OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível Júnior (5^o ano do ensino fundamental)

1. Melhor aluno de Matemática da turma, Marquinhos resolveu inventar uma operação a partir das operações básicas. Ele utilizou o símbolo $\star$ para representar a nova operação.
   Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} 5 \star 4 &= 5^2 + 4^2 - 5 \times 4 + 5 - 4 \\ &= 25 + 16 - 20 + 5 - 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

   Seguindo o modelo acima, encontre o valor de

   (a) $7 \star 3$.

   (b) $10 \star (2 \star 1)$.

2. Um funcionário de uma empresa trabalha de segunda a sábado, das 7h30min às 12h. Também trabalha no turno da tarde, de segunda à sexta, das 13h às 18h. Ele recebe R$ 12,00 por hora, até 40 horas semanais de trabalho. Pelas demais horas de trabalho semanais, recebe R$ 15,00 por hora. Considerando que o mês tenha quatro semanas, qual será o salário mensal desse funcionário?

3. Observe a lei de formação usada para construir a sequência nas malhas quadriculadas abaixo:

1	2
3	4

1^a fig

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2^a fig

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

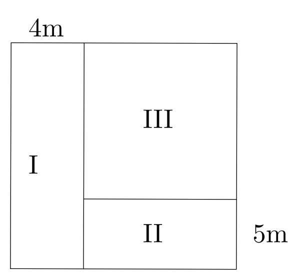
3^a fig

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

4^a fig

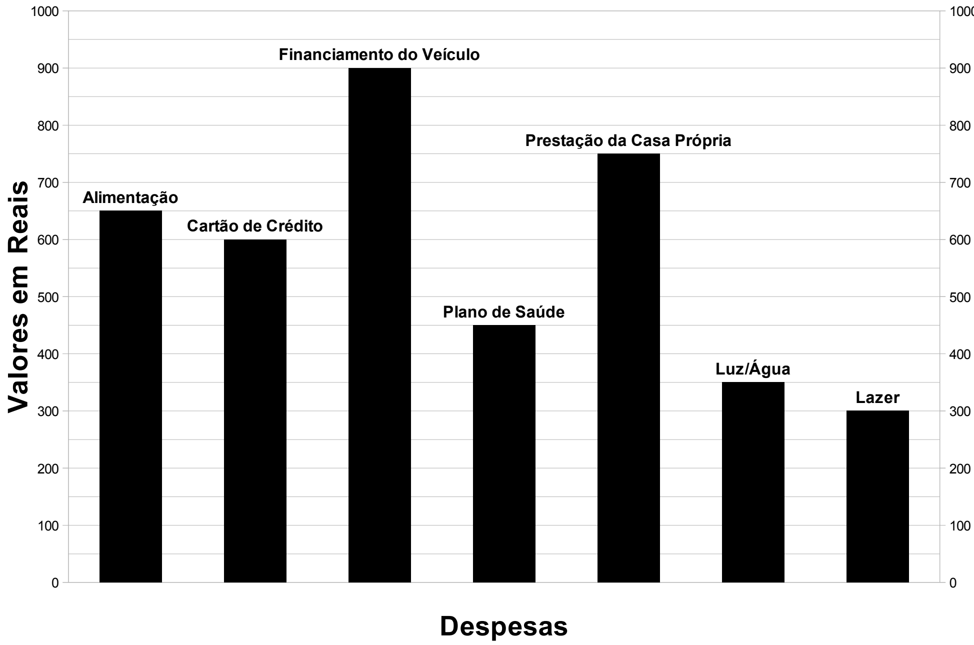
   Seguindo o padrão desta lei, em que figura, em qual linha e em qual coluna aparecerá o número 87 pela 1ª vez?

4. Um jovem fazendeiro dividiu seu terreno em forma de um quadrado em três partes:



   Qual a área do terreno III, conhecendo-se uma das dimensões do terreno I e uma do terreno II e sabendo-se que a área do terreno I é $60m^2$?

5. O gráfico a seguir indica as despesas da família de Matheus, neste mês. Para o próximo mês ele não fará novas dívidas, reduzirá à metade suas despesas com o cartão de crédito e não terá mais a despesa com o financiamento do veículo.

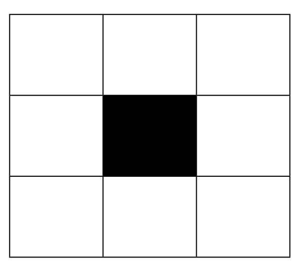


Considerando que o valor das demais despesas não se altera, responda os itens a seguir:

(a) Qual o total a ser pago por Matheus no próximo mês?

(b) De quantos por cento diminui o valor total?

6. Considere o tabuleiro abaixo sem a casa central. Reproduza , na sua folha de soluções, um tabuleiro igual e preencha-o com os números de 1 a 8, de forma que as somas de 3 números alinhados sejam todas iguais.



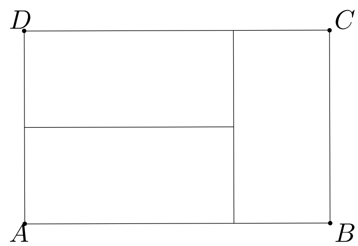
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 1 (6^o e 7^o anos do ensino fundamental)

Parte A

1. Com três retângulos iguais se formou um retângulo maior, como mostra a figura abaixo. Se a medida BC é igual a $4cm$, qual o perímetro de $ABCD$?



2. Melhor aluno de Matemática da turma, Marquinhos resolveu inventar uma operação a partir das operações básicas. Ele utilizou o símbolo $\star$ para representar a nova operação.
Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} 5 \star 4 &= 5^2 + 4^2 - 5 \times 4 + 5 - 4 \\ &= 25 + 16 - 20 + 5 - 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

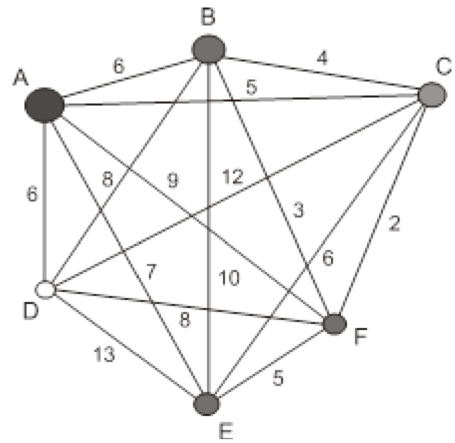
Seguindo o modelo acima, encontre o valor de $10 \star (2 \star 1)$.

3. Brincando com seu netinho, o matemático Fred G. Ninho desenhou vários grupos de números em forma de diamante, conforme mostram os seguintes exemplos:

$$\left| \begin{array}{c} 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array} \right|$$

Muito observador, o netinho de G. Ninho falou para seu avô qual era a soma de todos os números do 13° grupo . Qual foi a soma encontrada por ele?

4. Rafaelito Galvón, entregador de pizzas da Mainha Mia, única pizzaria da pequena cidade de Tribobó do Norte, representada pelo ponto A do mapa, fará cinco entregas representadas pelos demais pontos e em seguida voltará para a pizzaria no ponto A. Os valores entre os pontos representam o tempo de viagem que o motoboy gasta para fazer cada um dos percursos, devido ao trânsito, estado de conservação da rua e outros fatores. Tais tempos não estão necessariamente ligados à distância e, como ele precisa fazer o percurso no menor tempo possível, faz o planejamento da viagem antes de sair da pizzaria. Percebendo que o trajeto ABCDEFA, não diferencia em nada de seu simétrico AFEDCBA, o motoboy leva 40 segundos para analisar cada trajeto e descartar seu simétrico. Qual o tempo mínimo, em minutos, para o motoboy analisar todos os possíveis trajetos?

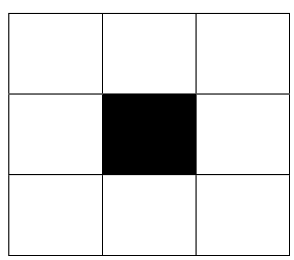


Parte B

5. O caminhoneiro Riveloz Lee Geiro viaja por todo Nordeste do Brasil e ganha por viagem, só podendo viajar a cada 4 dias, pois é o tempo que leva para fazer a entrega e voltar para a base. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1^o a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.
   Se Paulino quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

6. Joãozinho Tigre, técnico do time de vôlei Arretados do Cangaço, calculou a média das idades dos seis jogadores titulares de seu time de vôlei e encontrou 27 anos e, em seguida, concluiu que a média das idades dos seis jogadores reservas era 24 anos. Devido a uma contusão, um dos jogadores titulares foi afastado da equipe por Joãozinho. Com isso, um dos reservas assumiu seu lugar no sexteto titular, ficando a equipe com apenas cinco reservas. Após a substituição, a média das idades dos titulares caiu para 26 anos, enquanto a dos reservas subiu para $24,8$ anos. Qual a idade do jogador que foi afastado por contusão?

7. Considere o tabuleiro abaixo sem a casa central. Reproduza, na sua folha de soluções, um tabuleiro igual e preencha-o com os números de 1 a 8, de forma que as somas de 3 números alinhados sejam todas iguais.



8. Para receber a visita de seus netos, a cientista Ângela Poo Eira resolveu preparar uma deliciosa laranjada. Inicialmente, ela encheu uma jarra de água. Retirou $\frac{1}{10}$ da água e completou com o suco puro de laranja. Ela achou que a laranjada ainda estava fraca e retirou mais $\frac{1}{10}$ do conteúdo da jarra, completando com suco puro de laranja. Por fim, repetiu essa troca novamente, isto é, retirou $\frac{1}{10}$ da última mistura e completou com o suco puro de laranja. Qual é a fração que representa a quantidade de suco puro de laranja que ficou na jarra?

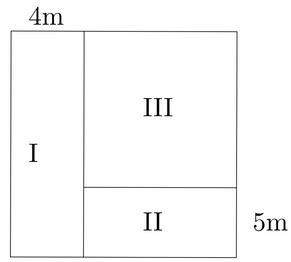
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 2 (8^o e 9^o anos do ensino fundamental)

Parte A

1. Um jovem fazendeiro dividiu seu terreno em forma de um quadrado em três partes:



Qual a área do terreno III, conhecendo-se uma das dimensões do terreno I e uma do terreno II e sabendo-se que a área do terreno I é $60m^2$?

2. Um quadrado mágico de ordem n é um certo arranjo dos números inteiros

$$1; 2; 3; \cdots n-1; n; n+1; \cdots ; n^2-2; n^2-1; n^2.$$

dispostos numa tabela quadrada, em que todas as linhas e colunas tem a mesma soma. Essa soma é conhecida como constante mágica. São quadrados mágicos, de ordem 3, 4 e 5 respectivamente, as tabelas

2	7	6
9	5	1
4	3	8

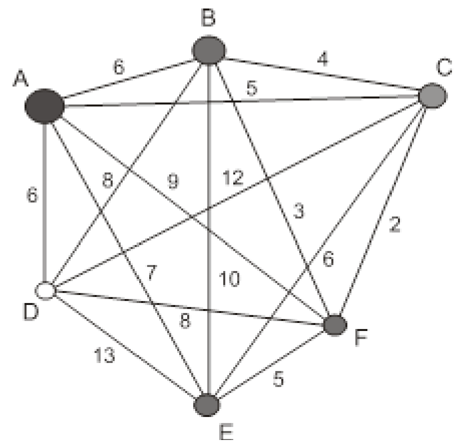
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

1	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

cujas constantes mágicas são, respectivamente, 15, 34 e 65. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico de ordem 6.

3. O professor Frederico é um grande torcedor do Sofredor Football Club e viu seu time vencer o campeonato nacional por quatro vezes. Seu amigo 37 anos mais jovem, o professor Barbosa, é bem mais contente torcendo pelo Vitorioso Futebol e Regatas, embora só tenha visto a conquista de um dos dois campeonatos nacionais vencidos pelo seu time. Como o campeonato nacional sempre termina depois que os dois já fizeram aniversário, Frederico viu seu time ser campeão pela primeira vez quando tinha 23 anos. Por outro lado, Barbosa viu o Vitorioso ser campeão aos 11 anos de idade (por isso ele é mais contente). O Sofredor venceu pela segunda vez no ano em que Barbosa nasceu e pela quarta vez 42 anos depois do primeiro tétulo. Entre os dois primeiros tétulos do Sofredor, o número de anos decorridos foi sete vezes maior que o intervalo de anos entre os dois últimos títulos. Em 2013 completa 21 anos que Barbosa viu o título do Vitorioso. Em quais anos Frederico viu o Sofredor Football Club vencer o campeonato nacional?

4. Rafaelito Galvón, entregador de pizzas da Mainha Mia, única pizzaria da pequena cidade de Tribobó do Norte, representada pelo ponto A do mapa, fará cinco entregas representadas pelos demais pontos e em seguida voltará para a pizzaria no ponto A. Os valores entre os pontos representam o tempo de viagem que o motoboy gasta para fazer cada um dos percursos, devido ao trânsito, estado de conservação da rua e outros fatores. Tais tempos não estão necessariamente ligados à distância e, como ele precisa fazer o percurso no menor tempo possível, faz o planejamento da viagem antes de sair da pizzaria. Percebendo que o trajeto ABCDEFA, não diferencia em nada de seu simétrico AFEDCBA, o motoboy leva 40 segundos para analisar cada trajeto e descartar seu simétrico. Qual o tempo mínimo, em minutos, para o motoboy analisar todos os possíveis trajetos?

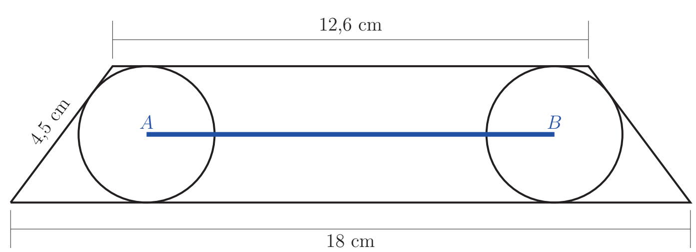


Parte B

5. Um certo time de futebol entra em campo com os jogadores usando camisas numeradas sequencialmente entre 1 e 11. Um jogador é expulso durante a partida, de forma que a média aritimética dos números das camisas dos jogadores restantes é aumentada em $\frac{3}{10}$. Qual o número do jogador que foi expulso?

6. No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser só toma uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo retorne a seu tamanho original, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira?

7. Considere um trapézio isósceles e duas circunferências como ilustrado na figura abaixo. Encontre o comprimento do segmento AB que liga os centros das circunferências.



8. Encontre todos os números inteiros $n \geq 2$ tais que $n^3 + n^2 + n - 3$ é um número primo.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. Encontre três números primos distintos dois a dois tais que sua soma e a soma dos seus quadrados são números primos também.

2. No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser toma exatamente uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo que acabou de chegar, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira, retorne a seu tamanho original?

3. Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C, de modo que $\overline{BC} < \overline{AB}$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.

   (a) Calcule a razão $\frac{EF}{AG}$.

   (b) Calcule a soma de ângulos $B\hat{A}G + G\hat{F}E$.

   (c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.

4. Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com 0 e 1 de modo que a soma em cada linha e cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5.

5. Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertamos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora qual número aparecerá após apertamos 2013 vezes seu botão.

6. Dois números a e b são ditos parceiros se a e b possuem os mesmo fatores primos. Por exemplo, 15 e 375 são parceiros, mas 35 e 70 não são. Provar que existem infinitos pares de inteiros positivos distintos m e n tais que as duas condições a seguir são satisfeitas:

   (i) m e n são parceiros

   (ii) $m + 1$ e $n + 1$ são parceiros

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Dado um número n natural, fazemos uma diamante com os números 1, 2, $\ldots$, $2n-1$ do seguinte modo, na primeira linha aparece um número 1, na segunda aparecem dois números 2, e assim por diante até que na n-ésima linha aparecem n números n, já na $n+1$-ésima linha aparecem $n-1$ números $n+1$, até que na $2n-1$-ésima linha aparece um número $2n-1$. Abaixo temos exemplos de diamantes para $n = 1, 2, 3, 4$.

$$
\left|\begin{array}{c} 1 \end{array}\right|
\quad
\left|\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array}\right|
\quad
\left|\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array}\right|
\quad
\left|\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}\right|
$$

Qual a soma de todos os elementos no n-ésimo diamante?

2. Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C, de modo que $\overline{BC} < \overline{AB}$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.

   (a) Calcule a razão $\frac{EF}{AG}$.

   (b) Calcule a soma de ângulos $B\hat{A}G + G\hat{F}E$.

   (c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.

3. Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com 0 e 1 de modo que a soma em cada linha e cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5.

4. Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertamos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora qual número aparecerá após apertamos 2013 vezes seu botão.

5. Um inteiro é dito sinistro se pode ser escrito na forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, com x, y, z inteiros. Determine a quantidade de números sinistro existentes de 1 a 2013.

6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

   para todos números inteiros x e y.