MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

C : conjunto dos números complexos.
Q : conjunto dos números racionais.
R : conjunto dos números reais.
Z : conjunto dos números inteiros.
N = {0,1,2,3,...}.
N* = {1,2,3,...}.
i : unidade imaginária; $i^2 = -1$.
$z = x + iy$, $x, y \in$ R.
$\bar{z}$: conjugado do número z, $z \in$ C.
$|z|$: módulo do número z, $z \in$ C.
$[a,b] = \{x \in$ R; $a \leq x \leq b\}$.
$]a,b[= \{x \in$ R; $a < x < b\}$.

$\varnothing$: conjunto vazio.
$A \backslash B = \{x \in A;\ x \notin B\}$.
$n(U)$: número de elementos do conjunto U.
$P(A)$: coleção de todos os subconjuntos de A.
$f o g$: função composta de f com g.
I : matriz identidade n x n.
A^{-1} : inversa da matriz inversível A.
A^T : transposta da matriz A.
det A : determinante da matriz A.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

1. Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$.
II. $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$.
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

A. ( ) apenas I e III.
B. ( ) apenas II e IV.
C. ( ) apenas II e III.
D. ( ) apenas IV.
E. ( ) todas as afirmações.

Alternativa: C

Dado que U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Podemos afirmar que:
$\varnothing \notin$ U
$\varnothing \subset$ U, $\forall$U
n (U) = 10
$5 \in$ U
$\{5\} \subset$ U
$\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$
Então são verdadeiras as afirmações II e III.

2. Seja o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$.

II. $\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

A. ( ) I e II
B. ( ) I e III
C. ( ) II e III
D. ( ) I
E. ( ) II

Alternativa: D

Seja $S = \left\{ r \in Q : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2 \right\}$

então temos:

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ r^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \geq 0 \\ -\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \ 0 \leq r \leq \sqrt{2};\ r \in Q$$

I. Verdadeiro, pois $\frac{5}{4} \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ e $\frac{7}{5} \in \left[0, \sqrt{2}\right]$.

II. Falso, pois $\left\{x \in R : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\} \cap \left\{x \in Q : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\} = S$.

III. Falso, pois $\sqrt{2} \notin Q$.

3. Seja a um número real, com $0 < a < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que $a^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{2x^2} < 1$.

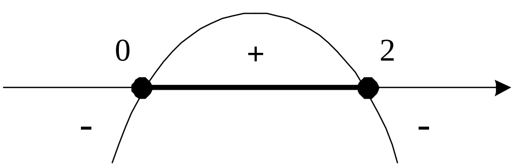
A. ( ) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$
B. ( ) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
C. ( ) $]0, 2[$
D. ( ) $]-\infty, 0[$
E. ( ) $]2, +\infty[$

Resolução: C

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1 \ \therefore\ \alpha^{2x}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)^{2x^2} < 1 \ \therefore\ \alpha^{2x}\alpha^{-x^2} < \alpha^0$$

$$\alpha^{-x^2+2x} < \alpha^0 \text{ e } 0 < \alpha < 1, \text{ então: } -x^2 + 2x > 0 \ \therefore\ x(-x+2) > 0$$

raízes: 0 e 2



$\boxed{S =]0, 2[}$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = 2\cos x + 2i\operatorname{sen} x$. Então, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, o valor do produto $f(x)\ f(y)$ é igual a

A. ( ) $f(x + y)$
B. ( ) $2f(x + y)$
C. ( ) $4if(x + y)$
D. ( ) $f(xy)$
E. ( ) $2f(x) + 2if(y)$

Alternativa: B

f(x) = 2cos x + 2isen x = 2(cos x + isen x)
f(x).f(y) = (2cos x + 2isen x) (2cos y + 2isen y) = 4(cos(x + y) + isen(x + y)) =
= 2 · 2(cos(x+y) + isen (x + y))

$\therefore\ \boxed{f(x).f(y) = 2.f(x + y)}$

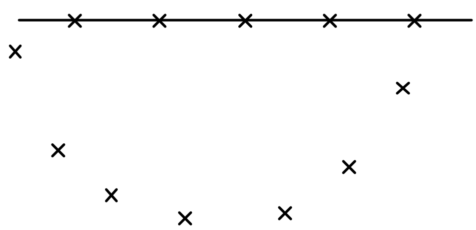
---

5. Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

A. ( ) 210
B. ( ) 315
C. ( ) 410
D. ( ) 415
E. ( ) 521

Alternativa: A

Considere a figura representativa da situação:



Então:

$$C_{12,3} - C_{5,3} = \frac{12!}{3!9!} - \frac{5!}{3!2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}.11.10}{\cancel{3.2}.1} - \frac{5.\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}.1} = 220 - 10 = \boxed{210}$$

---

6. Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

A. ( ) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.
B. ( ) Apenas para $x > 0$, A possui inversa.
C. ( ) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.
D. ( ) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.
E. ( ) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

Alternativa: A

$$A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 2^x . \log_2 5 - \frac{2^x}{x^2+1} = 2^x \left(\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1} \right)$$

$$\nexists A^{-1}, x \in \mathbb{R}, \text{ se } \det A = 0$$

$$2^x \left(\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1} \right) = 0$$

$2^x = 0$ portanto não existe $x \in \mathbb{R}$

$$\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2 + 1 = \log_5 2 \Rightarrow x = \pm \underbrace{\sqrt{\log_5 2 - 1}}_{<0}$$

Então, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que det A = 0, logo A admite inversa, $\forall x \in \mathbb{R}$.

---

7. Considerando as funções arc sen: $[-1, +1] \rightarrow [-p/2, p/2]$ e arc cos: $[-1, +1] \rightarrow [0, p]$, assinale o valor de $\cos\left(\text{arc sen}\frac{3}{5} + \text{arc cos}\frac{4}{5} \right)$.

A. ( ) $\frac{6}{25}$ B. ( ) $\frac{7}{25}$ C. ( ) $\frac{1}{3}$

D. ( ) $\frac{2}{5}$ E. ( ) $\frac{5}{12}$

Alternativa: B

$$\text{arc sen: } [-1,\ 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right]; \text{ arc cos: } [-1,\ 1] \rightarrow [0,\ \pi]$$

$$\cos\left(\underbrace{\text{arc sen}\frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\text{arc cos}\frac{4}{5}}_{\beta} \right)$$

$$\text{arc sen}\frac{3}{5} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha = \frac{3}{5} \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{arc cos}\frac{4}{5} = \beta \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \frac{4}{5} \\ \beta \in [0,\ \pi] \end{cases} \therefore \text{sen}\beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}}$$

8. Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5º. Então, seu maior ângulo mede, em graus,

A. ( ) 120 B. ( ) 130 C. ( ) 140
D. ( ) 150 E. ( ) 160

Alternativa: E

Calculando a soma das medidas dos ângulos internos do eneágono:

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9).9}{2} = 180°.7 \Rightarrow a_1 + a_9 = 280° \Rightarrow a_1 + a_1 + 8r = 280° \Rightarrow 2a_1 + 8\cdot 5° = 280° \therefore a_1 = 120°$$

Logo o maior ângulo tem por medida $a_9 = 120° + 8\cdot 5 \Rightarrow \boxed{a_9 = 160°}$

---

9. O termo independente de *x* no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

A. ( ) $729\sqrt[3]{45}$ B. ( ) $972\sqrt[3]{15}$ C. ( ) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

D. ( ) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ E. ( ) $165\sqrt[3]{75}$

Alternativa: E

I. Termo geral:

$$T = \binom{12}{p}\cdot\left(\sqrt{\frac{3\cdot x^{1/3}}{5\cdot x}}\right)^{12-p}\cdot(-1)^p\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{5\cdot x}{3\cdot x^{1/2}}}\right)^p$$

$$T = \binom{12}{p}\cdot 3^{6-\frac{p}{2}}\cdot\left(x^{\frac{1}{3}-1}\right)^{6-\frac{p}{2}}\cdot 5^{-6+\frac{p}{2}}\cdot(-1)^p\cdot 5^{\frac{p}{3}}\left(x^{1-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{3}}\cdot 3^{-\frac{p}{3}} \Rightarrow$$

$$T = \binom{12}{p}\cdot 3^{6-\frac{5p}{6}}\cdot 5^{-6+\frac{5p}{6}}\cdot x^{-4+\frac{p}{2}}\cdot(-1)^p$$

II. Condição para o termo independente: $-4 + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow p = 8$

III. Substituindo p = 8, temos: $T = \binom{12}{8}\cdot 3^{6-\frac{5\cdot 8}{6}}\cdot 5^{-6+\frac{5\cdot 8}{6}}\cdot(-1)^8 \Rightarrow T = 495\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$T = 165\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2}{3^2}} = 165\cdot\sqrt[3]{3\cdot 5^2} \Rightarrow \boxed{T = 165\cdot\sqrt[3]{75}}$$

10. Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada n x n, $n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, ..., n$, então $\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

A. ( ) apenas II.
B. ( ) apenas III.
C. ( ) apenas I e II.
D. ( ) apenas II e III.
E. ( ) todas.

Alternativa: D

I. Falsa, pois se $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (não possui nem linha, nem coluna nulas) então det A = 0.

II. Verdadeira, pois teremos uma matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ com } \det A = a_{11}.a_{12} \ldots a_{nn}$$

III. Verdadeira, pois $\det B = \left(\sqrt{2}+1\right).\left(\sqrt{2}-1\right).\det A \therefore \det B = \det A$

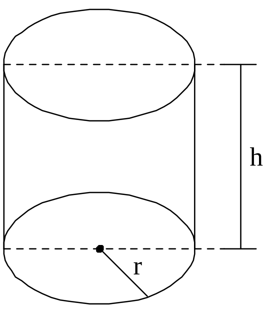
Logo são verdadeiras as afirmações II e III.

11. Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi\ cm^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}\ cm^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2,

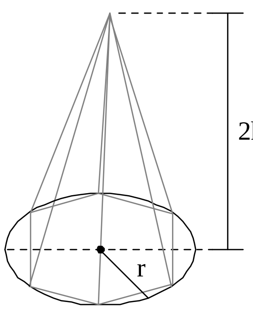
A. ( ) $18\sqrt{427}$
B. ( ) $27\sqrt{427}$
C. ( ) $36\sqrt{427}$
D. ( ) $108\sqrt{3}$
E. ( ) $45\sqrt{427}$

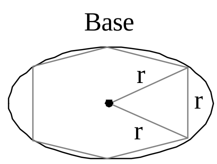
Alternativa: A

Sejam o cilindro e a pirâmide:



$$V = \pi r^2 \cdot h = 360\pi$$
$$r^2 h = 360 \quad \text{(I)}$$



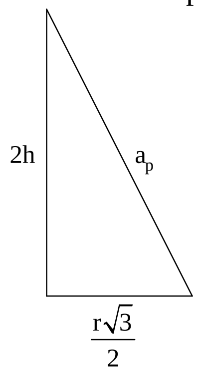


Calculando a área da base da pirâmide, temos:

$$A_B = 6\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3r^2}{2} = 54 \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6\ \text{cm}$$

Substituindo r = 6 cm em (I), segue: $36\cdot h = 360 \Rightarrow h = 10\ \text{cm}$

Calculando o apótema da pirâmide, temos:



$$(2h)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a_p{}^2$$

$$a_p{}^2 = 20^2 + (3\sqrt{3})^2$$

$$a_p{}^2 = 400 + 27$$

$$a_p = \sqrt{427}\ \text{cm}$$

Para cálculo da área lateral, segue:

$$A_\ell = 6\cdot\left(\frac{r\cdot a_p}{2}\right) = 3r\cdot a_p \Rightarrow A_\ell = 3\cdot 6\cdot\sqrt{427} \Rightarrow \boxed{A_\ell = 18\sqrt{427}\ \text{cm}^2}$$

---

12. O conjunto de todos os valores de a, $a \in \left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em x)

$$x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\ a = 0$$

são todas reais, é

A. ( ) $\left[-\frac{p}{3}, 0\right]$

B. ( ) $\left[-\frac{p}{4}, \frac{p}{4}\right]$

C. ( ) $\left[-\frac{p}{6}, \frac{p}{6}\right]$

D. ( ) $\left[0, \frac{p}{3}\right]$

E. ( ) $\left[\frac{p}{12}, \frac{p}{3}\right]$

Alternativa: D

$$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\alpha = 0$$

$$\left(x^2\right)^2 - \sqrt[4]{48}.\left(x^2\right) + \text{tg}\alpha = 0$$

Condição 1: raízes reais ($\Delta \geq 0$)

$$\Delta = \left(-\sqrt[4]{48}\right)^2 - 4\text{tg}\alpha \Rightarrow \Delta = \sqrt{48} - 4\text{tg}\alpha \Rightarrow \Delta = 4\sqrt{3} - 4\text{tg}\alpha \Rightarrow 4\sqrt{3} - 4\text{tg}\alpha \geq 0 \Rightarrow -\text{tg}\alpha \geq -\sqrt{3}$$

$$\text{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$$

Condição 2: duas raízes positivas (soma positiva e produto não negativo)

Temos: $S = -\frac{b}{a} = \sqrt[4]{48} > 0$

Devemos ter: $P = \frac{c}{a} \geq 0$

$\frac{tg\alpha}{1} \geq 0 \Rightarrow tg\alpha \geq 0 \Rightarrow 0 \leq tg\alpha \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \;\therefore\; \boxed{\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]}$

---

13. Sejam as funções *f* e *g* definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + ax$ e $g(x) = -(x^2 + bx)$, em que *a* e *b* são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		*g*	
Valor mínimo	*Ponto de mínimo*	*Valor máximo*	*Ponto de máximo*
-1	< 0	$\frac{9}{4}$	> 0

Então, a soma de todos os valores de *x* para os quais $(f \circ g)(x) = 0$ é igual a

A. ( ) 0 B. ( ) 2 C. ( ) 4
D. ( ) 6 E. ( ) 8

Alternativa: D

$f(x) = x^2 + \alpha x, \alpha \in R$

$g(x) = -x^2 - \beta x, \beta \in R$

$f_{mín} = -1 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -1 \Rightarrow \Delta = 4a;\ \alpha^2 = 4;\ \alpha = \pm 2$

Ponto de mínimo: $x_V < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{2 \cdot 1} < 0 \Rightarrow \alpha > 0;$ logo $\alpha = 2$

$g_{máx} = \frac{9}{4} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = \frac{9}{4}$, onde $a = -1 \Rightarrow \Delta = 9;\ \beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = \pm 3$

Ponto de máximo: $x_V > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow -\frac{(-\beta)}{2(-1)} > 0 \Rightarrow \beta < 0;$ logo $\beta = -3$

Então:

$f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = -x^2 + 3x$

$f(g(x)) = g(x)^2 + 2g(x) = \left(-x^2 + 3x\right)^2 + 2\left(x^2 + 3x\right) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 6x$

Logo soma das raízes é: $\boxed{-\frac{b}{a} = 6}$

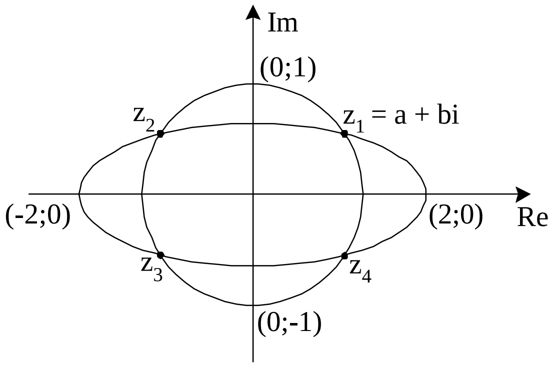
---

14. Considere todos os números $z = x + iy$ que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a

A. ( ) $\frac{25}{9}$ B. ( ) $\frac{49}{16}$ C. ( ) $\frac{81}{25}$
D. ( ) $\frac{25}{7}$ E. ( ) 4

Alternativa: B

Observe o desenho da elipse $\frac{x^2}{(2)^2}+\frac{y^2}{(1)^2}=1$, com $|z|=\frac{\sqrt{7}}{2}$ representando uma circunferência centrada na origem e raio $\frac{\sqrt{7}}{2}$:



Considerando z_1 = a + bi, a e b $\in$ R e pela simetria temos $z_2 = -a + bi$, $z_3 = -a - bi$ e $z_4 = a - bi$.
Produto dos termos: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = (a + bi)(a - bi)(-a + bi)(-a - bi) = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2) =$

$$=(a^2+b^2)^2=|z_1|^4=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^4=\boxed{\frac{49}{16}}$$

---

15. Para algum número real r, o polinômio $8x^3-4x^2-42x+45$ é divisível por $(x-r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de r?

A. ( ) 1,62 B. ( ) 1,52 C. ( ) 1,42
D. ( ) 1,32 E. ( ) 1,22

Alternativa: B

Dividindo o polinômio por $(x-r)^2$, temos:

r	8	-4	-42	45
	8	$8r-4$	$8r^2-4r-42$	$8r^3-4r^2-42r+45=0$

r	8	$8r-4$	$8r^2-4r-42$	
	8	$16r-4$	$24r^2-8r-42=0$	

$24r^2-8r-42=0 \Rightarrow 12r^2-4r-21=0 \;\therefore\; r_1=\frac{3}{2}$ ou $r_2=-\frac{7}{6}$ (não é raiz da equação primitiva)

Assim, $r=\frac{3}{2}=1,5$

Logo, o número mais próximo de r é $\boxed{1,52}$.

16. Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288$$

A. ( ) Uma elipse.
B. ( ) Uma parábola.
C. ( ) Uma circunferência.
D. ( ) Uma hipérbole.
E. ( ) Uma reta.

Alternativa: C

Pelo teorema de Jacobi:
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (+) \\ (+) \\ (+) \\ x(-1) \end{matrix}$$

Então:
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ -30 & -3 & -3 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 288$$

Pelo teorema de Laplace, vem:
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 288$$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ que representa uma $\boxed{\text{circunferência de centro (2, 3) e raio 5}}$.

17. A soma das raízes da equação $z^3+z^2-|z|^2+2z=0,\ z\in\mathbb{C},$ é igual a

A. ( ) -2
B. ( ) -1
C. ( ) 0
D. ( ) 1
E. ( ) 2

Alternativa: A

Sabendo que $|z|^2 = z.\overline{z},$ temos:

$$z^3+z^2-|z|^2+2z=0 \Rightarrow z^3+z^2-z\cdot\overline{z}+2z=0 \Rightarrow z\left(z^2+z-\overline{z}+2\right)=0$$

$$z_1=0 \quad \text{ou} \quad z^2+z-\overline{z}+2=0$$

Substituindo z = a + bi, com a e b ∈ R segue:

$$(a+bi)^2+(\cancel{a}+bi)-(\cancel{a}-bi)+2=0 \Rightarrow a^2-b^2+2abi+2bi+2=0 \Rightarrow a^2-b^2+2+(2ab+2b)i=0$$

$$\begin{cases} a^2-b^2+2=0 \\ 2ab+2b=0 \Rightarrow 2b(a+1)=0 \begin{array}{l} \nearrow b=0 \\ \quad \text{ou} \\ \searrow a=-1 \end{array} \end{cases}$$

para $b=0 \longrightarrow a^2+2=0 \;\Rightarrow\; \nexists\; a\in R$ e para $a=-1 \longrightarrow 1-b^2+2=0 \Rightarrow b^2=3 \Rightarrow b=\pm\sqrt{3}$

Assim, as raízes são $0, -1+\sqrt{3}i$ e $-1-\sqrt{3}i$

Logo, $\boxed{z_1+z_2+z_3=-2}$

---

18. Dada a equação $x^3+(m+1)x^2+(m+9)x+9=0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

I. Se $m\in\,]-6,\,6[$, então existe apenas uma raiz real.

II. Se m = –6 ou m = +6, então existe raiz com multiplicidade 2.

III. $\forall m\in\mathbb{R}$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

A. ( ) I B. ( ) II C. ( ) III

D. ( ) II e III E. ( ) I e II

Alternativa: E

Dada a equação:

$$x^3+(m+1)x^2+(m+9)x+9=0 \Rightarrow x^3+mx^2+x^2+mx+9x+9=0 \Rightarrow$$

$$x^3+x^2+mx^2+mx+9x+9=0 \Rightarrow x^2(x+1)+mx(x+1)+9(x+1)=0 \Rightarrow$$

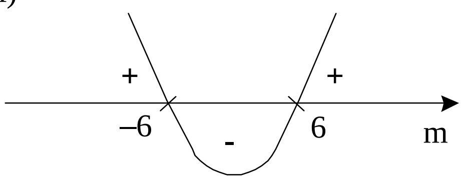
$$(x+1)(x^2+mx+9)=0$$

Assim:

x + 1 = 0 então x = –1 (i) ou

x^2 + mx + 9 = 0 (ii)

$\Delta = m^2-36$



$-6<m<6 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \nexists\; x\in R$ na equação (ii) e -1 é a única raiz real

$m=-6$ ou $m=6 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2$ são as raízes reais de (ii) e -1 é a raiz de (i)

$m<-6$ ou $m>6 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow x_1$ e x_2 são as raízes reais e distintas de (ii) e -1 é a raiz de (i)

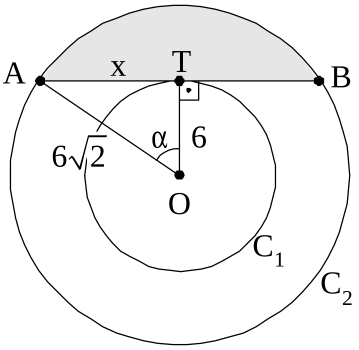
Assim, são verdadeiras apenas as afirmações I e II.

19. Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ mede, em cm^2,

A. ( ) $9(p - 3)$ B. ( ) $18(p + 3)$ C. ( ) $18(p - 2)$
D. ( ) $18(p + 2)$ E. ( ) $16(p + 3)$

Alternativa: C

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:



I. No Δ OAT temos: $x^2 + 6^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \therefore x = 6$ e $\alpha = 45°$

II. A área S (área hachurada) é dada por:

$$S = S_{\text{setor OAB}} - S_{\Delta\ \text{OAB}}$$

$$S = \frac{1}{4}\pi\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \frac{12 \cdot 6}{2} \Rightarrow \boxed{S = 18(\pi - 2)\,\text{cm}^2}$$

---

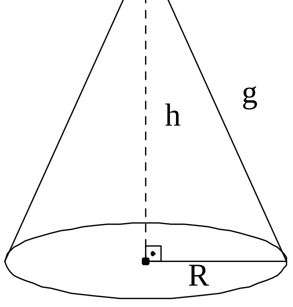
20. A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a

A. ( ) $p R^3$ B. ( ) $p\sqrt{2}R^3$ C. ( ) $\frac{p}{\sqrt{2}}R^3$

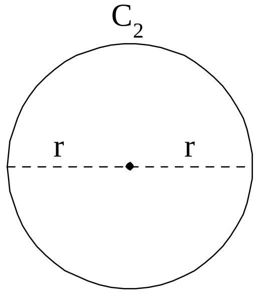
D. ( ) $p\sqrt{3}R^3$ E. ( ) $\frac{p}{\sqrt{3}}R^3$

Alternativa: E

Seja o cone e o círculo abaixo:



$A_T = \pi \cdot R^2 + \pi Rg$



com 2r = 2g + 2R

$\therefore$ r = g + R

Do enunciado segue que:

$$\pi R^2 + \pi R g = \frac{1}{3}\pi r^2 \Rightarrow \pi R\left(R+g\right) = \frac{1}{3}\pi\left(g+R\right)^2 \Rightarrow 3R = g + R \therefore\ g = 2R$$

$$g^2 = h^2 + R^2 \therefore \left(2R\right)^2 = h^2 + R^2 \therefore 3R^2 = h^2 \therefore h = R\sqrt{3}$$

Logo, o volume do cone é dado por: $V = \frac{1}{3}\pi\, R^2 (R\sqrt{3}) \therefore \boxed{V = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot R^3}$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21. Seja *A* um conjunto não vazio.

a) Se n(A) = m, calcule n(P(A)) em termos de m.

b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que n(A) = 2

Resolução:

a) n(A) = m

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$

Podemos formar $\binom{m}{p}$ subconjuntos de p elementos. Então:

$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + ... \binom{m}{m} = 2^m$. Portanto, temos 2^m subconjuntos. (Teorema da Linha).

Assim $\boxed{n(P(A)) = 2^m}$.

b) $P^1(A) = P(A)$

$P^{k+1}(A) = P(P^k(A)),\ k \geq 1$

Se $n(A) = 2 \Rightarrow n(P^1(A)) = n(P(A)) = 2^2 = 4$

$n(P^2(A)) = 2^4 = 16$

$n(P^3(A)) = 2^{16} = 65536$

Logo para que $n(P^k(A)) \geq 65000,$ então $\boxed{k_{mínimo} = 3}$.

---

22. Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

Resolução:

Do enunciado temos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{caixa}\\ \text{branca}\end{array}\right\}\begin{array}{l}5V\\ 3A\end{array} \quad \text{e} \quad \left.\begin{array}{l}\text{caixa}\\ \text{preta}\end{array}\right\}\begin{array}{l}3V\\ 2A\end{array}$$

- Para a escolha da caixa branca, de acordo com o enunciado: $\left.\begin{array}{c}(1, 2)\\ (1, 1)\\ (2, 1)\end{array}\right\}$ 3 elementos

- Analogamente, para a caixa preta: $\left.\begin{array}{c}(1, 3)\\ (1, 4)\\ \vdots\end{array}\right\}$ 33 elementos

A probabilidade pedida é dada por: $\underbrace{\dfrac{3}{36}}_{\text{caixa branca}} \cdot \underbrace{\dfrac{5}{8}}_{\text{bola verde}} + \underbrace{\dfrac{33}{36}}_{\text{caixa preta}} \cdot \underbrace{\dfrac{3}{5}}_{\text{bola verde}} = \boxed{\dfrac{289}{480}}$

---

23. Determine os valores reais do parâmetro *a* para os quais existe um número real *x* satisfazendo $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$.

Resolução:

Vamos admitir duas hipóteses para a resolução:

1º) $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ a - x \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq a \end{cases} \Rightarrow a \leq 1$

2º) $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ a - x \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq (a - x)^2 \end{cases} \sim \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq a \\ 2x^2 - 2ax + (a^2 - 1) \leq 0 \quad \text{(I)} \end{cases}$

Na inequação (I) devemos ter $\Delta \geq 0 \therefore 4a^2 - 8(a^2 - 1) \geq 0 \therefore 8 - 4a^2 \geq 0 \therefore -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

Basta garantir que pelo menos uma raiz está no intervalo [–1; 1]

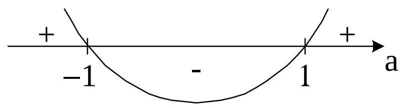
$2 \cdot f(1) = 2(2 - 2a + a^2 - 1) = 2 \cdot (a - 1)^2 \geq 0$ 1 está fora do intervalo das raízes

$2 \cdot f(-1) = 2(2 + 2a + a^2 - 1) = 2 \cdot (a + 1)^2 \geq 0$ –1 está fora do intervalo das raízes

Precisamos garantir $x_{1;2} \leq a$

$2 \cdot f(a) = 2(2a^2 - 2a^2 + a^2 - 1) = 2 \cdot (a^2 - 1)$

a está entre as raízes pelo menos para $-1 \leq a \leq 1$



Assim no 2º caso temos: $-1 \leq a \leq \sqrt{2}$

Fazendo a união das soluções temos: $]-\infty; 1] \cup [-1; \sqrt{2}\,] = \boxed{]-\infty; \sqrt{2}\,]}$

24. Sendo $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}\right|$.

Resolução:

Os números z, z^2, z^3 ... z^{60} formam uma PG com 60 termos e razão z. Assim:

$$\left|z^1 + z^2 + z^3 + ... + z^{60}\right| = \left|\frac{z \cdot (z^{60}-1)}{z-1}\right| = \frac{|z|}{|z-1|}.\left|z^{60}-1\right|$$

Como $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ou, na forma trigonométrica, cis 45º, então:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$|z-1| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\left|z^{60}-1\right| = \left|(\text{cis}45^\circ)^{60}-1\right| = \left|\text{cis}(45^\circ \cdot 60) - 1\right| = \left|\text{cis}(2700^\circ)-1\right| = \left|\text{cis}(180^\circ)-1\right| =$$
$$= \left|\cos 180^\circ + i\,\text{sen}180^\circ - 1\right| = \left|-1+0-1\right| = |-2| = 2$$

Substituindo temos: $\dfrac{|z|}{|z-1|}\cdot\left|z^{60}-1\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot 2 = \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Portanto: $\boxed{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

---

25. Para b > 1 e x > 0, resolva a equação em $x: (2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

Resolução:

$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0 \;\therefore\; (2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$

Como b > 1, temos: $\log_b (2x)^{\log_b 2} = \log_b (3x)^{\log_b 3} \therefore \log_b 2 \cdot \log_b (2x) = \log_b 3.\log_b (3x) \therefore$

$\log_b 2 \cdot (\log_b 2 + \log_b x) = \log_b 3 \cdot (\log_b 3 + \log_b x) \;\therefore\; (\log_b 2)^2 + \log_b 2 \cdot \log_b x = (\log_b 3)^2 + \log_b 3.\log_b x$

$(\log_b 2 - \log_b 3) \cdot \log_b x = (\log_b 3)^2 - (\log_b 2)^2 \therefore (\log_b 2 - \log_b 3)\cdot \log_b x = (\log_b 3 - \log_b 2).(\log_b 3 + \log_b 2)$

$\therefore \log_b x = -(\log_b 3 + \log_b 2) \therefore \log_b x = -\log_b 6 \therefore \log_b x = \log_b \left(\dfrac{1}{6}\right) \therefore x = \dfrac{1}{6}$

Assim, $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}}$

26. Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que *d* é uma constante real. Para qual valor de *d* a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0,1[$?

Resolução:

Seja α a raiz dupla da equação tal que $\alpha \in\ ]0,1[$. O polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + d$ é divisível por $(x - \alpha)^2$, assim:

α	1	3	-2	d
α	1	$\alpha + 3$	$\alpha^2 + 3\alpha - 2$	$\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha + d$
	1	$2\alpha + 3$	$3\alpha^2 + 6\alpha - 2$	

$$3\alpha^2 + 6\alpha - 2 = 0 \therefore \alpha = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{60}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

A raiz $\alpha = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3} \in\ ]0,1[$, então é a raiz dupla.

O último quociente $x + (2\alpha + 3)$ “carrega” a terceira raiz.

$$x_3 = -2\alpha - 3 = -2\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) - 3 = -1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

O termo independente d é tal que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d$. Logo:

$$\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) \cdot \left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) \cdot \left(-1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = -d \Rightarrow d = \left(\frac{\sqrt{15}}{3} - 1\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) \Rightarrow \boxed{d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}}$$

---

27. Prove que, se os ângulos internos a, b ou g de um triângulo satisfazem a equação

$$\text{sen}(3a) + \text{sen}(3b) + \text{sen}(3g) = 0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos a, b ou g é igual a 60º.

Resolução:

$\alpha + \beta = \pi - \gamma$

$\text{sen}3\alpha + \text{sen}3\beta = -\ \text{sen}3\gamma$

$$2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) = -\text{sen}3\gamma \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi - 3\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) = -\text{sen}3\gamma \Rightarrow$$

$$2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) = -\text{sen}3\gamma \Rightarrow -2 \cdot \cos\frac{3\gamma}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) = -\text{sen}3\gamma \Rightarrow$$

$$-2 \cdot \cos\frac{3\gamma}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + 2\text{sen}\frac{3\gamma}{2}.\cos\frac{3\gamma}{2} = 0 \Rightarrow -2 \cdot \cos\frac{3\gamma}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) - \text{sen}\frac{3\gamma}{2}\right] = 0$$

I) $\cos\frac{3\gamma}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

com $k = 0 \Rightarrow \gamma = 60°$

II) $\left[\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right)-\text{sen}\,\frac{3\gamma}{2}\right]=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0 \Rightarrow$

$2.\cos\frac{3\alpha}{2}.\cos\frac{3\beta}{2}=0 \Rightarrow \cos\frac{3\alpha}{2}=0 \text{ ou } \cos\frac{3\beta}{2}=0$

Segue analogamente a (I) que α = 60º ou β = 60º

Portanto, de (I) e (II):

$\boxed{\gamma = 60^{\circ} \text{ ou } \beta = 60^{\circ} \text{ ou } \alpha = 60^{\circ}}$

---

28. Se A é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.
II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo i, j = 1, …, n. com i ≠ j.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

Resolução:

Seja a matriz M_{3x3} ortogonal e diagonal. Então temos:

$$M=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{(pois M é diagonal)}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{abc}\cdot\begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix} \quad \text{com } abc \neq 0$$

$$\therefore\ M^{-1}=\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^T=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Como M é ortogonal, teremos $M^{-1} = M^T$, isto é, $\begin{cases} a^{-1}=a \\ b^{-1}=b \\ c^{-1}=c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=\pm 1 \\ b=\pm 1 \\ c=\pm 1 \end{matrix}$

Assim todas matrizes são:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

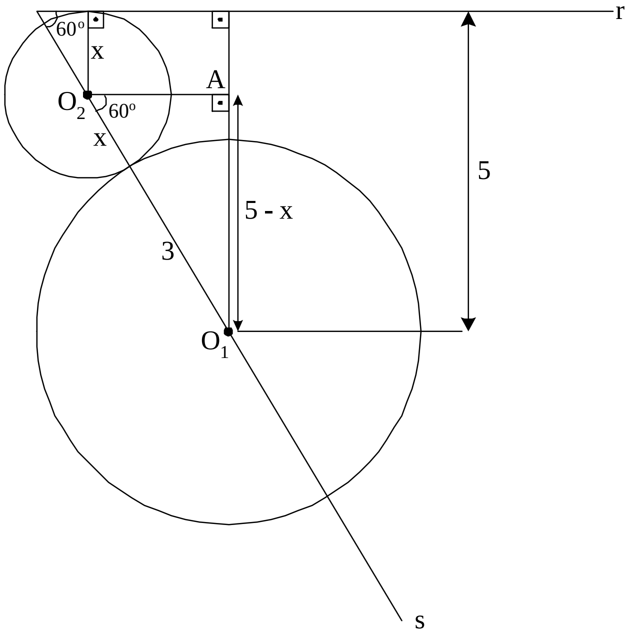
$$M_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

29. Sejam *r* e *s* duas retas que se interceptam segundo um ângulo de 60º. Seja C_1 uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro O se situa em *s*, a 5 cm de *r*. Determine o raio da menor circunferência tangente à C_1 e à reta *r*, cujo centro também se situa na reta *s*.

Resolução:

Do texto tiramos o desenho a seguir:



Por O_2 traçamos uma paralela a r e obtemos o ΔO_1O_2A. Assim $\text{sen}60^\circ = \dfrac{5-x}{x+3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5-x}{x+3} \Rightarrow \sqrt{3}\,x + 3\sqrt{3} = 10 - 2x \Rightarrow (\sqrt{3}+2)x = 10 - 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{10-3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{20 - 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 9}{4-3} \quad \therefore \quad \boxed{\text{raio} = \left(29 - 16\sqrt{3}\right)\ \text{cm}}$$

30. Sejam os pontos $A:(2,0)$, $B:(4,0)$ e $P:\left(3,5+2\sqrt{2}\right)$.

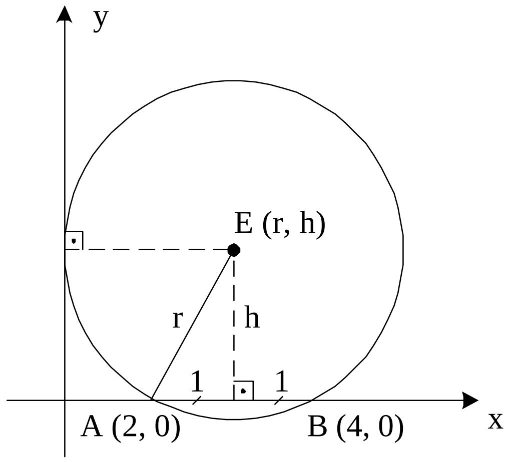
a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos *A* e *B* e é tangente ao eixo *y*.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência *C* que passam pelo ponto *P*.

Resolução:

Do enunciado, temos a circunferência C de centro E(r, h) abaixo:

a)



Assim:

$h^2 + 1 = r^2$ (I) e

$d_{EA}{}^2 = d_{EB}{}^2 \Rightarrow (r-2)^2 + h^2 = (r-4)^2 + h^2 \therefore r = 3$

Substituindo em (I) vem $h = 2\sqrt{2}$

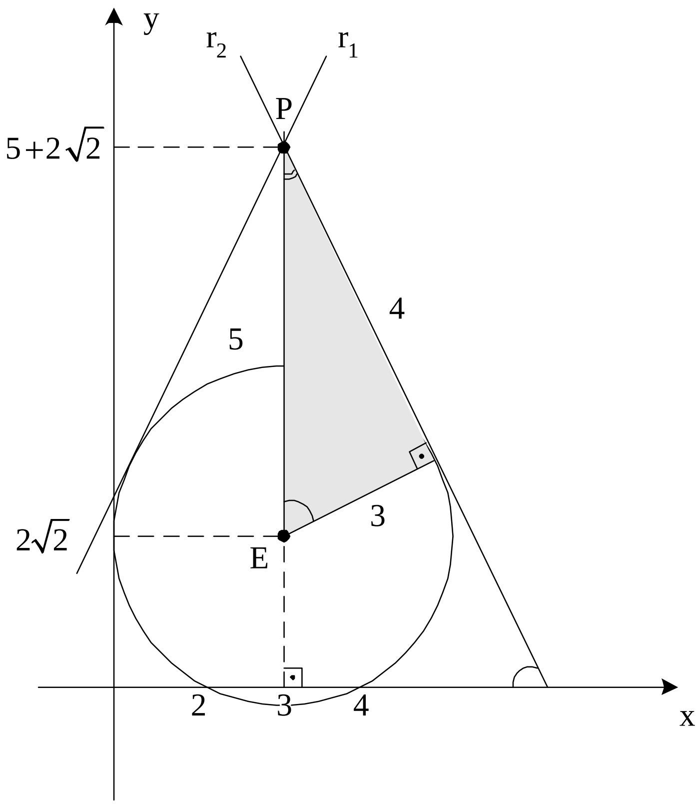
(no 1º quadrante)

Logo, a equação da circunferência é:

$$\boxed{(x-3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9}$$

b) As retas tangentes à circunferência que passam por $P\left(3,5+2\sqrt{2}\right)$ têm equação:

$$y - 5 - 2\sqrt{2} = m(x-3)$$



Da figura ao lado temos no triângulo pitagórico:

$$m = \pm\frac{4}{3}$$

Assim as equações das tangentes são:

$$\boxed{(y - 5 - 2\sqrt{2}) = \pm\frac{4}{3}(x-3)}$$

Comentários

Uma prova abrangente, com enunciados claros e precisos. Rompendo com a tradicional prova trabalhosa, o ITA, neste ano, apresenta uma prova com questões mais imediatas, que nem por isso deixaram de verificar o conhecimento básico dos alunos.

É também, a primeira vez, que aparece uma questão de Probabilidade.

Professores responsáveis:
Alex Sander Schroeder de Barros
Daniel Demétrio
Émerson de Maria
Henrique Ferreira
Umberto César Chacon Malanga

Coordenação:
Alex Sander Schroeder de Barros
André Oliveira de Guadalupe
Nicolau Arbex Sarkis

Digitação e diagramação:
Anderson Flávio Correia
Antonio José Domingues da Silva
Kleber de Souza Portela
Marcio Antonio Ferreira Lima