***“A única pessoa que você está destinado a se tornar é a pessoa você decide ser.”*"**

Ralph Waldo Emerson

SUMÁRIO

POLINÔMIO I

1. DEFINIÇÃO

Polinômios de uma variável são expressões que podem ser escritas como soma finita de monômios do tipo : $a_k t^k$ onde $k \in \mathbb{N}$, a_k podem ser números reais ou números complexos.

Exemplos:

a) $3t^3 - 2t^2 + 5t - 7$ é um polinômio.

b) $(\sqrt{3}+1)t^2 - 7$ é um polinômio.

c) $9t^5 + it^3 + (2+i)t^2 - 5t + 4$ é um polinômio

d) $\sqrt{x} - 8x^2 + 5x - 1$ não é um polinômio.

e) $\frac{1}{t} + t$ não é um polinômio.

2. FUNÇÃO POLINOMIAL

Definição: Uma função de uma variável x é uma função polinomial complexa se pudermos escrevê-la na forma : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \ \forall x \in C$.

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Onde

$a_0,\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n$ são números complexos chamados de coeficientes da função polinomial.

se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Se α é um número complexo e p(α)=0, α é raiz de p(x).

Um polinômio completo é aquele que não possui coeficientes nulos. Um polinômio completo de grau n possui n+1 termos.

3. VALOR NUMÉRICO

O valor numérico de p(x) em a ($a \in C$) é a imagem de a pela função p

Exemplos:

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow P(2) = 2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = -1$

$P(x) = x^3 - 2ix^2 - x + (3i - 2) \Rightarrow P(i) = i^3 - 4i \cdot i^2 - i + (3i - 2) = 5i - 2$

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x \Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 0$

OBSERVAÇÃO

$(1) = a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ é a soma dos coeficientes.

$P(0) = a_0$ é o termo independente.

4. POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Chama-se polinômio identicamente nulo o polinômio $p(x)$ que tem todos os seus coeficientes nulos: $p(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + \ldots + 0.x^n$, isto é que assume valor zero para todos os valores de x.

Indicamos por $p(x) \equiv 0$.

5. IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

Dois polinômios são ditos idênticos quando têm sempre o mesmo valor qualquer que seja o valor atribuído à variável.

Quando dois polinômios são idênticos, os seus coeficientes são ordenadamente iguais.

6. RAÍZES

Chamam-se raízes do polinômio P(x) os valores de $x \in C$ tais que $P(x) = 0$.

Um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas. Desta forma, a quantidade de raízes reais é no máximo igual a n.

Exemplo: O polinômio $P(x) = x^2 - x - 2$ é um polinômio completo de grau 2 e possui duas raízes reais: -1 e 2.

7. GRAU

Dado um polinômio P(x) com pelo menos um termo de coeficiente não nulo, o grau de P, indicado por gr(P) é o maior dos expoentes da variável x nos termos com coeficientes não nulos.

Se P tem todos os coeficientes nulos, não se define o grau de P.

Exemplo:

$P(x) = 2x^3 - 2x^{2+} 4x + 1 \Rightarrow gr(P) = 3$

$P(x) = 5x \Rightarrow gr(P) = 1$

$P(x) = 7 \Rightarrow gr(P) = 1$

8. OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

8.1. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

A adição e a subtração de polinômios são feitas somando-se ou subtraindo-se os coeficientes dos termos de mesmo grau em todas as variáveis.

Exemplos:

1) $(4x^2 - 3x) - (x^2 - 4x - 3) = 3x^2 + x + 3$

2) $(x^3 - 1) + (x^4 - x^3 + 1) = x^4$

8.2. MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

Para multiplicar polinômios basta aplicar a distributividade da multiplicação.

Exemplo 1: $(x^3 + 2x - 1)\cdot(x^2 + x + 2) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 4x - x^2 - x - 2 = x^5 + x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 2$

Note que se o produto de dois polinômios é nulo, pelo menos um dos polinômios deve ser nulo.

$p\cdot q = 0 \Leftrightarrow p = 0$ ou $q = 0$

OBSERVAÇÃO

O grau do produto é a soma dos graus dos fatores.

$gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$

8.3. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dados dois polinômios P(x) e D(x), de graus p e q, respectivamente, dividir P(x) por D(x) significa é encontrar dois polinômios Q(x) e R(x), denominados quociente e resto, respectivamente, que satisfazem

$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

onde o grau de R(x) deve ser menor que o grau de D(x) ou R(x) = 0.

Se $gr(P) \geq gr(D)$, a divisão pode ser efetuada pelo seguinte algoritmo denominado **Método da Chave**.

Ordenam-se P(x) e D(x) segundo as potências decrescentes de x, inclusive com os termos do dividendo que possuem coeficiente 0.

Divide-se o primeiro termo de P(x) pelo primeiro termo de D(x), obtendo-se o primeiro termo do quociente.

Multiplica-se D(x) pelo primeiro termo do quociente e subtrai-se o resultado de P(x), obtendo-se o primeiro resto parcial.

Com o primeiro resto parcial e o divisor D(x) repetem-se as operações, obtendo-se o segundo termo do quociente e assim sucessivamente até se encontrar um resto de grau menor que o divisor.

Exemplo: Calcular $(x^3 + 2x - 1) \div (x^2 + x + 2)$

$x^3 + 0x^2 + 2x - 1$	$x^2 + x + 2$
$-x^3 - x^2 - 2x$	$x - 1$
$-x^2 + 0x - 1$	
$x^2 + x + 2$	
$x + 1$	

$Q(x) = x - 1$ e $R(x) = x + 1$

OBSERVAÇÃO

O grau do quociente é a diferença dos graus do dividendo e do divisor.

gr(Q) = gr(P) –gr(D)

No exemplo acima, o quociente tem grau 1 = 3 – 2.

1. Calcular a, b e c de modo que se tenha, $\forall x \in R$, $ax^4 + (b+1)x^2 + (2c-1) = x^2 + 1$.

2. Obtenha A e B de forma que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ para todo $x \neq 0$ e $x \neq -1$.

3. Dividir $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ e $D(x) = x^3 + 1$.

4. (UFF 1998) Considere o polinômio $p(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Determine o polinômio q(x) e as constantes **A**, **B** e **C** tais que $p(x) = q(x) + \frac{A}{x^2 - 1}$ e $\frac{A}{x^2 - 1} = \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

5. (ITA) A divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de P(x) por $2x + 1$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

6. (ESPCEX) Na divisão do polinômio $7x^6 + ... + 8x - 12$ por $x + 2$ encontrou-se o quociente $7x^5 + ... + 4$. Qual o resto dessa divisão?

7. (AFA) Um polinômio P(x) do terceiro grau que, para todo número real, satisfaz a expressão

$P(x) = P(x-1) + x^2$ é:

a) $x^3/3 + x^2/2 - x/6$

b) $x^3/3 - x^2/2 + x/6$

c) $x^3/3 + x^2/2 + x/6$

d) $x^3/3 - x^2/2 - x/6$

8. (ITA) Determine os valores de *a* e *b*, tais que os polinômios $P(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $Q(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$?

9. (ESCOLA NAVAL 2013) Sejam $F(x) = x^3 + ax + b$ e $G(x) = 2x^2 + 2x - 6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a + b)$ para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

10. (ESPCEX 2015) O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x)$. Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é

a) -10.

b) -4.

c) 0.

d) 4.

e) 10.

11. Determine as constantes a, b e c na identidade:

$$a.(x + 5y - 3z) + b.(2x - 2y + 5z) + c.(7x + 11y + 3z) + x - 2y = 0$$

12. A identidade abaixo é válida para todo x real, diferente de – 1.

Determine o valor de a + b + c.

$$\frac{x^3 + 4}{x^3 + 1} \equiv 1 + \frac{a}{x + 1} + \frac{b.x + c}{x^2 - x + 1}$$

13. Seja um polinômio P(x) do 6° grau, com P(0) = 1 e tal que: P(1) = P(-1) = P(2) = P(-2) = P(-3) = P(3) = 2. Determine o valor de P(4).

14. (IME-01) Determine todos os números m e n para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n} x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

$P(x) = 2x^m + a^{3n} . x^{m-3n} - a^m$,

15. (AFA 1999) O coeficiente de x^3 no polinômio $P(x)$ do terceiro grau que se anula para $x=-1$ e tal que dividido separadamente por $x-1$, $x+2$ e $x+3$ deixa sempre resto 20 é

a) 5

b) 10

c) 1

d) –5

16. (AFA 2001) Seja P(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $P(x)$ por $x-2$, obtém-se um quociente $Q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $P(x)$ por x^2+x-1, obtém-se um quociente $H(x)$ e resto $8x-5$. Se $Q(0)=13$ e $Q(1)=26$, então $H(2)+H(3)$ é igual a

a) 0

b) 16

c) –47

d) –28

17. (EN 2010) Ao escrevermos $\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{Cx+D}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ onde a_i, b_i, c_i $(1 \le i \le 2)$ e A, B, C e D são constantes reais, podemos afirmar que A^2+C^2 vale:

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{8}$

e) 0

1. A igualdade se verifica $\forall x \in R$ se os polinômios forem idênticos, assim:

$$ax^4 + (b+1)x^2 + (2c-1) \equiv x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b+1 = 1 \Leftrightarrow b = 0 \\ 2c-1 = 1 \Leftrightarrow c = 2 \end{cases}$$

2.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x+1) + Bx \Leftrightarrow 1 = (A+B)x + A$$

Igualando os coeficientes temos:

$A = 1$

$A+B = 1+B = 0 \Leftrightarrow B = -1$

3. Supondo $Q(x) = ax + b$ e $R(x) = cx^2 + dx + e$, temos: $P \equiv QD + R$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \equiv (ax+b)\cdot(x^3+1) + (cx^2 + dx + e)$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a+d)x + (b+e)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ a+d = 4 \Leftrightarrow d = 3 \\ b+e = 5 \Leftrightarrow e = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = x + 2 \text{ e } R(x) = 3x^2 + 3x + 3$$

4. A = 3, B = 3/2 e C = –3/2

$\Rightarrow p(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + 2 + \dfrac{3}{x^2 - 1}$ $\Rightarrow$ q(x) = x^2 +2 e A = 3

$\dfrac{3}{x^2 - 1} = \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{x + 1}$ $\Leftrightarrow$ 3 = B(x +1) +C(x –1)

$\Leftrightarrow$ 3 = (B +C)x +(B –C) $\Rightarrow \begin{cases} B + C = 0 \\ B - C = 3 \end{cases} \Rightarrow$ B = 3/2 e C = –3/2

5.

RESPOSTA: E

6. Como o grau do divisor é um, então o resto é nulo ou possui grau zero => r(x) = r

$7x^6$ + ... + 8x – 12 = ($7x^5$ + ... + 4)(x + 2) + r => $7x^6$ + ... + 8x – 12 = $7x^6$ + ... + 8 + r =>

8 + r = – 12 => r = – 20

7.

P(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\therefore$ P(x) – P(x – 1) = x^2 =>

$ax^3 + bx^2 + cx + d - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) - d = x^2$ =>

$ax^3 + bx^2 + cx - ax^3 + 3ax^2 - 3ax + a - bx^2 + 2bx - b - cx + c = x^2$ =>

$3ax^2 + (2b - 3a)x + (a - b + c) = x^2$

Da igualdade de polinômios temos:

$\therefore$ 3a = 1 => a = 1/3 $\therefore$ 2b – 3a = 0 => 2b = 3(1/3) => b = 1/2

$\therefore$ a – b + c = 0 => c = 1/2 – 1/3 => c = 1/6

Ou seja, P(x) = $x^3/3 + x^2/2 + x/6 + d$, onde d é qualquer número real.

RESPOSTA: C

8. Para que P(x) e Q(x) sejam divisíveis por x + 1 então P(– 1) = 0 e Q(– 1) = 0

$\therefore$ P(– 1) = 0 => – 1 – 2a – 3a – b – 3b = 0 => 5a + 4b = – 1

$\therefore$ Q(– 1) = 0 => – 1 + a + 2b + 2a = 0 => 3a + 2b = 1 => 6a + 4b = 2 => a = 3 e b = – 2

9.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 0 \cdot x^2 + a \cdot x + b & 2x^2 + 2 \cdot x - 6 \\ \cline{2-2}
\quad -x^3 + -x^2 + 3 \cdot x & \quad \frac{1}{2}x \quad -\frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
0 + -x^2 + (a+3) \cdot x + b & \\
\qquad x^2 + 1 \cdot x - 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad \underbrace{(a+4) \cdot x + (b-3)}_{\text{Polinômio nulo}} &
\end{array}
$$

De acordo com a divisão efetuada acima, temos:

$a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$

$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

Logo, $a + b = -1$.

RESPOSTA: B

10.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 + 0x + 1 & x^3 + 0x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 & \quad x^2 + 2 \\ \cline{1-1}
\qquad +2x^3 - x^2 + 0x + 1 & \\
\qquad -2x^3 + 0x^2 + 6x - 4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad - x^2 + 6x - 3 &
\end{array}
$$

Portanto, $r(x) = -x^2 + 6x - 3$ e $r(-1) = -(-1)^2 + 6(-1) - 3 = -10$.

RESPOSTA: A

11. Temos uma expressão do lado esquerdo da identidade, dependente das variáveis independentes x, y e z, e deve ser "identicamente nulo" (i.e. para qualquer sejam os valores assumidos por x, y e z, a expressão deverá se anular)

$$a.(x+5y-3z)+b.(2x-2y+5z)+c.(7x+11y+3z)+x-2y=$$
$$=a.x+2b.x+7c.x+x+5a.y-2b.y+11c.y-2-3a.z+5b.z+3c.z=$$
$$=x.(a+2b+7c+1)+y.(5a-2b+11c-2)+z.(-3a+5b+3c)$$

Temos:

$$x.\underbrace{(a+2b+7c+1)}_{=0}+y.\underbrace{(5a-2b+11c-2)}_{=0}+\underbrace{(-3a+5b+3c)}_{=0}=0$$

De onde segue:

$$\begin{cases} a+2b+7c+1=0 \\ 5a-2b+11c-3=0 \\ -3a+5b+3c=0 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$\boxed{a=-\frac{37}{6};b=-5;c=\frac{13}{6}}$$

12.

$$\frac{x^3+4}{x^3+1}\equiv 1+\frac{a}{x+1}+\frac{b.x+c}{x^2-x+1}$$
$$\Rightarrow (x^3+4)\equiv(x^3+1)+a.\frac{(x^3+1)}{x+1}+\frac{(b.x+c)(x^3+1)}{x^2-x+1}$$

Sabendo que -1 é raiz de $x^3 + 1$, podemos fatorar: $x^3 + 1 = (x + 1) . (x^2 - x + 1)$.

Voltando na expressão de identidade:

$$(x^3+4)\equiv(x^3+1)+a.(x^2-x+1)+(b.x+c).(x+1)$$
$$\equiv x^3+1+a.x^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c$$
$$\equiv x^3+x^2.(a+b)+x.(b+c-a)+(1+a+c)$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=0 \\ b+c-a=0 \\ 1+a+c=4 \end{cases}$$

$$\therefore a=1, b=-1, c=2 \Rightarrow a+b+c=2$$

13. Seja Q(x) = P(x) – 2. Sabemos que:

Q(1) = Q(-1) = Q(2) = Q(-2) = Q(-3) = Q(3) = 0

Da definição de Q(x), temos que este também é 6° grau. Além disso, conhecemos todas as raízes de Q(x), de tal forma que podemos escrever:

$$Q(x)=a.(x-1).(x+1).(x-2).(x+2).(x+3).(x-3)$$
$$=a.(x^2-1).(x^2-4).(x^2-9)$$

Conhecemos a menos do valor da constante 'a' , o polinômio P(x):

$$P(x)=a.(x^2-1).(x^2-4).(x^2-9)+2$$

Para determinar o valor de 'a', façamos x = 0:

$$P(0)=a.(0-1).(0-4).(0-9)+2=1 \;\therefore\; a=\frac{1}{36}$$

Com isso, podemos determinar P(4):

$$P(4)=\frac{1}{36}.(4^2-1).(4^2-4).(4^2-9)+2=37$$

$$\therefore \boxed{P(4)=37}$$

14. Para que a expressão seja um polinômio, temos as restrições

- $m \geq 0$ (1)
- $m - 3n \geq 0 \Rightarrow m \geq 3n \Rightarrow n \leq \frac{m}{3}$ (2)

Para que P(x) seja divisível por x + a $\Rightarrow$ P(-a) = 0

$P(-a) = 2\,(-a)^m + a^{3n}\,.\,(-a)^{m-3n} - a^m$

$P(-a) = a^m\,[2\,.\,(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1]$

• caso a = 0 $\Rightarrow$ P(-a) = 0 $\forall$ m e n $\in Z^*$, m > 0.

• $a \neq 0 \Rightarrow 2\,.\,(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

- m é par e
  m – 3n é ímpar $\Big|$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{m é par e} \\ \text{n é ímpar} \end{cases}$

$\left(m \geq 0 \text{ e } n \leq \frac{m}{3}\right)$

15.

$$P(x)-20=a(x-1)(x+2)(x+3) \Leftrightarrow P(x)=a(x-1)(x+2)(x+3)+20$$
$$P(-1)=a(-1-1)(-1+2)(-1+3)+20=0 \Leftrightarrow a=5$$

RESPOSTA: A

16.

$$P(x)=(x-2)\cdot Q(x)+26 \Rightarrow P(2)=26$$
$$P(x)=\left(x^2+x-1\right)\cdot H(x)+(8x-5) \Rightarrow P(2)=5\cdot H(2)+11=26 \Leftrightarrow H(2)=3$$
$$Q(0)=13 \Rightarrow P(0)=(-2)\cdot Q(0)+26 \Leftrightarrow P(0)=0$$
$$Q(1)=26 \Rightarrow P(1)=(-1)\cdot Q(1)+26 \Leftrightarrow P(1)=0$$
$$P(0)=(-1)\cdot H(0)+(-5)=0 \Leftrightarrow H(0)=-5$$
$$P(1)=1\cdot H(1)+3=0 \Leftrightarrow H(1)=-3$$
$$H(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow \begin{cases} H(0)=c=-5 \\ H(1)=a+b-5=-3 \Leftrightarrow a+b=2 \\ H(2)=4a+2b-5=3 \Leftrightarrow 2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow a=2,\ b=0,\ c=-5$$
$$\Rightarrow H(x)=2x^2-5 \Rightarrow H(3)=2\cdot 9-5=13$$
$$\Rightarrow H(2)+H(3)=16$$

RESPOSTA: B

17.

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

$$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2=(A+C)x^3+\left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)x^2+\left(A+C-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D\right)x+(B+D)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+C=0\\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=1\Rightarrow-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C=1\Leftrightarrow C-A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ A+C-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D=0\\ B+D=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\ C-A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{2}}{4},\ A=-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow A^2+C^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

RESPOSTA: C