $3\sqrt{2}$; (*c*) $\dfrac{\sqrt{389}}{4}$.

2.13 (*a*) Apenas isósceles; (*b*) apenas triângulo retângulo, área = 10; (*c*) triângulo retângulo isósceles, área = 17.

2.14 $k = 5$

2.15 (*a*) Não; (*b*) sim.

2.16 (*a*) (4,2); (*b*) $\left(\dfrac{5}{4}, 2\right)$; (*c*) $\left(\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}, 2\right)$;

2.17 (5,8).

Capítulo 3

3.9 Ver Fig. A-1.

3.10 Ver Fig. A-2.

3.11 Ver Fig. A-3.

3.12 Ver Fig. A-4.

3.13 $x^2 = 4py$ (parábola).

3.14 (*a*) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$; (*b*) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 2$; (*c*) $x^2 + (y-2)^2 = 16$; (*d*) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$; (*e*) $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 20$; (*f*) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

3.15 (*a*) Círculo [centro (6,–10), raio 11]; (*b*) círculo [centro (0,–15), raio 14]; (*c*) conjunto vazio; (*d*) círculo [centro $(\frac{1}{4}, 0)$, raio]; (*e*) ponto (–1,1); (*f*) círculo [centro (–3,–2), raio 7].

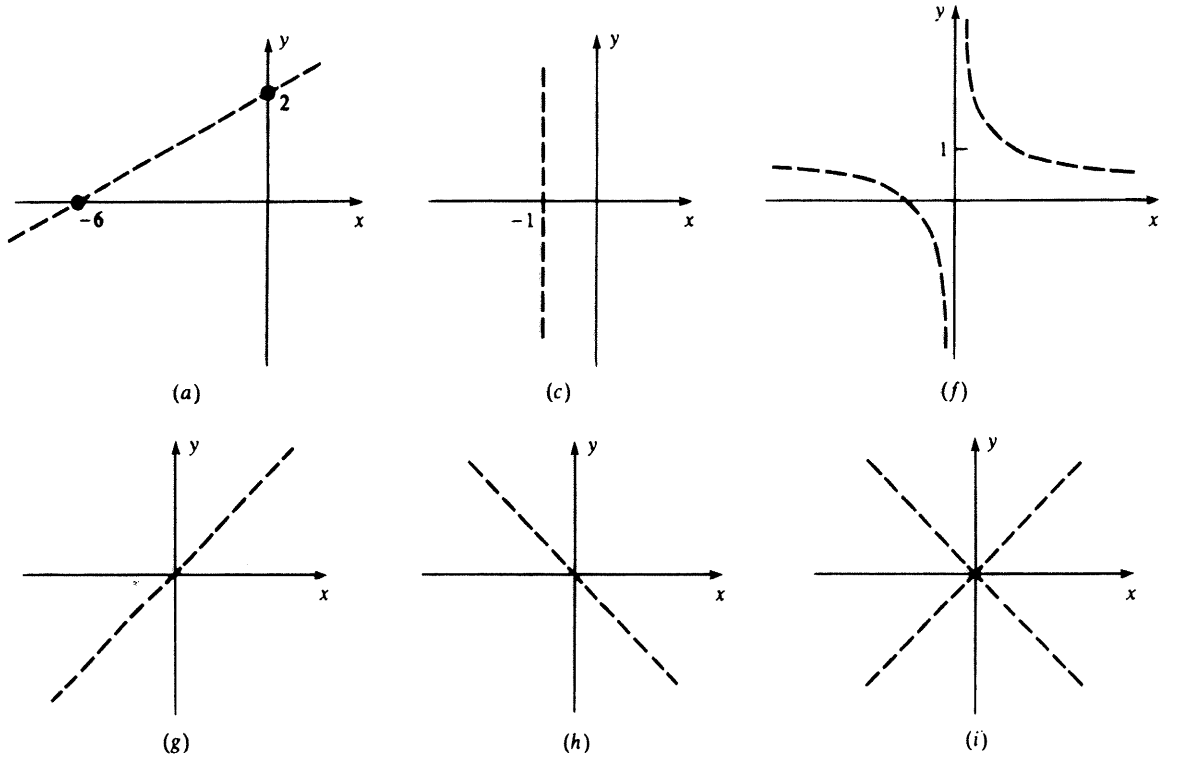


Fig. A-1

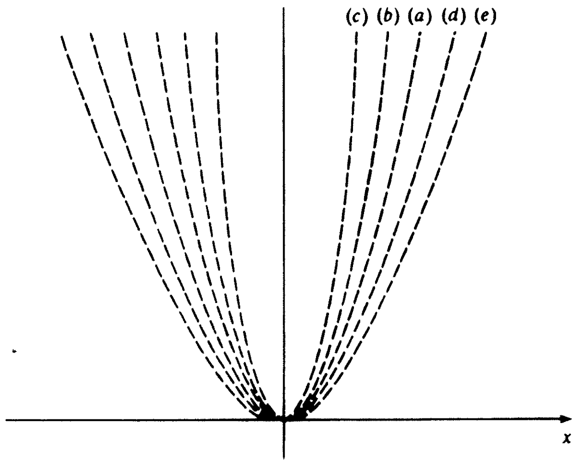


Fig. A-2

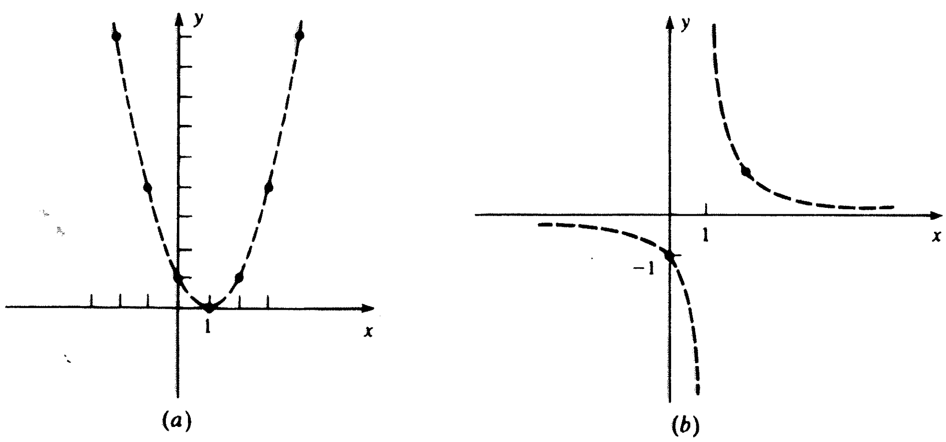


Fig. A-3 (1 de 2)

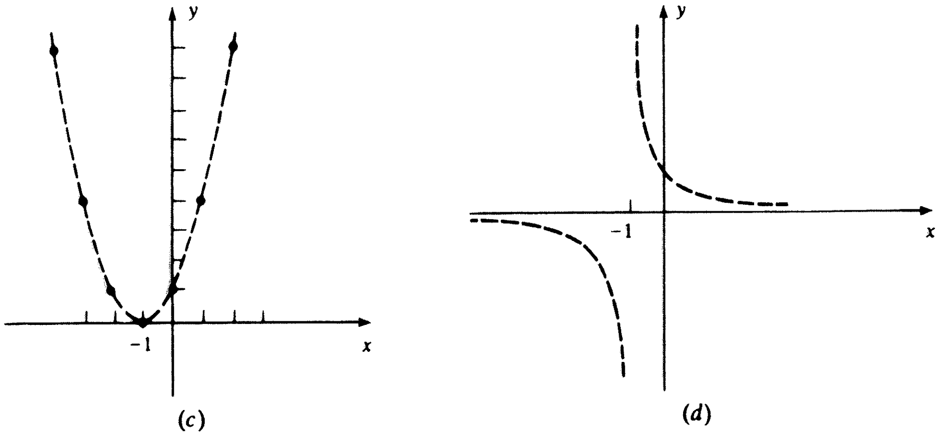


Fig. A-3 (2 de 2)

3.16 (*b*) $4F < D^2 + E^2$.

3.17 (*a*) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 100$; (*b*) $(x-4)^2 + y^2 = 26$.

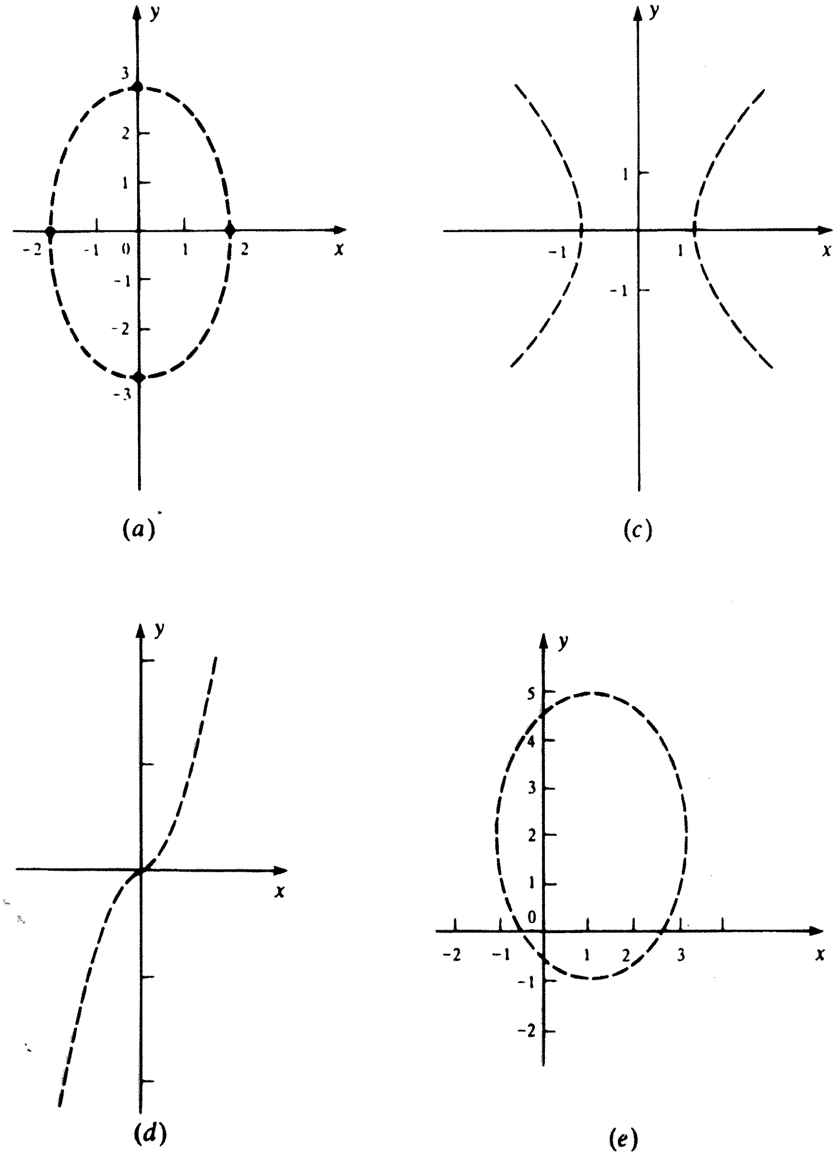


Fig. A-4

3.18 $k = 2$ e $k = -\frac{4}{5}$.

3.19 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9, (x-7)^2 + (y-3)^2 = 9, (x-1)^2 + (y-9)^2 = 9, (x-7)^2 + (y-9)^2 = 9$.

Capítulo 4

4.8 (*a*) $y - 5 = \frac{1}{3}(x-2)$ ou $y - 4 = \frac{1}{3}(x+1)$; (*b*) $y = 4x$ ou $y - 4 = 4(x-1)$; (*c*) $y + 1 = -(x-7)$ ou $y - 7 = -(x+1)$.

4.9 (*a*) $y = \frac{5}{6}x + \frac{14}{3}$; (*b*) $y = 2x - 1$; (*c*) $y = -\frac{2}{3}x + 2$; (*d*) $y = 4$; (*e*) $y = 5x - 1$; (*f*) $y = -3x + 16$; (*g*) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$; (*h*) $y = 0$; (*i*) $y = -3x + 7$; (*j*) $y = \frac{2}{5}x$; (*k*) $y = 3$; (*l*) $y = x$.

4.10 (*a*) $m = 5, b = 4, (1,9)$; (*b*) $m = \frac{7}{4}, b = -2, (4,5)$; (*c*) $m = -4, b = 2, (1,-2)$; (*d*) $m = 0, b = 2, (1,2)$; (*e*) $m = -\frac{4}{3}, b = 4$, $b = 4, (3,0)$.

4.11 $k = 9$.

4.12 Não.

4.13 (*a*) Sim; (*c*) em todos os casos; (*d*) $k = -\frac{1}{4}$.

4.14 (*a*) Paralelas; (*b*) nenhum dos casos; (*c*) paralelas; (*d*) perpendiculares; (*e*) nenhum dos casos.

4.15 (*a*) $y = \frac{9}{5}x + 32$; (*b*) $-40°$.

4.16 (*a*) 10; (*b*) -15; (*c*) $-\frac{5}{4}$; (*d*) $\frac{15}{2}$.

4.17 (*a*) $y = -\frac{1}{11}x + \frac{23}{11}$; (*b*) $y = -4x + 32$; (*c*) $y = \frac{7}{2}x - \frac{59}{4}$.

4.18 (12,9) não está sobre a reta; (6,3) está sobre a reta.

4.22 $4x + 3y - 9 > 0$ e $x > 1$; ver Fig. A-5.

4.23 $x < 200/3$.

4.24 Ver Fig. A-6.

4.26 (*a*) Todas as retas não verticais que passam pelo ponto (0,2); (*b*) todas as retas com coeficiente angular 3.

4.27 (*a*) Retas horizontais; (*b*) (*i*) 2; (*ii*) 4; (*iii*) $\frac{1}{5}$; (*iv*) 3; (*v*) nenhum.

4.28 (*a*) $y = -\frac{2}{3}x + 3$; (*b*) $y = -x + 9$; (*c*) $y = \frac{1}{6}x + \frac{43}{12}$.

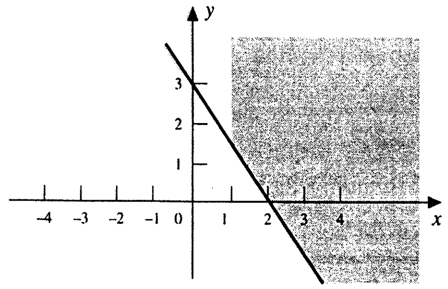


Fig. A-5

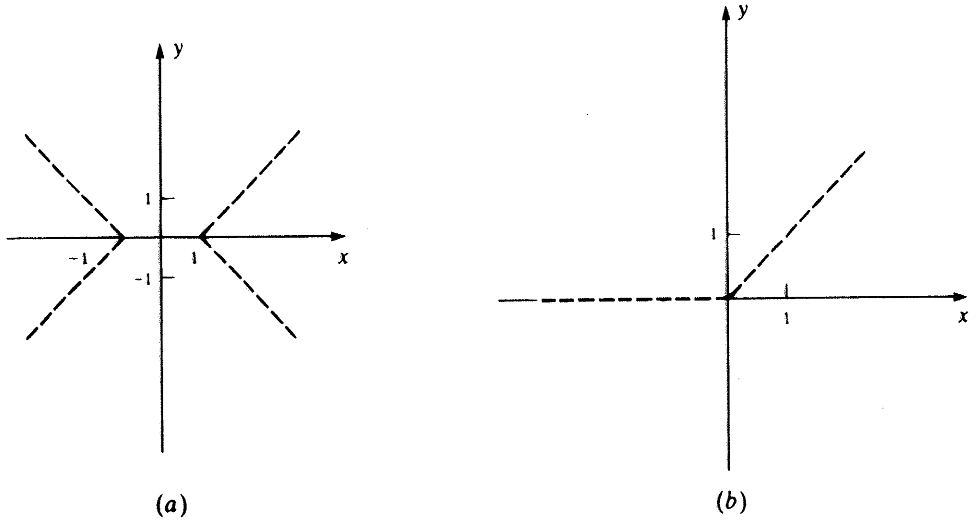


Fig. A-6

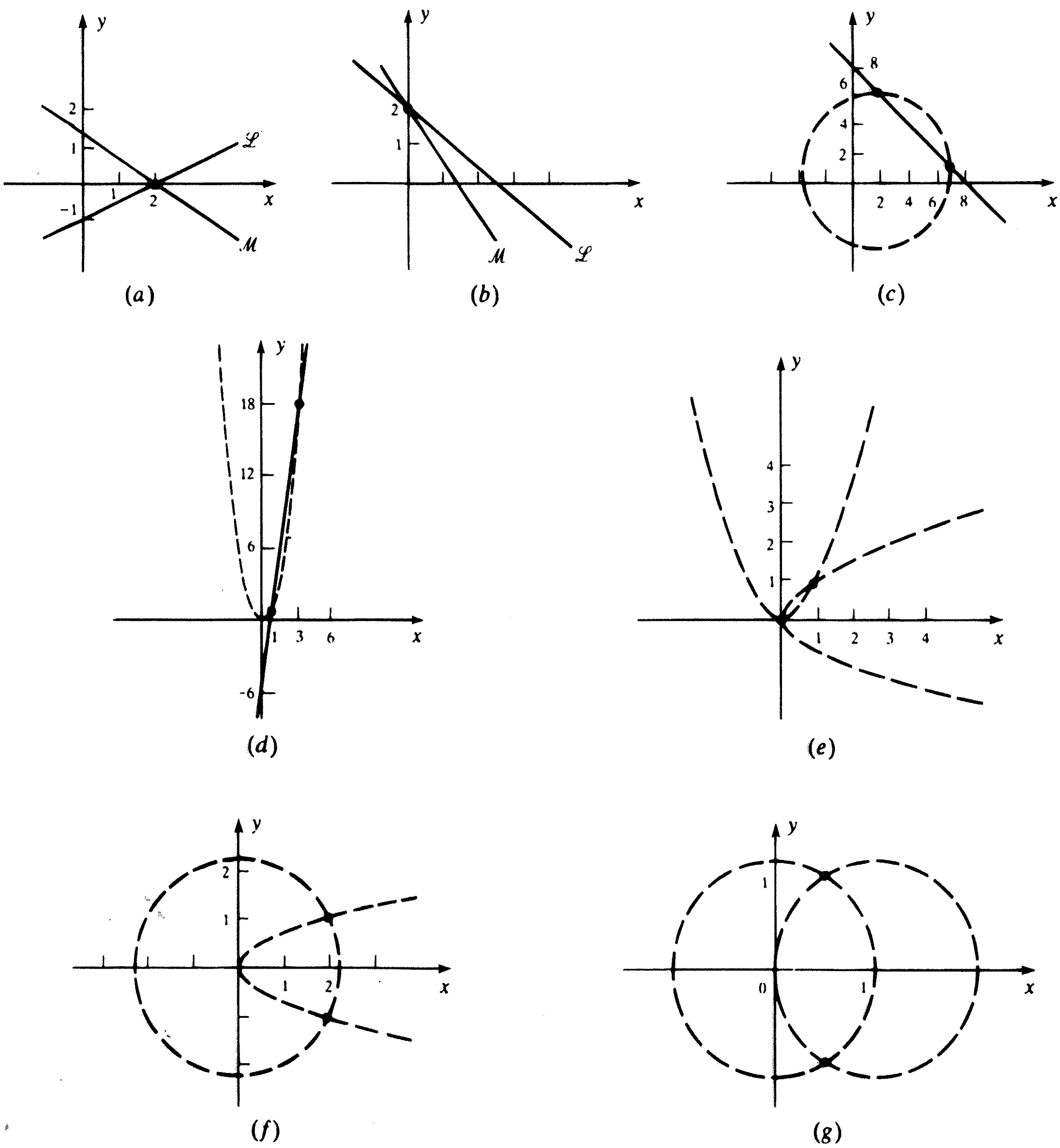
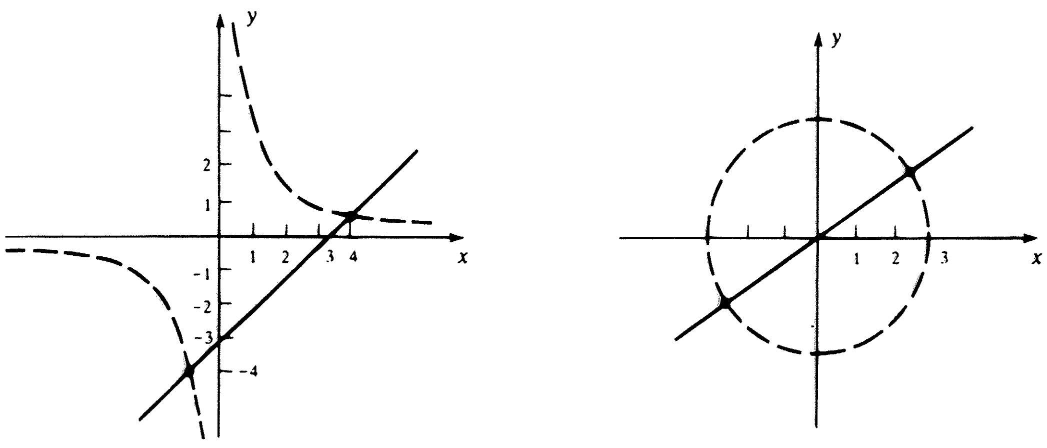


Fig. A-7 (1 de 2)



(*h*) (*i*)

Fig. A-7 (2 de 2)

Capítulo 5

5.4 (*a*) (2,0); (*b*) (0,2); (*c*) (7,1) e (2,6); (*d*) (1,2) e (3,18); (*e*) (0,0) e (1,1)

(*f*) $(2, \sqrt{2})$ e $(2, -\sqrt{2})$; (*g*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (*h*) (4,1) e (-1,-4);

(*i*) $\left(\frac{9}{13}\sqrt{13}, \frac{6}{13}\sqrt{13}\right)$ e $\left(-\frac{9}{13}\sqrt{13}, -\frac{6}{13}\sqrt{13}\right)$; (*j*) conjunto vazio. Ver Fig. A-7.

5.6 (*b*) $\frac{8}{5}\sqrt{5} \approx 3{,}58$. **5.7** $x = 50$.

5.8 Centro $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$, raio $\frac{3}{2}\sqrt{10}$.

5.9 $x = 0$ e $y = -\frac{4}{3}x$. **5.10** (33/2, 34).

Capítulo 6

6.6 (*a*) eixo *y*; (*b*) origem; (*c*) eixo *x*, eixo *y*, origem; (*d*) eixo *x*, eixo *y*, origem; (*e*) eixo *x*; (*f*) nenhum; (*g*) origem; (*h*) nenhum; (*i*) eixo *y*; (*j*) eixo *y*; (*k*) origem; (*l*) nenhum.

6.7 (*a*) $x^2 + xy + y^2 = 1$; (*b*) $y^3 + xy^2 - x^3 = 8$; (*c*) $x^2 + 12x - 3y = 1$; (*d*) $y = -3x+1$; (*e*) nenhuma mudança.

Capítulo 7

7.8 (Seja **R** o conjunto dos números reais. Em cada resposta o primeiro conjunto é o domínio, o segundo conjunto é a imagem. Os gráficos são esboçados na Fig. A-8.) (*a*) **R**, $(-\infty, 4]$; (*b*) $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$; (*c*) $[-2, 2]$, imagem de *H* é [0,2], imagem de *J* é [-2,0]; (*d*) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ (união ou "soma" dos dois intervalos), $[0, \infty)$; (*e*) **R**, $[0, \infty)$; (*f*) **R**, o conjunto de todos os inteiros; (*g*) **R**, o conjunto de todos os inteiros; (*h*) **R**–{0} (o conjunto de todos os números reais exceto 0), **R**–{0}; (*i*) **R**–{1}, **R**–{0}; (*j*) **R**, **R**; (*k*) **R**, **R**; (*l*) **R**, $[2, \infty)$; (*m*) {1,2,4}, {-1,3}; (*n*) **R**–{-2}, **R**–{-4}; (*o*) **R**, $(-\infty, 2] \cup \{4\}$; (*p*) **R**–{0}, {-1,1}; (*q*) **R**, $[2, \infty)$; (*r*) **R**, **R**; (*s*) **R**, [0,1); (*t*) **R**, **R**.

7.10 (*c*) e (*d*).

7.11 (*a*) $f(x) = \frac{2}{x^3}$, domínio é **R**–{0}; (*b*) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, domínio é **R**–{-1}; (*c*) $f(x) = x$, domínio é **R**.

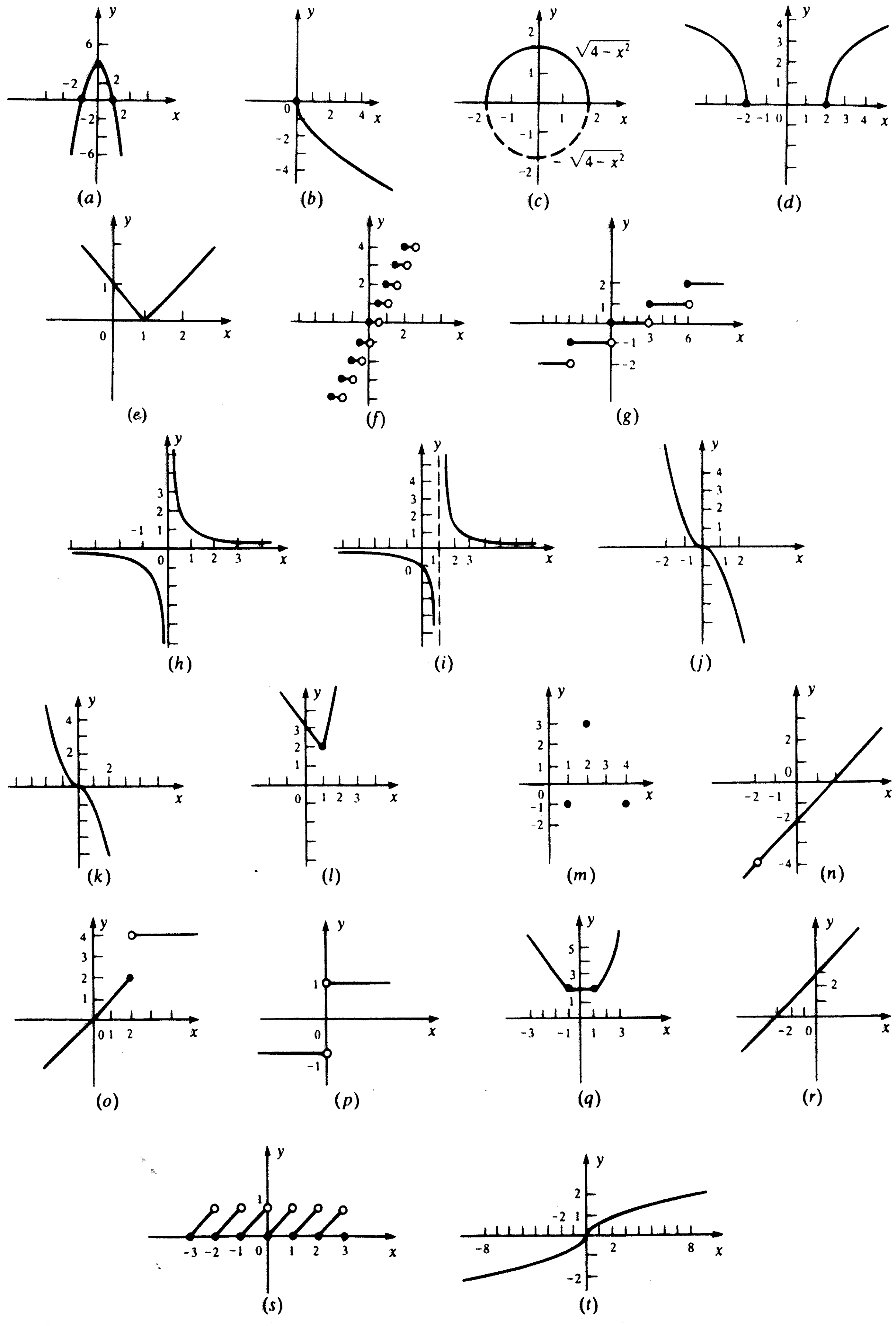


Fig. A-8

7.12 (*a*) Domínio é **R**−{2,3}, imagem é $(0, \infty) \cup (-\infty, -4]$; (*b*) $(-1, 1), (1, \infty)$; (*c*) $(-1, \infty), (0, 2]$; (*d*) $[0,4), [-1,2]$; (*e*) **R**, $[0, \infty)$.

7.13 (*a*) $k = -8$; (*b*) f não é definida quando $x = 0$, mas g é.

7.14 Entre as infinitas possíveis respostas corretas, alguns exemplos são: (*a*) $f(x) = 2x$ para $0 < x < 1$; (*b*) $f(x) = 5x - 1$ para $0 \leq x < 1$; (*c*) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$; (*d*) $f(x) = (x-1)^2 + 1$ para $x < 1$ ou $1 < x < 2$.

7.15 (*a*) eixo *y*; (*b*) nenhum; (*c*) eixo *y* para ambos; (*d*) eixo *y*; (*e*) nenhum; (*f*) nenhum; (*g*) nenhum; (*h*) origem; (*i*) nenhum; (*j*) origem; (*k*) origem; (*l*) nenhum; (*m*) nenhum; (*n*) nenhum; (*o*) nenhum, (*p*) origem; (*q*) nenhum; (*r*) nenhum; (*s*) nenhum; (*t*) origem.

7.16 (*a*) Par; (*b*) nenhum; (*c*) ambas são pares; (*d*) par; (*e*) nenhum; (*f*) nenhum; (*g*) nenhum; (*h*) ímpar; (*i*) nenhum; (*j*) ímpar; (*k*) ímpar; (*l*) nenhum; (*m*) nenhum; (*n*) nenhum; (*o*) nenhum, (*p*) ímpar; (*q*) nenhum; (*r*) nenhum; (*s*) nenhum; (*t*) ímpar.

7.17 (*a*) Não; (*b*) sim; (*c*) $k = 0$; (*d*) $k = 2$; (*e*) sim; $f(x) = 0$ para todo x.

7.18 (*a*) $2x + h - 2$; (*b*) 1; (*c*) $3x^2 + 3hx + h^2$; (*d*) $\dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$; (*e*) $\dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} - 5$; (*f*) $\dfrac{|x+h| - |x|}{h}$.

7.19 (*a*) $1, -1, 3, -3$; (*b*) $-2, 4, -4$; (*c*) $2, -2, 3$; (*d*) 2; (*e*) $-2, -3, -4$; (*f*) $-2, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$; (*g*) $4, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

7.20 Uma, duas (uma delas é repetida) ou três.

7.21 (*a*) $k = 3$; (*b*) $k = -2$. **7.22** 9 e −12. **7.23** (iii)

7.24 (*a*) $(-\infty, 3)$; (*b*) $[1, \infty)$; (*c*) $(-\infty, \frac{1}{3}]$; (*d*) $(\frac{10}{7}, \infty)$; (*e*) $(2, 3)$; (*f*) $[-3, 2)$; (*g*) $(-3, 1)$; (*h*) $[-\frac{1}{3}, 3]$; (*i*) $(2, 3)$; (*j*) $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$; (*k*) $(-1, 3)$.

7.25 (*a*) $x < -2$ ou $x > 1$; (*b*) $-2 < x < 0$ ou $x > 1$.

Capítulo 8

8.5 (*a*) 7; (*b*) −4; (*c*) 4; (*d*) 1; (*e*) 0; (*f*) 36; (*g*) 12; (*h*) sem limite; (*i*) 7; (*j*) 20; (*k*) 37; (*l*) −8; (*m*) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; (*n*) $\frac{1}{4}$; (*o*) $\frac{1}{4}$.

8.6 (*a*) $\lim\limits_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$; (*b*) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{(x+h+1)(x+1)} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$; (*c*) $\lim\limits_{h \to 0} 7 = 7$; (*d*) $\lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$; (*e*) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; (*f*) $\lim\limits_{h \to 0} (10x + 5h - 2) = 10x - 2$.

8.9 (*d*).

8.10 (*a*) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$. **8.11** (*a*) $\frac{1}{10}$.

8.12 (*a*) 0; (*b*) $\frac{1}{13}$; (*c*) $\frac{9}{2}$; (*d*) sem limite.

Capítulo 9

9.6 (*a*) $+\infty$; (*b*) $-\infty$; (*c*) $+\infty$; (*d*) $-\infty$; (*e*) $-\infty$, (*f*) $+\infty$.

9.7 (*a*) 12 e 11; (*b*) 1 e –1; (*c*) $-\infty$; (*d*) $+\infty$ e $-\infty$; (*e*) 1 e 1; (*f*) $-\infty$ e $+\infty$; (*g*) 0 e 0; (*h*) $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5}$; (*i*) $+\infty$ e $-\infty$; (*j*) 0 e 0; (*k*) 4 e –4; (*l*) $+\infty$ e $-\infty$; (*m*) 0 e não definido (denominador não definido quando $x^3 < -5$); (*n*) 0 e 0; (*o*) 2 e 2; (*p*) $+\infty$ e $-\infty$; (*q*) $-\frac{1}{2}$; (*r*) $+\infty$;

9.8 (*a*) Sem assíntotas; (*b*) assíntota vertical: $x = -\frac{2}{3}$; assíntota horizontal: $y = \frac{2}{3}$ (pela esquerda e pela direita); (*c*) assíntotas verticais: $x = -3$, $x = 2$; assíntota horizontal: $y = 0$ (pela esquerda e pela direita); (*d*) assíntotas verticais: $x = -\frac{5}{2}$, $x = 1$; assíntota horizontal: $y = 0$ (pela esquerda e pela direita); (*e*) assíntota vertical: $x = -2$; assíntota horizontal: $y = 0$ (pela esquerda e pela direita); (*f*) assíntotas verticais: $x = -4$, $x = 2$; assíntotas horizontais: $y = 1$ (pela direita) e $y = -1$ (pela esquerda); (*g*) assíntotas horizontais: $y = 2$ (pela direita) e $y = -2$ (pela esquerda); (*h*) assíntota horizontal: $y = 0$ (pela direita); (*i*) assíntota horizontal: $y = 0$ (pela direita).

9.9 (*c*).

9.11 (*a*) Assíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$; assíntota horizontal: $y = -\frac{3}{4}$; (*b*) assíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$; assíntotas horizontais: $y = -1$ (pela direita) e $y = 1$ (pela esquerda); (*c*) assíntotas horizontais: $y = -1$ (pela direita) e $y = 1$ (pela esquerda); (*d*) assíntota horizontal: $y = 0$ (pela direita); (*e*) assíntota horizontal: $y = 2$.

Capítulo 10

10.6 (*a*) Contínua em todos os pontos; (*b*) contínua para $x \neq 0$; (*c*) contínua em todos os pontos; (*d*) contínua para $x \neq -2$; (*e*) contínua em todos os pontos; (*f*) contínua, exceto em $x = 1$ e $x = 2$.

10.7 (*a*) Contínua à direita mas não à esquerda de $x = 0$; (*b*) descontínua tanto pela esquerda quanto pela direita em qualquer inteiro não negativo x; (*c*) sem pontos de descontinuidade; (*d*) contínua pela esquerda mas não pela direita de $x = -3$ e $x = 2$.

10.8 (*a*) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \le x < -1 \\ 1 & \text{se } -1 \le x \le 1; \\ 0 & \text{se } \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ (*b*) $g(x) = [x]$; (*c*) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

10.9 (*a*) Sim; (*b*)-(*d*) não; (*e*) Problema 10.3 - não, Problema 10.4 - não.

10.10 (*a*) $x = 4$, $x = -1$; (*b*) $\lim_{x\to 4} f(x)$ não existe, $\lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{3}{5}$; (*c*) $x = 4$ (assíntota vertical); $y = 0$ (assíntota horizontal).

10.11 (*a*) $x = 0$; (*b*) $x = 0$ (assíntota vertical), sem assíntota horizontal.

10.12 (*a*) Não; (*b*) não; (*c*) sim; (*d*) não.

10.13 $c = 8$.

10.14 (*a*) Sim; (*b*) sim; (*c*) não.

10.15 (*b*) $\frac{1}{8}$.

10.16 Descontínua para todo x.

Capítulo 11

11.6 (*a*) (i) coeficiente angular = $4x + 1$; (ii) $y = 2x - \frac{1}{8}$; (iii) ver Fig. A-9(*a*); (*b*) (i) coeficiente angular = x^2; (ii) $y = 4x - \frac{13}{3}$, (iii) ver Fig. A-9(*b*); (*c*) (i) coeficiente angular = $2x - 2$; (ii) $y = -1$; (iii) ver Fig. A-9(*c*); (*a*) (i) coeficiente angular = $8x$; (ii) $y = 4x + 2$; (iii) ver Fig. A-9(*d*).

11.7 (3,9).

11.9 $y = -3x + \dfrac{28}{27}$.

11.10 (3,5) e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{55}{9}\right)$. **11.12** (6, 36) e (–2,4). **11.13** $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Capítulo 12

12.6 (*a*) 2; (*b*) $\frac{2}{3}x - 7$; (*c*) $6x + 3$; (*d*) $4x^3$; (*e*) $\frac{1}{(2-x)^2}$; (*f*) $\frac{2}{(x+2)^2}$; (*g*) $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

12.7 (*a*) $9x^2 - 8x + 5$; (*b*) $-40x^4 + 3\sqrt{3}x^2 + 4\pi x$; (*c*) $39x^{12} - 50x^9 + 20x$; (*d*) $102x^{50} + 36x^{11} - 28x + \sqrt[3]{7}$.

12.8 (*a*) $21x^6 - x^4$; (*b*) $6x - 5$; (*c*) $2x^3 + 5$; (*d*) $21t^6 - 24t$; (*e*) $5\sqrt{2}x^4 - 3x^2$.

12.9 (*a*) $y = -7x + 1$; (*b*) $y = 66x - 153$; (*c*) $y = 3$.

12.10 (*a*) $y = 20x + 2$ e $y = -44x + 2$; (*b*) $y = x + 4$ e $y = \frac{85}{4}x - \frac{65}{4}$.

12.11 $y = -x+1$.

12.12 (2,2)

12.13 (*a*) $D_x(x^5)|_{x=3} = 405$; (*b*) $D_x(5x^4)|_{x=1/3} = \frac{20}{27}$.

12.14 $f'(x) = 8x$ [(iii) nos dá $f'(u) = ku$; logo, escolha $u = v = 1$ em (iii)].

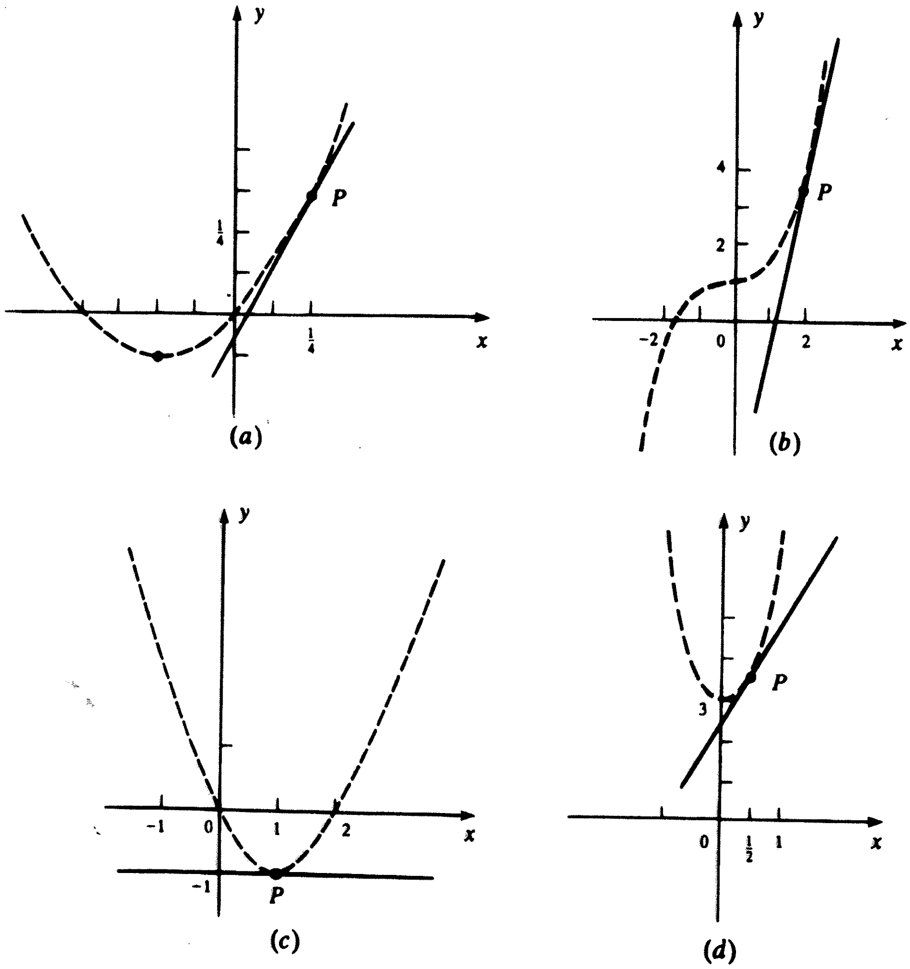


Fig. A-9

12.15 (*a*) $x = \frac{1}{2}$; (*b*) $(0, -\frac{1}{2})$. **12.16** $c = \dfrac{16}{81}$. **12.17** $b = \dfrac{17}{2}$.

12.18 (*a*) $4x - 2$; (*b*) $f^{\#}(x) = 2f'(x)$.

12.19 (*a*) $-1, 3, -3$; (*b*) $y = -4x - 12$; (*c*) $(2,-15)$, $(-2,5)$ ou $\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{1105}{8}\right)$.

12.20 (*a*) $3, -\dfrac{7}{3}$; (*b*) $y = \dfrac{1}{15}x + 63$; (*c*) $(3, 0)$ e $\left(-\dfrac{5}{9}, \dfrac{2^{14}}{3^5}\right) = \left(-\dfrac{5}{9}, \dfrac{16\,384}{243}\right)$.

12.22 (*a*) Sim; (*b*) sim; (*c*) não; (*d*) não.

12.23 (*a*) $\dfrac{10}{3}$; (*b*) não. **12.24** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$.

Capítulo 13

13.6 (*a*) $(x^{100} + 2x^{50} - 3)(56x^7 + 20) + (7x^8 + 20x + 5)(100x^{99} + 100x^{49})$;

(*b*) $\dfrac{(x+4)(2x) - (x^2-3)}{(x+4)^2} = \dfrac{x^2 + 8x + 3}{(x+4)^2}$;

(*c*) $\dfrac{(x^3+7)(5x^4-1) - (x^5 - x + 2)(3x^2)}{(x^3+7)^2} = \dfrac{2x^7 + 35x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 7}{(x^3+7)^2}$;

(*d*) $-\dfrac{15}{x^6}$; (*e*) $24x^2 - 2x + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{12}{x^4}$; (*f*) $9x^2 + 1 - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{12}{x^5}$.

13.7 (*a*) $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$; (*b*) $y = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{7}{4}$. **13.8** $-\dfrac{1}{4}$.

13.9 Em todos os pontos, exceto $x = 3$.

13.10 (*b*) Em $x = 0$ e $x = 4$.

13.11 (*a*) $x = 0$; (*b*) $x = 2$; (*c*) $x = 1$.

13.12 -8.

Capítulo 14

14.7 (*a*) máximo = 13 (em $x = -2$), mínimo = -7 (em $x = 3$); (*b*) máximo = -1 (em $x = -1$), mínimo = $-\dfrac{129}{8}\left(\text{em } x = -\dfrac{1}{3}\right)$; (*c*) máximo = 3 (em $x = 1$), mínimo = $-\dfrac{31}{27}\left(\text{em } x = -\dfrac{1}{3}\right)$; (*d*) máximo = 1 (em $x = 0$), mínimo = -11 (em $x = -1$); (*e*) máximo = 99 (em $x = 4$), mínimo = -9 (em $x = 2$); (*f*) máximo = $-\dfrac{1}{5}$ (em $x = -3$), mínimo = $-\dfrac{1}{4}$ (em $x = -4$); (*g*) máximo = $\dfrac{5}{4}$ (em $x = 4$), mínimo = $\dfrac{3}{4}$ (em $x = 2$); (*h*) máximo = $\dfrac{1}{3}$ (em $x = 1$), mínimo = -1 (em $x = -1$); (*i*) máximo = $\dfrac{14}{3}$ (em $x = 2$), mínimo = $-\dfrac{2}{27}\left(\text{em } x = \dfrac{1}{3}\right)$.

14.8 75 metros no sentido leste-oeste e 50 metros no sentido norte-sul.

14.9 60 metros paralelo ao riacho, 30 metros perpendicular ao riacho.

14.10 50 milhas por hora.

14.11 \$200.

14.12 $x = 350$ a \$65 por rádio.

14.13 (*a*) Lado da base = 5 cm, altura = 5 cm; (*b*) lado da base = $5\sqrt{2}$ cm, altura = $5/\sqrt{2}$ cm.

14.14 Comprimento = 105 m, largura (paralela à divisa) = 60 m.

14.15 175.

14.16 (*a*) $x = 50, y = 50$; (*b*) $x = 100, y = 0$ ou $x = 0, y = 100$; (*c*) $x = 50, y = 50$.

14.17 $l = 314$ metros, $w = 628/\pi \approx 200$ metros.

14.18 (*a*) Todo o arame para o círculo; (*b*) $\dfrac{\pi L}{\pi + 4}$ para o círculo e $\dfrac{4L}{\pi + 4}$ para o quadrado.

14.19 O arame todo para o quadrado.

14.20 1000 aparelhos de televisão

14.21 $r = 2$ m e $h = \dfrac{5}{3}$ m.

14.22 $h = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}, r = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}}$.

14.23 O triângulo equilátero de lado $p/3$.

14.24 (*a*) $\left(\dfrac{25}{16}, \pm\dfrac{3}{16}\sqrt{231}\right)$; (*b*) (–5,0).

14.25 Dimensão leste-oeste = 80 m, dimensão norte-sul = 48 m.

14.26 (*a*) $21 \le x \le 100$ metros; (*b*) 20400 metros quadrados (quando $x = 100$ metros).

14.27 15 toneladas

Capítulo 15

15.7 (*a*) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2}{3x+1}, (g \circ f)(x) = \dfrac{6}{x+1}$; (*b*) $x^6 + 2x^3 - 5, (x^2 + 2x - 5)^3$; (*c*) 49, 3; (*d*) x^6, x^6; (*e*) x, x; (*f*) $x^2 - 4, x^2 - 4$.

15.8 (*a*) Todos os x; (*b*) $x = -\frac{1}{4}$; (*c*) $x = \frac{1}{3}$; (*d*) $x = 0$; (*e*) $x = \pm\sqrt{2}$.

15.9 (*a*) $f(x) = x^3 - x^2 + 2, g(x) = x^7$; (*b*) $f(x) = 8 - x, g(x) = x^4$; (*c*) $f(x) = 1 + x^2, g(x) = \sqrt{x}$; (*d*) $f(x) = x^2 - 4, g(x) = x^{-1}$.

15.10 (*a*) $4(x^3 - 2x^2 + 7x - 3)^3(3x^2 - 4x + 7)$; (*b*) $15(7 + 3x)^4$; (*c*) $-4(2x - 3)^{-3}$; (*d*) $-18x(3x^2 + 5)^{-4}$; (*e*) $(4x^2 - 3)(x + 5)^2(28x^2 + 80x - 9)$; (*f*) $-15\dfrac{(x+2)^2}{(x-3)^4}$; (*g*) $\dfrac{20x(x^2-2)}{(2x^2+1)^3}$; (*h*) $\dfrac{4(1-6x)}{(3x^2 - x + 5)^2}$; (*i*) $\dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

15.11 (*a*) $\dfrac{3}{2}x^{-1/4}$; (*b*) $\dfrac{x(2 - 9x^3)}{(1 - 3x^3)^{2/3}}$; (*c*) $\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$; (*d*) $\dfrac{x(21x - 8)}{4(7x^3 - 4x^2 + 2)^{3/4}}$; (*e*) $-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x}-1)^3}$; (*f*) $6x^{-1/4} + x^{-3/4} + \dfrac{1}{3}x^{-4/3}$; (*g*) $\dfrac{16x}{3\sqrt[3]{4x^2+3}}$; (*h*) $-\dfrac{2 + \sqrt{3}\,x}{2\sqrt{x^3}}$; (*i*) $-\dfrac{1}{4\sqrt{4 - \sqrt{(4+x)}}\sqrt{(4+x)}}$; (*j*) $\dfrac{2(1 + x^2 - x^3)}{(1 - 2x)^2(1 + x^3)^{1/3}}$.

15.12 $y = -\frac{3}{50}x + \frac{8}{25}$. **15.13** $y = -\frac{5}{3}x + 10$.

15.14 (*a*) $(g \circ f)(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 - 4 = \frac{-3x^2 + 20x - 12}{(x-2)^2}$; $(g \circ f)'(x) = -\frac{8(x+2)}{(x-2)^3}$.

15.15 (*a*) máximo = $\sqrt{2}/2$ em $x = 1$, mínimo = $-\sqrt{2}/2$ em $x = -1$; (*b*) máximo = 216 em $x = 3$, mínimo = -36 em $x = -4$; (*c*) máximo = 3 em $x = -1$, mínimo = 1 em $x = 1$; (*d*) máximo = $\frac{4}{3}$ em $x = 8$, mínimo = $-\frac{1}{3}$ em $x = 1$; (*e*) máximo = $\frac{10}{9}$ em $x = -1$, mínimo = 0 em $x = 0$.

15.16 R está a $\frac{8}{5}$ milhas de A.

15.17 $H'(x) = 0$. **15.18** x^2. **15.19** $3x^2G(x^3)$.

15.20 Todos os números reais exceto 0 e 1.

15.21 $f'(-x) = f'(x)$ (a derivada é uma função par).

15.22 12.

15.23 (*a*) Domínio $[-\frac{1}{3}, \infty)$, imagem $[0, \infty)$; (*b*) $y = \frac{3}{8}x + \frac{17}{8}$; (*c*) $(1, 2)$.

15.24 Base = $\sqrt{2}$, altura = $\sqrt{2}/2$.

Capítulo 16

16.4 (*a*) $\frac{y - 2x}{2y - x}$; (*b*) (2,4), (-2,-4); (*c*) (4,2), (-4,-2).

16.5 (*a*) $\frac{5x}{2y}$; (*b*) $k = \pm 21$.

16.6 (*a*) $-\frac{x}{y}$; (*b*) $\frac{8x^3 - 3x^2y - 2}{1 + x^3}$ ou $\frac{3x^2(2x-y)^2 + 4y}{4x}$; (*c*) $-\frac{y^2}{x^2}$ ou $-(y-1)^2$; (*d*) $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; (*e*) $\frac{3x^2 - 2y}{2x + 3y^2}$; (*f*) $\frac{21(7x-1)^2}{8y^3}$; (*g*) $-\frac{4x}{9y}$; (*h*) $\frac{2 - y^3}{1 + 3xy^2}$; (*i*) $\frac{x(x-y)^2 + y}{x}$.

16.7 (*a*) $y = \frac{2}{9}x + \frac{4}{3}$; (*b*) $y = -\frac{\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$; (*c*) $y = \frac{4}{13}x + \frac{22}{13}$; (*d*) $y = \frac{17}{20}x - \frac{7}{5}$; (*e*) $y = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$; (*f*) $y = \frac{11}{7}x - \frac{4}{7}$; (*g*) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; (*h*) $y = -5x + 4$.

16.8 (*a*) $y = -\frac{8}{3}x + \frac{19}{3}$; (*b*) $y = -3x + 7$; (*c*) $y = -\frac{45}{32}x + \frac{917}{32}$; (*d*) $y = \frac{4}{3}x$. **16.9** $\frac{2}{3}$.

Capítulo 17

17.10 (*a*) $f'(1) = 0$; (*b*) $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$; (*c*) $f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = 0$; (*d*) $f'\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0$; (*e*) f não é contínua em $x = 1$; (*f*) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; (*g*) $f'(1) = 0$; (*h*) f não é diferenciável em $x = 1$.

17.11 (*a*) $1 < c < 4$; (*b*) $c = \frac{7}{2}$; (*c*) $c = \frac{81}{16}$; (*d*) $c = 4 - \sqrt{3}$; (*e*) $c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; (*f*) $c = 4 - 2\sqrt{2}$.

17.12 A função é crescente na primeira região indicada e decrescente na segunda: (*a*) em todo o domínio, em nenhuma região; (*b*) em nenhuma região, em todo o domínio; (*c*) $x > 2$, $x < 2$; (*d*) $x < -2$, $x > -2$; (*e*) $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$; (*f*) $-3 < x < 0$, $0 < x < 3$; (*g*) $x < 1$ ou $x > 5$, $1 < x < 5$; (*h*) $x < -1$ ou $x > 1$, $-1 < x < 0$ ou $0 < x < 1$; (*i*) $x < -2$ ou $x > 2$, $-2 < x < 2$.

17.15 (*d*). **17.18** $\dfrac{343}{3\sqrt{3}} = \dfrac{343\sqrt{3}}{9}$.

17.20 (*a*) Os pontos $(1,1)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, e $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$; (*b*) 0, 2 (raiz dupla); (*c*) $[0,3]$.

17.24 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{27}{4}\right)$. **17.25** (*b*) 0.8.

17.26 (*a*) Crescente em $(-1{,}3; 0{,}17)$ e $(1{,}13; +\infty)$; (*b*) crescente em $(-\infty; 0{,}333)$ e $(1, +\infty)$.

Capítulo 18

18.4 (*a*) $s_0 - s = 16t^2$; (*b*) (i) 0,25; (ii) 1; (iii) 2; (iv) 2,5.

18.5 4 segundos depois.

18.6 108,8 milhas por hora.

18.7 (*a*) 112 pés, 192 pés; (*b*) 4 segundos; (*c*) 256 pés; (*d*) 8 segundos; (*e*) 128 pés/segundo = v_0.

18.8 (*a*) 5 segundos; (*b*) 176 pés/segundo; (*c*) 3 segundos; (*d*) 1,5 segundos.

18.9 (*a*) Sempre se move para a direita; (*b*) 3 milhas.

18.10 (*a*) $t > 4$; (*b*) $t < 4$; (*c*) $t = 4$; (*d*) nunca; (*e*) 27 unidades.

18.11 (*a*) $t < \frac{1}{2}$ hora e $t > 1$ hora; (*b*) $\frac{1}{2} < t < 1$ hora; (*c*) $t = \frac{1}{2}$ hora e $t = 1$ hora; (*d*) 0,75 milhas por hora.

18.12 13 unidades.

18.13 320 pés/segundo

18.14 (*a*) $t = 0$ e $t = 5$; (*b*) $t = 2{,}5$; (*c*) não.

18.15 (*a*) 5 segundos; (*b*) 122,5 metros.

18.16 (*a*) 196 pés; (*b*) 112 pés/segundo.

Capítulo 19

19.4 \$30 por aparelho

19.5 \$7 por unidade.

19.6 24 pés quadrados por pé.

19.7 40 km/segundo (em $t = 1000$ segundos)

19.8 (a) 18 galões por segundo (isto é, $G' = -18$); (b) 54 galões por segundo (isto é, $\Delta G/\Delta t = -54$).

19.9 (*a*) 9; (*b*) 6.

19.10 $y = 2$.

Capítulo 20

20.5 24/7 pés por minuto.

20.6 $3{,}14/\pi \approx 1$ pé por minuto;

20.7 8 pés por segundo.

20.8 64 pés por segundo.

20.9 $12/\pi \approx 3{,}82$ milímetros por segundo.

20.10 $4/\pi \approx 1{,}27$ polegadas por segundo.

20.11 $400\pi \approx 1256$ metros quadrados por minuto.

20.12 (*a*) 10 milímetros; (*b*) crescente em $6/\sqrt{5} \approx 2{,}69$ milímetros por segundo.

20.13 36 unidades/segundo.

20.14 Decrescente em $\frac{3}{2}$ unidades por segundo.

20.15 30 milímetros quadrados por segundo.

20.16 $r = 1/\pi$.

20.17 Crescente em 6 unidades por segundo.

20.18 500 quilômetros por hora.

20.19 $4\sqrt{2} \approx 5{,}64$ milhas por hora.

20.20 $\dfrac{16}{25}\left(\dfrac{3{,}14}{\pi}\right) \approx 0{,}64$ metros por minuto.

20.21 $(-1, -\frac{3}{2})$.

20.22 5 pés/segundo.

20.23 6 pés por segundo.

20.24 $\dfrac{45}{8}$ pés por segundo.

20.25 0 milhas por hora.

20.26 12 unidades por segundo.

Capítulo 21

21.6 (*a*) $\dfrac{50}{7} \approx 7{,}1429$; (*b*) $\dfrac{53}{9} \approx 8{,}8333$; (*c*) $\dfrac{373}{75} \approx 4{,}9733$; (*d*) $\dfrac{12{,}35}{3} \approx 4{,}1167$; (*e*) $\dfrac{159}{320} \approx 0{,}4969$; (*f*) $\dfrac{65}{96} \approx 0{,}6771$; (*g*) $\dfrac{193}{480} \approx 0{,}4021$; (*h*) $\dfrac{323}{36} \approx 8{,}9722$; (*i*) $\dfrac{647}{108} \approx 5{,}9907$.

21.7 0,994 centímetros cúbicos.

21.8 $\dfrac{1920\pi}{77} \approx 78{,}3$ galões

21.9 (*a*) $5\pi \approx 15{,}7$ centímetros cúbicos; (*b*) $5{,}1\pi \approx 16{,}0$ centímetros cúbicos.

21.10 9%.

21.11 $\dfrac{1}{8\pi}$ milhas ≈ 210 pés.

21.12 (*a*) 6; (*b*) 6.

21.13 máximo (1,8725, 1,8475) = 1,8725 pés quadrados.

21.15 (*a*) 1,189207115; (*b*) 1,587401052; (*c*) 1,872171231; (*d*) 1,817120593.

21.17 (*a*) 1,324717957; (*b*) 0,6823278038; (*c*) ± 1,306562965 e ± 0,5411961001; (*d*) 1,179509025; (*e*) –0,8793852416, 1,347296355 e 2,532088886; (*f*) –1,671699882; (*g*) 1,618033989, –1,6180339888 e –1.

21.18 1,867460025

21.19 1,090942496

Capítulo 22

22.5 (*a*) $-\frac{2}{x^3}$; (*b*) $6\pi x$; (*c*) $-\frac{1}{4}(x+5)^{-3/2} = -\frac{1}{4(\sqrt{x+5})^3}$; (*d*) $-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3} = -\frac{2}{9(\sqrt[3]{x-1})^5}$; (*e*) $\frac{1}{4}(2-x^2)(x^2+1)^{-7/4}$; (*f*) $4(x-3)(5x^2-6x-3)$; (*g*) $\frac{4x+5}{(1-x)^4}$.

22.6 (*a*) $-\frac{1}{y^3}$; (*b*) $-\frac{1}{y^3}$; (*c*) $-\frac{2x}{y^5}$; (*d*) $\frac{2}{(x+2y)^3}$.

22.7 (*a*) e (*b*) $y'' = \frac{1}{2}x^{-3/2}$; (*c*) (*a*).

22.8 (*a*) $y' = 16x^3 - 4x$, $y'' = 48x^2 - 4$, $y''' = 96x$, $y^{(4)} = 96$, $y^{(n)} = 0$ para $n > 4$;

(*b*) $y' = 4x + 1 - x^{-2}$, $y'' = 4 + 2x^{-3}$, $y''' = -(2 \cdot 3)x^{-4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$;

(*c*) $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}$, $y^{(4)} = -\frac{15}{16}x^{-7/2}, \ldots,$

$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-3)}{2^n}x^{-(2n-1)/2}$;

(*d*) $y' = -2(x-1)^{-2}$, $y'' = 4(x-1)^{-3}$, $y''' = -12(x-1)^{-4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^n 2(n!)(x-1)^{-(n+1)}$;
(*e*) $y' = -(3+x)^{-2}$, $y'' = 2(3+x)^{-3}$, $y''' = -6(3+x)^{-4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^n n!\,(3+x)^{-(n+1)}$;
(*f*) $y' = -2x^{-3}$, $y'' = 3 \cdot 2x^{-4}$, $y''' = -4 \cdot 3 \cdot 2x^{-5}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^n(n-1)!\,x^{-(n+2)}$.

22.9 (*a*) $a = 2 \neq 0$; (*b*) -3; (*c*) 0.

22.10 $y'' = -\frac{2}{3}$. **22.11** $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}$.

22.12 (*a*) $K = \frac{1}{7}$, $L = \frac{3}{7}$; (*b*) não.

22.13 (*a*) $h''(x) = f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)$, $h'''(x) = f(x)g'''(x) + 3f'(x)g''(x) + 3f''(x)g'(x) + f'''(x)g(x)$, $h^{(4)}(x) = f(x)g^{(4)}(x) + 4f'(x)g'''(x) + 6f''(x)g''(x) + 4f'''(x)g'(x) + f^{(4)}(x)g(x)$;

(*b*) $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$, onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ e $f^{(0)}(x) = f(x)$.

22.14 $\frac{g(x)f''(x) - f(x)g''(x)}{(g(x))^2} - 2\frac{g'(x)}{g(x)}H'(x)$.

22.15 (*a*) 5,4 pés por segundo por segundo; (*b*) 270 pés em $t = 10$ segundos.

Capítulo 23

23.4 (*a*) Côncavo para cima para todo x. (*b*) Para cima em $x > -5$ e para baixo em $x < -5$; $I(-5{,}221)$. (*c*) Para cima em $x < -5$ ou $x > -4$, para baixo em $-5 < x < -4$; $I(-4{,}1021)$. (*d*) Para cima em $x > \frac{1}{2}$, para baixo em $x < \frac{1}{2}$; sem pontos de inflexão. (*e*) Para cima em $x < 3$, para baixo em $x > 3$; $I(3{,}162)$.

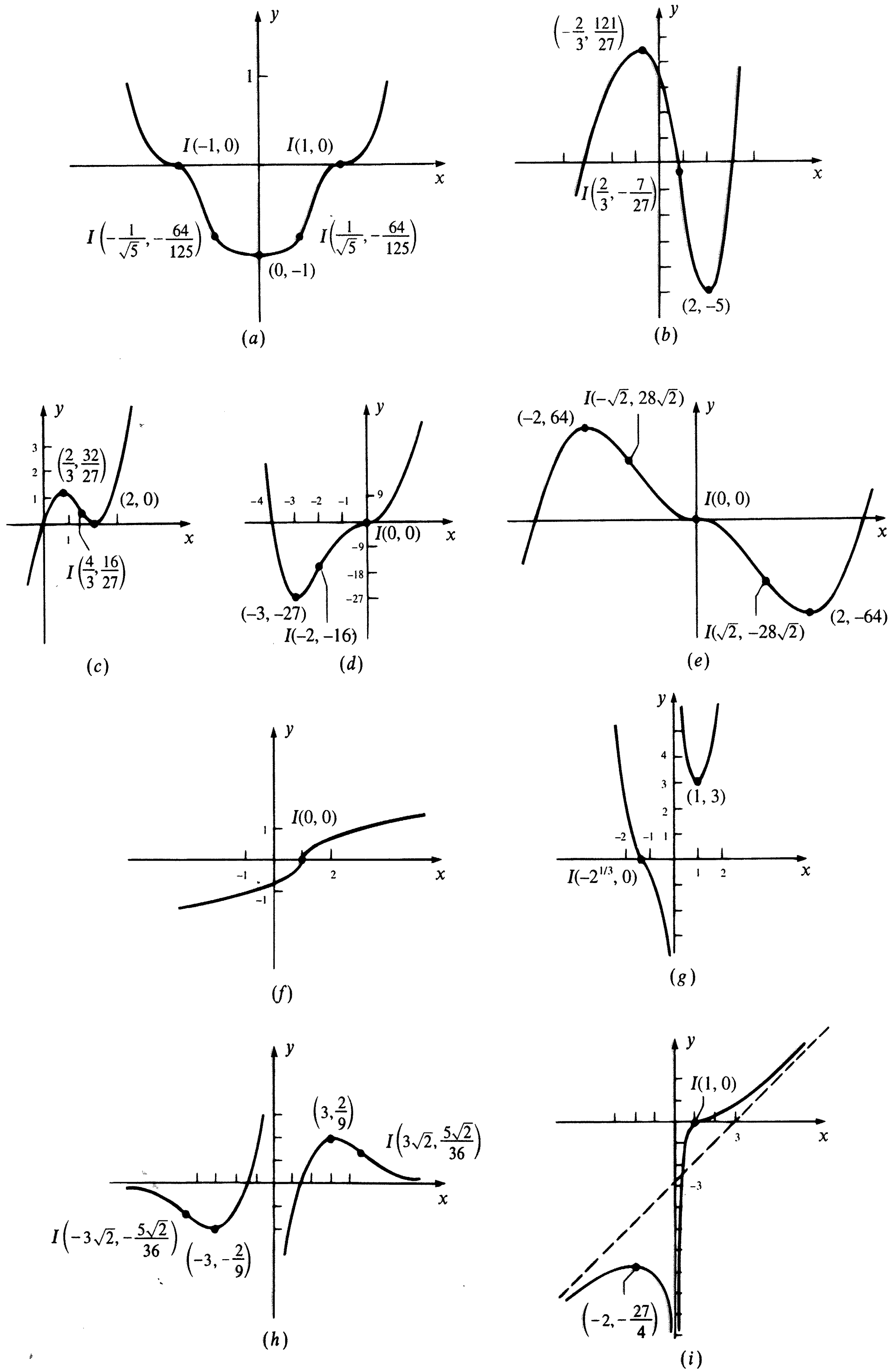

y
1
I(−1, 0)
I(1, 0)
x
$I\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{64}{125}\right)$
$I\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{64}{125}\right)$
(0, −1)
(a)
$\left(-\frac{2}{3}, \frac{121}{27}\right)$
y
x
$I\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{27}\right)$
(2, −5)
(b)
y
3
2
1
$\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$
(2, 0)
x
$I\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$
(c)
y
−4 −3 −2 −1
9
I(0, 0)
x
−9
−18
−27
(−3, −27)
I(−2, −16)
(d)
$I(-\sqrt{2}, 28\sqrt{2})$
(−2, 64)
y
I(0, 0)
x
$I(\sqrt{2}, -28\sqrt{2})$
(2, −64)
(e)
y
I(0, 0)
1
−1
2
x
−1
(f)
y
4
3
2
(1, 3)
−2
−1
1
$I(-2^{1/3}, 0)$
1 2
x
(g)
y
$\left(3, \frac{2}{9}\right)$
$I\left(3\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{36}\right)$
x
$I\left(-3\sqrt{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{36}\right)$
$\left(-3, -\frac{2}{9}\right)$
(h)
y
I(1, 0)
3
x
−3
$\left(-2, -\frac{27}{4}\right)$
(i)

Fig. A-10

23.5 (a) 1,5 (mínimo); (b) 0 (máximo), 3 (mínimo), –3 (mínimo); (c) 4 (mínimo), $-\frac{2}{3}$ (máximo); (d) 0 (máximo), 2 (mínimo) (e) 0 (mínimo).

23.6 Ver Fig. A-10.

23.7 (d)

23.8 B e E

23.9 (a) Um; (b) nenhum; (c) parábola.

23.10 (f)

23.11 $-4 < k < 0$

23.12 Ver Fig. A-11.

23.13 (a) Todos os x em $[-1,2]$; (b) todos os x em $[-1,2]$ exceto $x = 1$ [$f'(x) = 2x - 1$ para $x > 1$ e $f'(x) = 1 - 2x$ para $x < 1$]; (c) $1 < x < 2$ ou $-1 < x < \frac{1}{2}$; (d) $f''(x) = 2$ para $x > 1$ e $f''(x) = -2$ para $x < 1$; (e) côncavo para cima em $x > 1$, côncavo para baixo em $x < 1$; (f) ver Fig. A-12.

23.15 $k = -4$. **23.16** $A = C = 0, D = 1, B = -4, k = \pm\sqrt{2}$.

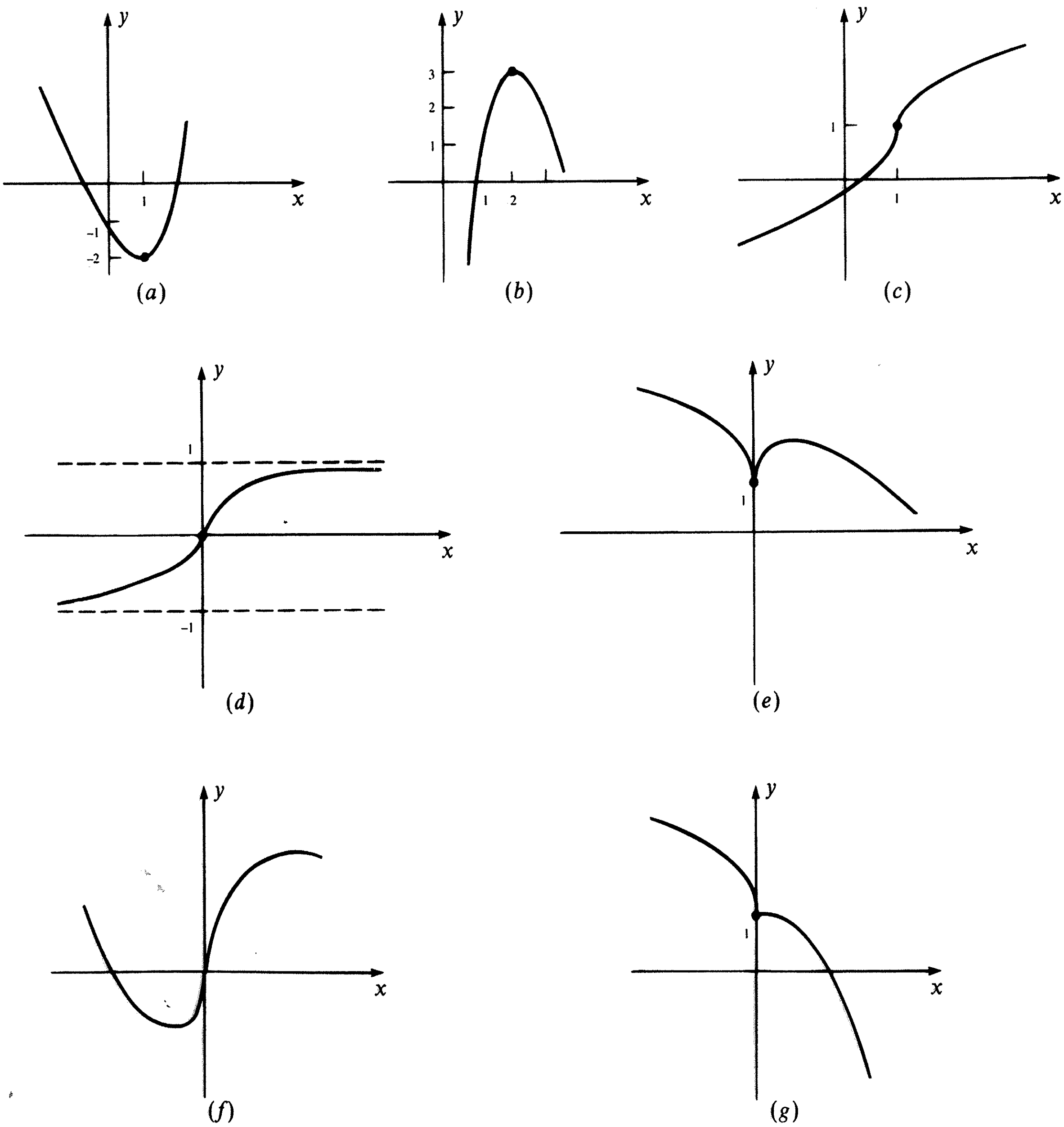


Fig. A-11

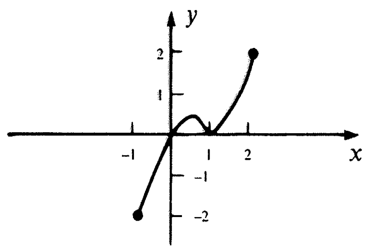


Fig. A-12

23.19 (*a*) $(0, +\infty)$; (*b*) $x = 0$, mínimo relativo; (*c*) côncavo para cima em $|x| < \sqrt{3}$, $I(\pm\sqrt{3}, 1)$; (*d*) ver Fig. A-13, assíntota horizontal $y = 3$.

23.20 (*a*) $-1 < x < 2$ ou $2 < x < 3$; (*b*) $0 < x < 2$ ou $x > 4$.

Capítulo 24

24.4 (*a*) Não há máximo; (*b*) 10 metros por 10 metros.

24.5 (0,0).

24.6 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

24.7 Altura = 7 pés, lado da base = 6 pés.

24.8 Máximo absoluto = -2 (em $x = 0$), sem mínimo absoluto.

24.9 10 centímetros.

24.10 200 pés norte-sul por 50 pés leste-oeste.

24.11 (*a*) Ver Fig. A-14; (*b*) $(-1, \frac{1}{2})$.

24.12 (*a*) $r = \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}, \frac{h}{r} = 2$; (*b*) $r = \sqrt[3]{\frac{k}{4}}, \frac{h}{r} = \frac{4}{\pi}$.

24.13 $h = 6$ polegadas, $r = 3\sqrt{2}$ polegadas.

24.14 (*a*) Máximo absoluto $= \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\text{em } x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, mínimo absoluto = 0 (em $x = 0$); (*b*) ver Fig. A-15.

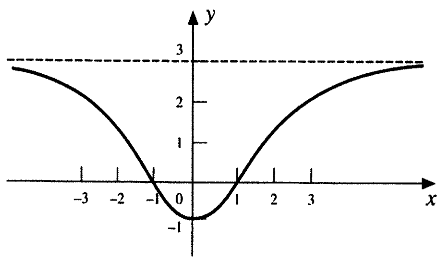


Fig. A-13

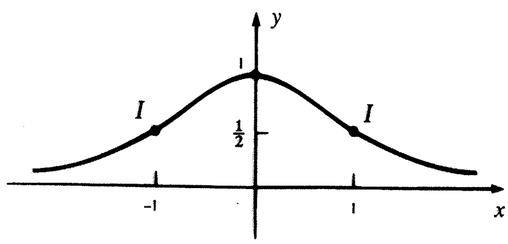


Fig. A-14

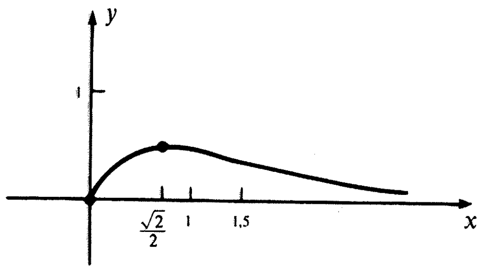


Fig. A-15

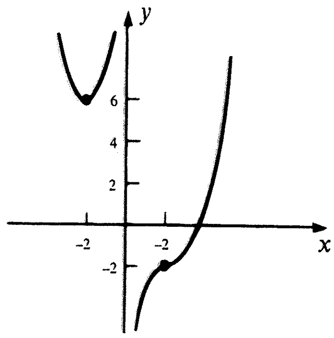


Fig. A-16

24.15 Altura = 8 metros, lado da base = 4 metros.

24.16 1500 por dia.

24.17 $x = 2, y = 6$.

24.18 (*a*) $k = -8$; (*b*) ver Fig. A-16; (*c*) $k = 0$.

24.19 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

24.22 Mínimo absoluto = 0 em $x = 0$, sem máximo absoluto.

Capítulo 25

25.6 (*a*) $\frac{\pi}{5}$; (*b*) $\frac{\pi}{12}$; (*c*) $\frac{\pi}{90}$; (*d*) $\frac{1}{2}$; (*e*) $\frac{4\pi}{5}$.

25.7 (*a*) $\frac{360}{\pi}$; (*b*) 36; (*c*) 105; (*d*) 225; (*e*) 210.

25.8 12 centímetros.

25.9 (*a*) $s = 2\pi$; (*b*) $r = \frac{11}{7\pi}$; (*c*) $\theta = \frac{\pi}{4}$; (*d*) $\theta = \frac{3}{2}$; (*e*) $s = \frac{3\pi}{2}$; (*f*) $r = \frac{6{,}28318}{\pi} \approx 2$; (*g*) $s = \frac{20\pi}{3}$.

25.10 $A = \frac{r^2\theta}{2}$. **25.11** Ver Fig. A-17.

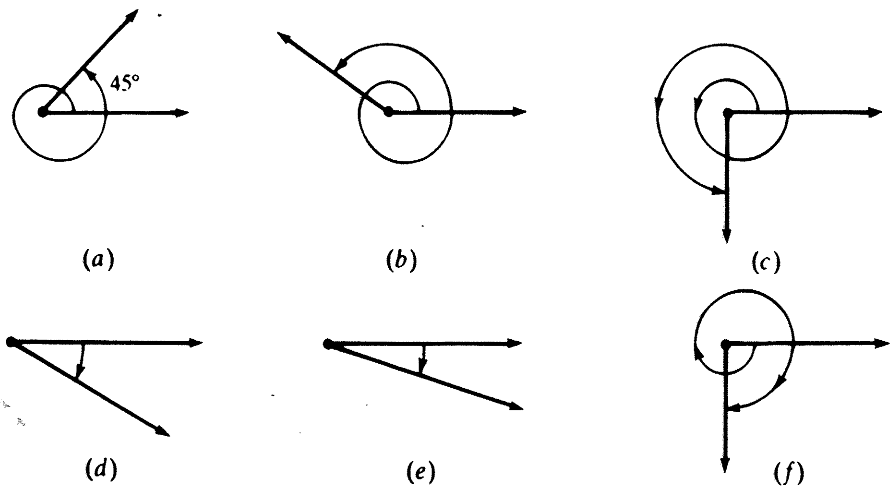


Fig. A-17

25.12 (*a*) $\frac{\pi}{4}$; (*b*) $\frac{3\pi}{4}$; (*c*) $\frac{3\pi}{2}$; (*d*) $\frac{5\pi}{3}$; (*e*) $\frac{11\pi}{6}$; (*f*) $\frac{3\pi}{2}$.

Capítulo 26

26.7 (*a*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (*b*) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (*c*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (*d*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (*e*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$; (*f*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; (*g*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$;
(*h*) 0,3256 (com precisão de quatro casas decimais); (*i*) 0,2079 (com precisão de quatro casas decimais).

26.8 (*a*) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$; (*b*) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$; (*c*) $-\frac{79}{81}$; (*d*) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; (*e*) $\frac{2}{3}$.

26.9 (*a*) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$; (*b*) $\frac{4\sqrt{21}}{25}$; (*c*) $\frac{17}{25}$; (*d*) $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$; (*e*) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}$.

26.10 $\frac{1}{5}$. **26.11** $\frac{\sqrt{247}}{2}$.

26.13 (*a*) e (*c*) são falsos para $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Capítulo 27

27.8 (*a*) $p = \frac{3\pi}{2}, f = \frac{4}{3}$, $A = 1$, ver Fig. A-18(*a*); (*b*) $p = \frac{2\pi}{3}, f = 3$, $A = \frac{1}{2}$, ver Fig. A-18(*b*).

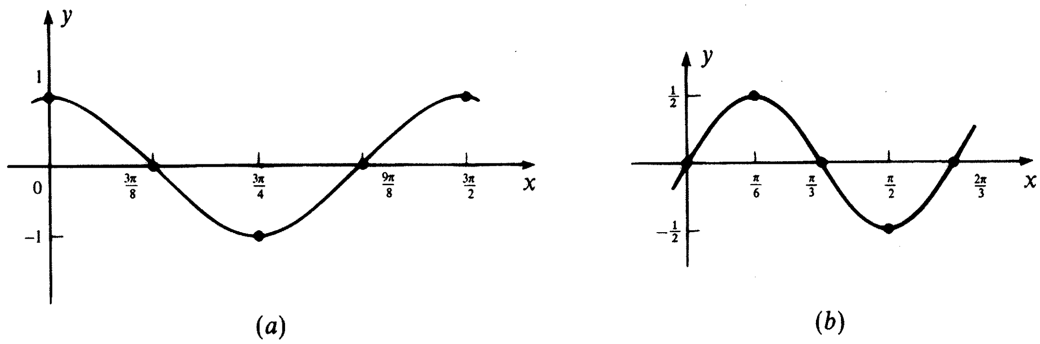


Fig. A-18

27.9 (*a*) $p = 6\pi$, $f = \frac{1}{3}$, $A = 2$; (*b*) $p = \pi, f = 2, A = 1$; (*c*) $p = \frac{4\pi}{5}, f = \frac{5}{2}$, $A = 5$; (*d*) $p = \frac{\pi}{2}, f = +4$, $A = 1$.

27.10 (*a*) $n\pi$ (para todos os inteiros n); (*b*) $2\pi n$ (para todos os inteiros n); (*c*) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (para todos os inteiros n); (*d*) $k\pi$ (para todos os inteiros ímpares k); (*e*) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ (para todos os inteiros n); (*f*) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ (para todos os inteiros n); (*g*) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ e $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ (para todos os inteiros n); (*h*) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ (para todos os inteiros n).

27.11 (*a*) $12 \operatorname{sen}^2 x \cos x$; (*b*) $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$; (*c*) $x \cos x + \operatorname{sen} x$; (*d*) $2x(\cos 2x - x \operatorname{sen} 2x)$; (*e*) $\frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$;
(*f*) $\frac{x \operatorname{sen} x + 2 \cos x - 2}{x^3}$; (*g*) $5(3 \cos x \cos 3x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x)$; (*h*) $-4 \cos 2x \operatorname{sen} 2x = -2 \operatorname{sen} 4x$;
(*i*) $-4x \operatorname{sen}(2x^2 - 3)$; (*j*) $15 \operatorname{sen}^2(5x+4)\cos(5x+4)$; (*k*) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$;
(*l*) $6(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2 x))(\cos(\operatorname{sen}^2 x)) \operatorname{sen} x \cos x$.

27.12 (*a*) $\frac{1}{3}$; (*b*) 0; (*c*) $\frac{2}{3}$; (*d*) 1; (*e*) $\frac{4}{5}$; (*f*) $\frac{1}{4}$; (*g*) 0; (*h*) -3; (*i*) 3; (*j*) 0; (*k*) 1; (*l*) 0.

27.13 A Figura A-19 mostra os gráficos para um período de cada função, exceto no caso da função não-periódica (*f*).

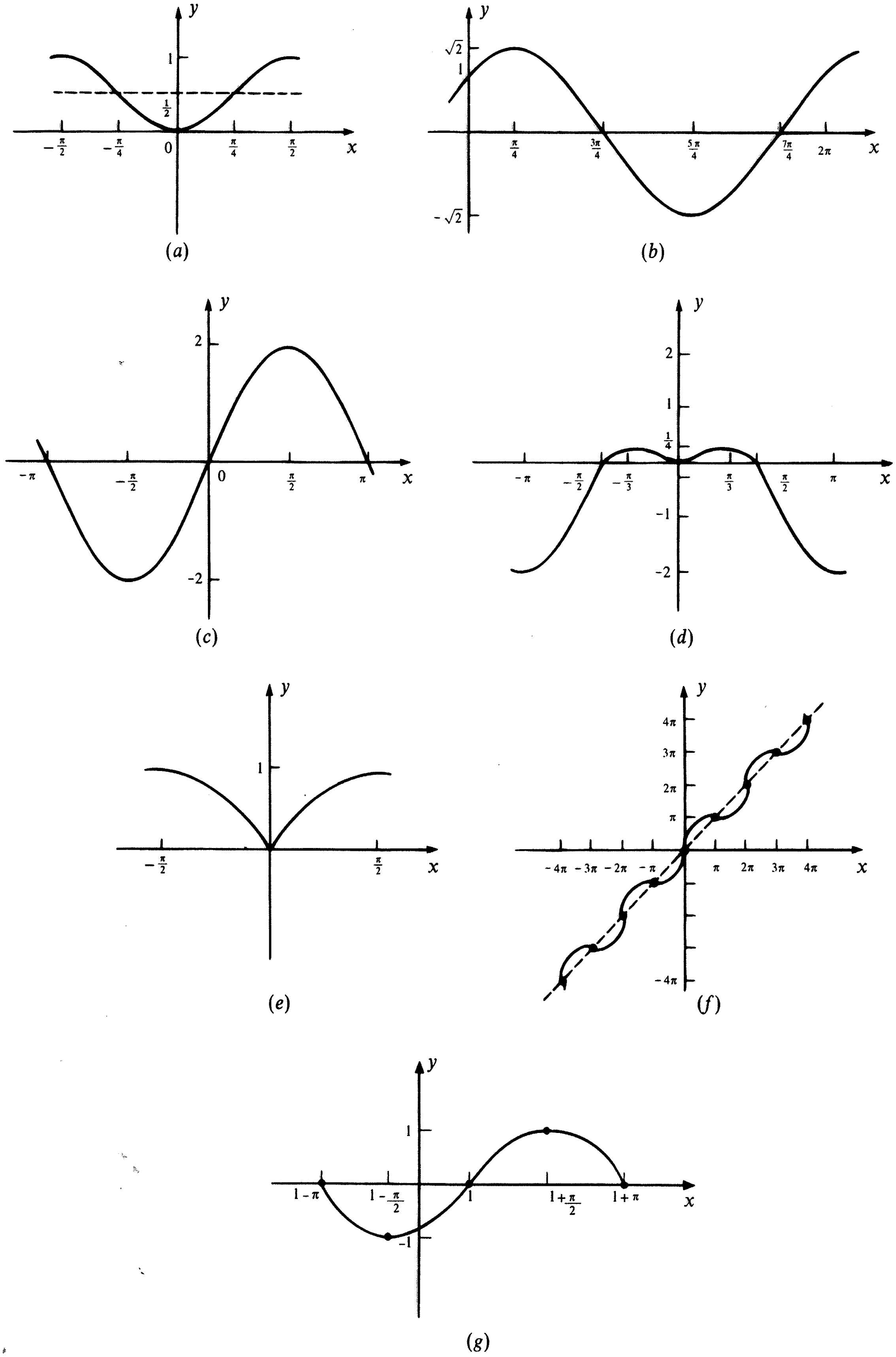


Fig. A-19

27.14 (a) máximo = 2π (em 2π), mínimo = 0 (em 0); (b) máximo = $\sqrt{2}\left(\text{em } \frac{3\pi}{4}\right)$, mínimo = –1 (em 0); ($c$) máximo = $\frac{5}{4}\left(\text{em } \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{5\pi}{6}\right)$, mínimo = 1 (em 0, $\frac{\pi}{2}$, e π); (d) máximo = $\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\text{em } \frac{\pi}{3}\right)$, mínimo = $-\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\text{em } \frac{5\pi}{3}\right)$; ($e$) máximo = $\frac{5}{4}$ (em π), mínimo = 0 (nas duas raízes de cos $x = \frac{1}{4}$) (f) máximo = $\frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}\left(\text{em } \frac{5\pi}{3}\right)$, mínimo = $\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}\left(\text{em } \frac{\pi}{3}\right)$; ($g$) máximo = 5 (em x_0, onde sen $x_0 = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$), mínimo = –5 (em $x_0 + \pi$).

27.15 (b) (i) Amplitude = 5, período = 2π; (ii) amplitude = 13, período = π; (iii) amplitude = $\sqrt{6}$, período = 2π.

27.16 (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **27.17** $A = \pi$. **27.18** $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9 - 2\pi\sqrt{3}}{12}$.

27.19 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{27 - 4\pi\sqrt{3}}{18}$. **27.20** $n = 4$.

27.21 (a) Ver Fig. A-20; (b) sim; (c) não.

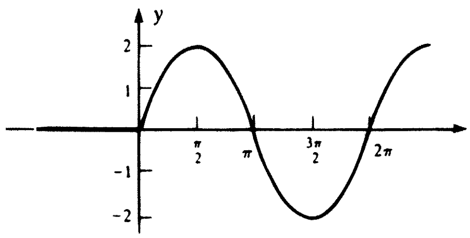


Fig. A-20

27.22 (a) 1; (b) 0.

27.23 (a) $y' = -\frac{1}{\text{sen } y} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; ($b$) $y' = -\frac{y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 2y}$.

27.24 (a) $-\frac{1}{8}$ radianos por segundo; (b) $200\sqrt{3}$ quilômetros por hora.

27.25 (a) $\theta = \frac{\pi}{2}$; (b) $\theta = 0$.

27.26 (a) máximo = $\frac{\pi}{2} - 1$ (em $\frac{\pi}{2}$), mínimo = 0 (em 0).

27.27 Contínua, mas não diferenciável.

27.28 (a) $\frac{\pi}{9} \approx 0{,}349$; ($b$) 0,857.

27.29 (a) cos x, –sen x, –cos x, sen x; (b) –sen x.

27.30 (b) 0,8654740331

27.31 3,141592523

27.32 1,895494267

Capítulo 28

28.8 Ver Fig. A-21.

28.10 (*a*) $\sec^2 \dfrac{x}{2}$; (*b*) $(\sec x)(\sec x - \text{tg } x)$; (*c*) $-2 \text{ cotg } x \csc^2 x$; (*d*) $3 - 4 \csc^2 4x$; (*e*) $6 \sec^2 3x \text{ tg } 3x$;

(*f*) $-3 \text{ cotg }(3x-5) \csc(3x-5)$; (*g*) $-\dfrac{\text{cotg}\sqrt{x} \csc\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; (*h*) $\dfrac{\sec^2 x}{3\sqrt[3]{\text{tg}^2 x}}$.

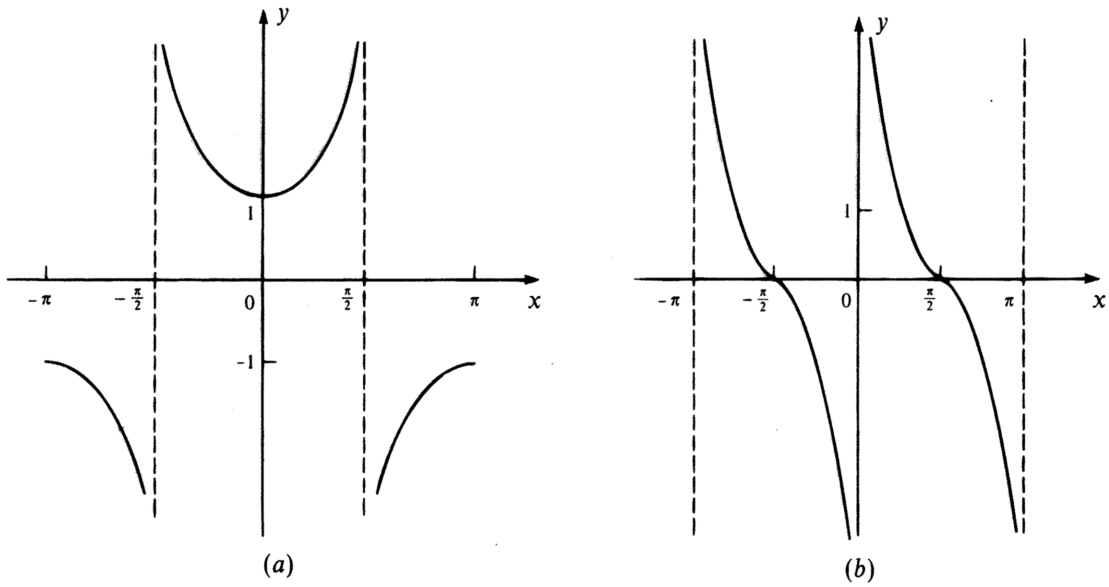


Fig. A-21

28.11 (*a*) $y' = -\dfrac{y \sec^2(xy)}{x \sec^2(xy) - 1} = -\dfrac{y(y^2+1)}{x(y^2+1)-1}$; (*b*) $y' = \dfrac{\csc^2 x \text{ cotg } x}{\sec^2 y \text{ tg } y}$; (*c*) $y' = \dfrac{3}{2} \dfrac{\cos x}{\text{tg }(y+1)\sec^2(y+1)}$;

(*d*) $y' = \dfrac{2 \text{ tg }(x+y)\sec^2(x+y)}{1 - 2 \text{ tg }(x+y)\sec^2(x+y)} = \dfrac{2(1+y)\text{ tg }(x+y)}{1-2(1+y)\text{ tg }(x+y)}$.

28.12 $y = 4\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$

28.13 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 4$

28.14 (*a*) 1; (*b*) 8; (*c*) $\frac{3}{4}$.

28.15 320 radianos/hora = $\dfrac{4}{45}$ radianos/segundo $\approx 5°$ por segundo.

28.16 $\text{tg }(\alpha_2 - \alpha_1) = 1.5$, $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 56°$.

28.17 $\text{tg }(\alpha_2 - \alpha_1) = 2$, $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 63°$.

28.18 $\text{tg }(\alpha_2 - \alpha_1) = 3$, $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 71°$.

28.19 $y = \dfrac{4x - \pi}{8(\pi^2+1)}$.

28.20 (*a*) Máximo relativo em $\pi/4$, mínimo relativo em $3\pi/4$, assíntota vertical em $\pi/2$, pontos de inflexão em 0 e π; (*b*) máximo relativo em $2\pi/3$, mínimo relativo em $\pi/3$, assíntota vertical em $\pi/2$, pontos de inflexão em 0 e π.

28.21 Em todos os intervalos nos quais é definida: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, etc.

28.22 (*a*) 1,318116072; (*b*) 4,493409579; (*c*) 0,860333589.

Capítulo 29

29.7 (*a*) $\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$; (*b*) $5x - 2\sqrt{x} + C$; (*c*) $\frac{8}{5}x^{5/4} + C$; (*d*) $3x^{5/3} + C$; (*e*) $-\frac{1}{x^3} + C$;
(*f*) $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{21}x^{3/2}(3x^2 - 7) + C$; (*g*) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} + C = \frac{1}{4x^4}(1 - 2x^2) + C$;
(*h*) $\frac{6}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{x}(9x^2 - 10x + 15) + C$; (*i*) $-3\cos x + 5\,\text{sen}\,x + C$;
(*j*) $7\,\text{tg}\,x - \sec x + C$; (*k*) $x^3 - \text{cotg}\,x + C$; (*l*) $\frac{2\sqrt{3}}{5}x^{5/2} + C = \frac{2x^2\sqrt{3x}}{5} + C$;
(*m*) $\text{sen}\,x + C$; (*n*) $\text{tg}\,x - x + C$; (*o*) $\frac{1}{10}x^{10} + \frac{2}{3}x^6 + 2x^2 + C$.

29.8 (*a*) $\frac{2}{21}(7x + 4)^{3/2} + C$; (*b*) $2(x - 1)^{1/2} + C$; (*c*) $\frac{1}{39}(3x - 5)^{13} + C$; (*d*) $-\frac{1}{3}\cos(3x - 1) + C$;
(*e*) $2\,\text{tg}\,\frac{x}{2} + C$; (*f*) $2\,\text{sen}\,\sqrt{x} + C$; (*g*) $-\frac{1}{32}(4 - 2t^2)^8 + C$; (*h*) $\frac{1}{4}(x^3 + 5)^{4/3} + C$;
(*i*) $\frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} - 2(x + 1)^{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x + 1}(x - 2) + C$; (*j*) $\frac{3}{5}(x - 1)^{5/3} + C$;
(*k*) $\frac{3}{4}\left[\frac{1}{7}(x^4 + 1)^{7/3} - \frac{1}{4}(x^4 + 1)^{4/3}\right] + C = \frac{3}{112}(x^4 + 1)^{4/3}(4x^4 - 3) + C$; (*l*) $\frac{1}{5}\sqrt{1 + 5x^2} + C$;
(*m*) $\frac{2(ax + b)^{3/2}}{15a^2}(3ax - 2b) + C$; (*n*) $-\frac{1}{3\,\text{sen}\,3x} + C = -\frac{1}{3}\csc 3x + C$;
(*o*) $-2(1 - x)^{3/2}\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5}(1 - x) + \frac{1}{7}(1 - x)^2\right] + C = -\frac{2}{105}(1 - x)^{3/2}(15x^2 + 12x + 8) + C$;
(*p*) $\frac{1}{39}(3x - 5)^{13} + C$; (*q*) $-\frac{1}{112}(4 - 7t^2)^8 + C$; (*r*) $-\frac{1}{2}\,\text{sen}^2\frac{1}{x} + C$; (*s*) $-\frac{1}{12}\,\text{tg}\,\frac{3}{x^4} + C$.

29.9 (*a*) $t = 7$ segundos; (*b*) 1024 pés; (*c*) $t = 15$ segundos; (*d*) 256 pés/segundo.

29.10 (*a*) $v = t^2 - 3t + 4$; (*b*) $x = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 4t$; (*c*) em $x = \frac{40}{3}$ quando $t = 4$, em $x = -\frac{35}{6}$ quando $t = -1$; (*d*) $-1 < t < 4$.

29.11 (*a*) $v = \frac{t^3}{3} - \frac{13}{3}t + 4$; (*b*) $x = \frac{t^4}{12} - \frac{13t^2}{6} + 4t$; (*c*) em $x = \frac{23}{12}$ quando $t = 1$, em $x = -\frac{3}{4}$ quando $t = 3$, e em $x = -\frac{88}{3}$ quando $t = -4$; (*d*) $t < -4$ e $1 < t < 3$.

29.12 (*a*) 160 pés/segundo; (*b*) 400 pés. **29.13** (*a*) 3 segundos; (*b*) 99 pés. **29.14** 7 unidades.

29.15 (*a*) $y = \frac{2x^3}{3} - 5x - 1$; (*b*) $y = 6x^2 + x + 1$. **29.16** 12,5 pés.

29.17 (*a*) $t^2 - 2t$; (*b*) $0 < t < 2$; (*c*) $t = 2$; (*d*) 0; (*e*) $\frac{8}{3}$.

Capítulo 30

30.4 (*a*) 24; (*b*) $\frac{5}{3}$; (*c*) $\frac{13}{3}$. **30.5** $A_2 - A_1 - A_3$ **30.6** (*c*) 20 **30.9** (*a*) π

30.10 (*a*) 15; (*b*) 110; (*c*) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$; (*d*) 15. **30.12** (*b*) $\left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$ **30.13** $4 - 1 + 2 = 5$ **30.14** $\frac{11}{5}$

Capítulo 31

31.10 (*a*) 24; (*b*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (*c*) $\sqrt{3}$; (*d*) $\frac{2046}{5}$; (*e*) $\frac{8\sqrt{5}-25}{2}$; (*f*) $\frac{5}{2}$.

31.11 (*a*) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; (*b*) 27; (*c*) $\frac{9}{2}$; (*d*) $\frac{13}{3}$; (*e*) $\frac{26}{3}$; (*f*) $\frac{1}{3}$; (*g*) $\frac{35}{6}$; (*h*) 9.

31.12 (*a*) $\frac{1}{2}$; (*b*) $\frac{1}{2}$; (*c*) $\frac{8}{3}(1-2\sqrt{2})$; (*d*) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; (*e*) $\frac{254}{7}-\frac{248}{5}+\frac{56}{3}$; (*f*) $\frac{2}{45}[(11)^3(383)-256]=\frac{113\,226}{5}$; (*g*) $\frac{349\,522}{7}$; (*h*) $\frac{1}{9}$; (*i*) $\frac{8}{3}$; (*j*) $\frac{5}{2}$; (*k*) $\frac{223}{160}$; (*l*) $\frac{4}{15}(6\sqrt{3}+1)$; (*m*) $\frac{486\,634}{45}$; (*n*) $\frac{1}{8}$.

31.13 (*a*) $\frac{3}{4}$; (*b*) $\frac{4}{\pi}$; (*c*) $\frac{1}{3}$; (*d*) $\frac{2}{\pi}$.

31.14 (*a*) $c=\frac{3}{2}$; (*b*) $c=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; (*c*) $c=\sqrt{3}$. **31.15** (*a*) $\frac{857}{35}$; (*b*) $\frac{1}{6}$. **31.16** $\frac{\pi}{4}$.

31.17 $\frac{x_2-x_1}{T}$. **31.18** (*a*) $\sqrt{5+7x^2}$; (*b*) $-\text{sen}^3\, x$; (*c*) $2\sqrt[3]{x^4+1}$. **31.19** 0.

31.20 (*a*) $6x\sqrt{243x^{10}+1}$; (*b*) $f(h(x))\cdot h'(x)$; (*c*) $3\sqrt{3x}$ e $-\frac{25x}{125x^3+1}$.

31.21 $b=\sqrt[n]{3}$. **31.22** 1. **31.23** 0.

31.24 (*a*) $4x$; (*b*) ± 2. **31.25** (*a*) 0; (*b*) $\frac{1}{2}$. **31.26** $b=4$. **31.27** $\sqrt[3]{6}$.

31.28 Todas as três são iguais. **31.29** $c=\frac{\pi}{3}$

31.30 Todos os valores tais que x^k é integrável em [0,2]; estão incluídos todos os valores positivos.

31.31 (*a*) $x=\frac{\text{sen}\, 3t}{3}$; (*b*) $\frac{2}{3\pi}$; (*c*) $0<t<\frac{\pi}{6}$; (*d*) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3}$.

31.32 $\frac{13}{2}$ m. **31.33** (*a*) $\frac{2}{\pi}$; (*b*) 1. **31.34** 0,33 em comparação com $\frac{1}{3}$.

31.35 $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}+1)\approx 2{,}004559755$ em comparação com 2. **31.36** (*a*) 0,2525, em comparação com a resposta exata 0,25; (*b*) 0,24875; (*c*) 0,25.

Capítulo 32

32.7 (*a*) $\frac{52}{3}$ [Fig. A-22(*a*)]; (*b*) $\frac{16}{3}$ [Fig. A-22(*b*)]; (*c*) $\frac{5}{4}$ [Fig. A-22(*c*)].

32.8 (*a*) $\frac{1}{12}$; (*b*) $\frac{1}{12}$; (*c*) $\frac{5}{3}$; (*d*) $\frac{1}{6}$; (*e*) $\sqrt{2}-1$; (*f*) $\frac{125}{6}$; (*g*) $\frac{9}{2}$; (*h*) $\frac{5}{12}$; (*i*) $\frac{1}{8}$; (*j*) 9; (*k*) $\frac{125}{6}$; (*l*) $\frac{1}{3}$; (*m*) $\frac{2}{15}$; (*n*) $\frac{5}{4}$.

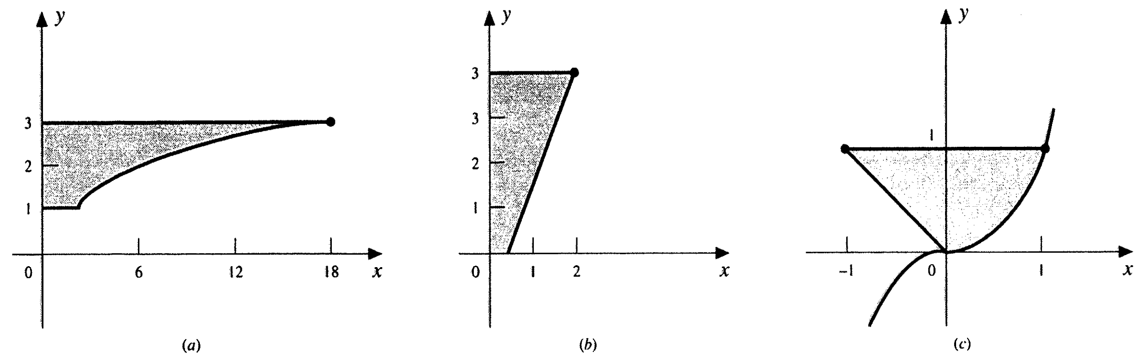


Fig. A-22

32.9 (*a*) $\frac{33}{16}$; (*b*) $\sqrt{10}$; (*c*) $\frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$; (*d*) 9; (*e*) $\frac{1097}{480}$; (*f*) $2\sqrt{3}$; (*g*) $\frac{17}{6}$; (*h*) 21.

32.10 (*a*) 1,478942828; (*b*) 3,82019779; (*c*) 125,6806691.

Capítulo 33

33.8 (*a*) $\frac{6\pi}{7}$; (*b*) $\frac{3\pi}{5}$; (*c*) $\frac{4\pi}{3}$; (*d*) $\frac{3\pi}{10}$; (*e*) $\frac{4\pi}{3}[r^3 - (r^2 - a^2)^{3/2}]$; (*f*) $\frac{2\pi}{3}(r^3 - a^3) - \pi a(r^2 - a^2)$; (*g*) $\frac{17}{15}(64\pi)$; (*h*) $2\pi^2 ba^2$; (*i*) $\frac{2\pi}{3}$; (*j*) $\frac{27\pi}{5}$; (*k*) $\frac{27\pi}{2}$; (*l*) $\frac{2\pi}{3}$; (*m*) 4π.

33.9 (*a*) $\frac{4}{3}r^3$; (*b*) $\frac{2\sqrt{3}}{9}r^3$; (*c*) $\frac{1}{3}r^2h$; (*d*) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ab\right)c = \frac{1}{6}abc$.

33.10 (*a*) $\frac{14\pi}{15}$; (*b*) $\frac{27\pi}{32}$. **33.11** (*a*) $\frac{7312\pi}{105}$; (*b*) $\frac{452\pi}{15}$. **33.12** (*a*) Ver Fig. A-23; (*b*) 4π; (*c*) $\frac{64\pi}{5}$.

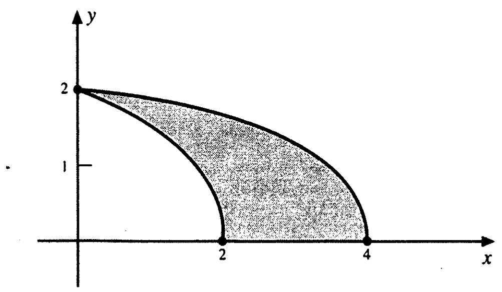


Fig. A-23

33.13 (*a*) Ver Fig. A-24; (*b*) $\frac{5\pi}{6}$.

33.14 (*a*) Ver Fig. A-25; (*b*) $\frac{1152\pi}{5}$; (*c*) $\frac{81\pi}{2}$; (*d*) $\frac{1332\pi}{5}$; (*e*) $\frac{153\pi}{2}$.

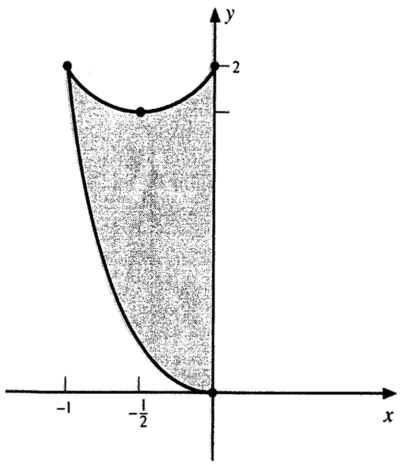


Fig. A-24

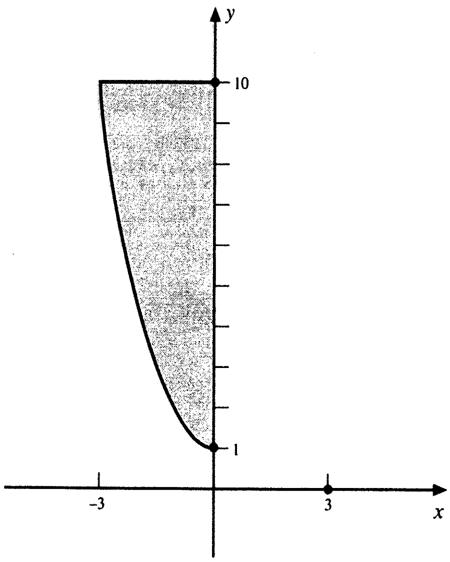


Fig. A-25

Capítulo 34

34.10 (*a*) $\dfrac{4}{4x-1}$; (*b*) $\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$; (*c*) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; (*d*) $\dfrac{1}{x \ln x}$; (*e*) $x(1 + 2 \ln x)$; (*f*) $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$; (*g*) $\dfrac{5}{5x-2}$; (*h*) $2 \operatorname{cotg} x$

34.11 (*a*) $\dfrac{1}{3} \ln |x| + C$; (*b*) $\dfrac{1}{7} \ln |7x - 2| + C$; (*c*) $\dfrac{1}{4} \ln |x^4 - 1| + C$; (*d*) $\dfrac{2}{3} (\ln x + 1)^{3/2} + C$; (*e*) $\ln (\ln x) + C$;

(*f*) $-\dfrac{1}{2} \ln |1 - \operatorname{sen} 2x| + C$; (*g*) $x^3 + 2 \ln |x| + \dfrac{3}{2x^2} + C$; (*h*) $\ln |\operatorname{tg} x| + C$;

(*i*) $-2 \ln |1 - \sqrt{x}| + C = \ln \dfrac{1}{(1 - \sqrt{x})^2} + C$; (*j*) $\dfrac{1}{2} (\ln x)^2 + C$.

34.12 (*a*) $y' = \dfrac{4x^2(3 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$; (*b*) $y' = \dfrac{(x-2)^4 \sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{x^2+4}} \left(\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{1}{3(x+5)} - \dfrac{x}{x^2+4} \right)$;

(*c*) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} \operatorname{sen} x}{(2x+3)^4} \left(\dfrac{x}{x^2 - 1} + \operatorname{cotg} x - \dfrac{8}{2x+3} \right)$; (*d*) $y' = -\dfrac{4}{3} \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}} \dfrac{1}{(x+2)(x-2)}$.

34.14 (*a*) $12 \ln 2$; (*b*) $\ln 2 - 2 \ln 3$.

34.15 (*a*) $\ln 2 + \ln 5$; (*b*) $-\ln 2$; (*c*) $-\ln 5$; (*d*) $2 \ln 5$; (*e*) $\frac{1}{2} \ln 2$; (*f*) $\frac{1}{3} \ln 5$; (*g*) $-(2 \ln 2 + \ln 5)$; (*h*) $7 \ln 2$.

34.16 $y = x - 1$. **34.17** $\ln 2 - \frac{7}{24}$. **34.18** $\frac{2 \ln 2}{3}$. **34.19** $2\pi \ln 2$. **34.20** Veja Fig. A-26.

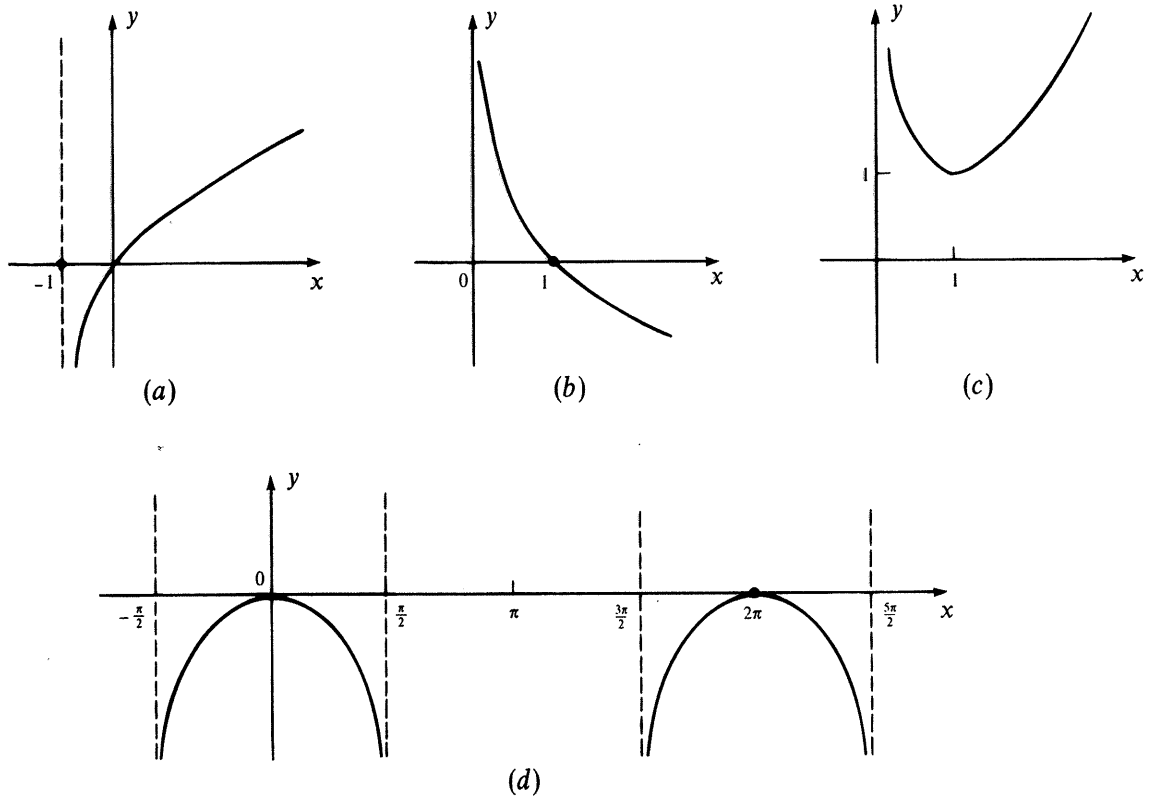


Fig. A-26

34.21 (*a*) $v = \frac{1}{2}t^2 - t + 6 \ln |t| + 2$; (*b*) $\frac{67}{2} + 12 \ln 3$.

34.22 (*a*) $y' = \frac{x}{y(x^2 + y^2 - 1)}$; (*b*) $y' = \frac{y(2x + 1)}{x(y - 1)}$; (*c*) $y' = \frac{1}{y(3xy + 3y^3 - 2)}$. **34.23** $\frac{1}{3}$.

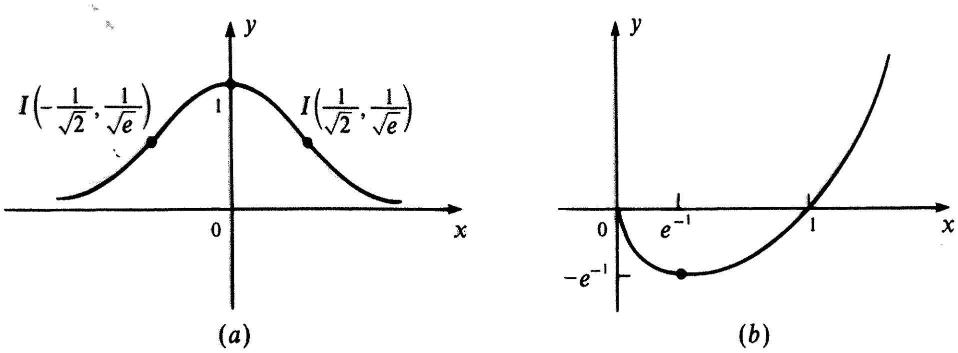
34.25 (*a*) $\ln 3 - \ln 2$; (*b*) $-\frac{1}{4} \ln 7$.

34.26 (*a*) 0,6937714032; (*b*) 0,6928353604; (*c*) 0,6931473747 (até 10 casas decimais, a resposta correta é 0,6931471806).

34.27 (*a*) 0,5671432904; (*b*) 1,763222834.

Capítulo 35

35.11 (*a*) $\frac{1}{x}$; (*b*) $-x$; (*c*) x^4; (*d*) $x^{1 + \ln 3}$; (*e*) $x - 1$; (*f*) $x - \ln x$; (*g*) $2x$; (*h*) $\frac{1}{3}$.



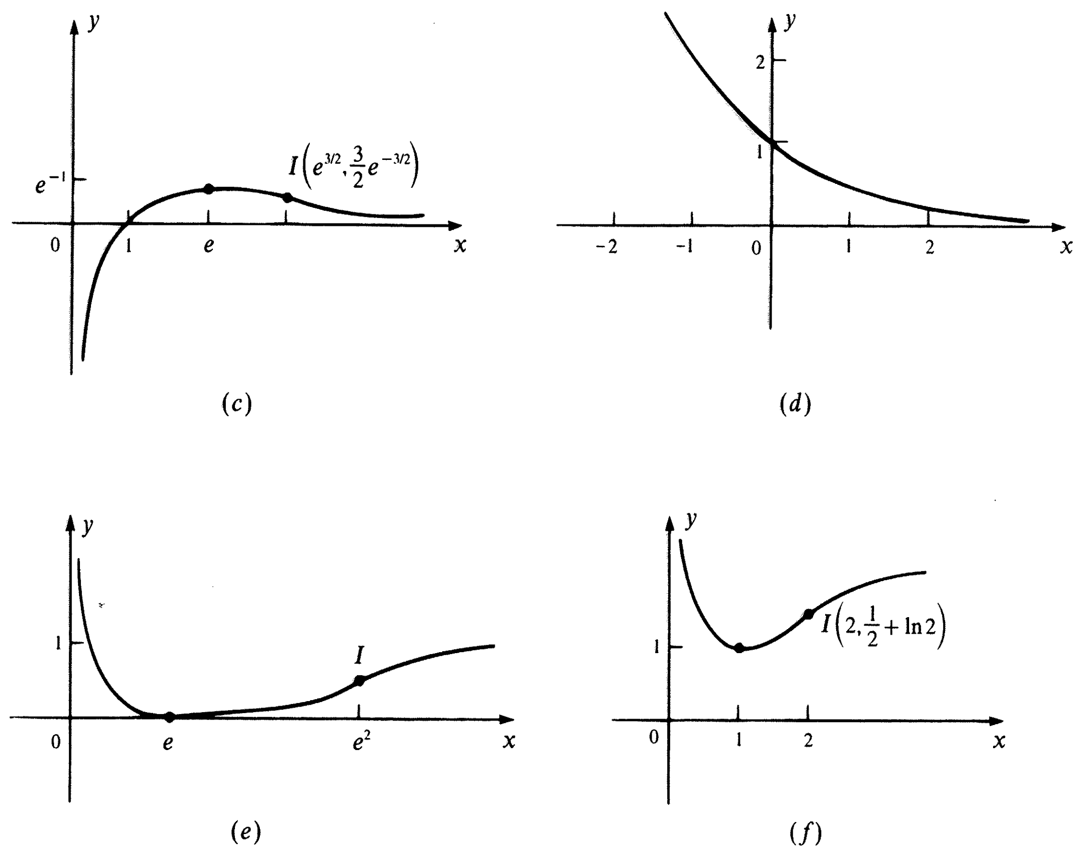


Fig. A-27

35.12 (*a*) $-e^{-x}$; (*b*) $-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$; (*c*) $(-\text{sen } x)e^{\cos x}$; (*d*) $e^x \sec^2 e^x$; (*e*) $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$; (*f*) $e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$; (*g*) $\pi x^{\pi - 1}$; (*h*) $(\ln \pi)\pi^x$; (*i*) 2; (*j*) $e^x + e^{-x}$.

35.13 (*a*) $\dfrac{1}{3} e^{3x} + C$; (*b*) $-e^{-x} + C$; (*c*) $\dfrac{2}{3}(\sqrt{e^x - 2})^3 + C$; (*d*) $-e^{\cos x} + C$; (*e*) $\dfrac{1}{2 \ln 3} 3^{2x} + C$; (*f*) $2e^{x/2} + C$; (*g*) $\dfrac{x^{\pi+1}}{\pi + 1} + C$; (*h*) $\dfrac{1}{3} e^{3x} + C$; (*i*) $e^x - \ln(e^x + 1) + C$; (*j*) $\dfrac{2^{x^3}}{3 \ln 2} + C$; (*k*) $-\dfrac{1}{4} e^{-x^4} + C$.

35.14 (*a*) $\dfrac{1}{x(e^y - 1)}$; (*b*) $1 + \dfrac{2x}{e^{y-x} \sec^2 e^{y-x}} = 1 + \dfrac{2x}{e^{y-x}(1 + x^4)}$; (*c*) $\dfrac{2y^2}{y^2 e^y - e^{1/y}}$; (*d*) $-\dfrac{2x + ye^{xy}}{2y + xe^{xy}}$; (*e*) cotg x

35.15 (*a*) $(\ln 3)(\cos x)3^{\text{sen } x}$; (*b*) $\dfrac{\ln 2}{2} e^x 2^{0.5e^x}$; (*c*) $(2 \ln x)x^{(\ln x) - 1}$; (*d*) $\dfrac{1}{x}[1 + \ln(\ln x)](\ln x)^{\ln x}$; (*e*) $\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}\right) = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}}$.

35.16 (*a*) $\dfrac{\ln 2}{3}$; (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$; (*c*) $\ln 2$; (*d*) e^e; (*e*) 2.

35.17 (*a*) $e - 1$; (*b*) $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - 1)$. **35.18** (*a*) 2; (*b*) $\pi(e^2 + 1)$. **35.19** $\pi(e - 1)$.

35.20 máximo $= e \left(\text{em } x = \dfrac{\pi}{2}\right)$, mínimo $= \dfrac{1}{e}\left(\text{em } x = -\dfrac{\pi}{2}\right)$. **35.21** $n^n e^{nx}$.

35.22 (*a*) $y' = (2 \cos x)e^{\text{sen} x}$, $y'' = 2e^{\text{sen} x}(\cos^2 x - \text{sen } x)$; (*b*) -2 radiano/segundo.

35.23 (a) $v = 3e^{3t} + 1$; (b) $2 + \dfrac{\ln 3}{3}$; (c) $x = e^{3t} + t - 1$.

35.24 $y = 2x + 2$. **35.25** Ver Fig. A-27.

35.26 Na Fig. 35-1(a) e na Fig. A-27(d), multiplique a escala horizontal por 1/ln 2.

35.29 máximo$= e^{-1}$ ($em\ x = e$), mínimo $= 0$ (em $x = 1$).

35.30 (c) 2,718145927. (A aproximação correta até 10 algarismos significativos é 2,718281828.)

35.32 (a) $\dfrac{3}{2}$; (b) $\ln(e + 1) - \ln 2$; (c) $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)$. **35.33** $e - 1$.

35.35 (b) Aproximadamente 11,55 anos; (c) após 1 ano, 1 real dá: (i) 1,05 reais quando capitalizados uma vez por ano; (ii) aproximadamente 1,05116 reais quando capitalizado mensalmente; (iii) aproximadamente 1,0512 reais quando capitalizado continuamente.

35.36 (a) 0,5671432904; (b) 1,309799586. **35.37** 0,8556260464.

Capítulo 36

36.9 (a) $+\infty$; (b) 1; (c) 0; (d) 0; (e) -1; (f) $+\infty$; (g) 1; (h) $\frac{1}{2}$; (i) 1; (j) 1; (k) $\ln 3 - \ln 2$; (l) $+\infty$; (m) 0; (n) 1; (o) 0; (p) e^3; (q) $+\infty$; (r) 0; (s) $1/\pi$; (t) $\frac{3}{7}$; (u) 3; (v) 4; (w) $\frac{1}{2}$.

36.10 Ver Fig. A-28. **36.11** 8 vezes.

36.12 $1690\,\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 1690(3{,}32) \approx 5611$ anos. **36.13** $e^{-(12\ln 2)/23} \approx 0{,}7$ gramas.

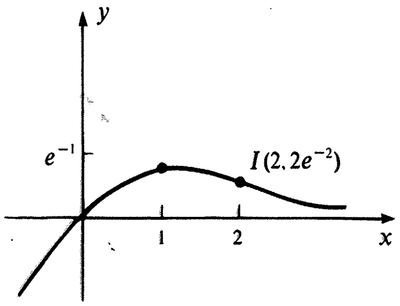
36.14 $T = \dfrac{\ln 2}{\ln 10 - 3\ln 2} \approx \dfrac{0{,}6931}{2{,}3026 - 2{,}0793} \approx 3{,}1$ anos. **36.15** 69,31 dias.

36.17 72 900. **36.18** 288 bilhões. **36.19** (a) 800; (b) $\dfrac{375}{\ln 2} \approx 541$.

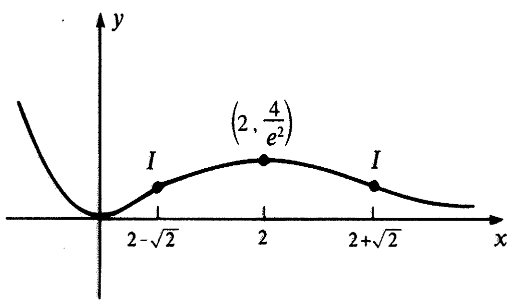
Capítulo 37

37.12 (a) $f^{-1}(y) = 2y - 6$; (c) $f^{-1}(y) = \dfrac{5 + 2y}{3 - y}$; ($e$) $f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y} + 1$; ($f$) $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} = f(y)$; ($g$) $f^{-1}(y) = \dfrac{5}{y - 3}$; ($h$) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{y} - 4}$; ($i$) $f^{-1}(y) = \dfrac{y + 2}{y - 1}$.

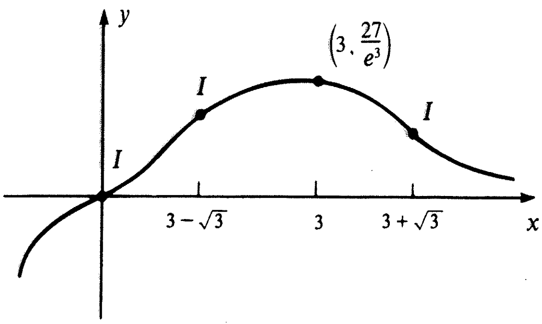
37.13 (a) $\dfrac{5\pi}{6}$; (b) $-\dfrac{\pi}{4}$; (c) $\dfrac{\pi}{4}$; (d) $\dfrac{\pi}{6}$; (e) $\dfrac{\pi}{4}$; (f) $\dfrac{7\pi}{6}$; (g) $\dfrac{5\pi}{4}$; (h) $\dfrac{3\pi}{4}$; (i) $\dfrac{4\pi}{3}$.



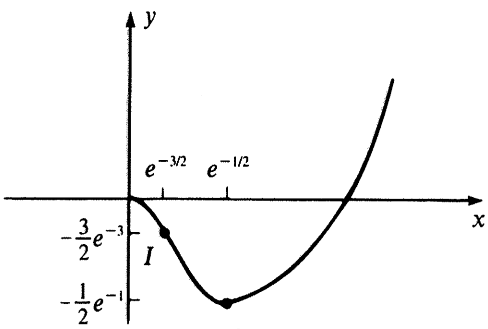
(a)



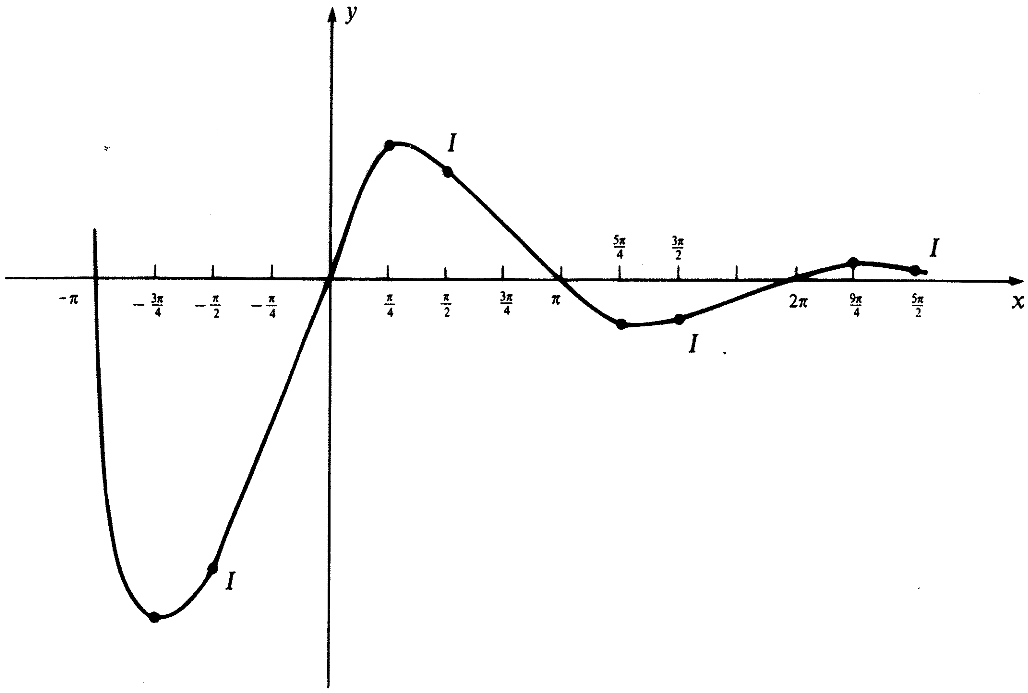
(b)



(c)



(d)



(e) Onda senoidal amortecida

Fig. A-28

37.14 (a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sec\theta = 3$, $\csc\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$;

(b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{cotg}\theta = -\sqrt{15}$, $\sec\theta = \frac{4\sqrt{15}}{15}$, $\csc\theta = -4$.

37.15 (a) $\frac{3}{5}$; (b) $\frac{12}{5}$; (c) $\frac{2}{15}(2-3\sqrt{2})$; (d) $\frac{2\sqrt{5}}{25}(\sqrt{6}-1)$; (e) 0.

37.16 Domínio $= (-\infty, \infty)$, imagem $= (0, 1]$.

37.17 (a) $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$; (b) $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$; (c) $\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \begin{cases} 5\pi/2 & \text{para } x \le -1 \\ \pi/2 & \text{para } x \ge 1 \end{cases}$;

(d) $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\left(\text{ou } \operatorname{cotg}^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{x}\right)$.

37.18 (a) $\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{tg}^{-1} x$; (b) $\frac{1}{(2\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$; (c) $-\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$; (d) $\frac{-3}{(1+9x^2)\operatorname{cotg}^{-1} 3x}$;

(e) $e^x\left(\cos^{-1} x - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; (f) $\dfrac{1}{(\operatorname{tg}^{-1} x)(1+x^2)}$; (g) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$;

(h) $\begin{cases} 2\sqrt{a^2-x^2} & \text{se } a > 0 \\ -\dfrac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{se } a < 0 \end{cases}$; (i) $\dfrac{1}{1+x^2}$; (j) $\begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{2}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$; (k) $-\dfrac{2}{x^2+4}$.

37.19 $\operatorname{tg}^{-1} u + \operatorname{tg}^{-1} v = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{u+v}{1-uv}$.

37.20 (a) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2} + C$; (b) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{3x}{2} + C$; (c) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{5} + C$; (d) $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}\frac{4x}{5} + C$; (e) $\sec^{-1}(x-3) + C$;

(f) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}x}{3}\right) + C$; (g) $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}x}{2}\right) + C$; (h) $\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2} + C$; (i) $\frac{1}{4}\sec^{-1}\frac{3x}{4} + C$;

(j) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}x}{2}\right) + C$; (k) $2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x} + C$; (l) $\frac{1}{6}\sec^{-1}\frac{\sqrt{x^4+9}}{3} + C$; (m) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-3}{3} + C$;

(n) $2\left(3\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-3}{3} - \sqrt{6x-x^2}\right) + C$; (o) $\frac{1}{2}\ln(x^2+8x+20) - 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{x+4}{2} + C$;

(p) $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$; (q) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x^2}{2} + C$; (r) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{e^x}{2} + C$; (s) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{5}}\right) + C$;

(t) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x+1}{3} + C$.

37.21 $y = \frac{1}{3}x$. **37.22** -1 radiano/segundo **37.23** $\frac{250\pi}{3}$ milhas/minuto $= 5000\pi$ milhas/hora $\approx 15\,708$ milhas/hora.

37.24 $\frac{\pi}{4}$. **37.25** $\frac{\pi}{6}$. **37.26** $\frac{\pi^2}{3}$. **37.28** $2\sqrt{2}$ pés

37.29 (a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; (b) $[0, \pi]$; (c) $[-1, 1]$; (d) $-1 \le x \le 1$; (e) $-1 \le x \le 1$.

37.30 (a) $\dfrac{y(1+y^2)(2x - \operatorname{tg}^{-1} y)}{1+y^2+xy}$; (b) $-\dfrac{y}{x + 2e^{2y}\sqrt{1-x^2y^2}}$.

37.31 Fig. A-29. **37.33** $\frac{\pi}{16}$.

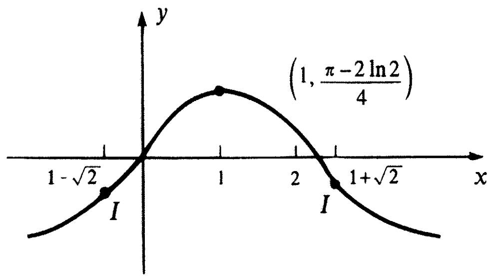


Fig. A-29

37.34 (b) 3,141592651. (A aproximação correta com 10 algarismos significativos é 3,141592654.)

Capítulo 38

38.6 $(a)\ -e^{-x}(x^2+2x+2)+C$; $(b)\ \dfrac{e^x(\text{sen } x-\cos x)}{2}+C$; $(c)\ e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$;

$(d)\ x\,\text{sen}^{-1}\,x+\sqrt{1-x^2}+C$; $(e)\ x\,\text{sen } x+\cos x+C$; $(f)\ 2x\,\text{sen } x+(\cos x)(2-x^2)+C$;

$(g)\ \dfrac{x}{2}[\cos(\ln x)+\text{sen}(\ln x)]+C$; $(h)\ \dfrac{1}{25}[5x\,\text{sen}(5x-1)+\cos(5x-1)]+C$;

$(i)\ \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\,\text{sen } bx+a\cos bx)+C$; $(j)\ \dfrac{1}{2}(x-\text{sen } x\cos x)+C$;

$(k)\ \text{sen } x-\dfrac{\text{sen}^3 x}{3}+C=\dfrac{\text{sen } x}{3}(2+\cos^2 x)+C$; $(l)\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}x+\text{sen } 2x+\dfrac{1}{8}\text{sen } 4x\right)+C$; $(m)\ \dfrac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$;

$(n)\ x\,\text{tg } x-\ln|\sec x|+C$; $(o)\ \dfrac{1}{8}(2x^2+2x\,\text{sen } 2x-\cos 2x)+C$; $(p)\ x(\ln x)^2-2x(\ln x-1)+C$;

$(q)\ \dfrac{1}{4}(\text{sen } 2x-2x\cos 2x)+C$; $(r)\ -\dfrac{1}{2}\cos x^2+C$; $(s)\ -\dfrac{1}{x}(1+\ln x)+C$; $(t)\ \dfrac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C$;

$(u)\ \dfrac{1}{6}[2x^3\,\text{tg}^{-1}\,x-x^2+\ln(1+x^2)]+C$; $(v)\ x\ln(x^2+1)-2(x-\text{tg}^{-1}\,x)+C$;

$(w)\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2)+C$; $(x)\ \dfrac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$.

38.7 $(a)\ 1$; (b) (i) $\pi(e-2)$; (ii) $\dfrac{\pi}{2}(1+e^2)$.

38.8 $(a)\ \dfrac{1}{2}$; $(b)\ 2\pi$; $(c)\ \pi\left(2-\dfrac{5}{e}\right)$. **38.10** $(a)\ \dfrac{\pi^2}{2}$; $(b)\ 2\pi^2$. **38.11** $(a)\ 0$; $(b)\ -\dfrac{2\pi}{n}$.

38.12 $(a)\ \displaystyle\int \cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1} x\,\text{sen } x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2} x\,dx.$

$(b)\ \displaystyle\int \text{sen}^n x\,dx=-\frac{\text{sen}^{n-1} x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\text{sen}^{n-2} x\,dx.$

38.13 $(a)\ \displaystyle\int \sec^n x\,dx=\frac{\sec^{n-2} x\,\text{tg } x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2} x\,dx;$

(b) (i) $\dfrac{1}{2}(\sec x\,\text{tg } x+\ln|\sec x+\text{tg } x|)+C$; (ii) $\dfrac{\sec^2 x\,\text{tg } x}{3}+\dfrac{2}{3}\text{tg } x+C=(\text{tg } x)\left(1+\dfrac{\text{tg}^2 x}{3}\right)+C.$

Capítulo 39

39.12 $(a)\ -\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$; $(b)\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\text{sen } 6x}{12}+C$; $(c)\ \dfrac{1}{5}\text{sen}^5 x-\dfrac{2}{7}\text{sen}^7 x+\dfrac{1}{9}\text{sen}^9 x+C$;

$(d)\ \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{5x}{2}+2\,\text{sen } 2x+\dfrac{3}{8}\text{sen } 4x-\dfrac{1}{6}\text{sen}^3 2x\right)+C$; $(e)\ \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{5}{8}x-\dfrac{\text{sen } 4x}{8}+\dfrac{\text{sen}^3 2x}{3}-\dfrac{\text{sen } 8x}{64}\right)+C$;

$(f)\ 2\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}-x+C$; $(g)\ \dfrac{1}{5}\text{tg}^5 x-\dfrac{1}{3}\text{tg}^3 x+\text{tg } x-x+C$;

$(h)\ \dfrac{1}{4}\sec^3 x\,\text{tg } x+\dfrac{3}{8}\sec x\,\text{tg } x+\dfrac{3}{8}\ln|\sec x+\text{tg } x|+C$; $(i)\ \dfrac{1}{5}\text{tg}^5 x+\dfrac{1}{3}\text{tg}^3 x+C$;

$(j)\ \dfrac{1}{5}\sec^5 x-\dfrac{1}{3}\sec^3 x+C$; $(k)\ \dfrac{1}{4}\sec^3 x\,\text{tg } x-\dfrac{5}{8}\sec x\,\text{tg } x+\dfrac{3}{8}\ln|\sec x+\text{tg } x|+C$;

$(l)\ -\dfrac{1}{8}\cos 4x+C$; $(m)\ \dfrac{1}{8\pi}(2\cos 2\pi x-\cos 4\pi x)+C$; $(n)\ \dfrac{1}{24}(6\,\text{sen } 2x-\text{sen } 12x)+C$;

$(o)\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\text{sen } 5x}{5}+\dfrac{\text{sen } 13x}{13}\right)+C.$

39.14 $(a)\ 0$; $(b)\ \pi$.

39.15 (*a*) $\sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x + C$; (*b*) $2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$; (*c*) $\sqrt{1+x^2} + \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|} + C$;

(*d*) $-\sqrt{2-x^2} + C$; (*e*) $\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$; (*f*) $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$; (*g*) $\frac{1}{54}\left(\text{tg}^{-1}\frac{x}{3} + \frac{3x}{x^2+9}\right) + C$;

(*h*) $\frac{1}{4}\ln\frac{4-\sqrt{16-9x^2}}{|3x|} + C = \frac{1}{4}\ln\frac{4-\sqrt{16-9x^2}}{|x|} + K$; (*i*) $\frac{1}{8}[\text{sen}^{-1} x - x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}] + C$;

(*j*) $\frac{1}{8}(\text{sen}^{-1} e^x - e^x(1-2e^{2x})\sqrt{1-e^{2x}}) + C$; (*k*) $\frac{1}{16}\left[\text{tg}^{-1}\frac{x-3}{2} - \frac{2(x-3)}{x^2-6x+13}\right] + C.$

39.16 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{17}+4)$. **39.17** $\sqrt{e^2+1} - (1+\sqrt{2}) + \ln\frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{2}-1}$.

39.18 A mesma resposta do Problema 39.17 (pois os dois arcos são imagens espelhadas pela reta $y = x$).

39.19 $\ln(2+\sqrt{3})$. **39.20** $\pi\sqrt{9}\sqrt{4} = 6\pi$.

Capítulo 40

40.6 (*a*) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$; (*b*) $3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C$; (*c*) $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + C$;

(*d*) $\frac{3}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x-2| + \frac{19}{2}\ln|x-3| + C$; (*e*) $\frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{8}\ln|x+1| + \frac{5}{8}\ln|x-3| + C$;

(*f*) $-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{13}{6}\ln|x+3| - \frac{7}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{6}\ln|x-1| + C$; (*g*) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^2-9}{x^2-4}\right| + C$;

(*h*) $6\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{5}{x} + C$; (*i*) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{x-2} + C$; (*j*) $\frac{4}{9}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + \frac{1}{3}\frac{1}{x+3} + C$;

(*k*) $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{25}\left(266\ln|x-4| + 9\ln|x+1| + \frac{55}{x+1}\right) + C$; (*l*) $\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+5}\right) + C$;

(*m*) $\frac{1}{10}\ln|x-1| + \frac{9}{20}\ln(x^2+4x+5) - \frac{13}{10}\text{tg}^{-1}(x+2) + C$; (*n*) $\frac{1}{3}\text{tg}^{-1} x - \frac{1}{6}\text{tg}^{-1}\frac{x}{2} + C$;

(*o*) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}[\ln|x| - 41\ln(x^2+9)] + C$; (*p*) $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C$;

(*q*) $\frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{50}\ln(x^2+4) + \frac{3}{100}\text{tg}^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{10}\frac{x-4}{x^2+4} + C$;

(*r*) $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{9}\text{tg}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1} + C$; (*s*) $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$;

(*t*) $\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{11}{3}\ln|x+3| - 3\ln|x+2| + C$; (*u*) $x - \ln(1+e^x) + C$.

40.8 (*a*) $\frac{1}{81}(3\ln 2 + \pi\sqrt{3})$; (*b*) $\frac{1}{27}(\pi\sqrt{3} - 3\ln 2)$. **40.9** $\frac{2}{1-\text{tg}\,\frac{x}{2}} + C.$

40.10 (*a*) $\ln(1-\text{sen}\,x) + C$; (*b*) $\ln|\text{sen}\,x - 1| + C$; (*c*) $\text{sen}\,x \le 1$.

40.11 (*a*) $-\frac{3}{2}\ln|1-x^{2/3}| + C$; (*b*) $4\left[\frac{(\sqrt[4]{x-1})^3}{3} - \frac{\sqrt{x-1}}{2} + \sqrt[4]{x-1} - \ln(1+\sqrt[4]{x-1})\right] + C$;

(*c*) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+3x}+1}\right| + C$; (*d*) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$; (*e*) $\frac{4}{3}(\sqrt{x}-2)\sqrt{\sqrt{x}+1} + C$;

(*f*) $2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C = 2\sqrt{1+e^x} + 2\ln(\sqrt{1+e^x}-1) - x + C$;

(*g*) $\frac{3}{2}x^{2/3} + \ln|x^{1/3}+1| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x^{1/3}+1}\right| - \sqrt{3}\,\text{tg}^{-1}\left(\frac{2x^{1/3}-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

Índice