SUMÁRIO

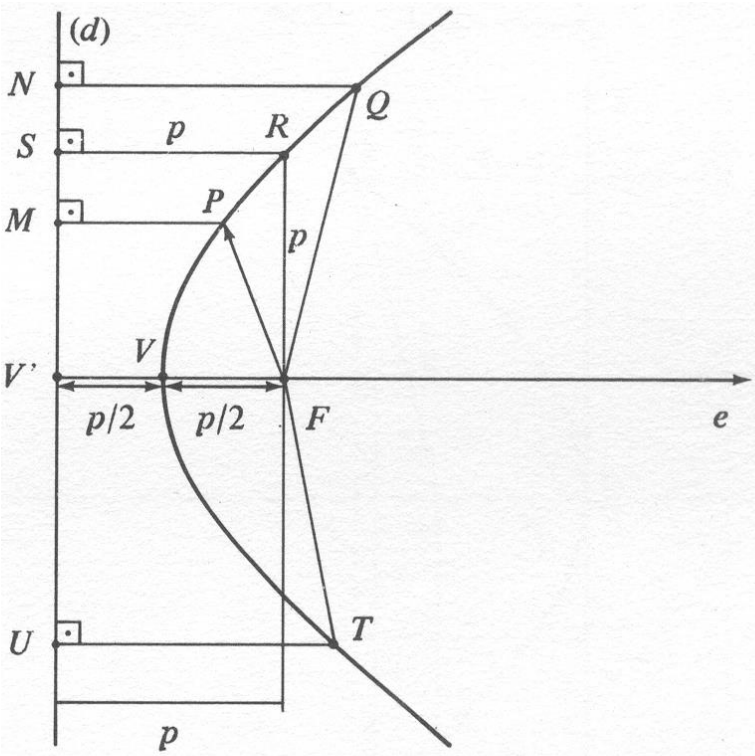
1. PARÁBOLA

1.1 DEFINIÇÃO

A parábola é o lugar dos geométricos dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa do mesmo plano. O ponto fixo denomina-se foco (F) e a reta fixa, diretriz (d).

Definição geométrica: é a cônica obtida mediante a secção de um plano secante a um cone quadrático, sendo o plano paralelo a uma e somente uma geratriz do cone.

1.2 ELEMENTOS DA PARÁBOLA



I) Pontos principais:

F – foco
V – vértice

II) Segmentos:

V'F = p – parâmetro (semi corda focal mínima)
$\overrightarrow{FP}$ – raio vetor

III) Relação:

$$VF = \frac{p}{2}$$

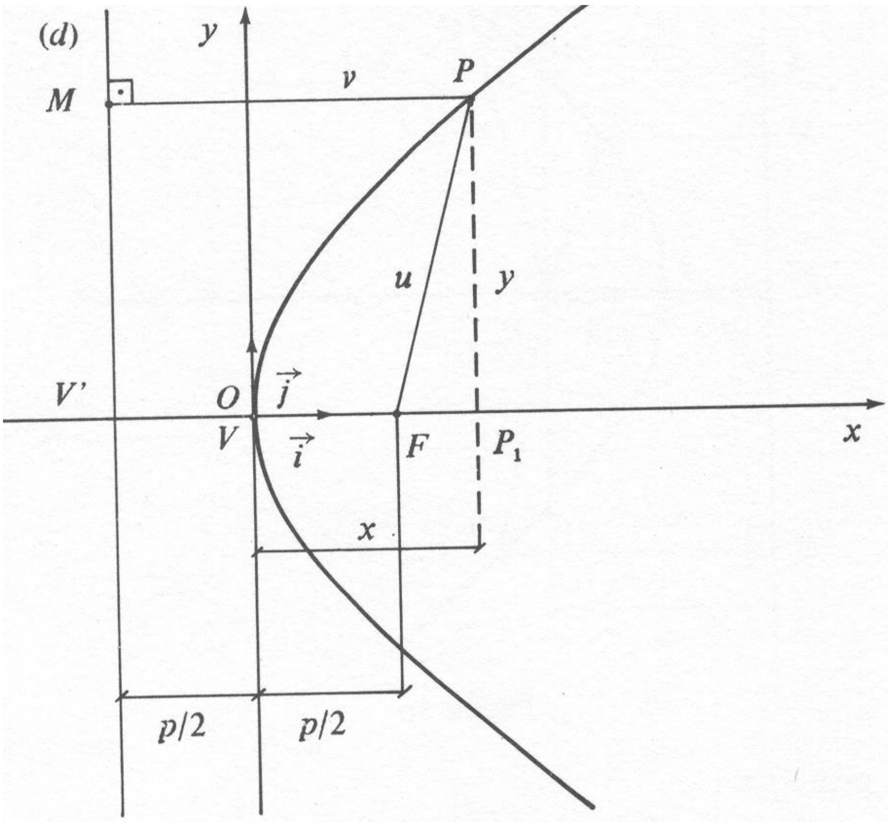
IV) Reta e eixo: A reta fixa (d) é a diretriz e **e**, eixo que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz, eixo de simetria da parábola.

2. EQUAÇÕES

Equação espontânea. No sistema foco-diretriz a equação espontânea da parábola é:

De acordo com a definição, temos:

$$|\overline{FP}| = |\overline{MP}| \Leftrightarrow u = v \quad (1)$$



I) Equação reduzida: O ponto F tem coordenadas $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Calculemos u e v

$$u = d_{FP} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad e \quad v = \frac{p}{2} + x$$

Igualando, conforme (1), vem:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Discutamos essa equação:

i) Interseções

Para x = 0, y = 0. A curva representativa de (2) passa pela origem.

ii) Simetria

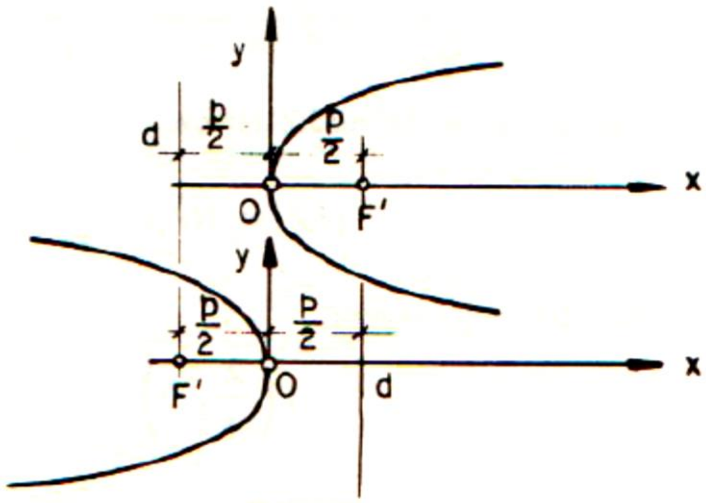
Trata-se de uma curva simétrica apenas em relação ao eixo x.

iii) Extensão

Resolvendo a equação (2) em relação a y, vem:

$$y = +\sqrt{2px}$$

Onde se conclui: se p > 0, não há valores reais de y para x < 0; se p < 0, não há valores reais de y para x > 0. A valores acrescentes de x, em valor absoluto, correspondem valores crescentes de y. Se x tende para ∞, y tende para ∞. A curva é aberta, estendendo-se indefinidamente no plano dos eixos coordenados, à direita do eixo y para p > 0 e à esquerda desse eixo para p < 0.



Equação da diretriz $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$

PROBIZU

Imagem geométrica

Conclui-se por essa discussão que a cônica de equação (2) é uma parábola de eixo horizontal coincidente com o eixo x e vértice na origem, tendo a concavidade voltada para a direita se $p > 0$ e para a esquerda se $p < 0$.

II) Se V = 0 e o eixo de simetria coincidir com o eixo dos y

As coordenadas do foco passam a ser $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$, então a equação da parábola toma a forma

$\boxed{x^2 = 2py}$

e a da diretriz

$\boxed{y = -\frac{p}{2}}$

III) Quando a parábola tem V(m, n), portanto, $V \neq 0$ e o eixo de simetria paralelo ao eixo 0x, vem:

$\boxed{(y')^2 = 2px'}$

e aplicando a translação de eixos de I resulta:

$(y - n)^2 = 2p(x - m)$ ou $(y - n)^2 = -2p(x - m)$

IV) Equação geral: A equação geral é obtida, como vimos, desenvolvendo as reduzidas. Assim: $(y - n)^2 = 2p(x - m)$, parábola com eixo horizontal,

$y^2 - 2ny + n^2 = 2px - 2mp \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{n}{p}y + \frac{n^2 + 2mp}{2p}} \qquad (1)$$

Se $\frac{1}{2p} > 0$, concavidade à direita e $\frac{1}{2p} < 0$, concavidade à esquerda.

De $(x - m)^2 = 2p(y - n)$, parábola com eixo vertical,

$x^2 - 2mx + m^2 = 2py - 2np \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{m}{p}x + \frac{m^2 + 2np}{2p}} \qquad (2)$$

Se $\frac{1}{2p} > 0$, concavidade para cima e $\frac{1}{2p} < 0$, concavidade para baixo.

Uma equação do 2º grau com duas variáveis representa uma parábola com eixo horizontal ou vertical se, e somente se, for redutível às formas

$$x = ay^2 + by + c, \quad \text{com} \quad a \neq 0 \quad (3)$$
ou
$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{com} \quad a \neq 0 \quad (4)$$

Comparando (1) e (3)

$$a = \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2a}$$

$$b = -\frac{n}{p} \Rightarrow n = -bp \Rightarrow n = -\frac{b}{2a}$$

$$c = \frac{n^2 + 2mp}{2p} \Rightarrow 2cp = n^2 + 2mp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{m}{a} \Rightarrow m = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ ou } m = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

então, o vértice é $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ e o parâmetro $p = \frac{1}{2a}$.

De modo análogo, comparando (2) e (4), concluímos que o vértice é $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e o parâmetro $p = \frac{1}{2a}$.

CÔNICAS - RESUMO TEÓRICO

DEFINIÇÕES	
ELIPSE	Dados dos pontos F_1 e F_2 distantes 2c. Uma elipse de focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante 2a, com 2a > 2c.
HIPÉRBOLE	Dados dos pontos F_1 e F_2 distantes 2c. Uma hipérbole de focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é constante 2a, com 2a < 2c.
PARÁBOLA	Dados um ponto F e uma reta d ($F \notin d$) e p a distância entre eles. Parábola é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de F e d.

ELEMENTOS PRINCIPAIS:			
ELIPSE			
F_1 e F_2 → focos	A_1A_2 → eixo maior (2a)	2c → distância focal	
O → centro	B_1B_2 → eixo menor (2b)	c/a → excentricidade	
HIPÉRBOLE			
F_1 e F_2 → focos	A_1A_2 → eixo real (2a)	2c → distância focal	
O → centro	B_1B_2 → eixo transverso (2b)	c/a → excentricidade	
PARÁBOLA			
F → foco	d → diretriz	p → parâmetro	V → vértice

RELAÇÕES NOTÁVEIS:		
ELIPSE	**HIPÉRBOLE**	**PARÁBOLA**
$a^2 = b^2 + c^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	$VF = \frac{p}{2}$

EQUAÇÕES REDUZIDAS	
ELIPSE	
Focos em Ox (-c,0) e (c,0)	Focos em Oy (0,-c) e (0,c)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
HIPÉRBOLE	
Focos em Ox (-c,0) e (c,0)	Focos em Oy (0,-c) e (0,c)
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
PARÁBOLA	
Foco em Ox (p/2,0)	Foco em Oy (0,p/2)
$y^2 = 2px$	**$x^2 = 2py$**

EQUAÇÕES REDUZIDAS – CENTRO EM (X_O,Y_O)	
ELIPSE	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$
HIPÉRBOLE	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$
PARÁBOLA - Equação Reduzida – vértice em (x_o,y_o)	
$(y - y_0)^2 = 2p.(x - x_0)$	$(x - x_0)^2 = 2p.(y - y_0)$

RECONHECIMENTO DE UMA CÔNICA	
Dada uma equação do 2º grau redutível à forma $\frac{(x-x_0)^2}{k_1}+\frac{(y-y_0)^2}{k_2}=1$	
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1>k_2$	elipse de eixo maior horizontal
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1<k_2$	elipse de eixo maior vertical
$k_1>0$ e $k_2<0$	hipérbole de eixo real horizontal
$k_1<0$ e $k_2>0$	hipérbole de eixo real vertical’

Parábolas - $p = 1/4\|a\|$	
$y = ax^2 + bx + c$ diretriz horizontal	**$x = ay^2 + by + c$** diretriz vertical
$x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$	$x_v = \frac{-\Delta}{4a}$ e $y_v = \frac{-b}{2a}$
$a > 0 \rightarrow$ conc. p/ cima $a < 0 \rightarrow$ conc. p/ baixo	$a > 0 \rightarrow$ conc. p/ direita $a < 0 \rightarrow$ conc. p/ esquerda

Rotação de eixos	
As coordenadas de um ponto P(x,y) após a rotação de eixos de um ângulo θ são dadas por (x\`,y\`) tais que	
$x = x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\theta$	**$y = x'.\text{sen}\theta + y'.\cos\theta$**

Interpretação de uma equação do 2º grau	
Dada a eq. geral do 2º grau **$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$** é sempre possível eliminar o seu termo retângulo (2Bxy) através de um rotação de eixos de um ângulo θ tal que	
$A = C \rightarrow \theta = \pi / 4$	**$A \neq C \rightarrow \text{tg } 2\theta = 2B/(A - C)$**

1. (ESPCEX 2015) Uma reta t passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é tangente à parábola de equação $x=3y^2$ no ponto P.

Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

a) $t: x-10y+3=0$ e $P(27,3)$

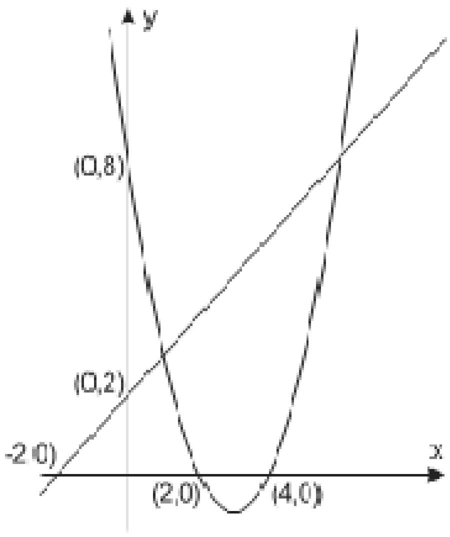
b) $t: 2x-15y+6=0$ e $P(12,2)$

c) $t: 2x-15y+6=0$ e $P(12,-2)$

d) $t: y=0$ e $P(0,0)$

e) $t: x+6y+3=0$ e $P(3,-1)$

2. (PUC-RJ 2015) A figura abaixo mostra uma reta e uma parábola de eixo vertical.



a) Sabendo que a reta corta os eixos nos pontos (-2, 0) e (0, 2), encontre a equação da reta.
b) Sabendo que a parábola corta os eixos nos pontos (0, 8), (2, 0) e (4, 0), encontre a equação da parábola.
c) Encontre os pontos de interseção entre a reta e a parábola.

3**.** (ITA 2013) Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.

b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.

d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.

e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

4**.** (Esc. Naval 2012) Considere a sequência (a,b,2) uma progressão aritmética e a sequência (b,a,2) uma progressão geométrica não constante, $a,b \in \mathbb{R}$. A equação da reta que passa pelo ponto (a,b) e pelo vértice da curva $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ é

a) $6y - x - 4 = 0$

b) $2x - 4y - 1 = 0$

c) $2x - 4y + 1 = 0$

d) $x + 2y = 0$

e) $x - 2y = 0$

5. Determine o vértice, o parâmetro, o foco e a equação da diretriz da parábola $y = x^2 - 6x + 8$.

6. O foco de uma parábola é o ponto F(4, 3) e sua diretriz é a reta x=2. Determine sua equação reduzida.

7. Determine a equação da parábola de vértice (6, -2), cujo eixo é y + 2 = 0 e que passa pelo ponto (8, 2).

8. Uma parábola tem o eixo de simetria vertical e passa pelos pontos (-2, 0), (6, 0) e (2, -4), determine: sua equação, seu vértice e seu parâmetro.

9. Determine as equações das tangentes à parábola $x = -y^2$ conduzidas pelo ponto P(5, 0).

10. (ITA) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere a família de circunferências que passam pelo ponto (2, -1/2) e que são tangenciadas pela reta y = -3/2. Então, a equação do lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dada por:

a) $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$

b) $y^2 - 2y - 5x - 2 = 0$

c) $x^2 + 2x - 7y + 3 = 0$

d) $y^2 - 4y - 2x - 3 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$

11. O foco de uma parábola é o ponto F(4, 3) e sua diretriz é a reta x=2. Determine sua equação reduzida e suas equações paramétricas.

12. (ITA 96) São dadas as parábolas p_1: $y = -x^2 - 4x - 1$ e p_2: $x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até a origem é:

a) $\frac{5}{\sqrt{26}}$

b) $\frac{7}{\sqrt{26}}$

c) $\frac{7}{\sqrt{50}}$

d) $\frac{17}{\sqrt{50}}$

e) $\frac{11}{\sqrt{74}}$

13. (ITA 98) Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente, $5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20$ e $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$. Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

a) A elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$

b) A hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$

c) O par de retas dadas por $y = \pm (3x - 1)$

d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$

e) A circunferência centrada em (9, 5) e raio $\sqrt{120}$

14. (ITA 99) Pelo ponto C: (4, -4) são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x - 4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) $6\sqrt{12}$

b) $\sqrt{12}$

c) 12

d) 8

e) 6

15. Determine o ponto da parábola $y^2 = 18x$ mais próximo da reta $3x - 2y = 0$.

1.

RESPOSTA: E

Seja (t) a reta tangente à parábola de equação $x = 3y^2$.

Derivando em relação a y temos:

$x' = 6yy' \Rightarrow x' = 6y$

A reta tangente será dada por x+3=6x'y $\Rightarrow 3y^2 = \dfrac{x+3}{2}$

Substituindo na equação da parábola temos x=$\dfrac{x+3}{2} \Rightarrow x = 3$

$x = 3$ e $y^2 = 1 \Rightarrow (3,1)$ e $(3,-1)$

Se P for (3,-1) teremos

x'=-6 $\Rightarrow 6y + x + 3 = 0.$

2.

RESPOSTA:

a) equação da reta que passa pelos pontos (-2, 0) e (0, 2)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

b) Utilizando a forma fatorada da função do segundo grau, temos:

$y = a(x-2)\cdot(x-4)$ (observe que 2 e 4 são raízes de f(x))

como o ponto (0, 8) também pertence ao gráfico de f, temos:

$8 = a(0-2)\cdot(0-4) \Rightarrow 8 = 8a \Rightarrow a = 1,$ daí temos:

$y = 1\cdot(x-2)\cdot(x-4) \Rightarrow y = x^2 - 6x + 8$

c) Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

Teremos os pontos de intersecção entre a reta e a parábola.

$$x + 2 = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 6$$

Se $x = 1$, temos $y = 3$ e, se $x = 6$, temos $y = .$ Portanto, os pontos de intersecção da reta com a parábola são (1, 3) e (6, 8).

3.

RESPOSTA: B

Suponhamos que exista uma reta de equação $y = k$, que seja simultaneamente tangente à parábola e paralela ao eixo Ox. Desse modo, a equação

$$x^2 + (2k - 2)x + k^2 + 4k + 1 = 0$$

deve ter uma e somente uma raiz real, isto é,

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Leftrightarrow (2k - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 + 4k + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 4 - 4k^2 - 16k - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a parábola admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

4.

RESPOSTA: D

Sendo $(a, b, 2)$ uma progressão aritmética, temos $2b = a + 2$. Além disso, se $(b, a, 2)$ é uma progressão geométrica não constante, então $a^2 = 2b$, com $a \neq b$. Logo,

$$\begin{aligned} a^2 = a + 2 &\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

e, portanto, $b = \frac{1}{2}$.

Reescrevendo a equação da parábola $y^2 - 2y + x + 3 = 0$, obtemos $x = -2 - (y - 1)^2$. Donde fica fácil ver que o vértice dessa parábola é o ponto $(-2, 1)$.

Por conseguinte, a equação da reta que passa pelo ponto $(a, b) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e pelo ponto $(-2, 1)$ é

$$y - 1 = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-1 - (-2)}(x - (-2)) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$
$$\Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

5.
RESPOSTA:
O eixo é vertical e como

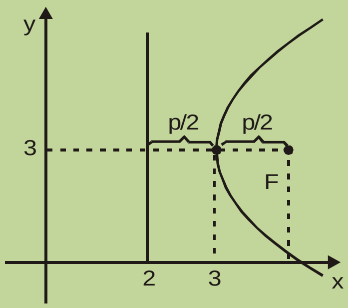
$\Delta = 36 - 32 = 4 \Rightarrow V(3, -1)$ e $p = \frac{1}{2}$

A equação da diretriz é $y = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$ e $F\left(3, -\frac{3}{4}\right)$.

6.
RESPOSTA:
$F(4, 3)$ diretriz $\Rightarrow x = 2$

O eixo é horizontal, $p = 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1.$

$2p\,(x - x_V) = (y - y_V)^2$ $\quad x_V = 2 + \frac{p}{2} = 3$



Então, $\boxed{4(x - 3) = (y - 3)^2}$

7.

RESPOSTA:

A equação da parábola é do tipo $(y + 2)^2 = 2p(x - 6)$, pois o eixo de simetria é horizontal ($y = -2$).

Da pertinência do ponto (8, 2), resulta

$16 = 2p \cdot 2 \Rightarrow 2p = 8$

Então, a parábola tem por equação

$$(y+2)^2 = 8(x-6)$$

8.

RESPOSTA:

O tipo da equação é

$(x - m)^2 = 2p(y - n)$

Da relação de pertinência tiramos:

Para o ponto $(-2, 0) \Rightarrow (-2 - m)^2 = -2pn \Rightarrow 4 + 4m + m^2 = -2pn$

Para o ponto $(6, 0) \Rightarrow (6, m)^2 = -2pn \Rightarrow 36 - 12m + m^2 = -2pn$

Para o ponto $(2, -4) \Rightarrow (2 - m)^2 = 2p(-4 - n) \Rightarrow 4 - 4m + m^2 = -8p - 2pn$

Comparando a 1ª e 2ª equações

$4 + 4m + m^2 = 36 - 12m + m^2$

$16m = 32$

$m = 2$

Com $m = 2$, na 1ª tiramos $-2pn = 16$ que, substituídos na 3ª nos dão

$4 - 8 + 4 = -8p + 16 \quad p = 2$

Com $m = 2$ e $p = 2$ tiramos na 1ª:

$4 + 8 + 4 = -2 \cdot 2 \cdot n \quad n = -4$

A parábola é $(x - 2)^2 = 4(y + 4)$

9.

RESPOSTA:

A equação do feixe de retas de centro (5, 0) é $y = a(x - 5)$.

Eliminemos y no sistema $\begin{cases} x = -y^2 \\ y = a(x-5) \end{cases} \Rightarrow x = -(a^2x^2 - 10a^2 x + 25a^2)$

$a^2x^2 - (10a^2 - 1)x + 25a^2 = 0$

Para retas tangentes $\Delta = 0$ então,

$(10a^2 - 1)^2 - 4a^2 \cdot 25a^2 = 0$

$100a^4 - 20a^2 + 1 - 100a^4 = 0$

$a^2 = \dfrac{1}{20} \Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{20}}{20} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

As tangentes têm por equações $\boxed{y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{10}(x-5)}$

10.

RESPOSTA: A

11.

RESPOSTA:

$(y-3)^2 = 4(x-3)$ e $\begin{cases} y = 3 + t \\ x = \dfrac{t^2+12}{4} \end{cases}.$

12.

RESPOSTA:

13.

RESPOSTA: E

14.

RESPOSTA: C

15.

RESPOSTA:

Procuraremos o ponto P(x, y) da parábola que guarda distância mínima da reta.

Tomando x para abscissa do ponto procurado, resulta $y \pm \sqrt{18x}$.

Então, $P(x \pm \sqrt{18x})$ e sua distância d à reta 3x – 2y = 0 é

$$d = \left|\frac{3x \mp 2\sqrt{18x}}{\sqrt{13}}\right|$$

Eliminando o módulo e derivando

$$d' = \mp\frac{3 \mp 2 \cdot \dfrac{18}{2\sqrt{18x}}}{\sqrt{13}}$$

Igualando a zero e simplificando

$$3 \mp \frac{18}{\sqrt{18x}} = 0$$

Resolvendo $3\sqrt{18x} = \pm 18$

$\sqrt{18x} = \pm 6$

18x = 36

x = 2 e y = $\pm$ 6.

Por simples verificação concluímos que o ponto que guarda menos distância da reta é P(2, 6).

De fato: determinemos as distâncias de P(2, 6) e P(2, -6) à reta

3x – 2y = 0.

$$\left.\begin{array}{l} 1º)\ d_1 = \left|\dfrac{6-12}{\sqrt{13}}\right| = \dfrac{6}{\sqrt{13}} \\ 2º)\ d_2 = \left|\dfrac{6+12}{\sqrt{13}}\right| = \dfrac{18}{\sqrt{13}} \end{array}\right. \Rightarrow d_1 < d_2$$