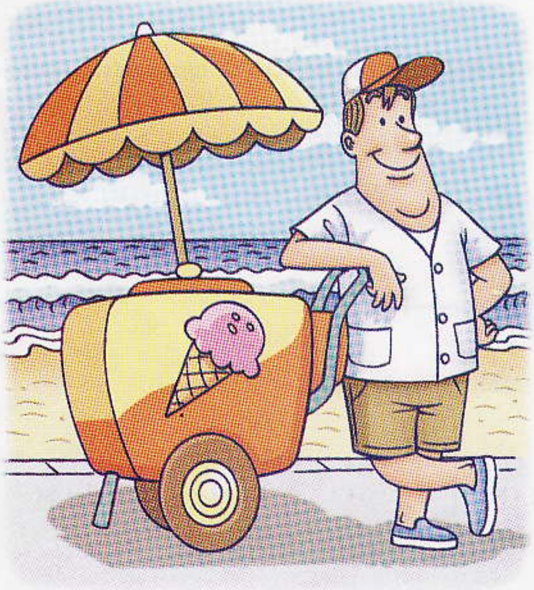
21 SISTEMAS LINEARES

João Vítor tem uma empresa que mantém carrinhos nas praias para venda de sorvetes, chocolates e chicletes.

Na praia da Enseada, João Vítor colocou três carrinhos (A, B e C).

Em um certo domingo, ao anoitecer, o empresário fez um balanço das vendas e verificou que:

- do carrinho A, foram vendidos 30 sorvetes, 45 chocolates e 60 chicletes; R$ 207,00 no total;
- do carrinho B, foram vendidos 50 sorvetes, 35 chocolates e 40 chicletes, totalizando R$ 193,00;
- do carrinho C, foram vendidos 40 sorvetes, 30 chocolates e 45 chicletes; total de R$ 174,00.



Qual era o preço de um sorvete? E de um chocolate? E de um chiclete?

Para responder a essas perguntas, vamos usar a seguinte notação:

- x é o preço do sorvete;
- y é o preço do chocolate;
- z é o preço do chiclete.

Com essa notação, vemos que:

- o total das vendas feitas por A é $30x + 45y + 60z$. Assim:

$$30x + 45y + 60z = 207 \quad (1)$$

- o total das vendas feitas por B é $50x + 35y + 40z$. Assim:

$$50x + 35y + 40z = 193 \quad (2)$$

- o total das vendas feitas por C é $40x + 30y + 45z$. Assim:

$$40x + 30y + 45z = 174 \quad (3)$$

Considerando simultaneamente as condições (1), (2) e (3), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 30x + 45y + 60z = 207 \\ 50x + 35y + 40z = 193 \\ 40x + 30y + 45z = 174 \end{cases}$$

que é denominado **sistema linear**. Neste capítulo, vamos aprender a resolver sistemas lineares e então você será capaz de calcular os valores de x, y e z e saberá os preços do sorvete, do chocolate e do chiclete.

Equação linear

Definição

Equação linear nas incógnitas (ou variáveis) x_1, $x_2, ..., x_n$ é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2, ..., a_n$ são coeficientes reais, e b, também real, é o termo independente da equação.

São lineares, por exemplo, as equações:

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $\quad$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$ $\quad$ $x + 2y - 3z = 0$

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = -2$ $\quad$ $x - y = 0$

$x + y + z = 7$ $\quad$ $m + 2n + 5p = 0$

observações

- Nos exemplos acima à direita, o termo independente é nulo. Dizemos, em cada caso, que se trata de uma equação linear homogênea.
- Note que, numa equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre unitários. Dessa forma, não representam equações lineares:

  $2x_1^2 - x_2 = 5$ $\quad$ $\frac{1}{x} - y + z = \sqrt{3}$

- Uma equação linear não apresenta termo misto (aquele que contém produto de duas ou mais incógnitas). Dessa forma, não representam equações lineares:

  $2x_1 + x_2x_3 = 5$ $\quad$ $x + y + zw = 0$

Solução de uma equação linear

Dizemos que a seqüência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ quando a expressão $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

Vejamos alguns exemplos:

- O par ordenado $(2, -3)$ é solução da equação $4x - 5y = 23$, pois, substituindo x por 2 e y por -3, obtemos:

$$4 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23$$

- A tripla ordenada $(-1, -1, 2)$ é solução da equação $2x - 3y + z = 3$, pois $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 2 = -2 + 3 + 2 = 3$.

  Já a tripla $(5, 4, 1)$ não é solução dessa equação, pois $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 1 = 10 - 12 + 1 = -1 \neq 3$.

  Para encontrarmos outra solução para a equação $2x - 3y + z = 3$, escolhemos arbitrariamente valores para duas das incógnitas (x e y, por exemplo) e calculamos o valor da terceira incógnita (z). Considerando $x = 3$ e $y = -4$, temos:

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) + z = 3$$
$$6 + 12 + z = 3 \Rightarrow z = -15$$

Assim, uma outra solução é $(3, -4, -15)$.

observação

Toda equação homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ admite a seqüência $(0, 0, ..., 0)$ como solução, pois, quaisquer que sejam os coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$, tem-se $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = 0$.

exercícios

1. Verifique se $(3, -2)$ é solução da equação $7x + 11y = -1$.

2. Dada a equação linear $2x - y = 7$, verifique se os pares abaixo são soluções:

a) $(2, -3)$ $\quad$ b) $(2, 7)$ $\quad$ c) $(5, 3)$

3. Verifique se as triplas ordenadas abaixo são soluções da equação $x + 2y + 4z = 1$.

a) $(-1, 3, -1)$ $\quad$ c) $(1, 1, 1)$

b) $(0, -4, -1)$

4. Determine m de modo que o par $(m, 2m + 1)$ seja solução da equação $3x - 11y = 4$.

5. Dada a equação linear $m \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 3$, determine m de modo que a tripla $(-1, 1, 2)$ seja uma de suas soluções.

6. Determine duas soluções da equação:

$$x + y + z + t = 0$$

7. Dê duas soluções da equação $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 16$.

8. Cíntia tem de pagar uma compra de R$ 35,00 e só dispõe de notas de R$ 1,00 e de R$ 5,00. De quantos modos distintos poderá fazer o pagamento?

Sistema linear

Definição

Um conjunto de m equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é dito sistema linear de m equações e n incógnitas (ou variáveis).

Veja os sistemas lineares apresentados a seguir:

- $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e duas variáveis.

- $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três variáveis.

- $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e quatro incógnitas.

Matrizes associadas a um sistema

Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Observe os sistemas lineares a seguir:

- Ao sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ podemos associar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, chamada matriz incompleta, e a matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, chamada matriz completa.

- Ao sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ associamos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- As matrizes associadas ao sistema $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$ são $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Notemos que B é obtida de A acrescentando-se a coluna relativa aos termos independentes das equações do sistema.

Representação matricial de um sistema

Lembrando a definição de produto de matrizes e utilizando a matriz incompleta de um sistema, é possível representá-lo na forma matricial. Vejamos por meio de exemplos.

- O sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- O sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ pode ser representado pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ é uma outra forma de representar o sistema $\begin{cases} x + y + z + \ \ w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$.

Solução de um sistema

Dizemos que a seqüência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de n variáveis quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Observe os exemplos:

- O par ordenado (4, 1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$, pois ele satisfaz as duas equações do sistema.

Vejamos:

$$4 + 1 = 5 \quad \text{e} \quad 4 - 1 = 3$$

- A tripla ordenada (5, 3, 2) é solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, pois, fazendo $x = 5$, $y = 3$ e $z = 2$, obtemos:

$5 + 3 + 2 = 10, \quad 5 - 3 + 2 = 4 \quad \text{e} \quad 5 - 3 - 2 = 0,$

que são sentenças verdadeiras.

Classificação

Um sistema linear é classificado de acordo com seu número de soluções.

Podemos ter:

Sistema possível e determinado (SPD) — tem apenas uma solução

Sistema possível e indeterminado (SPI) — tem infinitas soluções

Sistema impossível (SI) — não tem solução

Veja alguns sistemas e suas classificações:

- O par ordenado (1, 6) é a única solução do sistema $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$. Nesse caso, o sistema é um sistema possível e determinado (SPD).
- O sistema $\begin{cases} 5x - 5y + 5z = 10 \\ \ \ x - \ \ y + \ \ z = 2 \end{cases}$ apresenta infinitas soluções, como, por exemplo: (1, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 0, 1), ...
  O sistema, nesse caso, é um sistema possível e indeterminado (SPI).
- O sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 5 \end{cases}$ não apresenta solução alguma, pois não existe par (α_1, α_2) tal que $\alpha_1 - \alpha_2 = -3$ e $\alpha_1 - \alpha_2 = 5$. Assim, o sistema é impossível (SI).

Estudaremos mais adiante algumas técnicas que nos permitirão resolver (e classificar) um sistema linear.

exercícios

9. Verifique se (3, –2) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

10. Verifique se (1, 1, 1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 5y - \ \ z = 5 \\ 7x - 2y + \ 3z = 8 \\ 2x - 5y + 11z = 8 \end{cases}$$

11. Verifique se (2, 1, 3) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 0 \\ x - y + \ \ z = 4 \\ -x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

12. Considere o sistema $\{5x + 7y = 12$.

a) Apresente algumas de suas soluções.

b) Como ele é classificado?

13. Classifique o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + \ z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$.

14. Construa a matriz incompleta A e a completa B de cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - z = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = -7 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$

15. Construa a matriz incompleta A e a completa B de cada um dos sistemas:

a) $\{-3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 11$

b) $\begin{cases} 2x + y + 3z = -13 \\ -x + y + 10z = 4 \end{cases}$

16. Escreva o sistema associado à representação matricial em cada caso:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

17. Classifique o sistema dado por:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 11 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 76 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

18. (Unicap-PE) Seja o sistema de equações lineares $\begin{cases} 9x + y = 18 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$, cuja solução é dada pelo par ordenado (a, b). Determine o valor de a + b.

Sistemas escalonados

Consideremos um sistema linear S no qual, em cada equação, existe pelo menos um coeficiente não-nulo.

Dizemos que S está na forma escalonada (ou, simplesmente, é escalonado) se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, aumenta de equação para equação.

São exemplos de sistemas escalonados:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \\ -z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y + 5z = 3 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - z - t - w = 1 \\ z + t + 2w = 0 \\ 2w = -3 \end{cases}$$

Resolução de um sistema na forma escalonada

Sistema com número de equações igual ao número de variáveis

Seja o sistema escalonado: $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = -6 \end{cases}$

Partindo da última equação, obtemos z. Substituindo esse valor na equação anterior, obtemos y. Por fim, substituindo y e z na 1ª equação, obtemos x.

Acompanhe:

$3z = -6 \Rightarrow z = -2$ (1)
$y + 2 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1$ (2)
$x - 2 \cdot 1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1$ (3)

Assim, a solução do sistema é $(-1, 1, -2)$.

Esse tipo de sistema apresenta sempre uma única solução. Temos, então, um sistema possível e determinado (SPD).

Sistema com número de equações menor que o número de variáveis

Vamos determinar três números cuja soma é 100, sabendo que um deles é o dobro do outro.

Chamando os números procurados de x, y e z, esse problema pode ser representado pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y = 2z \end{cases}$$

Observe passo a passo a resolução do problema:

1º) Devemos identificar a variável que não aparece no início de nenhuma das equações, chamada variável livre. A única variável livre desse sistema é z.

2º) Transpomos a variável livre z para o 2º membro em cada equação e obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 100 - z \\ \quad\; y = \quad\;\; 2z \end{cases} \quad (1)$$

3º) Se atribuirmos um valor para z, obteremos um sistema do tipo SPD; portanto, determinado. Resolvendo-o, encontraremos uma solução do sistema.
Se atribuirmos outro valor para z, obteremos outro sistema, também determinado, que, resolvido, fornecerá outra solução do sistema. E assim por diante.
Como podemos atribuir qualquer valor real a z, concluímos que o sistema dado tem infinitas soluções.
Façamos, então, $z = \alpha$ (α é um número real qualquer) e em (1) teremos:

$$\begin{cases} x + y = 100 - \alpha & (2) \\ \quad\; y = \quad\;\; 2\alpha & (3) \end{cases}$$

4º) Substituímos (3) em (2):

$$x + 2\alpha = 100 - \alpha \Rightarrow x = 100 - \alpha - 2\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 100 - 3\alpha$$

5º) Por fim, as soluções do sistema podem ser representadas pelas triplas ordenadas do tipo $(100 - 3\alpha, 2\alpha, \alpha)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$.
Esse tipo de sistema apresenta sempre infinitas soluções, sendo, então, um sistema possível e indeterminado (SPI).

observação

Atribuindo valores arbitrários para α, teremos algumas das soluções do sistema. Por exemplo:

$\alpha = 5 \rightarrow (85, 10, 5)$
$\alpha = 20 \rightarrow (40, 40, 20)$
$\alpha = -1 \rightarrow (103, -2, -1)$
$\alpha = \sqrt{3} \rightarrow (100 - 3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

exemplo 1

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ \qquad\quad 2z - t = 0 \end{cases}$

As variáveis livres do sistema são y e t. Transpondo-as para o 2º membro, vem:

$$\begin{cases} x + z = 1 + y - t \\ \quad 2z = \qquad\quad t \end{cases}$$

Fazendo $y = \alpha$ e $t = \beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$), temos um sistema do tipo SPD:

$$\begin{cases} x + z = 1 + \alpha - \beta & (1) \\ \quad 2z = \qquad\quad \beta & (2) \end{cases}$$

De (2), vem $z = \frac{\beta}{2}$.

Em (1), temos:

$$x + \frac{\beta}{2} = 1 + \alpha - \beta \Rightarrow x = 1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta.$$

Assim:

$$S = \left\{\left(1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \frac{\beta}{2}, \beta\right), \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Vejamos algumas soluções particulares:

- $\alpha = 0$ e $\beta = 1 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$
- $\alpha = 1$ e $\beta = 2 \rightarrow (-1, 1, 1, 2)$

exercícios

19. Verifique se cada um dos sistemas abaixo está escalonado.

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ \quad\;\; 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ \quad\; x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad\;\; y - z = 5 \\ \qquad\; 2z = 8 \end{cases}$

20. Indique quais sistemas estão escalonados.

a) $\begin{cases} 2x - y - z + t = 5 \\ 2z + 3t = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y + 7z = -2 \\ 2y - 5z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y + z + t = 1 \\ 3y + z - t = 10 \\ 2z - 3t = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y + 3z = 5 \end{cases}$

21. Resolva e classifique os seguintes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -2z = 8 \end{cases}$

22. Resolva e classifique os seguintes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} x + y + z - 2t = 5 \\ y - z + 3t = 3 \\ 2z - t = 4 \\ 3t = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ y - 2z = 8 \end{cases}$

23. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\{x + y + z = 3$

b) $\begin{cases} 2x - y + z + t = 11 \\ z + t = 2 \end{cases}$

24. Uma das soluções de $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = m \end{cases}$ é $(1, -1, 0)$. Determine o conjunto solução desse sistema.

Sistemas equivalentes e escalonamento

Definição

Dois sistemas lineares, S_1 e S_2, são equivalentes quando toda solução de S_1 é solução de S_2, e vice-versa.

Propriedade 1

> **Quando multiplicamos por k, $k \in \mathbb{R}^*$, os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, obtemos um sistema S' equivalente a S.**

exemplo 2

Seja $S = \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$, cuja solução é $(3, -1)$.

Multiplicando a 1ª equação de S por 2, por exemplo, obtemos:

$$S' = \begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

cuja solução também é $(3, -1)$.

Propriedade 2

> **Quando substituímos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com outra, obtemos um sistema S', equivalente a S.**

exemplo 3

Seja $S = \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$, cuja solução é $(2, 1)$.

Vamos substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª:

$$S' = \begin{cases} 2x - y = 3 \\ \boxed{3x + 2y = 8} \xleftarrow{(2^{a}\,\text{eq.}) + (1^{a}\,\text{eq.})} \end{cases}$$

Rascunho:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ + \quad x + 3y = 5 \\ \hline 3x + 2y = 8 \end{array}$$

É fácil notar que $(2, 1)$ é solução de S', pois a 2ª equação também é satisfeita.

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$$

exemplo 4

Vamos utilizar as propriedades 1 e 2 simultaneamente.

Seja $S = \begin{cases} x + y = -15 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$, cuja solução é $(-7, -8)$.

Vamos substituir a 2ª equação de S pela soma dela com a 1ª, multiplicada por -2:

Rascunho:

$$S' = \begin{cases} x + y = -15 \\ \boxed{-5y = 40} \xleftarrow{(-2) \times (1^a\,eq.) + (2^a\,eq.)} \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -\cancel{2x} - 2y = 30 \\ \cancel{2x} - 3y = 10 \\ \hline -5y = 40 \end{array} +$$

O par $(-7, -8)$ é também solução de S'.

Observe, neste exemplo, que a utilização das propriedades possibilitou transformar o sistema original em um sistema escalonado.

Escalonamento de um sistema

Para escalonar um sistema linear qualquer, vamos seguir o roteiro abaixo, baseado nas propriedades anteriores:

1º) Escolhemos para 1ª equação aquela em que o coeficiente da primeira incógnita seja não-nulo.
Se possível, fazemos a escolha a fim de que esse coeficiente seja igual a -1 ou 1, pois os cálculos ficam, em geral, mais simples.

2º) Anulamos o coeficiente da primeira incógnita das demais equações, usando as propriedades 1 e 2.

3º) Desprezamos a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos com as equações restantes.

4º) Desprezamos a 1ª e a 2ª equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, até o sistema ficar escalonado.

exemplo 5

Vamos escalonar e depois resolver o sistema:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equações.

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por 2:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ \boxed{3y - 3z = -12} \\ \boxed{-4y + 5z = 19} \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -\cancel{2x} + 2y - 4z = -18 \\ \cancel{2x} + y + z = 6 \\ \hline 3y - 3z = -12 \end{array} +$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - 2y + 4z = 18 \\ -\cancel{2x} - 2y + z = 1 \\ \hline -4y + 5z = 19 \end{array} +$$

Deixando de lado a 1ª equação, vamos repetir o processo para a 2ª e a 3ª equações. Convém, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 3, a fim de facilitar o escalonamento:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ y - z = -4 \\ -4y + 5z = 19 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ y - z = -4 \\ \boxed{z = 3} \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª, multiplicada por 4:

$$\begin{array}{r} \cancel{4y} - 4z = -16 \\ -\cancel{4y} + 5z = 19 \\ \hline z = 3 \end{array} +$$

O sistema obtido está escalonado e é do primeiro tipo (SPD).

Resolvendo-o, obtemos como solução $(2, -1, 3)$.

exemplo 6

Vamos escalonar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Convém trocar as posições das duas primeiras equações, a fim de que o primeiro coeficiente de *x* seja igual a 1:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Precisamos anular os coeficientes de *x* na 2ª e 3ª equações:

(−3) × (1ª eq.) + (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} -3\cancel{x} + 6y + 3z = 0 \\ \cancel{3x} - y + z = 2 \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array}\ +$$

(−2) × (1ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -2\cancel{x} + 4y + 2z = 0 \\ \cancel{2x} + y + 2z = 2 \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array}\ +$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

Deixando a 1ª equação de lado, repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações:

Obtemos:

(−1) × (2ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -5\cancel{y} - 4\cancel{z} = -\cancel{2} \\ \cancel{5y} + \cancel{4z} = \cancel{2} \\ \hline 0 = 0 \end{array}\ +$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A 3ª equação pode ser suprimida do sistema, pois, apesar de ser sempre verdadeira, ela não traz informação sobre os valores das variáveis. Assim, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \quad (1) \\ 5y + 4z = 2 \quad (2) \end{cases}$$, que é do tipo SPI

número de equações < número de incógnitas

A variável livre do sistema é z. Fazendo $z = \alpha$, vem:

- em (2): $y = \dfrac{2 - 4\alpha}{5}$
- em (1): $x = 2y + z \Rightarrow x = 2\left(\dfrac{2 - 4\alpha}{5}\right) + \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3\alpha + 4}{5}$

Assim, $S = \left\{\left(\dfrac{-3\alpha + 4}{5}, \dfrac{2 - 4\alpha}{5}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

observação

Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações com coeficientes ordenadamente iguais ou proporcionais, podemos retirar uma delas do sistema.

exemplo 7

Vamos escalonar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

Nenhum dos coeficientes de *x* nas equações dadas vale 1, mas precisamos anular os coeficientes de *x* na 2ª e na 3ª equações:

5 × (1ª eq.) + 2 × (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} 1\cancel{0x} - 5y + 5z = -5 \\ -\cancel{10}x - 40y - 30z = 22 \\ \hline -45y - 25z = 17 \end{array}\ +$$

(−3) × (1ª eq.) + 2 × (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -6\cancel{x} + 3y - 3z = 3 \\ \cancel{6x} + 6y + 8z = 6 \\ \hline 9y + 5z = 9 \end{array}\ +$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -45y - 25z = 17 \\ 9y + 5z = 9 \end{cases}$$

Repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, deixando a 1ª de lado. É interessante, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 5:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ 9y + 5z = 9 \end{cases}$$

que equivale a:

(2ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ \boxed{0 = \dfrac{62}{5}} \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -\cancel{9y} - \cancel{5z} = \dfrac{17}{5} \\ \cancel{9y} + \cancel{5z} = 9 \\ \hline 0 = \dfrac{62}{5} \end{array}$$

A 3ª equação do sistema acima obtido é sempre falsa, pois, para quaisquer x, y e z, $0 \neq \dfrac{62}{5}$.

Logo, o sistema é impossível, isto é, não admite nenhuma solução.

observação

Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações incompatíveis entre si ou uma sentença falsa, já podemos concluir que se trata de um sistema impossível (SI).

exercícios

25. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

26. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$

27. (UE-PA) Um grupo de 12 amigos reuniu-se durante um almoço de confraternização de fim de ano. Todos foram unânimes em pedir o prato sugerido pelo garçom e 10 deles pediram sobremesa, perfazendo uma despesa total de R$ 230,00 com esses dois itens. Sabendo-se que a quota de quem pediu sobremesa foi de R$ 20,00, calcule o preço unitário de cada um desses itens.

28. (PUC-SP) Para dar R$ 1,80 de troco a um cliente, o caixa de um supermercado pretende usar exatamente 20 moedas. Se ele dispõe apenas de moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos, de quantos modos distintos ele pode compor tal quantia?

29. (UE-RJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2, num total de 38 fregueses. Qual o número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas?

30. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = -3 \end{cases}$

31. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$

32. Resolva, por meio de escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - 3y - 6z = 0 \\ 7x - 2y - 9z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + 7z = 9 \\ 5x + 3y - z = 0 \\ -7x - 11y + 17z = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ y - z - t = 1 \\ 3z + 2t = 2 \\ 9t = 36 \end{cases}$

33. (PUC-RJ) Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Existe uma solução do tipo $x = a + 1$, $y = 2a$ e $z = a$?

b) Ache todas as suas soluções.

34. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} -x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + 3z = -10 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ -2x + 5y + 2z = 3 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$

35. (U. F. Viçosa-MG, adaptado) Em determinado concurso, os candidatos fizeram uma prova contendo 25 questões. Pelas normas do concurso, os candidatos não poderiam deixar questões em branco e, na correção da prova, seriam atribuídos (+2) a cada resposta certa e (−1) a cada resposta errada. A nota da prova seria a soma dos valores atribuídos às questões. Se um candidato obteve nota 17, qual o número de questões que ele acertou?

36. (UFR-RJ) Uma loja de departamentos, para vender um televisor, um videocassete e um aparelho de som, propôs a seguinte oferta: o televisor e o videocassete custam juntos R$ 1 200,00; o videocassete e o aparelho de som custam juntos R$ 1 100,00; o televisor e o aparelho de som custam juntos R$ 1 500,00. Quanto pagará um cliente que comprar os três produtos anunciados?

37. (Fuvest-SP) Diz-se que a matriz quadrada *A* tem *posto* 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de *a*, *b* e *c* para os quais a seguinte matriz 3 × 3 tem posto 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

Comentário final

O escalonamento também se aplica a sistemas cujo número de equações é diferente do número de incógnitas. Acompanhe os exemplos.

exemplo 8

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5 \\ 5x - 2y = 14 \end{cases}$.

Escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y = -1 & \leftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -7y = -1 & \leftarrow (-5) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Esse sistema é impossível, pois a 2ª e a 3ª equações não podem ser satisfeitas porque não existe $y = \frac{1}{7}$ e $y = \frac{1}{3}$ ao mesmo tempo.

exemplo 9

Resolvamos o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + 3y = -2 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$.

Escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 11y = -22 & \leftarrow (-4) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 11y = -22 & \leftarrow (-3) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Como as duas últimas equações são iguais, resulta o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 11y = -22 \end{cases}$, que é escalonado e do tipo SPD.

Resolvendo-o, vem $y = -2$ e $x = 1$.

Daí, $S = \{(1, -2)\}$.

exemplo 10

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -7y + 7z = 0 \quad \longleftarrow (-2) \times (1^{\text{a}} \text{ eq.}) + (2^{\text{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do tipo SPI. Resolvendo-o, segue que a solução é:

$$\left\{\left(-\alpha + \frac{1}{2}, \alpha, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

exercícios

38. Resolva, utilizando o escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + 3y = 16 \\ 2x + 5y = 27 \end{cases}$

39. Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \\ 3a + 7b = 11 \end{cases}$

Sistemas homogêneos

Dizemos que um sistema linear é homogêneo quando o termo independente de cada uma de suas equações é igual a zero, isto é, quando todas as suas equações são homogêneas. Assim, são exemplos de sistemas homogêneos:

$$S_1 = \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Notemos que todo sistema homogêneo de n incógnitas admite $\underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{n \text{ zeros}}$ como solução, pois essa seqüência ordenada satisfaz todas as equações do sistema. Essa solução é chamada solução nula, trivial ou imprópria.

Um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é possível e determinado.

Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de soluções próprias ou não triviais.

exemplo 11

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$.

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ y = 0 \quad \longleftarrow 3 \times (1^{\text{a}} \text{ eq.}) - 4 \times (2^{\text{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

O sistema está escalonado e é do tipo SPD. Ele só admite a solução nula.

$$S = \{(0, 0)\}$$

exemplo 12

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$.

Escalonando-o, vem:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -5y - 7z = 0 \quad \longleftarrow (-3) \times (1^{\text{a}} \text{ eq.}) + (2^{\text{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

O sistema está escalonado e é do tipo SPI. Resolvendo-o com $z = \alpha$, vem $y = -\frac{7}{5}\alpha$ e daí $x = \frac{4}{5}\alpha$.

Assim, $S = \left\{\left(\frac{4}{5}\alpha, -\frac{7}{5}\alpha, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Atribuindo valores arbitrários a α, obtemos algumas de suas soluções:

- $\alpha = 0 \longrightarrow (0, 0, 0) \longrightarrow$ solução nula ou trivial
- $\alpha = 5 \longrightarrow (4, -7, 5)$
- $\alpha = 2 \longrightarrow \left(\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}, 2\right)$

} soluções próprias (diferentes da trivial)

exercícios

40. Classifique e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 11x + 4y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -5x + 15y = 0 \end{cases}$

41. Classifique e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

42. É dado o sistema $\begin{cases} x + my = m - 1 \\ 2x + 6y = m^2 - 1 \end{cases}$.

a) Determine m para que o sistema seja homogêneo.

b) Utilizando o valor obtido para m no item a, resolva o sistema.

43. Seja o sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = m - 2 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 6x + (m - 3)y + 15z = 0 \end{cases}$$

a) Determine m para que o sistema seja homogêneo.

b) Utilizando o item a, resolva o sistema.

44. Resolva os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

45. (Unicamp-SP) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação det A = 0. (Sugestão: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2$ e fatore.)

b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

46. O sistema abaixo é escalonado.

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$$

Para que valores de m o sistema admite somente a solução nula ou trivial?

47. Seja o sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + my = 0 \end{cases}$.

a) Escalone-o.

b) Determine m para que o sistema admita soluções próprias (diferentes da trivial).

48. (FGV-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz incógnita $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, chama-se autovalor de A qualquer valor real de λ que faz com que a equação matricial $AX = \lambda X$ tenha soluções não-nulas para X.

a) Determine os autovalores de A.

b) Para cada um dos valores encontrados no item anterior, obtenha a expressão da matriz X.

Regra de Cramer

Consideremos o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. Suponhamos que $a \neq 0$. Observemos que a matriz incompleta desse sistema é $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por $D = ad - bc$.

O sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ é normal ou é possível e determinado quando $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

A solução desse sistema é dada por:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \quad e \quad y = \frac{D_y}{D}}$$

em que D_x e D_y são obtidos a partir da matriz M, substituindo-se, respectivamente, a primeira coluna e a segunda coluna pela coluna dos coeficientes independentes do sistema.

$$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf \quad e \quad D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce$$

Os resultados acima são conhecidos como Regra de Cramer e podem ser generalizados para um sistema $n \times n$ (n equações e n incógnitas).

A Regra de Cramer é um importante recurso na resolução de sistemas lineares possíveis e determinados, especialmente quando o escalonamento se torna muito trabalhoso (por causa dos coeficientes das equações do sistema), ou ainda quando o sistema é literal.

exemplo 13

Vamos determinar x, y e z no sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -x - 2y - 3z = -3 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases}$$

Como $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0,$

o sistema é SPD.

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 24 - 3 - 8 + 15 - 6 =$$

$$= -36; \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-36}{-36} = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 60 + 4 - 12 + 12 + 5 =$$

$$= 72; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{72}{-36} = -2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 24 - 5 - 40 - 3 - 8 =$$

$$= -72; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-72}{-36} = 2$$

Assim, $S = \{(1, -2, 2)\}$.

exemplo 14

Usando a Regra de Cramer, vamos resolver o sistema $\begin{cases} 4x + 5y = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$.

Observemos que:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0$$

Assim, esse sistema é possível e determinado. Calculemos D_x e D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 20 = -23$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 2 = 18$$

Então, $x = \frac{D_x}{D} = -\frac{23}{2}$ e $y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{2} = 9.$

Logo, $S = \left\{\left(-\frac{23}{2}, 9\right)\right\}$.

exercícios

49. Resolva, usando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 3y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

50. Resolva, usando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = -5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

51. Resolva, usando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

52. Qual o valor de y no sistema abaixo?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ 2y - z = -13 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

53. Indique o valor de z no sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ x - z + 2w = -2 \end{cases}$$

54. Resolva o problema proposto na introdução deste capítulo sobre os preços do sorvete, do chocolate e do chiclete no carrinho de praia.

55. Uma vendedora de loja de roupas masculinas atendeu no mesmo dia três clientes e efetuou as seguintes vendas:

Cliente 1 — 1 calça, 2 camisas e 3 gravatas valor: R$ 156,00

Cliente 2 — 2 calças, 5 camisas e 6 gravatas valor: R$ 347,00

Cliente 3 — 2 calças, 3 camisas e 4 gravatas valor: R$ 253,00

Quanto custou cada gravata?

56. Resolva o sistema abaixo pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = -1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$$

$\left(\text{Sugestão: Faça } \dfrac{1}{x} = x', \dfrac{1}{y} = y' \text{ e } \dfrac{1}{z} = z'.\right)$

57. A solução do sistema $\begin{cases} (a-1)x + by = 1 \\ (a+1)x + 2by = 3 \end{cases}$ é $x = 1$ e $y = 2$. Determine os valores de a e b.

58. Resolva o sistema de incógnitas x e y abaixo.

$$\begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases}$$

59. (Covest-PE) Um nutricionista pretende misturar três tipos de alimentos (A, B e C) de forma que a mistura resultante contenha 3 600 unidades de vitaminas, 2 500 unidades de minerais e 2 700 unidades de gorduras. As unidades por gramas de vitaminas, minerais e gorduras dos alimentos constam da tabela a seguir:

	Vitaminas	Minerais	Gordura
A	40	100	120
B	80	50	30
C	120	50	60

Quantos gramas do alimento C devem compor a mistura?

60. (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita.

b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

61. Determine todos os valores de x, y e z que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = 1 \\ \dfrac{3^x}{3^y \cdot 3^z} = 9 \\ 4^x \cdot 16^{-y} \cdot 4^{-z} = 4 \end{cases}$$

Discussão de um sistema

Consideremos novamente o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$,

cuja forma escalonada é:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ \underbrace{(ad - bc)}_{D} \cdot y = (af - ce) \quad ① \end{cases}$$

em que $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz incompleta do sistema.

Já vimos que, se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado e a solução pode ser obtida através da Regra de Cramer.

Se $D = 0$, o 1º membro de ① se anula. Nesse caso, se o 2º membro de ① for anulado, temos SPI; caso contrário, temos SI.

Em geral, sendo *D* o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema linear, temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} D \neq 0 \longrightarrow \text{SPD} \\ D = 0 \longrightarrow \text{SPI ou SI} \end{array}}$$

Esse resultado é válido para qualquer sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas com $n \geq 2$.

De modo geral, discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa dizer para quais valores do(s) parâmetro(s) temos SPD, SPI ou SI. Discutiremos aqui apenas sistemas com número de equações igual ao número de incógnitas.

exemplo 15

Vamos discutir, em função de *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$

- Se $m - 2 \neq 0$, isto é, $m \neq 2$, ou $D \neq 0$, temos SPD.
- Se $m - 2 = 0$, isto é, $m = 2$, ou $D = 0$, temos SPI ou SI.

Para decidirmos entre as duas possibilidades, levamos $m = 2$ ao sistema.

Temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{equações incompatíveis}$$

Trata-se de um sistema impossível.

Assim, $\begin{cases} m \neq 2 \longrightarrow \text{SPD} \\ m = 2 \longrightarrow \text{SI} \end{cases}$.

exemplo 16

Discutamos, em função de *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 13 \end{cases}$$

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ m & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2m + 10$

- Se $m \neq 5$, isto é, $D \neq 0$, temos SPD.
- Se $m = 5$, isto é, $D = 0$, podemos ter SPI ou SI.

Levando $m = 5$ ao sistema e escalonando-o, vem:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 5x + y + 5z = 13 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3y + 5z = 4 \longleftarrow (-2) \times (1^a\ \text{eq.}) + (2^a\ \text{eq.}) \\ 6y + 10z = 8 \longleftarrow (-5) \times (1^a\ \text{eq.}) + (3^a\ \text{eq.}) \end{cases}$$

Como os coeficientes da 2ª e 3ª equações são proporcionais, podemos retirar a 3ª equação, obtendo o sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3y + 5z = 4 \end{cases}$, que é possível e indeterminado.

Assim, $\begin{cases} m \neq 5 \longrightarrow \text{SPD} \\ m = 5 \longrightarrow \text{SPI} \end{cases}$.

exemplo 17

Vamos discutir, em função de a e b, o sistema:

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases}$$

Temos: $D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 6$

- Se $2a - 6 \neq 0$, isto é, $a \neq 3$, ou seja, $D \neq 0$, temos SPD.
- Se $a = 3$, isto é, $D = 0$, temos SPI ou SI.

Substituindo a por 3 e escalonando, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 0 = -1 + b \quad (1) \end{cases}$$

Há duas possibilidades:

- Se o 2º membro de (1) se anula, temos $0 = 0$, e o sistema se reduz à 1ª equação, sendo possível e indeterminado. Assim, se $-1 + b = 0$, ou seja, $b = 1$, temos SPI.
- Se o 2º membro de (1) não se anula, a equação nunca é satisfeita, não havendo, portanto, solução. Desse modo, se $-1 + b \neq 0$, ou seja, $b \neq 1$, temos SI.

$$\text{Assim, } \begin{cases} a \neq 3 \longrightarrow \text{SPD} \\ (a = 3 \text{ e } b = 1) \longrightarrow \text{SPI} \\ (a = 3 \text{ e } b \neq 1) \longrightarrow \text{SI} \end{cases}.$$

exemplo 18

Determinemos o valor de m em

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 0 \\ \quad my + 2z = 0 \\ -mx + \quad z = 0 \end{cases}$$

, a fim de que o sistema admita soluções diferentes da trivial (ou soluções próprias).

Lembrando que um sistema homogêneo é sempre possível, valem as relações:

- $D \neq 0 \longrightarrow$ SPD (O sistema só tem a solução nula, imprópria ou trivial.)
- $D = 0 \longrightarrow$ SPI (O sistema tem soluções próprias, isto é, diferentes da trivial.)

Assim, devemos ter $D = 0$:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ 0 & m & 2 \\ -m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m^2 - 2m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m(-m - 1) = 0$$

isto é, $m = 0$ ou $m = -1$.

exercícios

62. Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + my = m \\ 6x - 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = mx \\ my - 2x = y \end{cases}$

63. Discuta, em função de a, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = a \\ a^2x + y = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + y = 1 - a \\ x + ay = 0 \end{cases}$

64. Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ (m - 1)x + 2my = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m + 1)x + 3y = 6 \\ x + (m - 1)y = 2 \end{cases}$

65. Discuta, em função de m, o sistema:

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

66. Discuta, em função de a, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + az = 2 \\ ax + 2y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + a(y + z) = 1 \\ y + a(x + z) = a \\ z + a(x + y) = a^2 \end{cases}$

67. Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} mx + y - z = 4 \\ x + my + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + y = -2 \\ -2x + y - z = m \\ 4x + y + mz = -5 \end{cases}$

68. (UF-PE) O sistema linear a seguir admite pelo menos duas soluções (distintas). Indique o valor de m.

$$\begin{cases} -5x - 4y + mz = -9 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

69. (UF-AM) Para que valor de k o sistema dado é possível e indeterminado?

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \end{cases}$$

70. (ESPM-SP) Para que valor de k o sistema a seguir é impossível?

$$\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & k+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

71. (UF-SC) Determine o valor de a para que o sistema seja impossível:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

72. Determine m para que o sistema homogêneo $\begin{cases} (m-1)x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ admita soluções próprias.

73. Determine m para que o sistema abaixo admita apenas a solução trivial (ou nula):

$$\begin{cases} x - my + 2z = 0 \\ my + z = 0 \\ -mx + y - 2z = 0 \end{cases}$$

74. O sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ mx + 2y - 3z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ admite uma infinidade de soluções. Determine m.

75. (Fuvest-SP) Seja o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$.

a) Determine todos os valores de m para os quais o sistema admite solução.

b) Resolva o sistema, supondo $m = 0$.

76. Discuta, em função de a e b, o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + ay = b \end{cases}$$

77. (Covest-PE) Para qual valor de a o sistema $\begin{cases} 4x + ay = -1 + a \\ (6 - a)x + 2y = 3 - a \end{cases}$ possui infinitas soluções racionais (x, y)?

78. (PUC-RJ) Considere o sistema $\begin{cases} ax + 10y = 25 \\ 3x + by = 15 \end{cases}$.

a) Determine os valores de a e b tais que ele tenha mais que uma solução.

b) Interprete a sua conclusão geometricamente.

79. (FGV-SP) Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y + 3z = n \\ 3y - mz = 1 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema para $m = 1$ e $n = 2$.

b) Para que valores de m e n o sistema é indeterminado?

80. (UF-PE) Para quantos valores inteiros de m o sistema $x + 7y = m$ e $3x + 5y = 8$ admite solução x, y em números reais positivos?

testes de vestibulares

1. (U. F. São Carlos-SP, adaptado) O par ordenado (x, y), solução do sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 2y - 2x = 1 \end{cases}$, é:

a) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

b) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$

c) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$

d) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

e) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

2. (U. F. Viçosa-MG) Em um programa de televisão, um candidato deve responder a 20 perguntas. A cada pergunta respondida corretamente, o candidato ganha R$ 500,00, e perde R$ 300,00 por pergunta não respondida ou respondida incorretamente. Se o candidato ganhou R$ 7 600,00, o número de perguntas que acertou é:

a) 19
b) 16
c) 20
d) 17
e) 18

3. (Vunesp-SP) Maria tem em sua bolsa R$ 15,60 em moedas de 10 centavos e de 25 centavos. Dado que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, o total de moedas na bolsa é:

a) 68 c) 78 e) 84
b) 75 d) 81

4. (PUC-RS) Determine o valor de *b* no sistema:

$$\begin{cases} a + b - 3c + d = 1 \\ -b + 7c - d = 2 \\ 10c - d = -3 \\ 3d = 39 \end{cases}$$

a) –22 c) –4 e) 8
b) –8 d) 4

5. (UE-PA) Uma empresa de telefonia móvel cobra de seus clientes R$ 0,20 por minuto, para ligações entre telefones habilitados por ela, e R$ 0,30 por minuto, para ligações entre telefones habilitados por ela e outras operadoras. Um cliente dessa empresa pagou R$ 24,00 referentes a 100 minutos de ligações efetuadas nos dois modos. O número de minutos que esse cliente utilizou, ligando para telefones de outras operadoras é:

a) 15 c) 40 e) 60
b) 30 d) 55

6. (U. F. Juiz de Fora-MG) Resolvendo o sistema de equações lineares $\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$, encontramos *y* igual a:

a) 1 c) 5 e) 4
b) 3 d) 2

7. (Cefet-MG) Uma lanchonete vende dois tipos de salgados: pastel e quibe. O preço de um pastel é R$ 0,50 e de um quibe, R$ 0,70. Na última segunda-feira, foram vendidos nessa lanchonete 75 salgados e arrecadaram-se com essa venda R$ 43,50. A quantidade de quibes vendidos, naquele dia, foi igual a:

a) 25 c) 35 e) 45
b) 30 d) 40

8. (FMU/Fiam/Faam-SP) O sistema $\begin{cases} ax - 2y = 3 \\ x + by = 2 \end{cases}$ terá uma única solução se:

a) $a = -2$ e $b = 1$
b) $ab + 2 = 0$
c) $ab + 2 \neq 0$
d) $ab - 2 \neq 0$
e) $ab - 2 = 0$

9. (Fuvest-SP) O sistema $\begin{cases} x + (c + 1)y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases}$, onde $c \neq 0$, admite uma solução (x, y), com x = 1. Então, o valor de *c* é:

a) –3 c) –1 e) 2
b) –2 d) 1

10. (PUC-MG) O número de soluções do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

11. (Unifor-CE) Se a terna (*a*, *b*, *c*) é solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y - z = 4 \\ 4x + z = 1 \end{cases}$, então:

a) $a + c = -1$
b) $a + b = 1$
c) $b + c = 2$
d) $2a = 2$
e) $3b = 3$

12. (Cefet-MG) Uma pessoa vendeu três tipos de doces, num total de 80, e arrecadou R$ 115,00. Sabe-se que um brigadeiro custa R$ 1,00, um bombom R$ 2,00 e um olho-de-sogra R$ 1,50 e que a quantidade de brigadeiros vendidos é igual à soma dos outros dois doces vendidos. O número de bombons que a pessoa vendeu é igual a:

a) 10 c) 20 e) 40
b) 15 d) 30

13. (UF-AM) Se a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ x + y + 2z + w = 4 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

é (x, y, z, w), então o valor de $x^y + z^w$ é:

a) –2 c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$ d) 2

14. (FGV-SP) O sistema linear $\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ admite solução não trivial se:

a) $\alpha = -2$
b) $\alpha \neq -2$
c) $\alpha = 2$
d) $\alpha \neq 2$
e) $\alpha \in \mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

15. (Unicap-PE) Considere o sistema linear de equações:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

e julgue as afirmações a seguir:

a) O sistema é indeterminado.
b) $x = 1, y = 0$ e $z = 2$ é uma solução do sistema.
c) O sistema possui uma e somente uma solução.
d) Se $z = 1$, então $x = 1$ e $y = -1$.
e) O sistema é homogêneo.

16. (UF-GO) Um sistema linear tem a seguinte matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & k & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Uma condição necessária e suficiente sobre k para que o sistema tenha uma única solução é:

a) $k \neq 4$
b) $k \neq \frac{12}{11}$
c) $k \neq 0$
d) $k \neq -\frac{12}{11}$
e) $k \neq -4$

17. (Puccamp-SP) A forma matricial de um sistema de duas equações a duas variáveis, x e y, é $\begin{bmatrix} k & -1 \\ 4 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

É verdade que o sistema:

a) admite infinitas soluções se $k \neq 2$.
b) admite infinitas soluções se $k \neq -2$.
c) admite solução única somente se $k \neq 2$ ou $k \neq -2$.
d) não admite solução, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.
e) admite solução única, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

18. (ITA-SP) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de:

a) R$ 17,50
b) R$ 16,50
c) R$ 12,50
d) R$ 10,50
e) R$ 9,50

19. (ESPM-SP) Se os números reais x, y, z e w são tais que $x < y < z < w$ e $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 33 \\ x^2 + z^2 + w^2 = 78 \\ x^2 + y^2 + w^2 = 57 \\ y^2 + z^2 + w^2 = 78 \end{cases}$, podemos afirmar que $x \cdot y \cdot z \cdot w$ é igual a:

a) -140
b) -70
c) 0
d) 70
e) 140

20. (UF-RS) O sistema $\begin{cases} 2x + y + 2z = b - 1 \\ x + 2y + z = b \\ x - y + z = 1 - b \end{cases}$ tem solução se, e somente se, b é igual a:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

21. (UMC-SP) Para que valores de a e b o sistema linear abaixo é impossível?

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x + 4y + 3z = b \\ 5x + 7y + az = 8 \end{cases}$$

a) $a = -1$ e $b = 7$
b) $a \neq -1$ e $b = 7$
c) $a \neq -1$ e $b \neq 7$
d) $a = -1$ e $b \neq 7$
e) $a = 1$ e $b = 7$

22. (U. F. Juiz de Fora-MG) Os valores de a e b para que o sistema $\begin{cases} 3x + y = 3a + 4b \\ (a - b)x + 2y = 8 \end{cases}$ seja possível e indeterminado são:

a) 3 e 5
b) -2 e 1
c) $\frac{1}{2}$ e 3
d) 0 e 1
e) 4 e -2

23. (Mackenzie-SP) O sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ (a + 1)x + ay = 4a + 2 \end{cases}$$

a) admite solução única para $a = -2$.
b) admite infinitas soluções para $a \neq -2$.
c) não admite solução para $a = -2$.
d) admite solução única, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.
e) admite solução, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

24. (UF-MA) Dado o sistema linear $\begin{cases} x + my - z = 1 \\ 2x - y + z = n \\ 3x + y - 2z = 2n \end{cases}$, a alternativa que indica os valores de m e n para que o sistema tenha infinitas soluções é:

a) $m \neq \frac{4}{7}$ e $n \neq \frac{7}{5}$
b) $m \neq \frac{4}{7}$ e $n = \frac{7}{5}$
c) $m = \frac{4}{7}$ e $n \neq \frac{7}{5}$
d) $m = \frac{4}{7}$ e $n = \frac{7}{5}$
e) $m = \frac{7}{4}$ e $n = \frac{5}{7}$

desafios

1. (PUC-PR) Um número *A* é formado por três algarismos, abc: o algarismo das dezenas é a metade do das unidades, o das centenas é o triplo do das unidades. Invertendo-se a ordem dos algarismos daquele número, obtém-se um número *B*, cba, igual ao número *A* diminuído de 396. Calcule a soma A + B – 800.

2. (UnB-DF) A deficiência visual pode ser herdada ou adquirida. Uma das causas dessa deficiência é a degeneracão senil de mácula. Estudos comprovam que há redução do risco de desenvolver a doença em indivíduos submetidos à suplementação alimentar composta de vitaminas C e E, betacaroteno e zinco.
A tabela I a seguir mostra as doses diárias de vitaminas C e E, betacaroteno e zinco recomendadas para a redução desse risco. A tabela II mostra as quantidades de vitamina C, betacaroteno e zinco presentes em 100 g de cada um dos alimentos listados.

Tabela I

Vitamina C	Vitamina E	Betacaroteno	Zinco
60 mg	30 UI*	900 μg	8 mg

* unidade de padrão internacional

Tabela II

Alimento	Vitamina C	Betacaroteno	Zinco
Brócolis	75 mg	1 028 μg	0
Tomate	19 mg	—	0
Cenoura	8 mg	740 μg	0,30 mg
Arroz	—	—	0,50 mg
Carne bovina	—	—	5,50 mg

Considerando que *v*, *w*, *x*, *y* e *z* são, respectivamente, as quantidades, em porções de 100 gramas, de brócolis, de tomate, de cenoura, de arroz e de carne bovina ingeridas diariamente por uma pessoa, julgue os itens seguintes.

a) Considere que 1 ℓ de suco homogêneo feito de tomate e água foi produzido com 400 g de tomate. Nessa situação, um copo de 300 mℓ desse suco é suficiente para suprir a necessidade diária de vitamina C recomendada para um adulto.

b) As quantidades diárias, em porções de 100 g, de brócolis, de tomate e de cenoura, *v*, *w* e *x*, respectivamente, que um adulto deve ingerir para atender exatamente às necessidades diárias de vitamina C e de betacaroteno constituem uma solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 75v + 19w + 8x = 60 \\ 257v + 185x = 225 \end{cases}$$

c) As necessidades diárias de zinco e de betacaroteno requeridas por um adulto são atendidas ingerindo-se um alimento composto de 100 g de arroz, 100 g de carne bovina, 50 g de brócolis e 50 g de cenoura.

d) O sistema de equações lineares que permite determinar as quantidades diárias, em porções de 100 g, dos alimentos contidos na tabela II para atender às necessidades diárias de um adulto em vitamina C, betacaroteno e zinco tem solução única se $y = 1$ e $v = \frac{1}{2}$.

3. (Unicamp-SP) Sejam dados a matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, o vetor $b = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e o vetor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

a) Encontre o conjunto solução da equação det A = 0.

b) Utilizando o maior valor de *x* que você encontrou no item (*a*), determine o valor de *m* para que o sistema linear Ay = b tenha infinitas soluções.