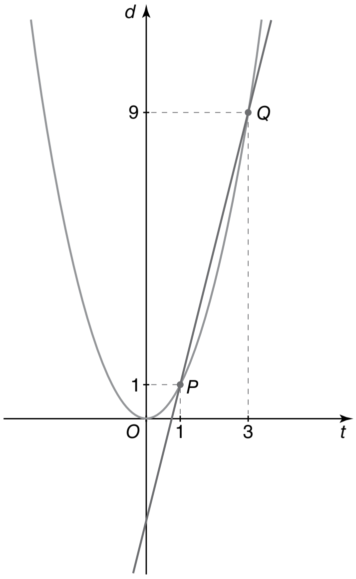
Capítulo 10

Introdução ao cálculo diferencial: derivada de uma função

Para pensar

1. a) O gráfico da função $d(t) = t^2$ é representado pelo arco da parábola abaixo, com $0 \leqslant t \leqslant 3$. A velocidade média v_m do automóvel é o coeficiente angular da reta que passa por $P(1, 1)$ e $Q(3, 9)$.



Assim, concluímos que:

$$v_m = \frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = 4$$

Logo, a velocidade média do automóvel no intervalo $1 \leqslant t \leqslant 3$ foi de 4 m/s.

b) A velocidade instantânea v do automóvel no instante 1 s é o coeficiente angular da reta tangente ao arco de parábola (representado no item **a**) no ponto $P(1, 1)$. Assim, v é calculada por:

$$v = \lim_{t \to 1} \frac{d(t) - d(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t + 1)(t - 1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} = (t + 1) = 1 + 1 = 2$$

Portanto, a velocidade instantânea do automóvel no instante 1 s foi de 2 m/s.

Exercícios propostos

1. a) $x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 2 - 4 = -2$

$x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0$

A taxa de variação de y em relação a x para $x \in [x_1, x_2]$ é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-2)}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

b) I. O gráfico da função $y = 2x^2 - 4x$ é uma parábola. Podemos afirmar que:

- como $a = 2$, essa parábola tem a concavidade pra cima;
- a equação $2x^2 - 4x = 0$ tem duas raízes reais: $x = 0$ e $x = 2$. Logo, essa parábola passa pelos pontos (0, 0) e (2, 0) e seu vértice tem abscissa igual a 1.
- do item **a**, sabemos que $f(1) = -2$; logo, o vértice dessa parábola é $(1, -2)$.

II. A equação da reta que passa pelo ponto $(1, -2) = (x_0, y_0)$ com coeficiente angular $m = 2$ é dada por:

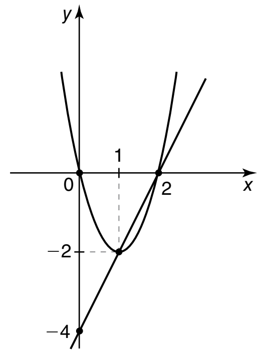
$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = 2 \cdot (x - 1)$

$\therefore y = 2x - 4$

Assim:

- para $x = 0$, temos $y = -4$;
- para $y = 0$, temos $x = 2$.

Portanto, o gráfico das funções consideradas em I e II é:



c) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, -2)$ é dado por:

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 4x - (2 - 4)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x(x - 1) - 2(x - 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(2x - 2)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (2x - 2) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

2. a) $$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - (3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x - 2)\left(x + \frac{2}{3}\right)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[3\left(x + \frac{2}{3}\right)\right] = 3\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 8$$

b) Para $x = 2$, temos $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$

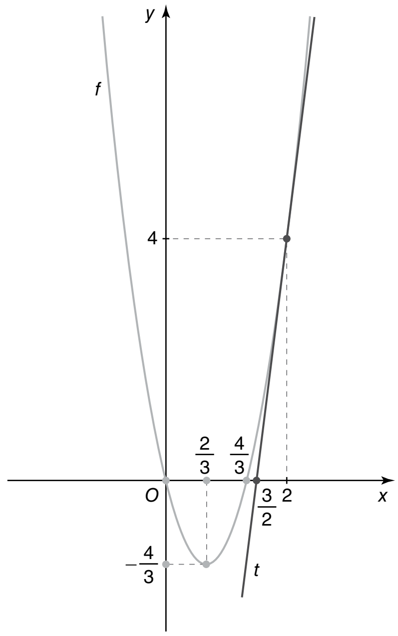
O coeficiente angular da reta t tangente ao gráfico de f no ponto (2, 4) é $f'(2)$, isto é, 8. Assim, a equação da reta t é dada por:

$y - 4 = 8(x - 2) \Rightarrow y = 8x - 12$

c) I. O gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 4x$ é uma parábola. Podemos afirmar que:

- como $a = 3$, essa parábola tem concavidade pra cima;
- a equação $3x^2 - 4x = 0$ tem duas raízes reais: $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$. Logo, essa parábola passa nos pontos (0, 0) e $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ e seu vértice tem abscissa igual a $\frac{2}{3}$.
- sendo $x = \frac{2}{3}$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$; logo, o vértice dessa parábola é $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

II. Sabemos pelo item **b** que a reta t passa pelo ponto (2, 4). Além disso, fazendo $8x - 12 = 0$, obtemos $x = \frac{3}{2}$. Logo, $\left(\frac{3}{2}, 0\right) \in t$.



3. **a)** $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x - (1^3 - 1)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x^2 - 1)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} x(x + 1) =$

$= 1(1 + 1) = 2$

b) Para $x = 1$, temos $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
O coeficiente angular da reta t tangente ao gráfico de f no ponto (1, 0) é $f'(1)$, isto é, 2. Assim, a equação da reta t é dada por:
$y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$

c) Os pontos de intersecção entre a reta t e o gráfico de f são as soluções do sistema a seguir.
$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 - x = 2x - 2$
$\therefore x^3 - 3x + 2 = 0$
Pesquisando as raízes racionais, constatamos que 1 é raiz dessa equação. Assim, o polinômio $P(x) \equiv x^3 - 3x + 2$ é divisível por $(x - 1)$. Efetuando essa divisão por Briot-Ruffini, temos:

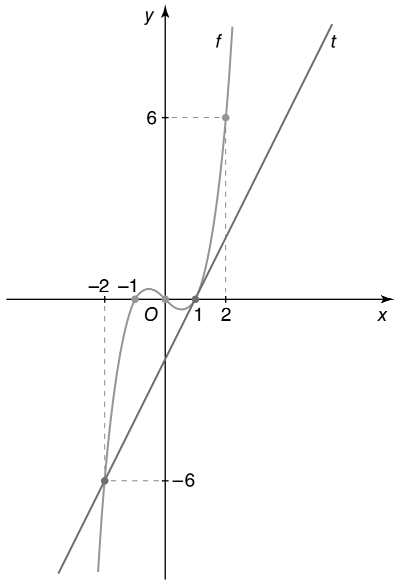
1	1	0	−3	2
	1	1	−2	0

Assim, a equação $P(x) = 0$ pode ser representada por: $(x^2 + x - 2)(x - 1) = 0$
Pela propriedade do produto nulo, temos: $x^2 + x - 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$\therefore x = -2$ ou $x = 1$ ou $x = 1$
- Para $x = -2$, obtemos $y = -6$
- Para $x = 1$, obtemos $y = 0$

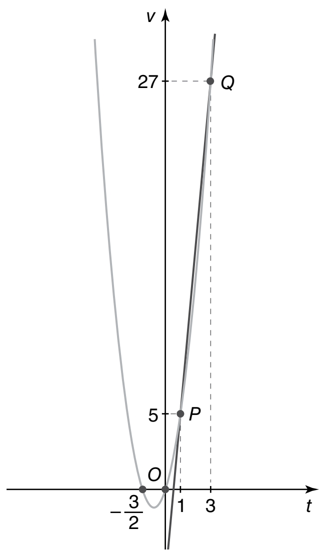
Concluímos, então, que os pontos de intersecção entre a reta t e o gráfico de f são (−2, −6) e (1, 0).

d) **I.** Sobre a função f temos:
- conforme vimos no item **c**, passa nos pontos (−2, −6) e (1, 0);
- fazendo $x^3 - x = 0$, obtemos:
  $x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x + 1)(x - 1) = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $x = -1$ e $x = 1$
  Logo, as raízes da função f são (0, 0), (−1, 0) e (1, 0);
- $f(2) = 2^3 - 2 = 6$
  Logo, a função f também passa pelo ponto (2, 6).

II. Sobre a reta t, conforme vimos no item **c**, sabemos que ela passa nos pontos (−2, −6) e (1, 0).



4. **a)** O gráfico da função $v(t) = 2t^2 + 3t$ está representado pelo arco da parábola a seguir, com raízes em $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ e (0, 0). Considerando o intervalo de variação de t, suas extremidades são dadas por $v(1) = 5$ e $v(3) = 27$, representadas no gráfico pelos pontos $P(1, 5)$ e $Q(3, 27)$. A aceleração média a_m do carro para $1 \leqslant t \leqslant 3$ é o coeficiente angular da reta que passa por P e Q.



Assim, concluímos que:

$a_m = \dfrac{v(3) - v(1)}{3 - 1} =$

$= \dfrac{2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1)}{3 - 1} = 11$

Portanto, a aceleração média do carro no intervalo $1 \leqslant t \leqslant 3$ foi de 11 m/s².

b) O coeficiente angular m da reta tangente ao arco de parábola (representado no item **a**) no ponto $P(1, 5)$ é calculado por:

$m = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{v(t) - v(1)}{t - 1} =$

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{2t^2 + 3t - (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1)}{t - 1} =$

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{2t^2 + 3t - 5}{t - 1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{2(t - 1)\left(t + \frac{5}{2}\right)}{t - 1} =$

$= \lim\limits_{t \to 1} \left[2\left(t + \frac{5}{2}\right)\right] = 2 \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 7$

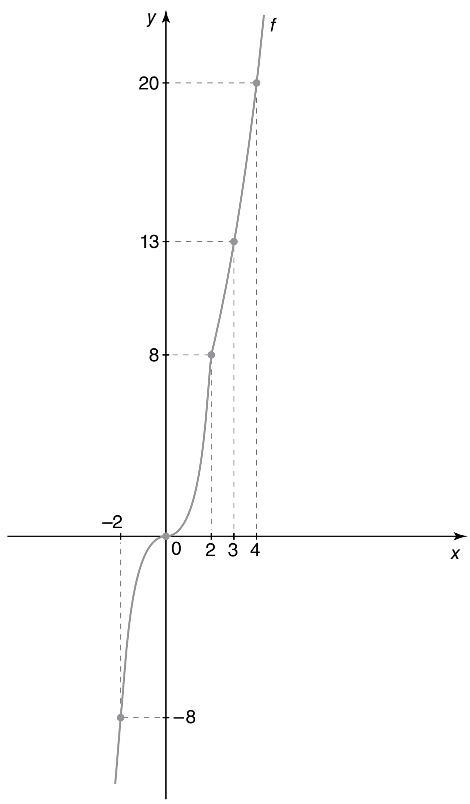
(*Nota*: Esse coeficiente angular representa a aceleração instantânea do carro no instante $t = 1$ s; logo, essa aceleração foi de 7 m/s².)

5. **a)** **I.** Para $x \leqslant 2$, temos:

- $f(-2) = (-2)^3 = -8$
- $f(2) = (2)^3 = 8$
- $f(0) = 0$

II. Para $x > 2$, temos:

- $f(2) = (2)^2 + 4 = 8$ (extremidade aberta)
- $f(3) = (3)^2 + 4 = 13$
- $f(4) = (4)^2 + 4 = 20$



b) $f'_-(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3 - 2^3}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 2x + 4) =$

$= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$

c) $f'_+(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + 4 - (2^2 + 4)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

d) Não existe $f'(2)$, pois: $f'_-(2) \neq f'_+(2)$

6. Sendo $f(x) = x^4$, temos:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(x + h)^2 + x^2] \cdot [(x + h)^2 - x^2]}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(x + h)^2 + x^2] \cdot (x + h + x) \cdot (x + h - x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(x + h)^2 + x^2] \cdot (2x + h) \cdot h}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} [(x + h)^2 + x^2) \cdot (2x + h)] =$

$= [(x + 0)^2 + x^2] \cdot (2x + 0) = (x^2 + x^2) \cdot (2x) = 4x^3$

7. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

$\therefore f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x + h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$

$\therefore f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

8. **a)** $f'(x) = 5x^4 + 4x^3$

b) $f'(x) = 5 \cdot 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 20x^3$

c) $f'(x) = 2 \cdot 5x^4 + 4 \cdot 2x^1 + 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = 10x^4 + 8x$

d) $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x^1 + 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 14x$

e) Sendo $u = 4x^3 + 2$ e $v = x^4 + 3$, temos $u' = 4 \cdot 3x^2$ e $v' = 4x^3$. Assim:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 12x^2(x^4 + 3) + (4x^3 + 2) \cdot 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 28x^6 + 8x^3 + 36x^2$

f) $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

g) $f'(x) = 3 \cos x$

h) $f'(x) = 4 \cdot (-\operatorname{sen} x) = -4 \operatorname{sen} x$

i) Sendo $u = x$ e $v = \operatorname{sen} x$, temos $u' = 1$ e $v' = \cos x$. Assim:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) =$
$= 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cos x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$

j) Sendo $u = \operatorname{sen} x$ e $v = \cos x$, temos $u' = \cos x$ e $v' = -\operatorname{sen} x$. Assim:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) =$
$= \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\therefore f'(x) = \cos 2x$

9. a) Sendo $u = x^2 - 2$ e $v = x$, temos $u' = 2x$ e $v' = 1$. Assim:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2) \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$$

b) Sendo $u = x^2 + 2x + 4$ e $v = x + 2$, temos $u' = 2x + 2$ e $v' = 1$. Assim:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) - (x^2 + 2x + 4) \cdot 1}{(x + 2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

c) $f'(x) = -3x^{-3-1} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

d) $f'(x) = 5 \cdot (-4)x^{-4-1} \Rightarrow f'(x) = -20x^{-5}$

e) Sendo $u = 4$ e $v = \text{sen } x$, temos $u' = 0$ e $v' = \cos x$. Assim:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{0 \cdot \text{sen } x - 4 \cos x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4 \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

f) Sendo $u = \text{sen } x$ e $v = \text{sen } x + \cos x$, temos $u' = \cos x$ e $v' = \cos x - \text{sen } x$. Assim:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(\cos x)(\text{sen } x + \cos x) - (\text{sen } x)(\cos x - \text{sen } x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

g) Sendo $u = 2x^3 + x$ e $v = \text{sen } x$, temos $u' = 6x^2 + 1$ e $v' = \cos x$. Assim:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(6x^2 + 1) \text{ sen } x - (2x^3 + x) \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

10. a) $f'(x) = 1 \cdot \text{sen } x + x \cdot \cos x + 2x$

$f'(x) = \text{sen } x + x\cos x + 2x$

b) $f'(x) = 1 \cdot \text{tg } x + x \cdot \sec^2 x$

$f'(x) = \text{tg } x + x \sec^2 x$

c) $$f'(x) = \frac{(1 \cdot \text{sen } x + x \cos x)(2 + \cos x) - (x \text{ sen } x)(-\text{sen } x)}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\text{sen } x + x \cos x)(2 + \cos x) + x \text{ sen}^2 x}{(2 + \cos x)^2}$$

d) $$f'(x) = \frac{(2x + 3x^2)(5 + \text{sen } x) - (x^2 + x^3) \cos x}{(5 + \text{sen } x)^2}$$

e) $$f'(x) = \frac{2 \cos x(1 + \text{tg } x) - 2 \text{ sen } x \sec^2 x}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

f) $$f'(x) = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x) - (x + \text{sen } x) \text{ sen } x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x \text{ sen } x}{(1 - \cos x)^2}$$

11. $$f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x - 2) \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^2}$$

Alternativa **b**.

12. Temos que:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} - 6 \Rightarrow f'(x) = x^2 - x - 6$$

Assim:

$f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0$

$\therefore -2 < x < 3$

Alternativa **c**.

13. A ordenada do ponto P, do gráfico de f, de abscissa 0 é $f(0) = \text{sen } 0 + \cos 0 + \text{tg } 0 = 0 + 1 + 0 = 1$; logo, $P(0, 1)$.

A função derivada de f é:

$f'(x) = \cos x - \text{sen } x + \sec^2 x$

Logo, o coeficiente angular m da reta t tangente ao gráfico de f no ponto $P(0, 1)$ é calculado por:

$m = f'(0) = \cos 0 - \text{sen } 0 + \sec^2 0 = 1 - 0 + 1 = 2$

Com esse coeficiente angular e as coordenadas de P, obtemos a equação da reta t:

$y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$

14. Como $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 2}{(x + 2)^2}$, temos que o coeficiente angular da reta tangente no ponto de abscissa -1 é:

$f'(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2}{(-1 + 2)^2} = -5$

O ponto de tangência é $(-1, f(-1))$, ou seja, $(-1, 2)$.

Portanto, a equação da reta tangente é:

$y - 2 = -5(x + 1)$

ou ainda:

$y = -5x - 3$

15. Indicando a função por $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 1$, temos que sua derivada é:

$f'(x) = 3x^2 + 2mx + 3$

Assim, temos que o coeficiente angular da reta tangente à curva f, no ponto de abscissa $x = 2$, é $f'(2)$, ou seja:

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2m \cdot 2 + 3 = 15 + 4m$

Como esse coeficiente angular é 7, concluímos:

$15 + 4m = 7 \Rightarrow m = -2$

Alternativa **b**.

16. Sendo $t(x) = (f \circ g)(x)$, temos:

$t(x) = (x^2 + 3x)^4$

Logo, aplicando a regra da cadeia, temos:

$t'(x) = 4(x^2 + 3x)^{4-1} \cdot (2x^{2-1} + 3x^{1-1}) \Rightarrow t'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 \cdot (2x + 3)$

Alternativa **e**.

17. **a)** $y = f(g(x)) \Rightarrow y = \text{sen}(x^2 + 2x)$

Pela regra da cadeia, temos:

$y' = [\cos(x^2 + 2x)] \cdot (2x + 2) \Rightarrow y' = (2x + 2) \cdot \cos(x^2 + 2x)$

b) $y = f(g(x)) \Rightarrow y = \cos\left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)$

Pela regra da cadeia, temos:

$y' = \left[-\text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)\right] \cdot \dfrac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)$

c) $y = f(g(x)) \Rightarrow y = \text{sen}^3 x + \text{sen}^2 x$

Pelas regras da cadeia e da derivada da soma, temos:

$y' = 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x + 2\,\text{sen}\,x \cos x \Rightarrow y' = \text{sen}\,x \cdot \cos x \cdot (3\,\text{sen}\,x + 2)$

d) $y = f(g(x)) \Rightarrow y = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\cos x + 3}$

Pelas regras da cadeia e da derivada do quociente, temos:

$$y' = \frac{2\cos x(-\text{sen}\,x)(\cos^2 x + 2\cos x + 3) - \cos^2 x\left[2\cos x(-\text{sen}\,x) + 2(-\text{sen}\,x)\right]}{(\cos^2 x + 2\cos x + 3)^2}$$

$$y' = -\frac{2\cos x\,\text{sen}\,x(\cos x + 3)}{(\cos^2 x + 2\cos x + 3)^2}$$

18. **a)** V, conforme a justificativa a seguir.

Para facilitar, indicamos a função f por $y = (4x^6 + 5x^4 + 3)^5$.

Fazendo $u = 4x^6 + 5x^4 + 3$, temos $y = u^5$. Assim:

$\dfrac{du}{dx} = 24x^5 + 20x^3$ e $\dfrac{dy}{du} = 5u^4 = 5(4x^6 + 5x^4 + 3)^4$

Pela regra da cadeia, concluímos:

$y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow f'(x) = 5(4x^6 + 5x^4 + 3)^4(24x^5 + 20x^3)$

b) F, conforme a justificativa a seguir.

Para facilitar, indicamos a função g por $y = (x^4 + 4x)^{-3}$.

Fazendo $u = x^4 + 4x$, temos $y = u^{-3}$. Assim:

$\dfrac{du}{dx} = 4x^3 + 4$ e $\dfrac{dy}{du} = -3u^{-4} = -3(x^4 + 4x)^{-4}$

Pela regra da cadeia, concluímos:

$y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow g'(x) = -3(x^4 + 4x)^{-4} \cdot (4x^3 + 4)$

c) V, conforme a justificativa a seguir.
Para facilitar, indicamos a função h por
$y = \left(\dfrac{2x^3}{x^2+5}\right)^5$.
Fazendo $u = \dfrac{2x^3}{x^2+5}$, temos $y = u^5$. Assim:
$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2x^4+30x^2}{(x^2+5)^2}$ e $\dfrac{dy}{du} = 5u^4 = 5\left(\dfrac{2x^3}{x^2+5}\right)^4$
Pela regra da cadeia, concluímos:
$y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow h'(x) = 5\left(\dfrac{2x^3}{x^2+5}\right)^4 \cdot \dfrac{2x^4+30x^2}{(x^2+5)^2}$

d) V, conforme a justificativa a seguir.
Para facilitar, indicamos a função u por
$y = \left(\dfrac{3+\text{sen } x}{\cos x}\right)^2$.
Fazendo $v = \dfrac{3+\text{sen } x}{\cos x}$, temos $y = v^2$. Assim:
$\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+3\,\text{sen } x}{\cos^2 x}$ e $\dfrac{dy}{dv} = 2v = \dfrac{6+2\,\text{sen } x}{\cos x}$
Pela regra da cadeia, concluímos:
$y' = \dfrac{dy}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx} \Rightarrow$
$\Rightarrow u'(x) = \dfrac{6+2\,\text{sen } x}{\cos x} \cdot \dfrac{1+3\,\text{sen } x}{\cos^2 x} =$
$= \dfrac{6\,\text{sen}^2 x + 20\,\text{sen } x + 6}{\cos^3 x}$

e) F, conforme a justificativa a seguir.
Para facilitar, indicamos a função v por
$y = \text{sen } \dfrac{1}{x}$.
Fazendo $u = \dfrac{1}{x}$, temos $y = \text{sen } u$. Assim:
$\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$ e $\dfrac{dy}{du} = \cos u = \cos \dfrac{1}{x}$
Pela regra da cadeia, concluímos:
$y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow$
$\Rightarrow u'(x) = \cos \dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}$

19. **a)** $y' = 6x^5 \cos(x^6)$
b) $y' = 6(\text{sen } x)^5 \cdot \cos x$
c) $y' = -4x^3\,\text{sen}(x^4)$
d) $y' = -4(\cos x)^3\,\text{sen } x$
e) $y' = [\sec^2(x^2+x)](2x+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = (2x+1) \cdot \sec^2(x^2+x)$
f) $y' = -4(\text{sen } x)^{-5} \cdot \cos x$
g) $y' = 5(\sec x)^4 \cdot \sec x \cdot \text{tg } x$
h) $y' = -\text{cossec}(x^4) \cdot \text{cotg}(x^4) \cdot 4x^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = -4x^3\,\text{cossec}(x^4)\,\text{cotg}(x^4)$
i) $y' = 3\,\text{sen}^2 x \cos x + \cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \cos x \cdot (3\,\text{sen}^2 x + 1)$
j) $y' = 2\text{tg } x \cdot \sec^2 x - \sec^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \sec^2 x \cdot (2\text{tg } x - 1)$
k) $y' = \dfrac{0 \cdot (2+\text{sen } x) - 1 \cdot \cos x}{(2+\text{sen } x)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = -\dfrac{\cos x}{(2+\text{sen } x)^2}$
l) $y' = 3(\sec^2 x + \text{tg}^2 x)^2 \cdot (2\sec x \cdot \sec x \cdot \text{tg } x +$
$+ 2\text{tg } x \cdot \sec^2 x) \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = 12(\sec^2 x + \text{tg}^2 x)^2 \cdot \sec^2 x \cdot \text{tg } x$

20. **a)** A taxa média k_m de variação da medida R do raio do balão, em relação ao tempo t, é dada por:
$$k_m = \frac{R(16)-R(6)}{16-6} = \frac{\frac{16+3}{16+4} - \frac{6+3}{6+4}}{16-6} = 0{,}005$$
Ou seja, a taxa k_m é 0,005 m/min.
b) A taxa instantânea k_i de variação da medida R do raio do balão, em relação ao tempo t, no instante $t = 6$, é dada por $R'(6)$.
Calculando $R'(t)$, obtemos:
$$R'(t) = \frac{1 \cdot (t+4) - (t+3) \cdot 1}{(t+4)^2} \Rightarrow R'(t) = \frac{1}{(t+4)^2}$$
Logo:
$$R'(6) = \frac{1}{(6+4)^2} = 0{,}01$$
Ou seja, a taxa k_i é 0,01 m/min.
c) O volume $V(t)$ do balão é calculado por:
$$V(t) = \frac{4\pi\,[R(t)]^3}{3} = \frac{4\pi\left[\frac{t+3}{t+4}\right]^3}{3}$$
Adotando $\pi = 3$, obtemos:
$$V(t) = 4\left[\frac{t+3}{t+4}\right]^3$$
Para o cálculo da taxa instantânea, necessitamos da função $V'(t)$, que é dada por:
$$V'(t) = 4 \cdot 3 \cdot \left[\frac{t+3}{t+4}\right]^2 \cdot \left[\frac{1 \cdot (t+4) - (t+3) \cdot 1}{(t+4)^2}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V'(t) = \frac{12\,(t+3)^2}{(t+4)^4}$$
A taxa instantânea q de variação do volume do balão, em relação ao tempo, no instante $t = 6$, é $V'(6)$, isto é:
$$q = V'(6) = \frac{12\,(6+3)^2}{(6+4)^4} = 0{,}0972$$
Ou seja, a taxa q é 0,0972 m^3/min.

21. Fazendo $4x^3 = 32$, obtemos $x = 2$.
Como $f'(x) = 12x^2$ e $f'(2) = \dfrac{1}{g'(32)}$, concluímos:
$$12 \cdot 2^2 = \frac{1}{g'(32)} \Rightarrow g'(32) = \frac{1}{48}$$

22. Sendo $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, temos:
$x = \dfrac{\pi}{3}$
Como $f'(x) = \cos x$ e $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$, concluímos:
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$$

23. A equação apresentada e a equação obtida pelo teorema da derivada da função inversa formam o sistema:
$$\begin{cases} f'(x) = 4y \cdot g'(y) & \text{(I)} \\ f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituindo (I) em (II), temos:
$$4y \cdot g'(y) = \frac{1}{g'(y)} \Rightarrow [g'(y)]^2 = \frac{1}{4y}$$
Como, por hipótese, $y \geqslant 0$ e $g'(y) \geqslant 0$, concluímos:
$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
Alternativa **d**.

24. a) $y' = 5 \cdot 2x + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow y' = 10x - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y' = 3x^2 \cdot \text{arctg}\, x + x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = 3x^2 \cdot \text{arctg}\, x + \dfrac{x^3}{1+x^2}$

c) $y' = \dfrac{3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^4 - (3\,\text{arcsen}\, x)\, 4x^3}{(x^4)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \dfrac{3x - 12\sqrt{1-x^2} \cdot \text{arcsen}\, x}{x^5\sqrt{1-x^2}}$

d) $y' = 3(\text{arccos}\, x)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{3(\text{arccos}\, x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2 \Rightarrow y' = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

f) $y' = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot \text{arcsen}\, x + \text{arctg}\, x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \dfrac{\text{arcsen}\, x}{1+x^2} + \dfrac{\text{arctg}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \text{arcos}\, x - \text{arcsen}\, x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\text{arccos}\, x)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \dfrac{\text{arccos}\, x + \text{arcsen}\, x}{\sqrt{1-x^2}\,(\text{arccos}\, x)^2}$

h) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2} \cdot x - \text{arctg}\, x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \dfrac{x - (1+x^2)\,\text{arctg}\, x}{x^2 + x^4}$

i) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 \Rightarrow y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

j) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1 \cdot x - (x+3) \cdot 1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{3}{2x^2 + 6x + 9}$

25. A ordenada do ponto P, do gráfico de f, de abscissa 0 é $f(0)$, que é calculada por $f(0) = \dfrac{\text{arcsen}\, 0}{0+1} = 0$; logo, P(0, 0).
O coeficiente angular m da reta t é $f'(0)$. Calculando $f'(x)$, obtemos:

$$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (x+1) - \text{arcsen}\, x \cdot 1}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x + 1 - \sqrt{1-x^2} \cdot \text{arcsen}\, x}{(x+1)^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Assim:

$$m = f'(0) = \dfrac{0 + 1 - \sqrt{1-0^2} \cdot \text{arcsen}\, 0}{(0+1)^2 \cdot \sqrt{1-0^2}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Com esse coeficiente angular e as coordenadas do ponto P(0, 0), obtemos a equação da reta t:
$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$
Concluímos, então, que a reta t é a bissetriz dos quadrantes ímpares.
Alternativa **a**.

26. Se existir uma reta horizontal tangente ao gráfico de f em um ponto de abscissa k, então $f'(k) = 0$, ou seja, k deve ser raiz da equação $f'(x) = 0$.
Calculando $f'(x)$, obtemos:

$$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, sob a condição de existência $-1 < x < 1$, temos:

$$\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2} - (1+x^2)}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} = 0$$

$\sqrt{1-x^2} = 1 + x^2 \Rightarrow 1 - x^2 = (1+x^2)^2$
$\therefore 1 - x^2 = 1 + 2x^2 + x^4 \Rightarrow x^4 + 3x^2 = 0$
$\therefore x^2(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ ou $x^2 + 3 = 0$
$\therefore x = 0$
Deduzimos, então, que existe uma reta horizontal t tangente ao gráfico de f no ponto P de abscissa igual a zero. A ordenada de P é dada por $f(0)$:

$$f(0) = \text{arctg}\, 0 + \text{arccos}\, 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$$

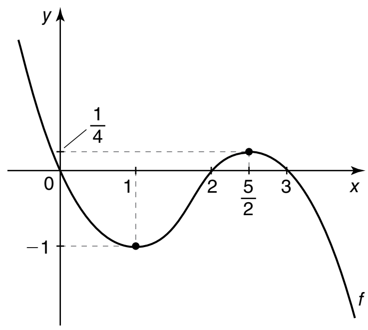
Logo, sendo $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, concluímos que a equação da reta t é $y = \dfrac{\pi}{2}$.

27. Se existir uma reta horizontal tangente ao gráfico de f em um ponto de abscissa k, então $f'(k) = 0$, ou seja, k deve ser raiz da equação $f'(x) = 0$.
Calculando $f'(x)$, obtemos:

$$f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como a equação $3x^2 + \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ não possui raiz real, pois o primeiro membro é a soma de duas parcelas positivas e o segundo membro é zero, concluímos que não existe reta horizontal que seja tangente ao gráfico de f.

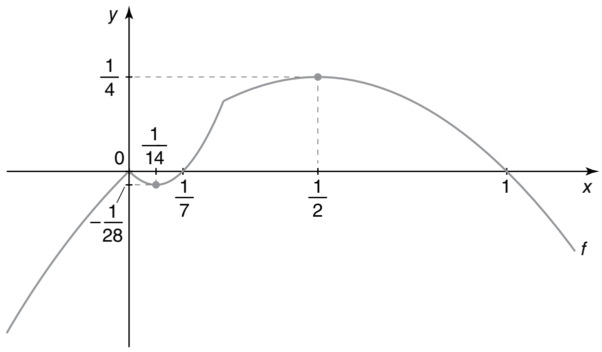
28. O gráfico de f é:



Assim, concluímos que:
- 1 é abscissa de um ponto mínimo local de f, sendo -1 o valor mínimo local que corresponde a essa abscissa;
- $\dfrac{5}{2}$ é abscissa de um ponto máximo local de f, sendo $\dfrac{1}{4}$ o valor máximo local que corresponde a essa abscissa.

Portanto, os extremos são -1 e $\dfrac{1}{4}$ e os extremantes são 1 e $\dfrac{5}{2}$.

29. O gráfico de f é:



Assim, concluímos que:
- $\frac{1}{14}$ é abscissa de um ponto mínimo local de f, sendo $-\frac{1}{28}$ o valor mínimo local correspondente a essa abscissa;
- $\frac{1}{2}$ é abscissa do ponto máximo absoluto de f, sendo $\frac{1}{4}$ o valor máximo absoluto de f.

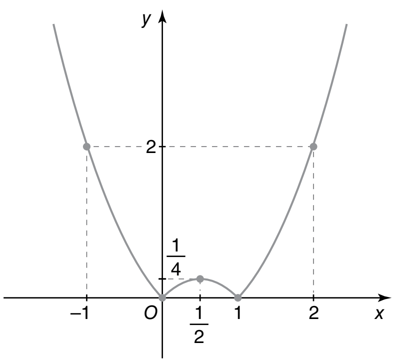
Portanto, os extremos são $-\frac{1}{28}$ e $\frac{1}{4}$ e os extremantes são $\frac{1}{14}$ e $\frac{1}{2}$.

30. Pela análise do gráfico, concluímos que:
- 2 é abscissa de um ponto mínimo absoluto de f, sendo 1 o valor mínimo absoluto de f;
- 5 é abscissa de um ponto máximo absoluto de f, sendo 7 o valor máximo absoluto de f.

Portanto, os extremos são 1 e 7 e os extremantes são 2 e 5.

31. Como a função f é crescente e seu domínio é um intervalo aberto, concluímos que f não possui extremantes nem extremos.

32. O gráfico da função f é:



Assim, respondemos aos itens:

a) F, pois a função cresce infinitamente conforme crescem os valores de x maiores que 1 ou conforme decrescem os valores de x menores que zero.

b) V, pois o menor valor possível de $f(x)$ é zero, o que ocorre para $x = 0$ e para $x = 1$.

c) V, pois existe uma vizinhança completa de $\frac{1}{2}$, por exemplo $]0, 1[$, tal que para todo x dessa vizinhança, tem-se $f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant f(x)$; logo, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ é um valor máximo relativo (ou máximo local) de f.

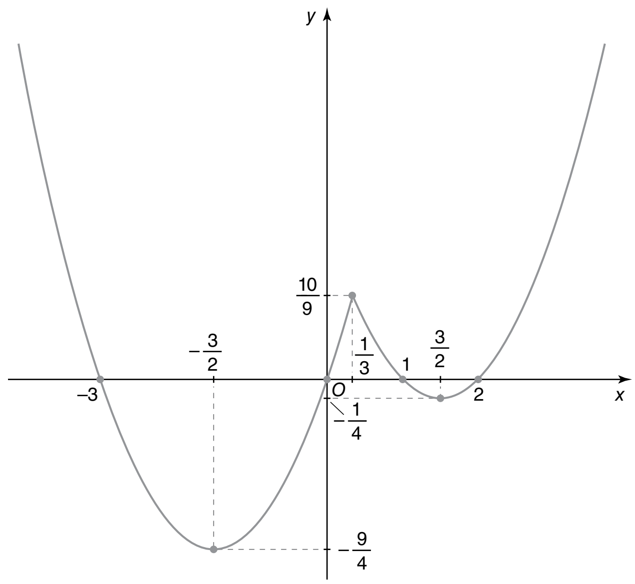
d) V, pois a função possui mínimo absoluto; e todo mínimo absoluto também é mínimo relativo.

e) V, pois $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ e, como vimos na justificativa do item **c**, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ é um valor máximo relativo.

f) F, pois, pelo gráfico, constatamos que $\frac{1}{4}$ é o único máximo relativo de f.

g) V, pois o número 0 é mínimo absoluto de f, conforme justificamos no item **b**, e todo mínimo absoluto também é mínimo local.

33. O gráfico da função f é:



Assim, respondemos aos itens:

a) A função f possui um único máximo relativo, que é $\frac{10}{9}$.

b) A função possui dois valores mínimos relativos, que são $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{9}{4}$.

c) A função não possui máximo absoluto.

d) O valor mínimo absoluto de f é $-\frac{9}{4}$.

34. a) A função f é derivável em $\mathbb{R}$, e sua derivada é:
$f'(x) = 3x^2 - 16x + 20$
- A função f é crescente para todo número real x tal que $f'(x) > 0$, ou seja:
$3x^2 - 16x + 20 > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ ou } x > \frac{10}{3}$
Assim, f é crescente nos intervalos $]-\infty, 2[$ e $\left]\frac{10}{3}, +\infty\right[$.
- A função f é decrescente para todo número real x tal que $f'(x) < 0$, ou seja:
$3x^2 - 16x + 20 < 0 \Rightarrow 2 < x < \frac{10}{3}$
Assim, f é decrescente no intervalo $\left]2, \frac{10}{3}\right[$.

b) A função g é derivável em $\mathbb{R}$, e sua derivada é:
$g'(x) = -x^2 + x + 2$

- A função g é crescente para todo número real x tal que $g'(x) > 0$, ou seja:
  $-x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$
  Assim, g é crescente no intervalo $]-1, 2[$.
- A função g é decrescente para todo número real x tal que $g'(x) < 0$, ou seja:
  $-x^2 + x + 2 < 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 2$
  Assim, g é decrescente nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]2, +\infty[$.

c) A função h é derivável em $\mathbb{R}$, e sua derivada é:
$h'(x) = x^3 - 9x^2 + 14x$
Para estudar a variação de sinal de h', fatoramos o 2º membro da igualdade anterior:
$h'(x) = x\,(x^2 - 9x + 14)$
Fazendo $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 9x + 14$, temos o seguinte quadro de sinais:

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 7$	$x > 7$
f	−	+	+	+
g	+	+	−	+
$h' = f \cdot g$	−	+	−	+

- A função h é crescente para todo número real x tal que $h'(x) > 0$, ou seja, $0 < x < 2$ ou $x > 7$.
  Assim, a função h é crescente nos intervalos $]0, 2[$ e $]7, +\infty[$.
- A função h é decrescente para todo número real x tal que $h'(x) < 0$, ou seja, $x < 0$ ou $2 < x < 7$.
  Assim, a função h é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]2, 7[$.

d) A função t é derivável em $\mathbb{R} - \{-1\}$, e sua derivada é:
$$t'(x) = \frac{2x + x^2}{(1 + x)^2}$$
Observando que o denominador $(1 + x)^2$ é positivo para qualquer número real x, com $x \neq -1$, temos que o sinal da função t é o mesmo do numerador $2x + x^2$. Logo, a variação de sinal de t' pode ser esquematizada no quadro abaixo:

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
t'	+	−	−	+

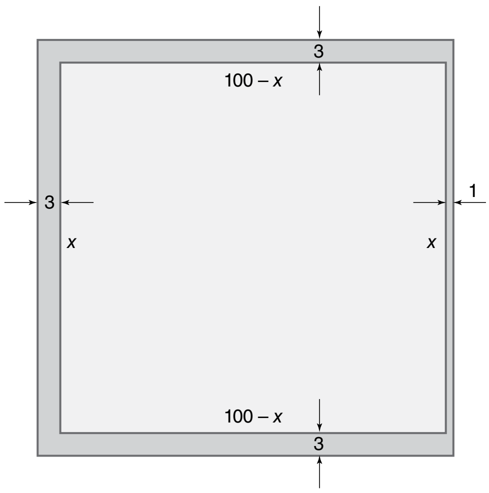
- A função t é crescente para todo número real x tal que $t'(x) > 0$, ou seja, $x < -2$ ou $x > 0$.
  Assim, a função t é crescente nos intervalos $]-\infty, -2[$ e $]0, +\infty[$.
- A função t é decrescente para todo número real x tal que $t'(x) < 0$, ou seja, $-2 < x < 0$ e $x \neq -1$.
  Assim, a função t é decrescente nos intervalos $]-2, -1[$ e $]-1, 0[$.

35. A função f é derivável em $\mathbb{R}$, e sua derivada é: $f'(x) = 3x^2 + 1$
Como $f'(x)$ é positiva para qualquer número real x, concluímos que a função f é crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$.

36. Observando que f é derivável, temos que f é decrescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ se, e somente se, $f'(x) < 0$ para todo x real.
Como $f'(x) = 12(1 + k)x^2 + 12(1 + k)$, a inequação $f'(x) < 0$ é representada por:
$12(1 + k)x^2 + 12(1 + k) < 0$
Para que essa inequação seja satisfeita para todo x real, o discriminante do polinômio do 2º grau do primeiro membro deve ser negativo. Além disso, a parábola correspondente à função $f'(x)$ deve ter a concavidade voltada para baixo; logo, o coeficiente de x^2 também deve ser negativo. Assim:
$$\begin{cases} 0^2 - 4\,[12\,(1 + k)]\,[12\,(1 + k)] < 0 \\ 12\,(1 + k) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -4\,[12\,(1 + k)]^2 < 0 \\ 1 + k < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4\,[12\,(1 + k)]^2 > 0 & \text{(I)} \\ k < -1 & \text{(II)} \end{cases}$$
Observando que a inequação (I) é satisfeita para qualquer valor real de k, com $k \neq -1$, deduzimos que as soluções do sistema são todos os números reais que satisfazem a inequação (II), isto é, $k < -1$.
Concluímos, assim, que a função f é decrescente em todo o seu domínio para todo número real k, com $k < -1$.

37. **a)** A função f é crescente para todo número real x tal que $f'(x) > 0$, ou seja, $-1 < x < 0$ ou $1 < x < 2$.
Assim, a função f é crescente nos intervalos $]-1, 0[$ e $]1, 2[$.
b) A função f é decrescente para todo número real x tal que $f'(x) < 0$, ou seja, $-3 < x < -1$ ou $0 < x < 1$ e $x \neq -2$.
Assim, a função f é decrescente nos intervalos $]-3, -2[$, $]-2, -1[$ e $]0, 1[$.

38. 1º modo
Indicando por x a largura do jardim, em metro, esquematizamos:



Portanto, a área $A(x)$ do terreno é expressa por:
$A(x) = (104 - x)(x + 6) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 98x + 624$
Se a função A assumir um valor mínimo em um ponto de abscissa k, então $A'(k) = 0$.
Calculando $A'(x)$, obtemos:
$A'(x) = -2x + 98$

Assim, a equação $A'(x) = 0$ é representada por: $-2x + 98 = 0$, de onde deduzimos que $x = 49$.
Observando que $A'(x)$ é positiva para $x < 49$ e é negativa para $x > 49$, concluímos que 49 é abscissa do ponto mínimo absoluto da função A. Logo, o valor mínimo absoluto de A é A(49), isto é:
$A(49) = -49^2 + 98 \cdot 49 + 624 \Rightarrow A(49) = 3.025$
Concluímos, então, que a menor área possível do terreno capaz de possibilitar essa obra é 3.025 m².

2º modo
Vimos, no primeiro modo, que $A(x) = -x^2 + 98x + 624$. Assim, o valor mínimo de A é a ordenada y_v do vértice da parábola que representa graficamente essa função. Assim, concluímos:
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{98^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 624}{4 \cdot (-1)} = 3.025$$
Ou seja, a menor área possível do terreno capaz de possibilitar essa obra é 3.025 m².

39. A derivada de f é:
$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 12x - 6$
Temos que 1 é abscissa de ponto mínimo local de f se for raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)}(1) > 0$, sendo n um número par.
Calculando $f'(1)$, obtemos:
$f'(1) = 5 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 6 \Rightarrow f'(1) = 0$
A derivada segunda de f é:
$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 6x + 12$
Calculando $f''(1)$, temos:
$f''(1) = 20 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 12 \Rightarrow f''(1) = 2$
Como $f'(1) = 0$ e $f''(1) > 0$, concluímos que 1 é abscissa de um ponto mínimo local de f.
Calculando $f(1)$, temos:
$f(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 0$
Logo, o valor mínimo local de f para $x = 1$ é 0.

40. A derivada de f é:
$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$
Temos que 3 é abscissa de um ponto máximo local de f se for raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)}(3) < 0$, sendo n um número par.
Calculando $f'(3)$, obtemos:
$f'(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3 \Rightarrow f'(3) = 0$
A derivada segunda de f é $f''(x) = -2x + 4$.
Calculando $f''(3)$, temos:
$f''(3) = -2 \cdot 3 + 4 \Rightarrow f''(3) = -2$
Como $f'(3) = 0$ e $f''(3) < 0$, concluímos que 3 é abscissa de um ponto máximo local de f. Calculando $f(3)$, temos:
$$f(3) = -\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$$
Logo, o valor máximo local de f para $x = 3$ é 2.

41. A derivada de f é:
$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$
Temos que 2 é abscissa de um ponto de inflexão horizontal de f se for raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)}(2) \neq 0$, sendo n um número ímpar.
Calculando $f'(2)$, obtemos:
$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 8 \Rightarrow f'(2) = 0$
A derivada segunda de f é $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$.
Calculando $f''(2)$, temos:
$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 24 \Rightarrow f''(2) = 0$

A derivada terceira de f é $f'''(x) = 24x - 36$.
Calculando $f'''(2)$, temos:
$f'''(2) = 24 \cdot 2 - 36 \Rightarrow f'''(2) = 12$
Como $f'(2) = 0$, $f''(2) = 0$ e $f'''(2) \neq 0$, concluímos que 2 é abscissa de um ponto de inflexão horizontal de f. Calculando $f(2)$, temos:
$f(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = 0$
Logo, o ponto de inflexão horizontal de f para $x = 2$ é (2, 0).

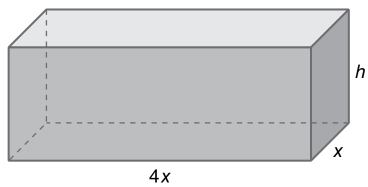
42. a) Temos que:
$f'(x) = 2 \text{ sen } x \cos x - \text{sen } x$
e
$f''(x) = 2 \cos x \cos x - 2 \text{ sen } x \text{ sen } x - \cos x =$
$= 2 \cos^2 x - 2 \text{ sen}^2 x - \cos x$
Assim:
$f'(\pi) = 2 \text{ sen } \pi \cos \pi - \text{sen } \pi = 0$
e
$f''(\pi) = 2 \cos^2 \pi - 2 \text{ sen}^2 \pi - \cos \pi = 3$
Como $f'(\pi) = 0$ e $f''(\pi) > 0$, concluímos que π é abscissa de um ponto mínimo local de f.

b) O valor mínimo local de f, para $x = \pi$, é $f(\pi)$, isto é: $f(\pi) = \text{sen}^2 \pi + \cos \pi = -1$

c) Considerando as funções f' e f'' obtidas no item **a**, temos que:
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \text{sen } \frac{\pi}{3} = 0$$
e
$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} - 2 \text{ sen}^2 \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2}$$
Como $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ e $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, concluímos que $\frac{\pi}{3}$ é abscissa de um ponto máximo local de f.

d) O valor máximo local de f, para $x = \frac{\pi}{3}$, é $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, isto é: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}^2 \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{5}{4}$

43. Indicando por x e h a largura e a altura, em metro, do baú, respectivamente, esquematizamos:



Como a capacidade do baú é 32 m³, calculando h em função de x, temos:
$$4x \cdot x \cdot h = 32 \Rightarrow h = \frac{8}{x^2}$$
Assim, a área total $A(x)$ do baú, em metro quadrado, é expressa por:
$$A(x) = 2\left(x \cdot 4x + x \cdot \frac{8}{x^2} + 4x \cdot \frac{8}{x^2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(x) = 8x^2 + \frac{80}{x}$$
Derivando a função A, obtemos:
$$A'(x) = 16x - \frac{80}{x^2}$$
As raízes de A' são calculadas por:
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 16x - \frac{80}{x^2} = 0$$
$\therefore x = \sqrt[3]{5}$

A derivada segunda da função A é:

$A''(x) = 16 - \left(-\dfrac{80 \cdot 2x}{x^4}\right) \Rightarrow A''(x) = 16 + \dfrac{160}{x^3}$

Observamos que $\sqrt[3]{5}$ não é raiz de A'', pois:

$A''\left(\sqrt[3]{5}\right) = 16 + \dfrac{160}{\sqrt[3]{5}^3} = 48$

Como $A'\left(\sqrt[3]{5}\right) = 0$ e $A''\left(\sqrt[3]{5}\right) > 0$, deduzimos que $\sqrt[3]{5}$ é abscissa de um ponto mínimo local de A. Para verificar se esse ponto é mínimo absoluto de A, vamos estudar o sinal da derivada A':

$A'(x) = 16x - \dfrac{80}{x^2} \Rightarrow A'(x) = \dfrac{16x^3 - 80}{x^2}$

Temos que o denominador, x^2, é positivo para qualquer x real não nulo; logo, a discussão do sinal de A se resume à discussão do sinal do numerador $16x^3 - 80$. Esse numerador é positivo para $x > \sqrt[3]{5}$ e é negativo para $x < \sqrt[3]{5}$ e $x \neq 0$; logo, $\sqrt[3]{5}$ é abscissa do ponto mínimo absoluto de A.

Concluímos, então, que a altura h do baú é dada por:

$h = \dfrac{8}{\sqrt[3]{5}^2}\ \text{m}^2 \Rightarrow h = \dfrac{8\sqrt[3]{5}}{5}\ \text{m}^2$

44. a) A função que expressa a velocidade escalar instantânea, em metro por segundo, é a derivada $s'(t)$, isto é:

$v(t) = s'(t) \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 4t + 1$

b) $v(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 16$

Portanto, a velocidade escalar instantânea do ponto material no instante t = 3 s é 16 m/s.

c) A função que expressa a aceleração escalar instantânea, em metro por segundo ao quadrado, é a derivada $v'(t)$, isto é:

$a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = 6t - 4$

d) $a(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$

Portanto, a aceleração escalar instantânea do ponto material no instante t = 2 s é 8 m/s^2.

45. a) A função que expressa a velocidade escalar instantânea, em metro por segundo, é a derivada $s'(t)$, isto é:

$v(t) = s'(t) \Rightarrow v(t) = 50 - 10t$

b) O instante t, em segundo, em que o projétil atinge a altura máxima é tal que $s'(t) = 0$, isto é:

$50 - 10t = 0 \Rightarrow t = 5$

Logo, a altura máxima, em metro, é:

$s(5) = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 125$

c) Resolvendo a equação $s(t) = 0$, temos:

$50t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 10$

O instante em que o projétil atinge o solo é o valor da maior raiz da equação $s(t) = 0$, ou seja, $t = 10$. Assim, a velocidade com que o projétil atinge o solo, em metro por segundo, é dada por:

$v(10) = 50 - 10 \cdot 10 = -50$

Logo, o projétil atinge a velocidade de −50 m/s.

(*Nota*: O sinal negativo da velocidade indica, apenas, que o sentido do movimento é contrário ao sentido da orientação do eixo.)

d) A função que expressa a aceleração escalar instantânea do ponto projétil, em metro por segundo ao quadrado, é a derivada $v'(t)$, isto é:

$v'(t) = -10$

Logo, a aceleração da gravidade no local tem módulo 10 m/s^2.

(*Nota*: No movimento vertical, se o eixo é orientado para cima, a aceleração é negativa, independentemente de o projétil subir ou descer.)

46. a) Indicando por $v(t)$ a velocidade do automóvel no instante t, a aceleração escalar média, em metro por segundo ao quadrado, é dada por:

$\dfrac{v(10) - v(0)}{10 - 0} = \dfrac{30 - 0}{10 - 0} = 3$

b) A função que expressa a aceleração escalar instantânea do ponto projétil, em metro por segundo ao quadrado, é a derivada $v'(t)$, isto é:

$v'(t) = 3$

Note, portanto, que a aceleração é constante. Assim, $v'(5) = 3$ m/s^2.

47. a) Para $t = 0$, temos:

$n(0) = 1.800 + 0\sqrt{0} = 1.800$

Logo, o nível da água da represa no início da chuva era de 1.800 cm, ou seja, 18 m.

b) A velocidade média v_m de aumento do nível da água da represa, quando t variou de 1 hora a 16 horas, é dada por:

$v_m = \dfrac{n(16) - n(1)}{16 - 1} =$

$= \dfrac{1.800 + 16\sqrt{16} - \left(1.800 + 1\sqrt{1}\right)}{16 - 1} \Rightarrow v_m = 4{,}2$

Portanto, a velocidade v_m foi de 4,2 cm/h.

c) A velocidade instantânea $v(t)$, no instante t, é dada por:

$v(t) = n'(t) \Rightarrow v(t) = \dfrac{3}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{t}}{2}$

Assim:

$v(1) = \dfrac{3\sqrt{1}}{2} = 1{,}5$

Logo, a velocidade instantânea de aumento no nível da água da represa, no instante 1 hora, era de 1,5 cm/h.

d) A aceleração instantânea $a(t)$ no instante t é dada por:

$a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{t}}$

Assim:

$a(1) = \dfrac{3}{4\sqrt{1}} = 0{,}75$

Portanto, a aceleração instantânea do aumento do nível da água da represa, no instante 1 hora, era de 0,75 cm/h^2.

48. a) A velocidade escalar instantânea $v(t)$, em metro por segundo, dessa partícula em função do tempo t é dada por:

$v(t) = s'(t) \Rightarrow v(t) = 3t^2 + \cos t$

b) A aceleração escalar instantânea $a(t)$, em metro por segundo ao quadrado, dessa partícula em função do tempo t é dada por:

$a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = 6t - \text{sen}\ t$

c) A aceleração escalar instantânea dessa partícula, no instante $\dfrac{\pi}{6}$ s, é calculada por:

$a\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \dfrac{\pi}{6} - \text{sen}\ \dfrac{\pi}{6} = \pi - \dfrac{1}{2}$

Logo, essa aceleração era de $\left(\pi - \dfrac{1}{2}\right)$ m/s^2.

49. a) Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$.

Para uma aproximação de $\sqrt{3}$, consideremos um número menor que 3 que tenha raiz quadrada exata. Por exemplo, um número que satisfaz essa condição, com duas casas após a vírgula, é 2,89.

Assim, para $x = 2{,}89$ e $\Delta x = 0{,}11$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$:

$\sqrt{3} = f(3) = f(2{,}89 + 0{,}11) \approx$
$\approx f(2{,}89) + f'(2{,}89) \cdot 0{,}11$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, temos:

$$\sqrt{3} \approx \sqrt{2{,}89} + \frac{1}{2\sqrt{2{,}89}} \cdot 0{,}11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \approx 1{,}7 + \frac{1}{2 \cdot 1{,}7} \cdot 0{,}11$$

$\therefore \sqrt{3} \approx 1{,}73235$

b) Seja a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Para uma aproximação de $\sqrt[3]{2}$, consideremos um número menor que 2 que tenha raiz cúbica exata. Por exemplo, um número que satisfaz essa condição, com três casas após a vírgula, é 1,728.

Assim, para $x = 1{,}728$ e $\Delta x = 0{,}272$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$:

$\sqrt[3]{2} = f(2) = f(1{,}728 + 0{,}272) \approx$
$\approx f(1{,}728) + f'(1{,}728) \cdot 0{,}272$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, temos:

$$\sqrt[3]{2} \approx \sqrt[3]{1{,}728} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1{,}728)^2}} \cdot 0{,}272 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2 + \frac{1}{3 \cdot (1{,}2)^2} \cdot 0{,}272 \approx 1{,}26296$$

c) Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$.

Para uma aproximação de $\sqrt{5}$, consideremos um número menor que 5 que tenha raiz quadrada exata. Por exemplo, um número que satisfaz essa condição, com duas casas após a vírgula, é 4,84.

Assim, para $x = 4{,}84$ e $\Delta x = 0{,}16$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$:

$\sqrt{5} = f(5) = f(4{,}84 + 0{,}16) \approx$
$\approx f(4{,}84) + f'(4{,}84) \cdot 0{,}16$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, temos:

$$\sqrt{5} \approx \sqrt{4{,}84} + \frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} \cdot 0{,}16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2{,}2 + \frac{1}{2 \cdot 2{,}2} \cdot 0{,}16$$

$\therefore \sqrt{5} \approx 2{,}23636$

d) Seja a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Para uma aproximação de $\sqrt[3]{7}$, consideremos um número menor que 7 que tenha raiz cúbica exata. Por exemplo, um número que satisfaz essa condição, com três casas após a vírgula, é 6,859.

Assim, para $x = 6{,}859$ e $\Delta x = 0{,}141$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$:

$\sqrt[3]{7} = f(7) = f(6{,}859 + 0{,}141) \approx$
$\approx f(6{,}859) + f'(6{,}859) \cdot 0{,}141$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, temos:

$$\sqrt[3]{7} \approx \sqrt[3]{6{,}859} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(6{,}859)^2}} \cdot 0{,}141 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{7} \approx 1{,}9 + \frac{1}{3 \cdot (1{,}9)^2} \cdot 0{,}141 \approx 1{,}91302$$

50. As medidas 0° e 1° podem ser representadas pelos números reais 0 e $\dfrac{\pi}{180}$, respectivamente.

Assim, para $x = 0$ e $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$, considerando a função $f(x) = \text{tg}\, x$, cuja derivada é $f'(x) = \sec^2 x$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$:

$$\text{tg}\left(0 + \frac{\pi}{180}\right) \approx \text{tg}\, 0 + \sec^2 0 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\therefore \text{tg}\, \frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \Rightarrow \text{tg}\, \frac{\pi}{180} \approx \frac{3{,}14}{180}$$

$$\therefore \text{tg}\, \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0174$$

Concluímos, então, que tg 1° ≈ 0,0174.

51. Para $\pi = 3{,}14$, a função que expressa a área $A(R)$, em função da medida R do raio do disco, e sua derivada $A'(R)$ são:

$A(R) = 3{,}14R^2$ e $A'(R) = 6{,}28R$

A medida R_i do raio do disco, em decímetro, antes do resfriamento é dada por:

$A(R_i) = 12{,}56 \Rightarrow 3{,}14 \cdot (R_i)^2 = 12{,}56$

$\therefore R_i = 2$

Temos que:

$dA = A'(R) \cdot dR$

em que: $dA \approx 12{,}48 - 12{,}56$, ou seja, $dA \approx -0{,}08$ e $dR = h$ é a variação do raio. Assim:

$-0{,}08 \approx 6{,}28R \cdot h$

Concluímos, então, que, para $R = 2$, que é a medida do raio antes do resfriamento, o valor de h é dado por:

$-0{,}08 \approx 6{,}28 \cdot 2 \cdot h \Rightarrow h \approx -0{,}006$

ou seja, a redução do raio no decurso do resfriamento foi de 0,006 dm, aproximadamente.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. $$f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) =$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

2. A taxa pontual m de variação de f em relação a x, para $x = 1$, é dada por:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^2 + 1^5 - 1^2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x^3 - 1)}{x - 1} =$$

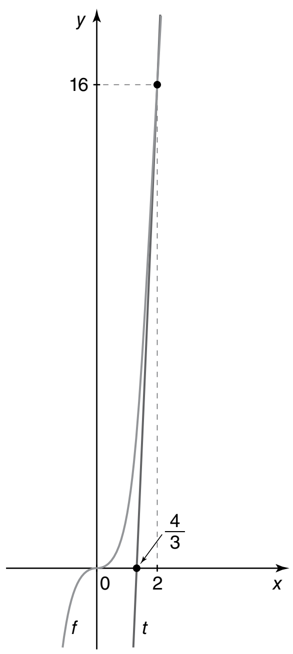
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} [x^2(x^2 + x + 1)] =$$

$$= 1^2 \cdot (1^2 + 1 + 1) = 3$$

3. Como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto $x = 5$ é numericamente igual à taxa pontual de variação da função f em relação a x para $x = 5$, temos:
$f'(5) = m_r = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

4. Como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto $x = 4$ é numericamente igual à taxa pontual de variação da função f em relação a x para $x = 4$, temos:
$$f'(4) = m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-4)}{4 - 0} = \frac{2 + 4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

5. a) V, pois do ponto $x = a$ para o ponto $x = b$ a inclinação da reta diminuiu.
b) F, pois, em $x = d$, $f'(d) < 0$, já que a reta u é estritamente decrescente e, por isso, seu coeficiente angular é negativo. Já em $x = a$, $f'(a) > 0$, pois a reta r é estritamente crescente e, por isso, seu coeficiente angular é positivo.
c) V, pois em $x = c$ a reta t é paralela ao eixo Ox e, portanto, o coeficiente angular de t é $m_t = 0$.
d) F, pois $f'(c) = 0$.
e) V, pois as retas r e s são estritamente crescentes e, por isso, seus coeficientes angulares são positivos.
f) V, pois os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f entre os pontos a e c são positivos, já que essas retas são estritamente crescentes.
g) V, pois os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f entre os pontos c e d são negativos, já que essas retas são estritamente decrescentes.

6. a) Sendo $f(2) = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$, temos:
$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x^3 - 8)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} =$$
$$= \lim_{x \to 2} [2 \cdot (x^2 + 2x + 4)] = 2 \cdot (2^2 + 2 \cdot 2 + 4) = 2 \cdot 12 = 24$$
b) Sabendo que $f'(2) = m_t = 24$ e $f(2) = 16$, e sendo $(2, 16) = (x_0, y_0)$, temos:
$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 16 = 24 \cdot (x - 2)$
$\therefore y = 24x - 32$
c)


7. Sendo m o coeficiente angular da reta tangente, temos:
$$m = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2 - x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-1(x - 2)}{2x} \cdot \frac{1}{x - 2} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$
Assim, sendo $\left(2, \frac{1}{2}\right) = (x_0, y_0)$, concluímos que a equação da reta tangente é:
$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2)$
$\therefore 4y - 2 = -x + 2 \Rightarrow x + 4y - 4 = 0$

8. O coeficiente angular m da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 1, é dado por:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \frac{1}{x} - \left(1^2 - \frac{1}{1}\right)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^3 - 1}{x}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1} = 3$$

Alternativa **d**.

9. a) A taxa pontual m de variação de f em relação a x, para $x = \pi$, é dada por:

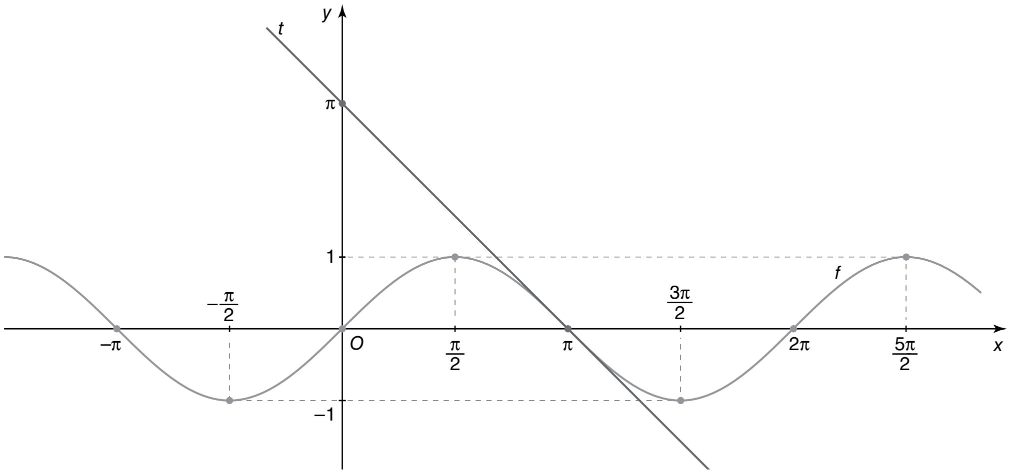
$$m = \lim_{x \to \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \pi}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x - \pi}{2} \cos \frac{x + \pi}{2}}{x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \left[\cos \frac{x + \pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{x - \pi}{2}}{\frac{x - \pi}{2}}\right] = \lim_{x \to \pi} \cos \frac{x + \pi}{2} \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{x - \pi}{2}}{\frac{x - \pi}{2}} =$$

$$= \cos \frac{\pi + \pi}{2} \cdot 1 = -1$$

b) A ordenada do ponto P, do gráfico de f, de abscissa π é $f(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0$; logo, $P(\pi, 0)$.
O coeficiente angular da reta t tangente ao gráfico de f no ponto P é a taxa m calculada no item **a**. Com esse coeficiente angular e as coordenadas de P, obtemos a equação de t:
$y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow y = -x + \pi$

c)



10. a) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f'(x) = \frac{72x^7}{4} \Rightarrow f'(x) = 18x^7$

c) $f'(x) = \frac{8x^3}{3} - 15x^4 + \frac{21x^6}{14} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x^3}{3} - 15x^4 + \frac{3x^6}{2}$

d) $f'(x) = (2x + 2) \operatorname{sen} x + (x^2 + 2x) \cos x$

e) $f'(x) = 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$
$f'(x) = x \operatorname{sen} 2x + x^2 \cos 2x$

f) $f'(x) = \frac{12x^3 \cdot (x^2 + 5) - 3x^4 \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^5 + 60x^3}{x^4 + 10x^2 + 25}$

g) $f'(x) = \frac{2x \cdot \operatorname{sen} x - x^2 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

h) $f'(x) = \frac{-4 \operatorname{sen} x(3x + x^3) - 4 \cos x \cdot (3 + 3x^2)}{(3x + x^3)^2}$

11. Indicando a função por $f(x) = x^3 + 2x - 1$, temos que a ordenada do ponto P de abscissa -1, do gráfico de f, é $f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 1 = -4$; logo, $P(-1, -4)$.
O coeficiente angular m da reta t tangente ao gráfico de f no ponto P é $f'(-1)$. Calculando $f'(x)$ temos:
$f'(x) = 3x^2 + 2$
Logo: $m = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 = 5$
Com esse coeficiente angular e as coordenadas de P, obtemos a equação da reta t, tangente à curva no ponto P:
$y - (-4) = 5[x - (-1)] \Rightarrow y = 5x + 1$
Alternativa **a**.

12. O coeficiente angular m da reta t é dado por:

$$m = \frac{-\frac{13}{2} - 0}{0 - \left(-\frac{13}{8}\right)} = -4$$

Para que a reta t seja tangente ao gráfico de f, devemos ter $m = f'(-2)$. Calculando $f'(x)$, temos:

$$f'(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3kx^2}{4} - \frac{7x}{4} - \frac{k}{2}$$

Assim, concluímos:

$$m = f'(-2) \Rightarrow -4 = \frac{(-2)^3}{2} - \frac{3k(-2)^2}{4} - \frac{7(-2)}{4} - \frac{k}{2}$$

$\therefore\ k = 1$

13. A ordenada do ponto P, do gráfico de f, de abscissa $\frac{\pi}{4}$ é dada por:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\text{tg}\ \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$$

Logo, $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

O coeficiente angular m da reta t tangente ao gráfico de f no ponto P é $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Calculando $f'(x)$, temos:

$f'(x) = 2\ \text{tg}\ x \cdot \sec^2 x$

Assim:

$$m = 2\ \text{tg}\ \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

Com esse coeficiente angular e as coordenadas de P, obtemos a equação da reta t:

$$y - 1 = 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 4x - \pi + 1$$

14. $y = f(g(x)) = a\ \text{sen}\ 3x \Rightarrow y' = (a \cos 3x) \cdot 3$

$\therefore\ y' = 3a \cos 3x$

Como o valor máximo de y' é $|3a|$, devemos ter:

$|3a| = 9 \Rightarrow a = 3$ ou $a = -3$

15. Como $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$, temos que o coeficiente angular da reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é:

$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 4$$

Portanto, o coeficiente angular da reta r é 4.

16. Sendo g a inversa de f, temos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto (6, 3) é $f'(6) = \frac{7}{9}$ e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g no ponto (3, 6) é $g'(3)$.

Pelo teorema da derivada da função inversa, temos:

$$f'(6) = \frac{1}{g'(3)} \Rightarrow \frac{7}{9} = \frac{1}{g'(3)}$$

$$\therefore\ g'(3) = \frac{9}{7}$$

Logo, o coeficiente angular pedido é $\frac{9}{7}$.

17. Calculando as derivadas de f e g, temos:

$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e $g'(x) = -\frac{k}{x^2}$

Para que existam as retas paralelas tangentes aos gráficos de f e g em pontos de mesma abscissa x, devemos ter $f'(x) = g'(x)$, isto é:

$$\frac{1}{1 + x^2} = -\frac{k}{x^2}$$

$\therefore\ (k + 1)x^2 + k = 0$

Discutindo essa equação em função do parâmetro k, temos:

I. Para $k = -1$, a equação é impossível, pois teríamos: $0x^2 - 1 = 0$

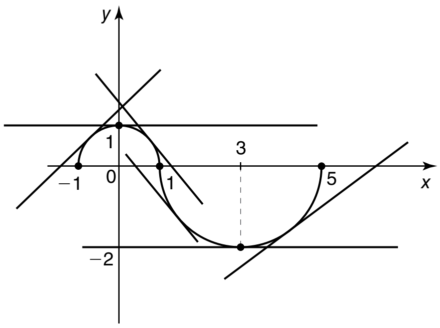
II. Para $k \neq -1$, a equação é do 2º grau; assim, ela terá raízes reais se o discriminante Δ for positivo ou nulo, isto é:

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 0^2 - 4(k + 1)k \geqslant 0$

$\therefore\ -1 \leqslant k \leqslant 0$

Como a condição I exige que $k \neq -1$ e, por hipótese, $k \neq 0$, concluímos que $-1 < k < 0$.

18.



a) • O número -1 é abscissa de um ponto mínimo relativo, pois existe uma vizinhança completa de -1, por exemplo $V(-1) =]-2, 0[$, tal que $f(-1) \leqslant f(x)\ \forall x$, com $x \in V(-1) \cap D(f)$.
O valor mínimo relativo correspondente à abscissa -1 é zero.

• O número 5 é abscissa de um ponto máximo relativo, pois existe uma vizinhança completa de 5, por exemplo $V(5) =]4, 6[$, tal que $f(5) \geqslant f(x), \forall x$, com $x \in V(5) \cap D(f)$.
O valor máximo relativo correspondente à abscissa 5 é zero.

• O número 0 é abscissa de um ponto máximo absoluto da função f, sendo a ordenada 1 o valor máximo absoluto de f. O número 3 é abscissa de um ponto mínimo absoluto da função f, sendo a ordenada -2 o valor mínimo absoluto de f.

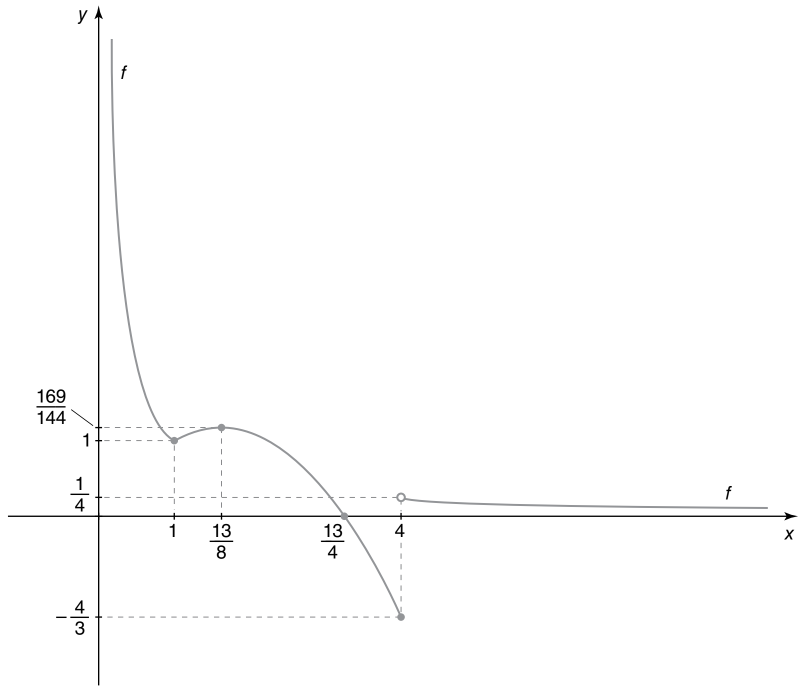
Assim, os extremantes são -1, 5, 0 e 3 e os extremos são 0, 1 e -2.

b) Apenas para as abscissas α, com $-1 < \alpha < 0$ ou $3 < \alpha < 5$, a inclinação da reta t é um ângulo agudo; portanto, o coeficiente angular de t é positivo somente para $-1 < \alpha < 0$ ou $3 < \alpha < 5$.

c) As únicas abscissas para as quais a reta t é paralela ao eixo Ox são 0 e 3; portanto, o coeficiente angular de t é igual a zero somente se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 3$.

d) Apenas para as abscissas α, com $0 < \alpha < 3$ e $\alpha \neq 1$, a inclinação da reta t é um ângulo obtuso; portanto, o coeficiente angular de t é negativo somente para $0 < \alpha < 3$ e $\alpha \neq 1$.

19. O gráfico da função f é:



Assim, respondemos aos itens:

a) F, pois, quando x se aproxima cada vez mais de zero, os valores de f aumentam indefinidamente.

b) V, pois $-\frac{4}{3}$ é o menor valor assumido pela função f.

c) V, pois existe uma vizinhança completa I de $\frac{13}{8}$ tal que $f\left(\frac{13}{8}\right) \geqslant f(x)$ para todo x pertencente a I.

d) V, pois existe uma vizinhança completa I de 1 tal que $f(1) \leqslant f(x)$ para todo x pertencente a I.

e) V, pois temos que $f(1) = 1$ e, de acordo com a justificativa do item **d**, $f(1)$ é um valor mínimo relativo de f.

f) F, pois $f(3) = \frac{1}{3}$ e para qualquer vizinhança completa I de 3, tem se $f(x) < \frac{1}{3}$ para algum x pertencente a I.

g) V, pois $f\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{169}{144}$ de acordo com a justificativa do item **c**, $f\left(\frac{13}{8}\right)$ é um valor máximo relativo de f.

20. A função f é derivável em $\mathbb{R} - \{-1\}$ e sua derivada é:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2}$$

Observando que o denominador $(1 + x)^2$ é positivo para qualquer número real x, com $x \neq -1$, temos que $f'(x) < 0$ para todo número real x, com $x \neq -1$.
Assim, temos que f é decrescente nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$.
(*Nota*: Não podemos dizer que f é decrescente em todo o seu domínio, pois, por exemplo: $0 > -2$ e $f(0) > f(-2)$)

21. A abscissa de um ponto máximo ou mínimo é raiz da equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1$$

- Para $x = \frac{1}{3}$, temos:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 2 = -\frac{50}{27}$$

- Para $x = 1$, temos:

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 2 = -2$$

Concluímos, então, que $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{50}{27}\right)$ e $B(1, -2)$.

22. **a)** A abscissa de um ponto máximo ou mínimo é raiz da equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

Pesquisando as possíveis raízes racionais dessa equação, constatamos que 1 é raiz.

Dividindo o polinômio do 1º membro da equação por $x - 1$, obtemos $P(x)$:

$P(x) \equiv 3x^2 - 7x + 2$

Assim, podemos representar o 1º membro na forma fatorada:

$(x - 1)(3x^2 - 7x + 2) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$x - 1 = 0$ ou $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\therefore\ x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 2$

Logo, os pontos A, B e C têm abscissas $\frac{1}{3}$, 1 e 2, respectivamente.

b) O valor mínimo absoluto de f é a ordenada do ponto C, que é dada por:

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{10 \cdot 2^3}{3} + \frac{9 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

c) O valor máximo relativo de f é a ordenada do ponto B, que é dada por:

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1^4}{4} - \frac{10 \cdot 1^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^2}{2} - 2 \cdot 1 = -\frac{1}{12}$$

23. **a)** A função f é derivável em $\mathbb{R}$.

Logo, se f tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para algum ponto de abscissa a, então $f'(a) = 0$.

Assim, para obter os eventuais valores de a, inicialmente derivamos a função f:

$$f'(x) = \frac{5x^4}{5} - \frac{10 \cdot 3x^2}{3} + 9 \Rightarrow f'(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

A seguir, resolvemos a equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Para classificar cada uma dessas raízes como abscissa de ponto máximo, mínimo ou de ponto de inflexão horizontal, devemos estudar o sinal de $f'(x)$. Para isso, escrevemos $f'(x)$ na forma fatorada, $f'(x) = (x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$, ou ainda $f'(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$, e estudamos a variação de sinal das funções $g(x) = x^2 - 9$, $h(x) = x^2 - 1$ e $g(x) \cdot h(x)$ por meio do quadro de sinais a seguir:

		-3		-1		1		3		x
g	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	
h	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$	
$f' = g \cdot h$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
		-3		-1		1		3		

Temos, então:

$$\begin{cases} f'(-3) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x < -3 \\ f'(x) < 0, \text{ para } -3 < x < -1 \end{cases}$$

Assim, concluímos que -3 é abscissa do ponto máximo relativo $(-3, f(-3))$ de f, sendo $f(-3) = \frac{102}{5}$ esse valor máximo relativo.

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } -3 < x < -1 \\ f'(x) > 0, \text{ para } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Assim, concluímos que -1 é abscissa do ponto mínimo relativo $(-1, f(-1))$ de f, sendo $f(-1) = \frac{2}{15}$ esse valor mínimo relativo.

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } -1 < x < 1 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 1 < x < 3 \end{cases}$$

Assim, concluímos que 1 é abscissa do ponto máximo relativo $(1, f(1))$ de f, sendo $f(1) = \frac{178}{15}$ esse valor máximo relativo.

$$\begin{cases} f'(3) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 1 < x < 3 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x > 3 \end{cases}$$

Assim, concluímos que 3 é abscissa do ponto mínimo relativo $(3, f(3))$ de f, sendo $f(3) = -\frac{42}{5}$ esse valor mínimo relativo.

Assim, os extremantes são -3, -1, 1 e 3 e os extremos são $\frac{102}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{178}{15}$ e $-\frac{42}{5}$.

b) A função f é derivável em $\mathbb{R}$.

Logo, se f tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para algum ponto de abscissa a, então $f'(a) = 0$.

Assim, para obter os eventuais valores de a, inicialmente derivamos a função f:

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$

A seguir, resolvemos a equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Pesquisando as possíveis raízes racionais dessa equação, constatamos que 1 é raiz. Dividindo por $x - 1$ o polinômio $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, obtemos $P(x)$:

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$

Assim, podemos representar a equação na forma fatorada:

$(x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$x - 1 = 0$ ou $4x^2 - 5x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$ ou $x = \frac{1}{4}$

Para classificar cada uma dessas raízes como abscissa de ponto máximo, mínimo ou de ponto de inflexão horizontal, devemos estudar o sinal de $f'(x)$. Para isso, escrevemos $f'(x)$ na forma fatorada, $f'(x) = (x - 1)(4x^2 - 5x + 1)$, e estudamos a variação de sinal das funções $g(x) = x - 1$, $h(x) = 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) \cdot h(x)$ por meio do quadro de sinais abaixo:

		$\frac{1}{4}$		1		x
g	$-$		$-$		$+$	
h	$+$		$-$		$+$	
$f' = g \cdot h$	$-$		$+$		$+$	
		$\frac{1}{4}$		1		

Temos, então:

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } x < \frac{1}{4} \\ f'(x) > 0, \text{ para } \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

Assim, concluímos que $\frac{1}{4}$ é abscissa do ponto mínimo relativo $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ de f, sendo $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$ esse valor mínimo relativo.

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } \frac{1}{4} < x < 1 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x > 1 \end{cases}$$

Assim, concluímos que 1 é abscissa do ponto de inflexão horizontal $(1, f(1))$ de f, sendo $f(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 0$.

Assim, o extremante e o extremo da função são, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $-\frac{27}{256}$ e o ponto de inflexão horizontal é $(1, 0)$.

c) A função f é derivável em $\mathbb{R}$.

Logo, se f tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para algum ponto de abscissa a, então $f'(a) = 0$.

Assim, para obter os eventuais valores de a, inicialmente derivamos a função f:

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$

A seguir, resolvemos a equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Pesquisando as raízes racionais dessa equação, constatamos que 1 é raiz. Dividindo por $x - 1$ o polinômio $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, obtemos $P(x)$:

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$

Assim, podemos representar a equação na forma fatorada:

$(x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$x - 1 = 0$ ou $4x^2 - 5x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$ ou $x = \frac{1}{4}$

Para classificar cada uma dessas raízes como abscissa de ponto máximo, mínimo ou de ponto de inflexão horizontal, devemos estudar o sinal de $f'(x)$. Para isso, escrevemos $f'(x)$ na forma fatorada, $f'(x) = (x - 1)(4x^2 - 5x + 1)$, e estudamos a variação de sinal das funções $g(x) = x - 1$, $h(x) = 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) \cdot h(x)$ através do quadro de sinais abaixo:

	$x < \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} < x < 1$	$x > 1$
g	$-$	$-$	$+$
h	$+$	$-$	$+$
$f' = g \cdot h$	$-$	$+$	$+$

Temos, então:

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } x < \frac{1}{4} \\ f'(x) > 0, \text{ para } \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

Assim, concluímos que $\frac{1}{4}$ é abscissa do ponto mínimo relativo $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ de f, sendo $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{539}{256}$ esse valor mínimo relativo.

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } \frac{1}{4} < x < 1 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x > 1 \end{cases}$$

Assim, concluímos que 1 é abscissa do ponto de inflexão horizontal $(1, f(1))$ de f, sendo $f(1) = -2$.

Assim, o extremante e o extremo da função são, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $-\frac{539}{256}$ e o ponto de inflexão horizontal é $(1, -2)$.

d) A função f é derivável em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Logo, se f tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para algum ponto de abscissa a, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, então $f'(a) = 0$.

Assim, para obter os eventuais valores de a, inicialmente derivamos a função f:

$f'(x) = 1 - \sec^2 x$

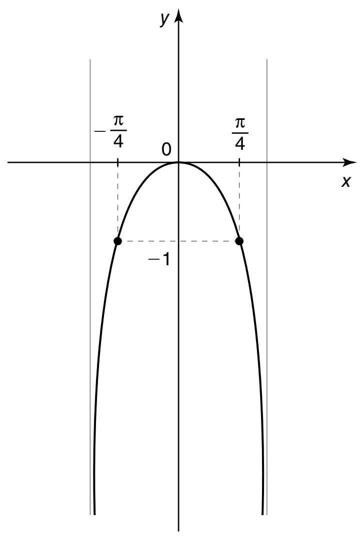
A seguir, resolvemos a equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$1 - \sec^2 x = 0 \Rightarrow \sec^2 x = 1$

$\therefore\ \sec x = \pm 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$

Assim, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a raiz dessa equação é 0.

Para classificar essa raiz como abscissa de ponto máximo, mínimo ou de ponto de inflexão horizontal, devemos estudar o sinal de $f'(x)$. Para isso, observamos que $f'(x) = 1 - \sec^2 x = -\text{tg}^2\, x$ e, portanto, seu gráfico é:



Temos:

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim, concluímos que 0 é abscissa do ponto de inflexão horizontal $(0, f(0))$ de f, sendo $f(0) = 0$, ou seja, esse ponto é $(0, 0)$.

24. a) A derivada de f é $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.
Temos que -1 é abscissa de ponto de inflexão horizontal de f se for raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)} \neq 0$, sendo n um número ímpar.
Calculando $f'(-1)$, obtemos:
$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 3 \Rightarrow f'(-1) = 0$
A derivada segunda de f é $f''(x) = 6x + 6$.
Calculando $f''(-1)$, obtemos:
$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 6 \Rightarrow f''(-1) = 0$
A derivada terceira de f é $f'''(x) = 6$.
Calculando $f'''(-1)$, obtemos:
$f'''(-1) = 6$
Como $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 0$ e $f'''(-1) \neq 0$, concluímos que -1 é abscissa de um ponto de inflexão horizontal de f.

b) Calculando $f(-1)$, obtemos:
$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 4 = 3$
Logo, o ponto de inflexão horizontal de f para $x = -1$ é $(-1, 3)$.

25. a) As derivadas de ordens 1 e 2 de f são:

$$f'(x) = \frac{4}{1 + x^2} - 2x$$

e

$$f''(x) = -\frac{8x}{(1 + x^2)^2} - 2$$

Assim, temos:

$$f'(1) = \frac{4}{1 + 1^2} - 2 \cdot 1 = 0$$

e

$$f''(1) = -\frac{8 \cdot 1}{(1 + 1^2)^2} - 2 = -4$$

Como $f'(1) = 0$ e $f''(1) < 0$, concluímos que 1 é abscissa de ponto máximo local de f.

b) O valor máximo local de f é $f(1)$, isto é:

$$f(1) = 4 \text{ arctg } 1 - 1^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \pi - 1$$

26. Indicando por r e h as medidas, em metro, do raio da base e da altura do cone, temos que a área lateral A e o volume V do cone circular reto são dados por:

$$\begin{cases} A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \\ V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\pi = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \\ V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} 4 = r\sqrt{r^2 + h^2} \\ V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \dfrac{\sqrt{16 - r^4}}{r} & \text{(I)} \\ V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos a função que expressa o volume em função do raio:

$$V(r) = \frac{\pi\sqrt{16r^2 - r^6}}{3}$$

A derivada $V'(r)$ é dada por:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16r^2 - r^6}} \cdot (32r - 6r^5)$$

O valor de r para o qual V é máximo é tal que $V'(r) = 0$, isto é:

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16r^2 - r^6}} \cdot (32r - 6r^5) = 0 \Rightarrow 32r - 6r^5 = 0$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$$

Assim, o volume máximo, em metro cúbico, é dado por:

$$V\left(\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}\right) = \frac{\pi \cdot \sqrt{16 \cdot \left(\dfrac{2\sqrt[4]{27}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt[4]{27}}{3}\right)^6}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}\right) = \frac{8\pi\sqrt[4]{12}}{3}$$

27. Indicando por r e x as medidas, em metro, do raio do círculo e do lado do quadrado, temos:

$$4x + 2\pi r = 10 \Rightarrow r = \frac{5 - 2x}{\pi}$$

Assim, a soma $S(x)$ das áreas do círculo e do quadrado é dada por:

$$S(x) = \pi\left(\frac{5 - 2x}{\pi}\right)^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{4x^2 + \pi x^2 - 20x + 25}{\pi}$$

As derivadas $S'(x)$ e $S''(x)$ são:

$$S'(x) = \frac{8x + 2\pi x - 20}{\pi}$$

e

$$S''(x) = \frac{8 + 2\pi}{\pi}$$

Assim:

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x + 2\pi x - 20}{\pi} = 0$$

$$\therefore x = \frac{10}{4 + \pi}$$

Como $S''(x) > 0$ para qualquer x real e $S'\left(\dfrac{10}{4 + \pi}\right) = 0$, concluímos que $\dfrac{10}{4 + \pi}$ é abscissa do ponto mínimo de S; logo, a medida do lado do quadrado é $\dfrac{10}{4 + \pi}$ m.

28. a) Sabemos que as medidas 45° e 1° podem ser representadas pelos números reais $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{180}$, respectivamente. Assim, considerando a função $f(x) = \cos x$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ para $x = \dfrac{\pi}{4}$ e $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$, isto é:

$$\cos 46° = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx$$

$$\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

Como $f'(x) = -\text{sen } x$, temos:

$$\cos 46° \approx \cos\frac{\pi}{4} + \left(-\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

Da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, temos:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}4142}{2} = 0{,}7071$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$$

Além disso, podemos substituir π pelo valor aproximado 3,14; portanto:

$\cos 46° \approx 0{,}7071 - 0{,}7071 \cdot \frac{3{,}14}{180} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 46° \approx 0{,}7071 - 0{,}7071 \cdot 0{,}017$

$\therefore \cos 46° \approx 0{,}69508$

b) Sabemos que as medidas 30° e 1° podem ser representadas pelos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{180}$, respectivamente. Assim, considerando a função $f(x) = \text{sen } x$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ para $x = \frac{\pi}{6}$ e $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, isto é:

$\text{sen } 31° = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx$

$\approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

Como $f'(x) = \cos x$, temos:

$\text{sen } 31° \approx \text{sen } \frac{\pi}{6} + \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

Da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, temos:

$\text{sen } \frac{\pi}{6} = 0{,}5$ e $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$

Além disso, podemos substituir π pelo valor aproximado 3,14; portanto:

$\text{sen } 31° \approx \text{sen } \frac{\pi}{6} + \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\text{sen } 31° \approx 0{,}5 + 0{,}866 \cdot \frac{3{,}14}{180} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 31° \approx 0{,}5 + 0{,}866 \cdot 0{,}017$

$\therefore \text{sen } 31° \approx 0{,}5147$

c) Sabemos que as medidas 45° e 1° podem ser representadas pelos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{180}$, respectivamente. Assim, considerando a função $f(x) = \text{tg } x$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, isto é:

$\text{tg } 46° = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx$

$\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

Como $f'(x) = \sec^2 x$, temos:

$\text{tg } 46° \approx \text{tg } \frac{\pi}{4} + \sec^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180}$

Da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, temos:

$\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$ e $\sec^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$

Além disso, podemos substituir π pelo valor aproximado 3,14; portanto:

$\text{tg } 46° \approx 1 + 2 \cdot \frac{3{,}14}{180} \Rightarrow \text{tg } 46° \approx 1 + 2 \cdot 0{,}017$

$\therefore \text{tg } 46° \approx 1{,}034$

d) Sabemos que as medidas 45° e 0,5° podem ser representadas pelos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{360}$, respectivamente. Assim, considerando a função $f(x) = \text{sen } x$, vamos aplicar a aproximação $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e $\Delta x = \frac{\pi}{360}$, isto é:

$\text{sen } 45{,}5° = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\right) \approx$

$\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{360}$

Como $f'(x) = \cos x$, temos:

$\text{sen } 45{,}5° \approx \text{sen } \frac{\pi}{4} + \left(\cos \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{360}$

Da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, temos:

$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}4142}{2} = 0{,}7071$

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$

Além disso, podemos substituir π pelo valor aproximado 3,14 e, portanto:

$\text{sen } 45{,}5° \approx 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot \frac{3{,}14}{360} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 45{,}5° \approx 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}0087$

$\therefore \text{sen } 45{,}5° \approx 0{,}7133$

Exercícios contextualizados

29. a) O volume V(t) de óleo derramado, em metro cúbico, nos t primeiros minutos é dado por:

$V(t) = \pi\left(\frac{\sqrt{t}}{4}\right)^2 \cdot 2 \Rightarrow V(t) = \frac{\pi t}{8}$

Logo, $V(9) = \frac{9\pi}{8}$, ou seja, o volume de óleo derramado nos 9 primeiros minutos foi de $\frac{9\pi}{8}$ m³.

b) A taxa média k de variação do volume de óleo derramado, em metro cúbico por minuto, no intervalo de tempo de 4 min a 9 min é dada por:

$k = \frac{V(9) - V(4)}{9 - 4} = \frac{\frac{9\pi}{8} - \frac{4\pi}{8}}{9 - 4} \Rightarrow k = \frac{\pi}{8}$

Logo, no intervalo de 4 a 9 minutos a taxa média de óleo derramado foi de $\frac{\pi}{8}$ m³/min.

c) A taxa instantânea m do volume de óleo derramado, em metro cúbico por minuto, no instante 4 min é dada por:

$m = \lim\limits_{x \to 4} \frac{V(t) - V(4)}{t - 4} \lim\limits_{x \to 4} \frac{\frac{\pi t}{8} - \frac{4\pi}{8}}{t - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to 4} \frac{\frac{\pi}{8}(t - 4)}{t - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$

Portanto, no instante 4 min a taxa instantânea de óleo derramado foi de $\frac{\pi}{8}$ m³/min.

30. a) A variação média k por minuto da pressão P no intervalo de 7 min a 17 min é dada por:

$k = \frac{P(17) - P(7)}{17 - 7} = \frac{\frac{2 \cdot 17 + 3}{17 + 3} - \frac{2 \cdot 7 + 3}{7 + 3}}{17 - 7} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{3}{200} = 0{,}015$

Portanto, no intervalo de 7 a 17 minutos a taxa média de variação da pressão foi de 0,015 atm/min.

b) A variação instantânea m da pressão P no instante $t = 7$ é dada por $P'(7)$. Calculando $P'(t)$, temos:

$P'(t) = \dfrac{3}{(t+3)^2}$

Assim, concluímos:

$m = P'(7) = \dfrac{3}{(7+3)^2} = 0{,}03$

Logo, no instante 7 min a taxa instantânea de variação da pressão foi de 0,03 atm/min.

31. A variação instantânea m do volume v no instante $t = 8$ é dada por $v'(8)$. Calculando $v'(t)$, temos:

$v'(t) = -\dfrac{5}{t^2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^4$

Assim, concluímos:

$m = v'(8) = -\dfrac{5}{8^2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{8}\right)^4 \Rightarrow m \approx -0{,}12514$

Logo, no instante 8 meses, a taxa instantânea de variação do volume v foi de $-0{,}12514$ cm³/mês.

32. O volume v da caixa, em decímetro cúbico, é dado por:

$v(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x \Rightarrow v(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

Se a função v assumir um valor máximo em um ponto de abscissa k, então $v'(k) = 0$.

Calculando $v'(x)$, obtemos:

$v'(x) = 12x^2 - 96x + 144$

Assim, a equação $v'(x) = 0$ é representada por: $12x^2 - 96x + 144 = 0$, de onde deduzimos que $x = 2$ ou $x = 6$. Note que nos convém apenas $x = 2$, pois a medida x deve obedecer a condição $0 < x < 6$.

Estudando a variação de sinal $v'(x)$, para $0 < x < 6$, temos que:

- $0 < x < 2 \Rightarrow v'(x) > 0$
- $2 < x < 6 \Rightarrow v'(x) < 0$

De onde deduzimos que 2 é abscissa do ponto máximo absoluto da função v.

Concluímos, então, que a medida do lado de cada quadrado removido foi de 2 dm.

33. Sejam R e H as medidas, em metro, do raio da base e da altura do cone, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$R^2 + H^2 = 25 \Rightarrow R^2 = 25 - H^2$

Assim, o volume V do cone, que é calculado por $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$, pode ser expresso em função de H, por:

$V(H) = \dfrac{\pi(25 - H^2)H}{3} \Rightarrow V = \dfrac{\pi(25H - H^3)}{3}$

Se a função V assumir um valor máximo em um ponto de abscissa k, então $V'(k) = 0$.

Calculando $V'(H)$, obtemos:

$V'(H) = \dfrac{\pi(25 - 3H^2)}{3}$

Assim, a equação $V'(H) = 0$ é representada por $\dfrac{\pi(25 - 3H^2)}{3} = 0$, de onde deduzimos que $H = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ ou $H = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Note que nos convém apenas $H = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, pois a medida H deve obedecer à condição $0 < H < 5$.

Estudando a variação de sinal de $V'(H)$, para $0 < H < 5$, temos que:

- $0 < H < \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V'(H) > 0$
- $\dfrac{5\sqrt{3}}{3} < H < 5 \Rightarrow V'(H) < 0$

De onde deduzimos que $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ é abscissa do ponto máximo absoluto da função V.

Concluímos, então, que a capacidade máxima V_M do reservatório é dada por:

$$V_M = V\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi\left[\left(25 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3\right]}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_M = \frac{250\pi\sqrt{3}}{27}$$

Portanto, a capacidade máxima do reservatório é de $\dfrac{250\pi\sqrt{3}}{27}$ m³.

34. Indicando por R e H o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente, temos que a área total A e o volume V desse cilindro são dados por:

$$\begin{cases} A = 2\pi RH + 2\pi R^2 \\ V = \pi R^2 H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2\pi RH + 2\pi R^2 \\ 400 = \pi R^2 H \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A = 2\pi RH + 2\pi R^2 & \text{(I)} \\ H = \dfrac{400}{\pi R^2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos a função $A\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que:

$A(R) = \dfrac{800}{R} + 2\pi R^2$

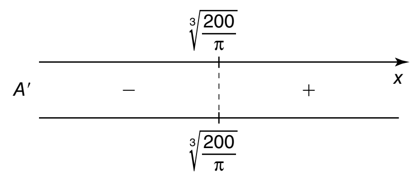
Temos que a função A é derivável em $\mathbb{R}_+^*$. Logo, se A tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para algum ponto de abscissa a de seu domínio, então $A'(a) = 0$. Assim, para obter os eventuais valores de a, inicialmente derivamos a função V, obtendo:

$A'(R) = \dfrac{4\pi R^3 - 800}{R^2}$

A seguir, resolvemos a equação $A'(R) = 0$, ou seja:

$\dfrac{4\pi R^3 - 800}{R^2} = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$

Como o denominador de $A'(R)$ é positivo para qualquer valor de R, temos que a variação de sinal de A' é a mesma do numerador $4\pi R^3 - 800$; logo, a variação de sinal de A' é descrita pelo quadro:



Como $A'\left(\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}\right) < 0$ para todo número real R, com $0 < R < \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$, e $A'\left(\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}\right) > 0$ para todo número real R, com $R > \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$, concluímos que $\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$ é abscissa de um ponto mínimo absoluto de A.

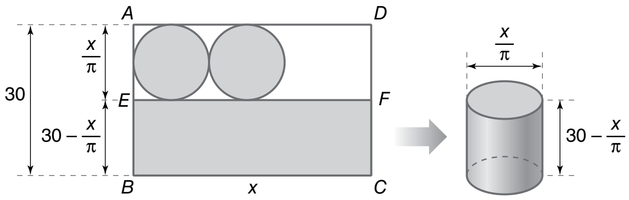
Logo, para que a quantidade de metal seja mínima na fabricação das embalagens, as medidas R e H do raio da base e da altura do cilindro devem ser:

$R = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$ cm e $H = \dfrac{400}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}\right)^2}$ cm

35. Indicando por x a medida, em centímetro, do lado $\overline{BC}$, temos que o perímetro de cada círculo é x; logo, a medida R, em centímetro, do raio de cada círculo é dada por:

$2\pi R = x \Rightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$

Assim, esquematizamos:



Logo, o volume V do cilindro é dado por:

$V(x) = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(30 - \dfrac{x}{\pi}\right) \Rightarrow V(x) = \dfrac{15x^2}{2\pi} - \dfrac{x^3}{4\pi^2}$

Se a função V assumir um valor máximo em um ponto de abscissa k, então $V'(k) = 0$.
Calculando $V'(x)$, obtemos:

$V'(x) = \dfrac{15x}{\pi} - \dfrac{3x^2}{4\pi^2}$

Assim, a equação $V'(x) = 0$ é representada por $\dfrac{15x}{\pi} - \dfrac{3x^2}{4\pi^2} = 0$, de onde deduzimos que $x = 0$ ou $x = 20\pi$. Note que nos convém apenas $x = 20\pi$, pois a medida x deve obedecer à condição $0 < x < 30\pi$.

Estudando a variação de sinal de $V'(x)$, para $0 < x < 3\pi$, temos que:

- $0 < x < 20\pi \Rightarrow V'(x) > 0$
- $20\pi < x < 30\pi \Rightarrow V'(x) < 0$

De onde deduzimos que 20π é abscissa do ponto máximo absoluto da função V.
Concluímos, então, que o recipiente terá o volume máximo se a medida do lado $\overline{BC}$ for 20π cm.

36. a) A velocidade média V_m da perfuração, em centímetro por minuto, quando t variou de 1 min a 2,3 min, é dada por:

$v_m = \dfrac{p(2{,}3) - p(1)}{2{,}3 - 1} = \dfrac{\text{sen } 2{,}3 - \cos 2{,}3 - (\text{sen } 1 - \cos 1)}{2{,}3 - 1} \Rightarrow v_m \approx 0{,}85$

Portanto, a velocidade v_m foi de 0,854 cm/min.

b) A velocidade instantânea $v(t)$, no instante t, é dada por:

$v(t) = p'(t) = \cos t + \text{sen } t$

Assim:

$v(1) = \cos 1 + \text{sen } 1 \Rightarrow v(1) \approx 1{,}38$

Portanto, a velocidade instantânea de perfuração, no instante 1 min, era de 1,382 cm/min, aproximadamente.

c) A aceleração instantânea $a(t)$ no instante t é dada por:

$a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = -\text{sen } t + \cos t$

Assim:

$a(1) = -\text{sen } 1 + \cos 1 \Rightarrow a(1) \approx -0{,}30$

Logo, a aceleração instantânea de perfuração, no instante 1 min, era de $-0{,}3012$ cm/min^2.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. a) $Cm(16) = p(16) - p(15) = \dfrac{16}{\sqrt{16} + 1} + 7.000 - \left(\dfrac{15}{\sqrt{15} + 1} + 7.000\right) \Rightarrow Cm(16) \approx 0{,}1218$

Logo, o custo marginal relativo a 16 peças produzidas é de, aproximadamente, 0,1218 unidades monetárias.

b) A função p é uma restrição da função $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} + 1} + 7.000$ de domínio $\mathbb{R}_+$. Como a função g é derivável, podemos calcular $Cm(16)$, aproximadamente, como o valor da derivada da função g para $x = 16$, isto é, a variação pontual da produção para $x = 16$.

Temos:

$$g'(x) = \frac{x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)^2}$$

Logo:

$$Cm(16) \approx g'(16) \Rightarrow Cm(16) \approx \frac{16 + 2\sqrt{16}}{2\sqrt{16}\left(\sqrt{16} + 1\right)^2}$$

$\therefore\ Cm(16) \approx 0{,}12$

Logo, o custo marginal relativo a 16 peças produzidas é de, aproximadamente, 0,12 unidades monetárias.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: A imprecisão da figura levou o aluno a erroneamente considerar que a reta $y = 0$ é a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 0$.

Resolução correta:

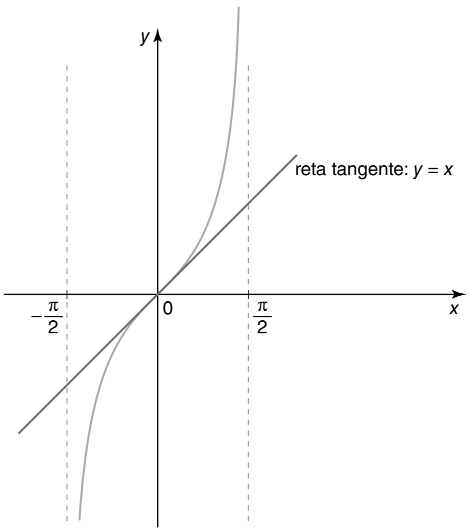
I. O ponto de tangência é $(0, \text{tg } 0) = (0, 0)$.

II. A derivada da função $f(x) = \text{tg } x$ é $f'(x) = \sec^2 x$. Portanto, o coeficiente angular m da reta t tangente ao gráfico no ponto de abscissa zero é $m = \sec^2 0 = 1$.

Por I e II, concluímos que a equação da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$, é:

$y - 0 = 1(x - 0)$, ou seja, $y = x$

Assim, o gráfico correto da função $f(x) = \text{tg } x$, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, é a curva representada no plano cartesiano abaixo:



Portanto, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa zero é $y = x$.