Estratégia
Militares

Aula 02

Triângulos, Polígonos, Lugar Geométrico e Teorema de Tales

EPCAR - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 – Introdução

Olá, querido aluno!

Como andam os estudos? Espero que bem!!

Alguns avisos antes de tudo!!!

Devido à proximidade da sua prova, decidi abarcar em uma aula conteúdos a mais. Ou seja, nesta aula 01 já estamos vendo conteúdos de aulas posteriores. Tudo isso com o intuito de adiantar o processo, mas claro, sem perder nenhum detalhe. Terminaremos o conteúdo de geometria antes do fim deste mês. Assim, termos um prazo razoável para ajustar possíveis detalhes.

Vamos à nossa aula!

O primeiro dos assuntos é: **Pontos Notáveis**. Tema muito importante para qualquer concurso militar, ainda mais o seu. Desta forma, peço que preste bastante atenção na teoria, além de praticar bastante cada propriedade. Este tópico irá ajudar lá na frente. Não dê mole. Foco total.

Simbora?

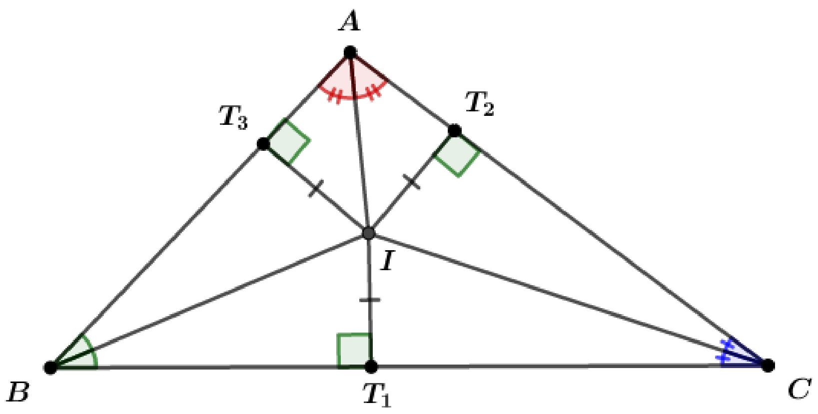
Fale comigo!

@profismael_santos	*Ismael Santos*	*@IsmaelSantos*

1. Pontos Notáveis no Triângulo

- **Incentro – Bissetrizes Internas**

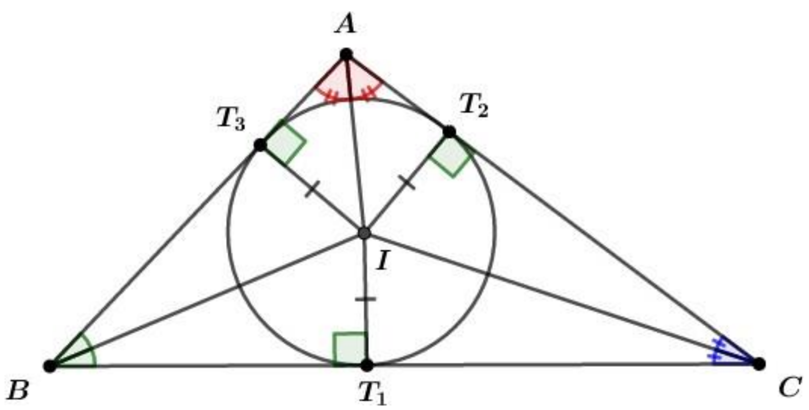
Incentro nada mais é que o ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo. É válido ressaltar que este ponto é único e interno ao triângulo. Observe ainda , na figura, que essas bissetrizes possuem a mesma distância dos lados do triângulo. Veja:



I é o incentro e possui uma mesma distância (equidista) dos lados do triângulo. Veja:

$$\boldsymbol{IT_1 = IT_2 = IT_3}$$

Perceba que os pontos T_1 , T_2 e T_3, possuem uma mesma distância do incentro. Essa característica é descreve o conceito do um lugar geométrico bem conhecido, qual seja, circunferência. Por isso, podemos desenhar uma circunferência inscrita neste triângulo passando pelos pontos mencionados. Veja:



Uma outra propriedade que temos da circunferência inscrita no triângulo é que aplicando-se o critério de congruência LAA_o, temos que:

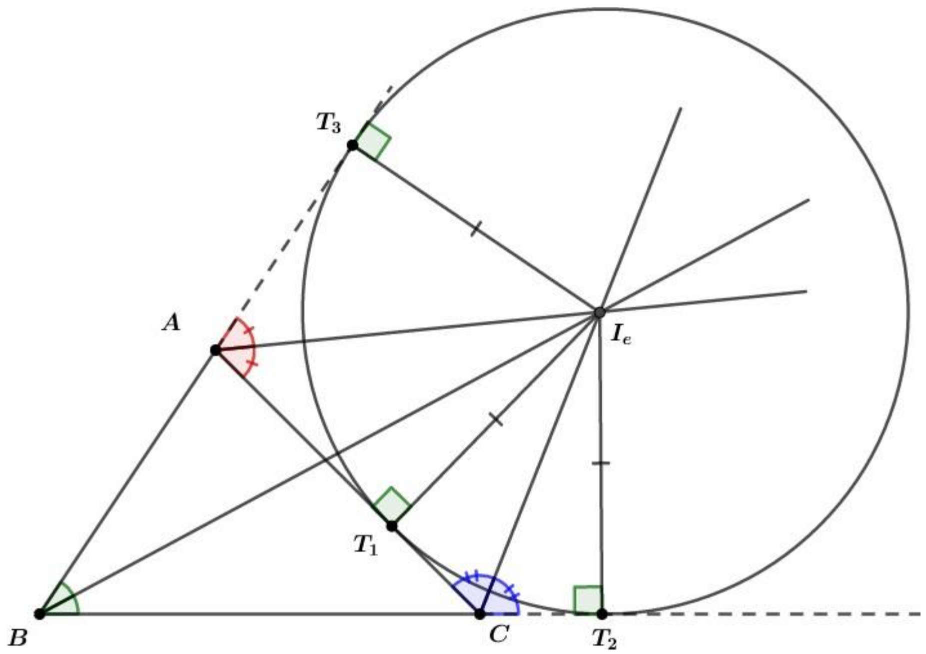
$$\Delta AIT_3 \equiv \Delta AIT_2 \Rightarrow AT_3 = AT_2$$
$$\Delta BIT_3 \equiv \Delta BIT_1 \Rightarrow BT_3 = BT_1$$
$$\Delta CIT_1 \equiv \Delta CIT_2 \Rightarrow CT_1 = CT_2$$

- ## Ex - Incentro

Nada mais é que o ponto de encontro de uma bissetriz interna e de duas externas de um triângulo. Esse ponto também equidista dos lados do triângulo e dos prolongamentos dos lados adjacentes.

É fácil notar que a distância do ex-incentro aos prolongamentos dos lados adjacentes representa o raio da circunferência que tangência o lado oposto a este ângulo e os prolongamentos dos lados adjacentes.

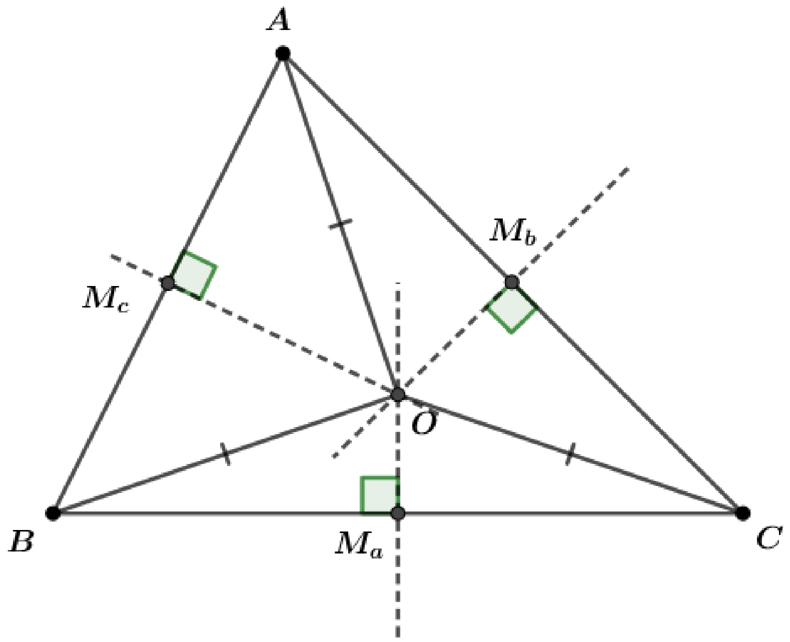
Veja:



I_e é o ex-incentro do triângulo ABC em relação ao lado AC.

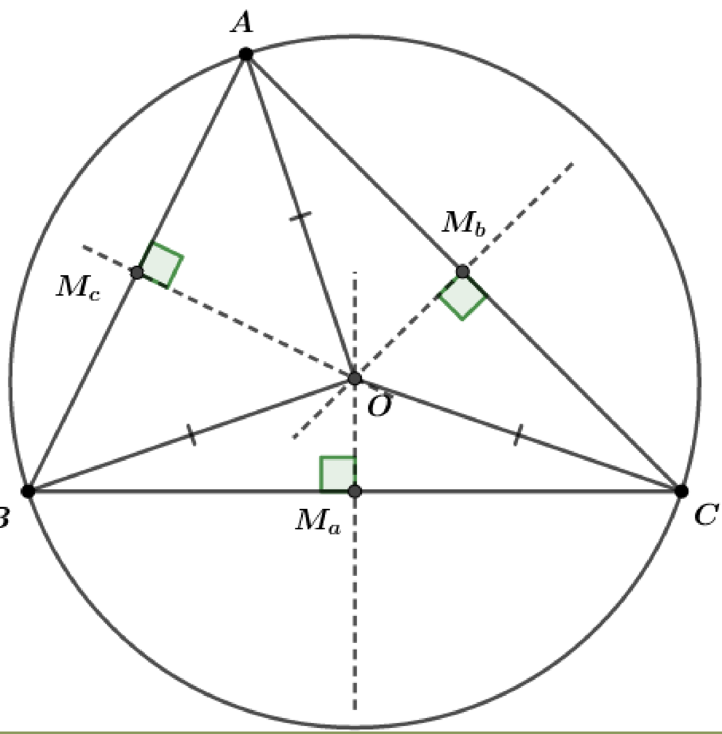
- ## Circuncentro

Nada mais é que o encontro interno das mediatrizes de um triângulo. Este ponto equidista dos vértices do triângulo, ou seja, estão a uma mesma distância dos vértices.



O é o circuncentro do triângulo ABC.

Como o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, este ponto é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices desse triângulo. Mesma ideia da circunferência inscrito em um triângulo, porém com as devidas adaptações. Veja:

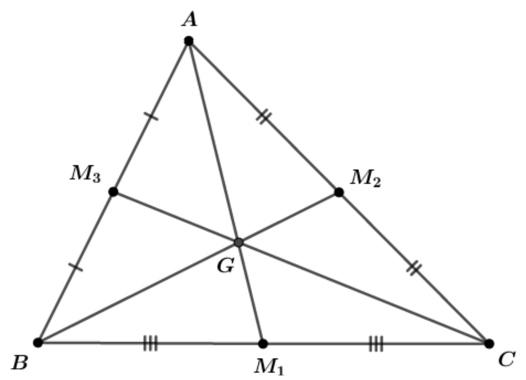


$AO = BO = CO \Rightarrow$ ***Raio da circunferência circunscrita.***

- **Baricentro**

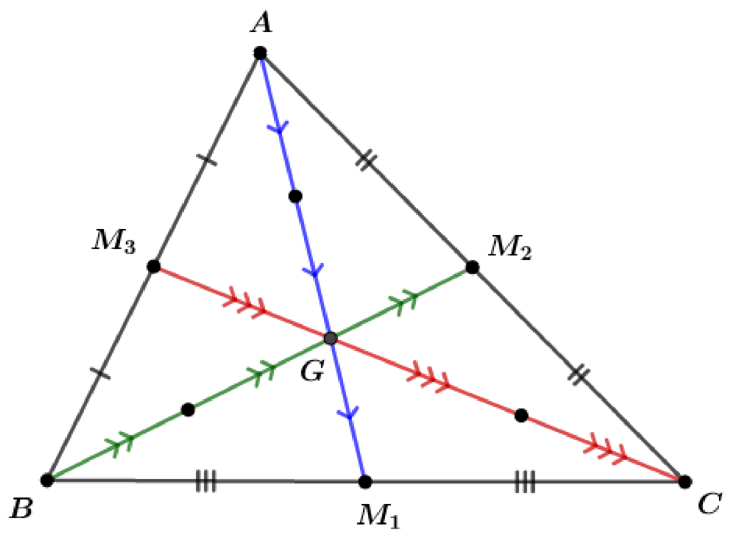
As três medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de baricentro. Este é um dos principais pontos notáveis de um triângulo, não só devido a suas propriedades, mas também pelo fato de cair muito em prova e ter uma ligação direta com o tema áreas de figuras planas. Então, atenção redobrada.

Destaco abaixo uma imagem que representa o baricentro de um triângulo qualquer. Veja:



G é o baricentro do triângulo ABC.

Destaco agora, a principal característica que o baricentro nos fornece:



$$AG = 2GM_1$$

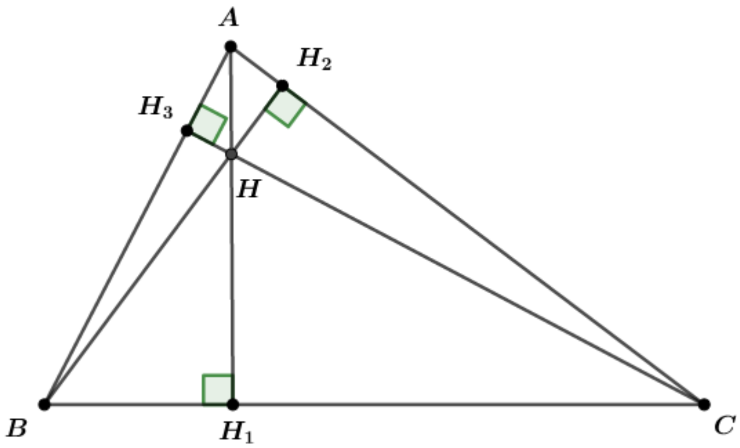
$$BG = 2GM_2$$

$$CG = 2GM_3$$

Guarde isso para a sua vida!!!! A distância do vértice ao baricentro será sempre igual ao dobro da distância deste ao ponto médio do lado oposto.

- **Ortocentro**

Nada mais é que o encontro interno e único da interseção das alturas de um triângulo.



H é o ortocentro do triângulo ABC.

Pronto! Chegamos ao fim dos pontos notáveis.

Entraremos agora, no tema Triângulos Quaisquer. Bora??

2. Triângulos Quaisquer

- **Lei dos Senos**

A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que o circunscreve. Em outras palavras, temos:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

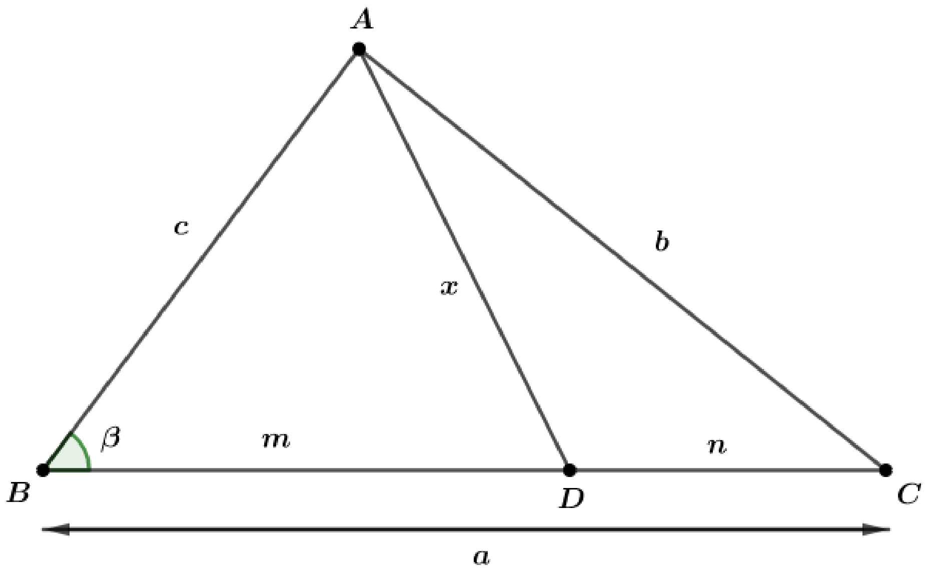
- ## Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

- ## Relação de Stewart

Dado um triângulo ABC, temos:

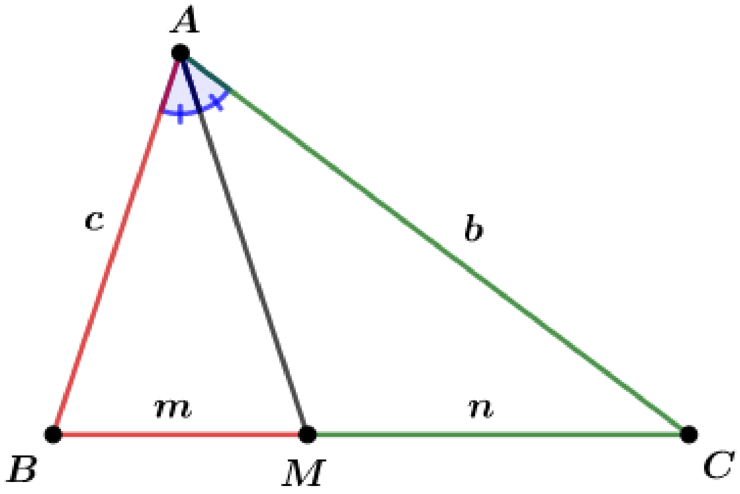


$$ax^2 + amn = bm + cn$$

Basicamente, decorar a fórmula. Com essa relação é possível calcular medianas de um triângulo, por exemplo. Se for cobrado em prova, será uma aplicação direta.

- **Teorema das Bissetrizes Internas**

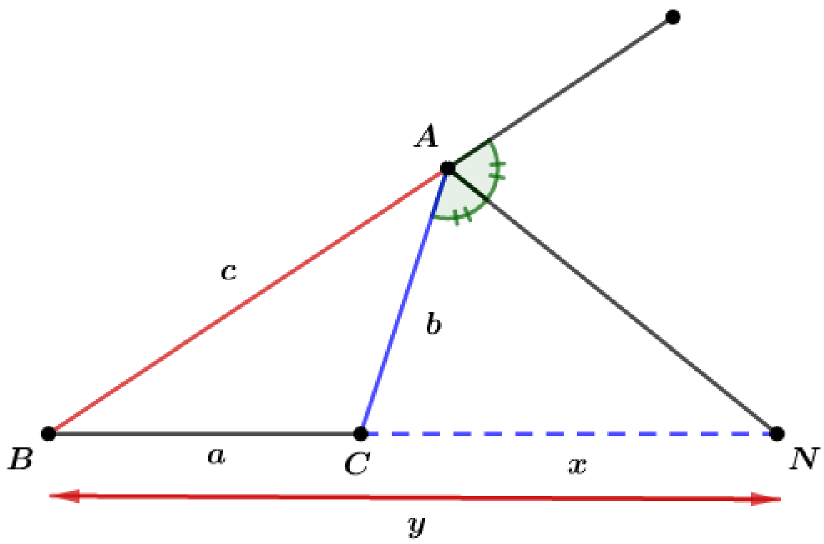
Seja um triângulo ABC, com medidas de lados conhecidas, valendo a, b e c. O teorema diz que as projeções dos lados do triângulo, pertencentes ao lado oposto do vértice da bissetriz, são proporcionais aos respectivos lados. Veja:



$$\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

- **Teorema das Bissetrizes Internas**

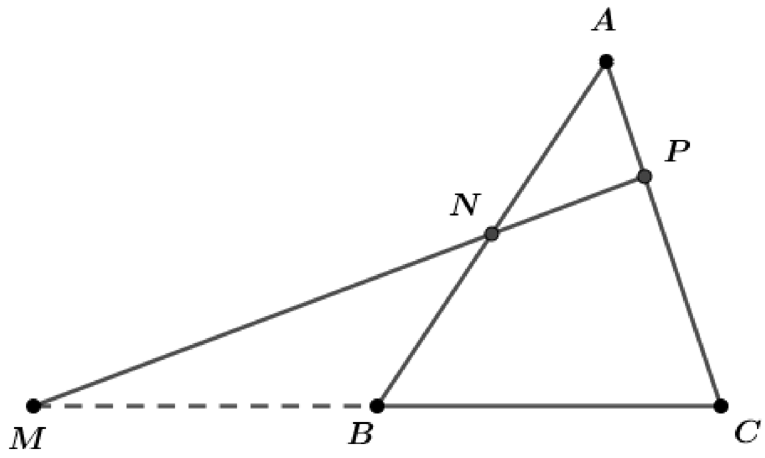
Aplica-se a mesma ideia acima, porém adaptada para uma bissetriz externa com o prolongamento de um dos lados. Veja:



$$\frac{c}{y} = \frac{b}{x}$$

- ## Teorema de Menelaus

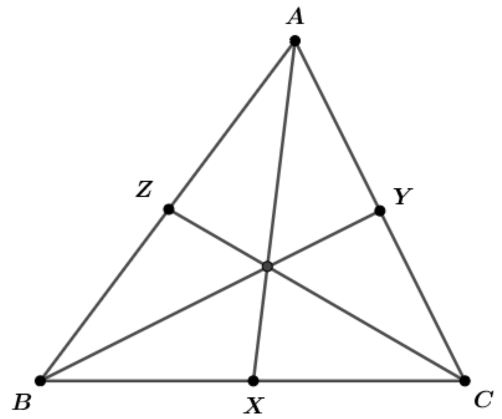
Guarde este teorema. Ele é muito útil. Já adianto: o seu uso é a partir da aplicação direta da proporção abaixo. Não vou me preocupar com a demonstração, tendo em vista não ser objeto do nosso curso.



$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

- ## Teorema de Ceva

Guarde este teorema. Também muito útil. Já adianto: o seu uso é a partir da aplicação direta da proporção abaixo. Não vou me preocupar com a demonstração, tendo em vista não ser objeto do nosso curso. Ressalto que é menos comum cair que o teorema anterior.

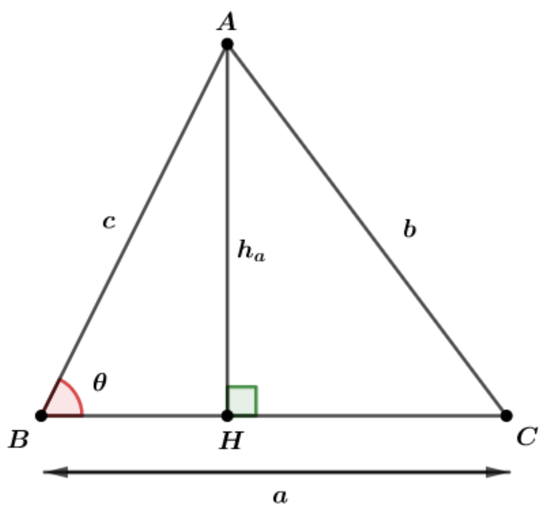


$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

3 - Cálculo das Cevianas

- **Altura**

Existe uma forma bem interessante de encontrarmos a altura de um triângulo qualquer a partir dos lados e do semiperímetro. Veja:



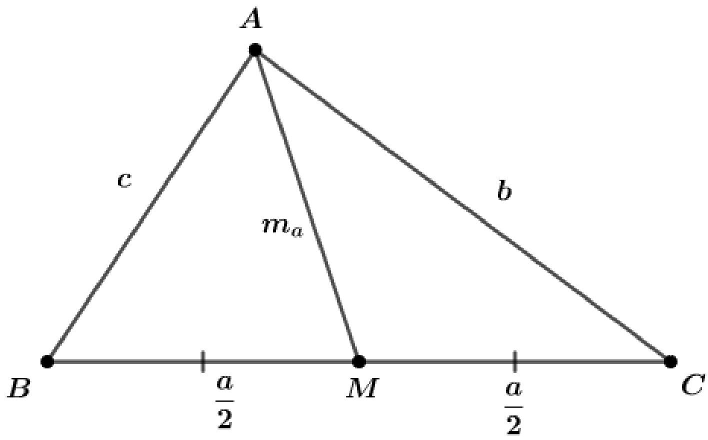
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- **Mediana**

Existe uma forma bem interessante de encontrarmos a mediana de um triângulo qualquer a partir dos lados e do semiperímetro. Veja:



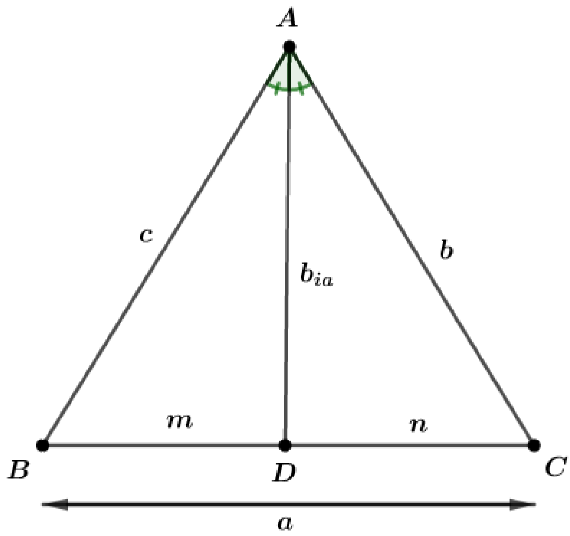
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

- **Bissetriz Interna**

Existe uma forma bem interessante de encontrarmos a bissetriz de um triângulo qualquer a partir dos lados e do semiperímetro. Veja:



$$b_{ia} = \sqrt{bc - mn}$$

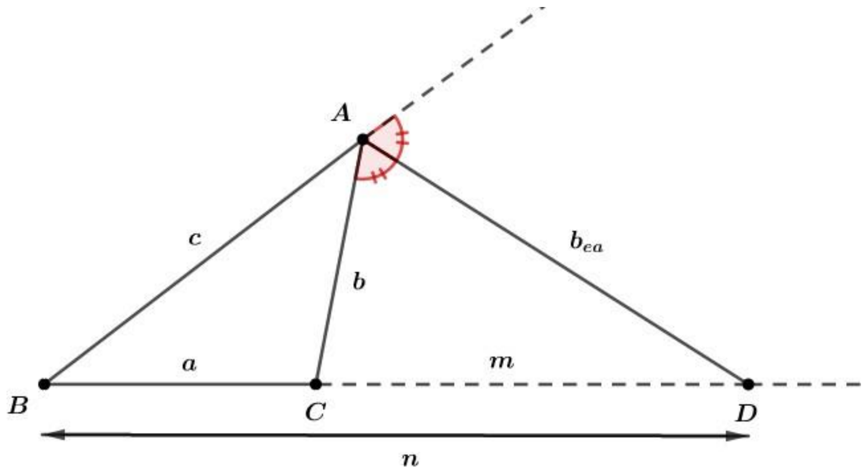
$$b_{ia} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$b_{ib} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

$$b_{ic} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

- **Bissetriz Externa**

Existe uma forma bem interessante de encontrarmos a bissetriz externa de um triângulo qualquer a partir dos lados e do semiperímetro. Veja:



$$b_{ea} = mn - bc$$

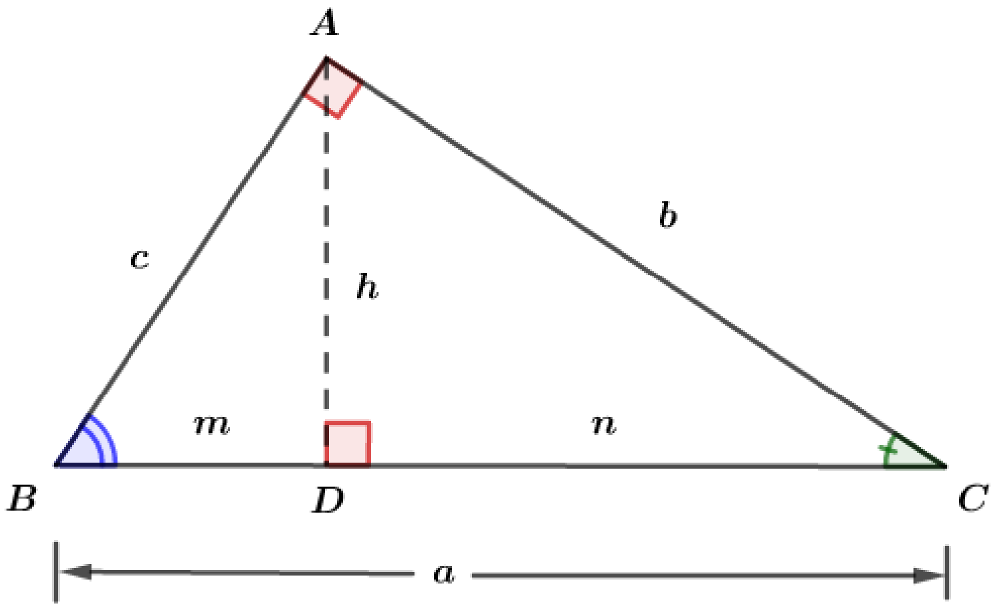
$$b_{ea} = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$b_{eb} = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$b_{ec} = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

4. Triângulo Retângulo

Para deduzirmos as relações métricas no triângulo retângulo, tomemos como base o triângulo abaixo, com ângulo reto em A, com uma altura relativa à hipotenusa $AP = h$ e P como pé da altura que divide o segmento $\overline{BC}$ em outros dois, tais que $\overline{BP} = m$ e $\overline{CP} = n$. Veja:

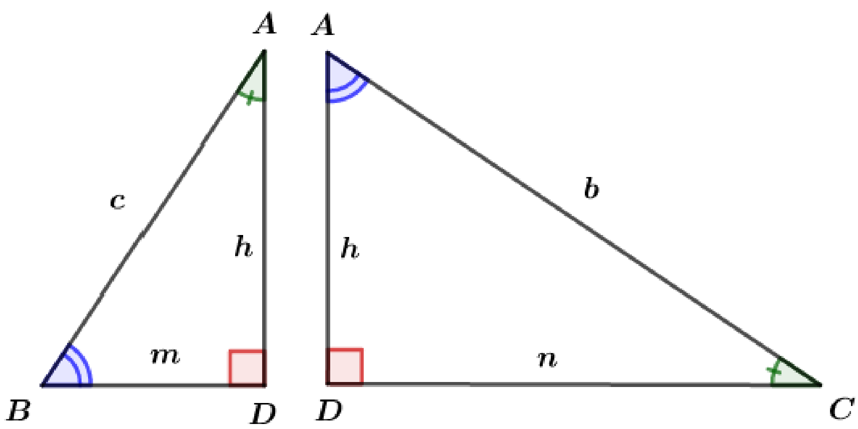


Na aula anterior, aprendemos que uma altura divide um triângulo em outros dois semelhantes ao primário.

Assim:

$$\Delta ABC \sim \Delta ABP \sim \Delta CAP$$

Observe as figuras



4.1 - Relações

Utilizando da semelhança para chegarmos às relações métricas, temos:

a)

$$\Delta CBA \sim \Delta ABP:$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c^2 = m.a}$$

b)

$$\Delta CBA \sim \Delta CAP:$$

$$\Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b^2 = na}$$

c)

$$\Delta CBA \sim \Delta ABP:$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{b}{h} = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a.h = b.c}$$

d) A partir da alínea **a** e **b**, temos que:

$$\begin{cases} c^2 = m.a \\ b^2 = n.a \end{cases} \Rightarrow b^2c^2 = m.n.a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m.n = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \;\; ; \;\; \frac{bc}{a} = h, \text{ logo:}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m.n = h^2}$$

e) Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado altura relativa à hipotenusa Veja:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2.c^2} \Rightarrow \frac{a^2}{a^2.h^2} = \frac{1}{h^2}$$

Logo:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

No exemplo acima foi aplicado a relação do Teorema de Pitágoras. Veja abaixo uma das formas de surgimento.

f) Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$\begin{cases} b^2 = m.a \\ c^2 = n.a \end{cases} \implies b^2 + c^2 = a.(m+n)$$

$$\implies b^2 + c^2 = a.a \text{ , pois } m + n = a$$

$$\implies a^2 = b^2 + c^2$$

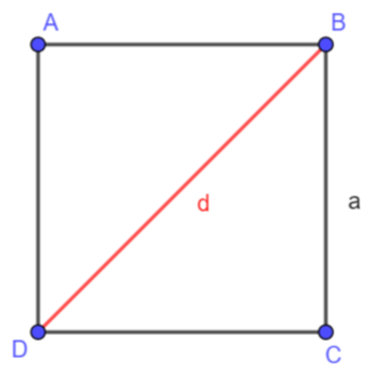
TOME NOTA!

Há o que chamamos de Teorema Recíproco de Pitágoras, qual seja: se em um triângulo a relação $a^2 = b^2 + c^2$ for verdadeira, então este triângulo é retângulo.

4.2 – Aplicações do Teorema de Pitágoras

✓ Diagonal do Quadrado

É possível achar a diagonal do quadrado a partir da aplicação direta do Teorema de Pitágoras. Veja:



$$d^2 = a^2 + a^2$$

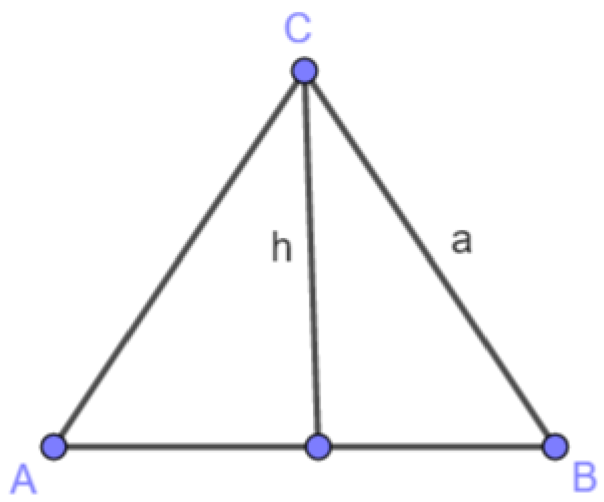
$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

✓ Altura de um triângulo equilátero

É possível achar a altura do triângulo equilátero. Veja:



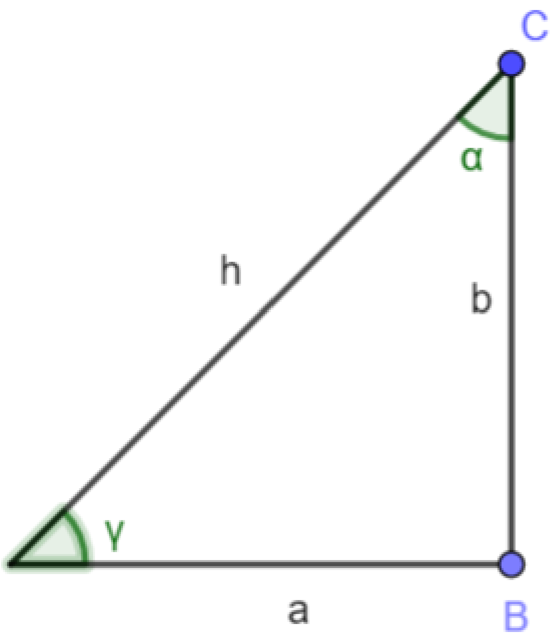
$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

✓ Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°

Imaginemos o triângulo abaixo.



a) $sen\ de\ x$

$$senx = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$senx = \frac{b}{a}$$

b) $cosseno\ de\ x$

$$cosx = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$cosx = \frac{c}{a}$$

c) $tangente\ de\ x$

$$tgx = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{b}{c}$$

$$tgx = \frac{senx}{cosx} = \frac{b}{c}$$

Utilizando as propriedades acima de forma conveniente em quadrados e triângulos equiláteros, chagamos as seguintes conclusões:

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Aprofundando este conhecimento, temos que:

	0°	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**
sen	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	0	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para que você não fique decorando a tabela acima, no que tange aos ângulos 120°, 135° e 150°, podemos destacar algumas relações importantes. Veja:

$$\begin{cases} sen30° = sen150° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ suplementares \\ sen45° = sen135° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ suplementares \\ sen60° = sen120° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ suplementares \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos30° = -cos150° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ suplementares \\ cos45° = -cos135° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ suplementares \\ cos60° = -cos120° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ suplementares \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen30° = cos60° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ complementares \\ sen45° = cos45° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ complementares \\ sen0° = cos90° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ complementares \\ sen90° = cos0° \longrightarrow pois\ os\ ângulos\ são\ complementares \end{cases}$$

TOME NOTA!

Um triângulo bastante conhecido é o **Egípcio**. Nele, temos um ângulo reto, um valendo 30° e outro valendo 60°. Veja:

- Lado oposto a 30° : Será a metade da hipotenusa.

- Lado oposto a 60º : Será a metade da hipotenusa multiplicado por $\sqrt{3}$.

TOME NOTA!

Temos ainda os queridos triângulos pitagóricos. Os triângulos pitagóricos são triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros.

Tomemos x e y inteiros, e os lados de um triângulo retângulo iguais a: $x^2 + y^2$, $2xy$ e $x^2 - y^2$.

Sabendo que $x > y$, e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(x^2 + y^2)^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^2$$

$$2x^2y^2 = 2x^2y^2 \Longrightarrow 0 = 0 \quad (IGUALDADE)$$

Assim:

Todo triângulo que possuir lados que possam ser expressos da forma da figura anterior, será chamado pitagórico.

O mais famoso é o triângulo 3, 4 e 5. Veja:

$$5^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow 25 = 25$$

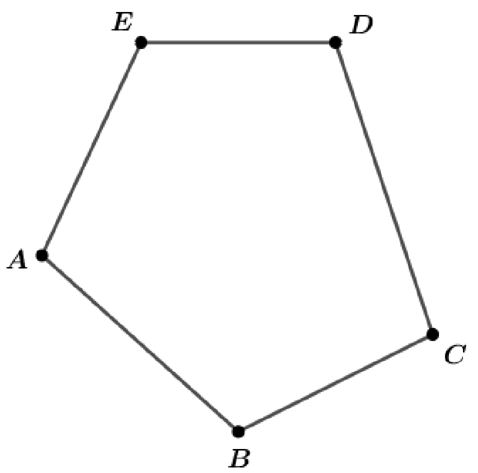
Destaco ainda que o triângulo cujos lados são proporcionais, serão semelhantes entre si.

$$\begin{cases} (3,4,5) \\ (6,8,10) \\ (9,12,15) \end{cases} \Rightarrow \text{São exemplos de Pitágoras semelhantes}$$

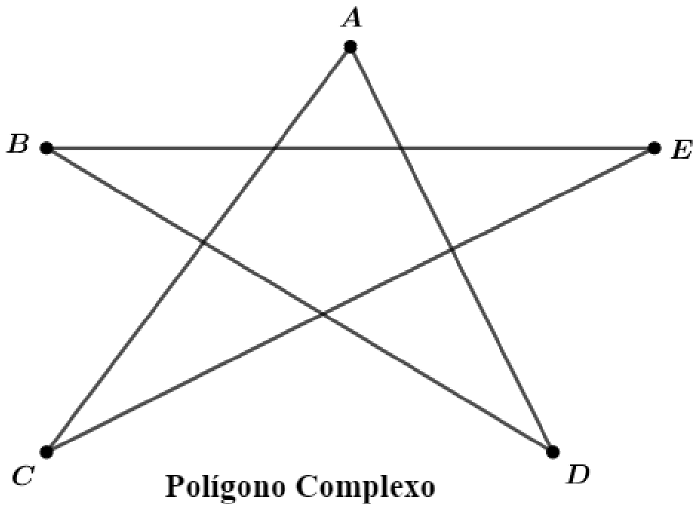
5. Polígonos

Polígonos são figuras geométricas planas e fechadas que são formadas por segmentos de retas chamados de lados. A condição de um polígono é $n \geq 3$, sendo n seu número de lados.

Podemos ter polígonos simples ou complexos. Os polígonos são simples quando seus lados não se cruzam, caso contrário, eles são complexos. Veja:

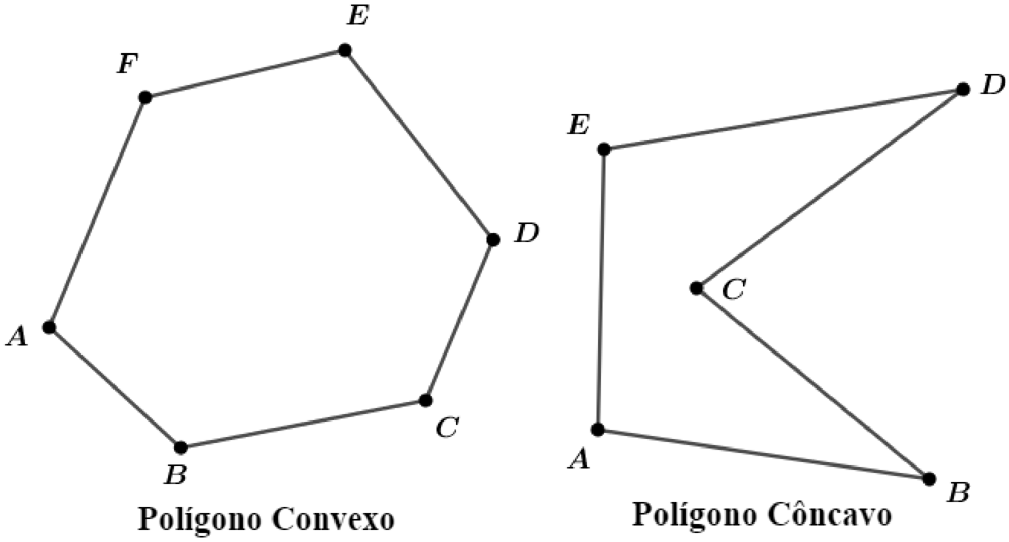


Polígono Simples



Polígono Complexo

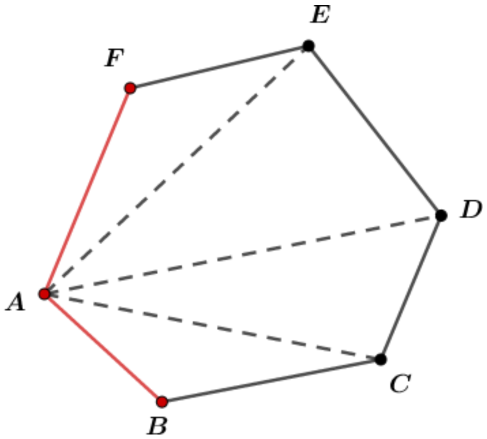
Polígonos também podem ser convexos ou côncavos.



5.1 – Polígonos Simples Convexo

- **Classificação**

Um polígono recebe as seguintes denominações dependendo do seu número de lados:



Nesse caso, temos 6 lados e 6 vértices. O número de diagonais que partem do vértice A é igual a $6 - 3 = 3$ (nessa contagem, desconsideramos os vértices A, B e F).

Então, se queremos calcular o número total de diagonais de um polígono de n lados, devemos contar o número de diagonais que podem ser formados em cada vértice. Sabemos que cada vértice possui $n - 3$ diagonais, assim, considerando todos os vértices do polígono, temos $n(n - 3)$ diagonais. Mas, nesse número, estamos contando duas vezes as diagonais, no exemplo acima, temos a diagonal que parte do vértice A e termina no vértice E e a diagonal que parte de E e termina em A.

Portanto, devemos dividir $n(n-3)$ por 2:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

- Soma dos ângulos internos e externos

Seja P_n um polígono convexo de n lados, então, se S_i é a soma dos seus ângulos internos e S_e é a soma dos seus ângulos externos, temos:

$$S_i = (n-2).180°$$

$$S_e = 360°$$

5.2 – Polígonos Regulares

- **Definição**

Um polígono é considerado regular se ele for equilátero e equiângulo. Por exemplo, um triângulo equilátero possui todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes, logo, ele é um polígono regular.

- **Fórmula dos Ângulos Internos e Externos**

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a \Rightarrow \underbrace{n.a}_{S_i} = (n-2).180°$$

$$\therefore a = \frac{n-2}{n}.180°$$

Analogamente para o ângulo externo θ_1:

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta \Rightarrow \underbrace{n.\theta}_{S_e} = 360°$$

$$\therefore \theta = \frac{360°}{n}$$

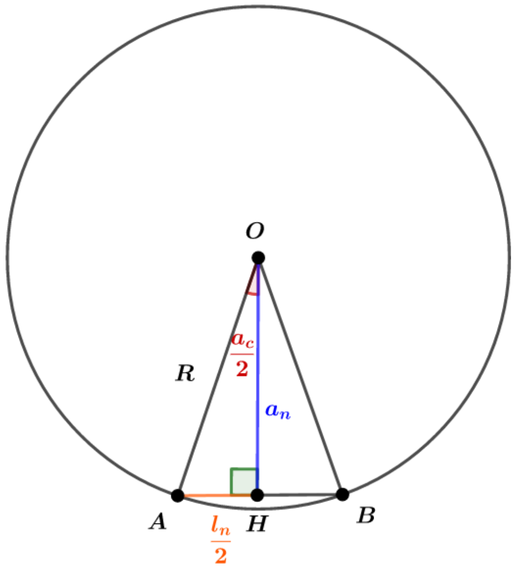
Destaco para vocês duas Propriedades:

Todo polígono regular é inscritível.

Todo polígono regular é circunscritível.

- **Comprimento da Circunferência**

Vimos que o lado de um polígono regular de n lados é dado por:



$$C = 2\pi R$$

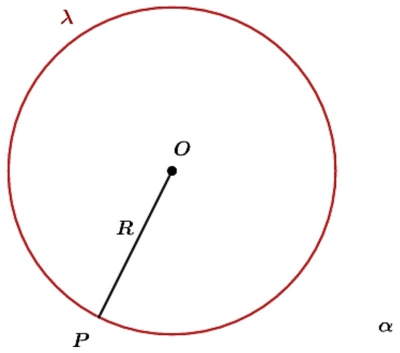
6 – Lugar Geométrico

Lugar geométrico é o conjunto de pontos de um plano com uma determinada propriedade.

Vamos estudar os principais:

6.1 - Circunferência

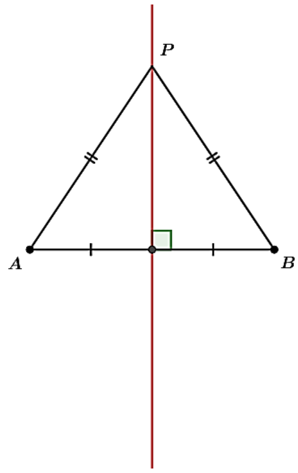
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que distam R de um ponto fixo O. Sejam λ, α, O e R, a circunferência, o plano, o centro e o raio, respectivamente. Em símbolos, o LG da circunferência pode ser escrito como:



$$\lambda = \{p \in \alpha \,|\, OP = R\}$$

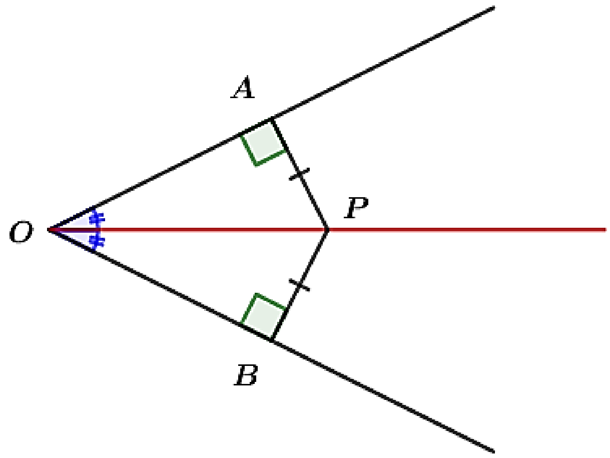
6.2 - Mediatriz

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam das extremidades de um segmento.



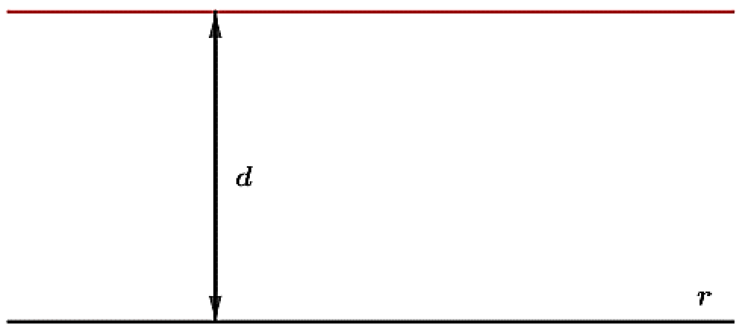
6.3 - Bissetriz

É o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de duas retas concorrentes. Consequentemente, esse LG divide o menor ângulo entre as retas concorrentes em duas partes iguais.



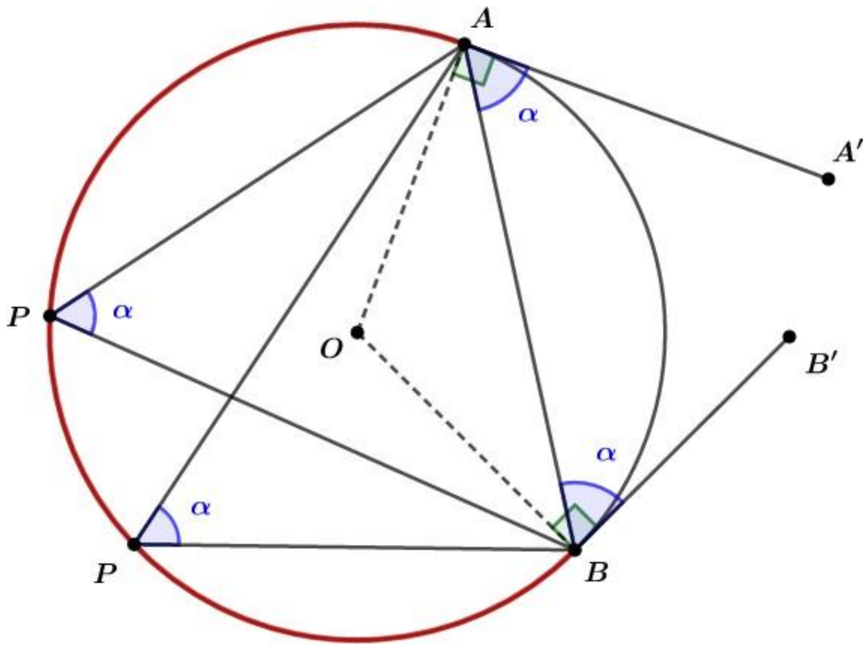
6.4 – Par de Retas Paralelas

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam d de uma reta.



6.5 – Arco Capaz e Ângulos na Circunferência

É o lugar geométrico dos pontos que “enxergam” o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α dado.

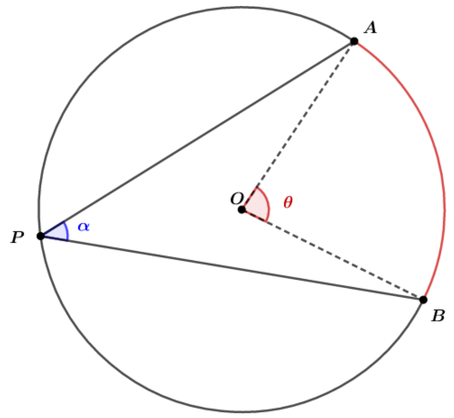


Todos os pontos P pertencentes à região vermelha da circunferência são pontos do arco capaz. Perceba que quando $P \equiv A$ ou $P \equiv B$, temos que os segmentos de reta AA' e BB' tangenciam a circunferência nos pontos A e B, respectivamente. Nesses pontos, eles também enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α.

Outro ponto a se notar é que toda reta tangente a uma circunferência forma um ângulo reto com o segmento de reta que liga o ponto de tangência ao centro da circunferência.

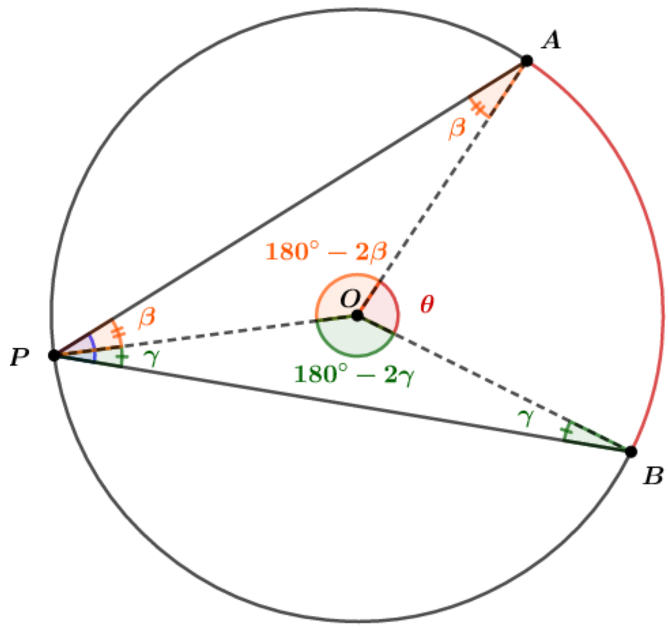
Podemos encontrar uma relação entre α e o menor arco de $\widehat{AB}$

Sabemos que o ângulo do centro da circunferência é igual ao ângulo formado pelo arco $\widehat{AB}$



$$\boldsymbol{\theta = \widehat{AB}}$$

Podemos traçar o segmento de reta que liga o ponto P ao centro O. Como $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$, formamos dois triângulos isósceles $OPA\ e\ OPB$



Perceba que $A\hat{P}B = \alpha = \beta + \gamma$. Analisando o centro da circunferência, vemos que:

$$\theta + 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360°$$

$$\theta = 2(\beta + \gamma)$$

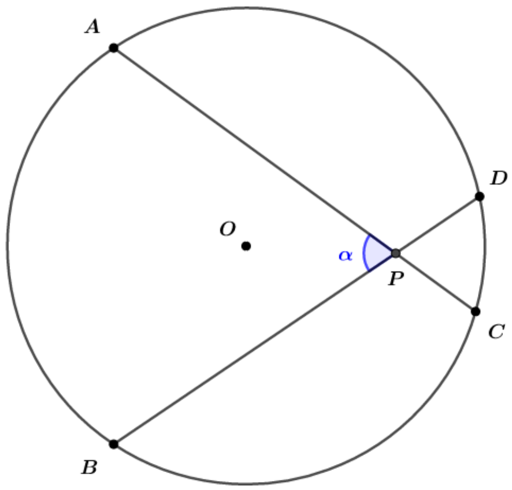
$$\theta = 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

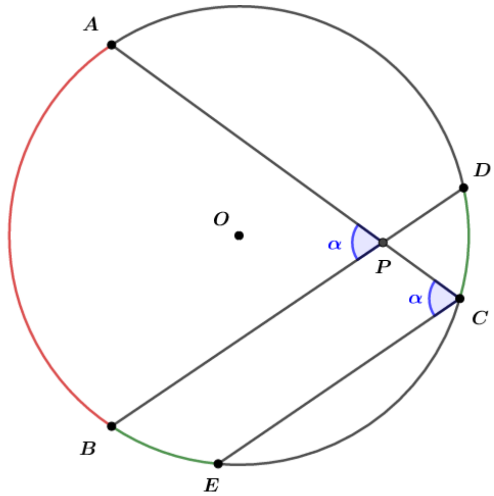
Além desse caso, temos outros dois:

P pode estar localizado no interior da circunferência ou P pode estar no exterior da circunferência.

➢ Para o caso de P interno à circunferência:



Nesse caso, podemos traçar um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{BD}$ e que passe por C

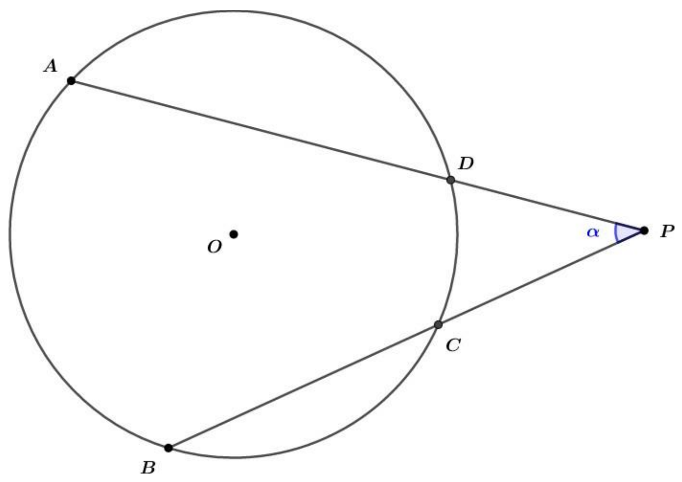


Como $EC//BD$, temos $E\hat{C}A \equiv B\hat{P}A$ a medida dos arcos $\widehat{BE}$ e $\widehat{CD}$ são iguais. Assim, podemos ver que:

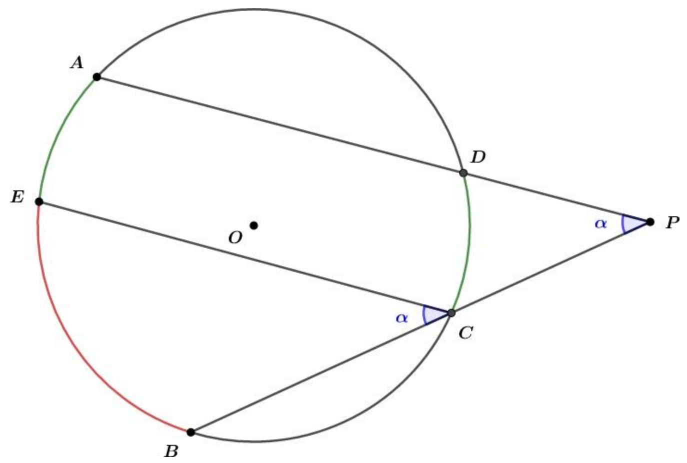
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BE}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

➢ Para o caso de P externo à circunferência:



Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{AE}$



Como $CE//AD$, temos $E\hat{C}B \equiv A\hat{P}B$ e $\widehat{AE} \equiv \widehat{CD}$. Desse modo:

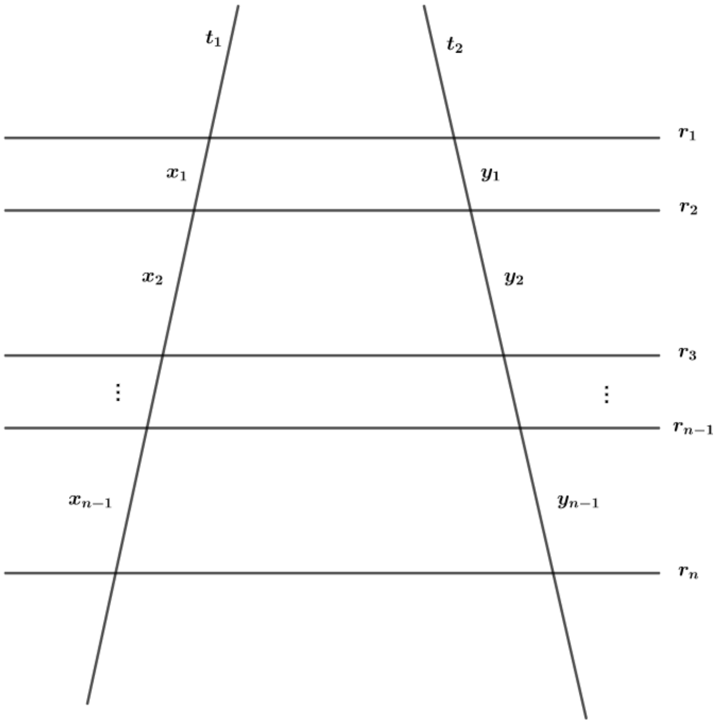
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

7. Teorema de Tales

O Teorema de Tales afirma que dado um feixe de retas paralelas, os segmentos de retas transversais a estas retas são proporcionais entre si.

Sejam as retas $r_1 // r_2 // r_3 // \ldots // r_n$ e $k \in \mathbb{R}_+^*$, então:

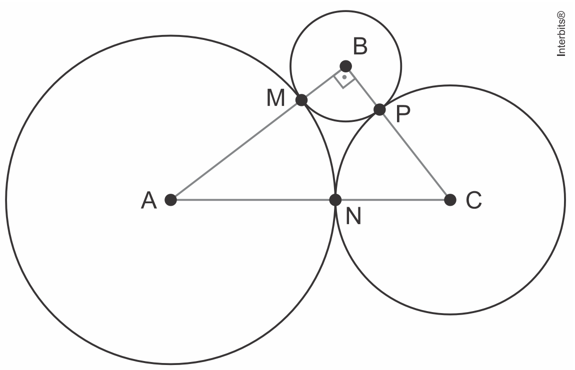


$$\boldsymbol{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = k}$$

t_1 e t_2 são as retas transversais ao feixe de retas paralelas.

8. Lista de Questões

1. (Uerj 2019) A figura ilustra três circunferências, de raios $1, 2$ e $3,$ tangentes duas a duas nos pontos M, N e $P.$



O comprimento do segmento de reta MN é igual à raiz quadrada de:

a) $3,6$

b) $3,8$

c) $4,2$

d) $4,4$

---

2. (Ueg 2019) Três ruas paralelas são cortadas por duas avenidas transversais nos pontos A, B e C da Avenida 1 e nos pontos D, E e F da Avenida 2, de tal forma que $AB = 90\text{ m},$ $BC = 100\text{ m},$ $DE = x$ e $EF = 80\text{ m}.$

Nessas condições, o valor de x é

a) 62 m

b) 60 m

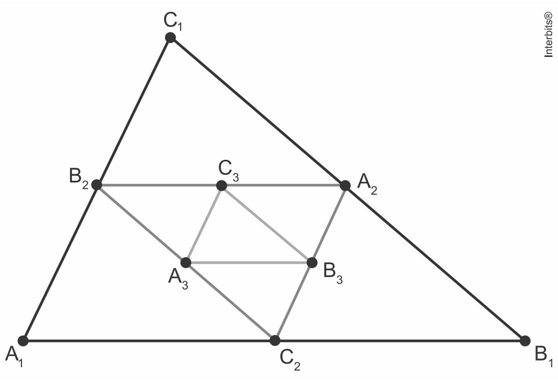
c) 72 m

d) 74 m

e) 68 m

---

3. (Uerj 2019) Os triângulos $A_1B_1C_1,$ $A_2B_2C_2,$ $A_3B_3C_3,$ ilustrados abaixo, possuem perímetros $p_1, p_2, p_3,$ respectivamente. Os vértices desses triângulos, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior.

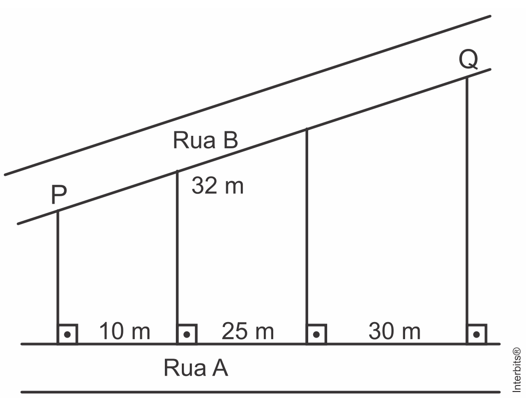


Admita que $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = 7$ e $\overline{A_1C_1} = 4.$

Assim, (p_1, p_2, p_3) define a seguinte progressão:
a) aritmética de razão $= -8$
b) aritmética de razão $= -6$
c) geométrica de razão $= \frac{1}{2}$
d) geométrica de razão $= \frac{1}{4}$

---

4. (cotil 2019) Com a urbanização, as cidades devem melhorar sua infraestrutura, como, por exemplo, fazendo mais vias asfaltadas. Sendo assim, a figura abaixo mostra a rua $B,$ que precisa ser asfaltada do ponto P até o ponto $Q.$ Na rua $A,$ já asfaltada, há três terrenos com frente para a rua B e para rua $A.$ As divisas dos lotes são perpendiculares à rua $A.$ As frentes dos lotes $1, 2$ e $3,$ para a rua $A,$ medem, respectivamente, $10\text{ m}, 25\text{ m}$ e $30\text{ m}.$ A frente do lote 2 para a rua B mede $32\text{ m}.$



Quantos metros de asfalto serão necessários?

a) 65 m

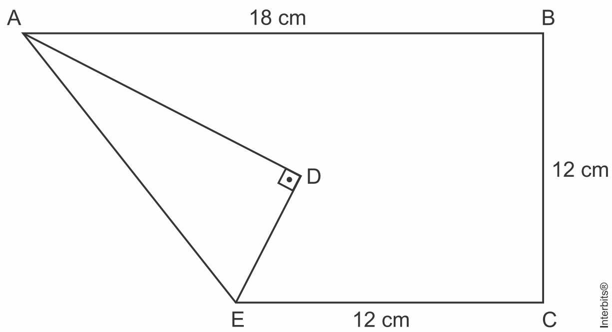
b) 72 m

c) $38{,}4\text{ m}$

d) $83{,}2\text{ m}$

---

5. (Enem 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por $12\text{ cm}.$ Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

a) $2\sqrt{22}\text{ cm}.$

b) $6\sqrt{3}\text{ cm}.$

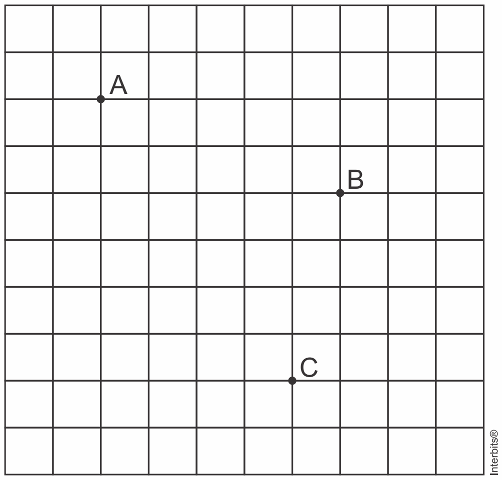
c) $12\text{ cm}.$

d) $6\sqrt{5}\text{ cm}.$

e) $12\sqrt{2}\text{ cm}.$

---

6. (cmrj 2019) A figura abaixo apresenta 100 quadrados de lado medindo $1\text{cm}.$ Uma formiga saiu do ponto $A,$ passou pelo ponto B e foi até o ponto $C.$ Se ela tivesse seguido o caminho em linha reta de A até $C,$ teria percorrido



a) $\sqrt{13}$ cm

b) $2\sqrt{13}$ cm

c) 8 cm

d) 10 cm

e) 52 cm

---

7. (cftmg 2019) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos mede 9 cm. S é a soma dos senos dos ângulos agudos desse triângulo. Pode-se afirmar, corretamente, que

a) $0 < S \leq 0{,}5$.

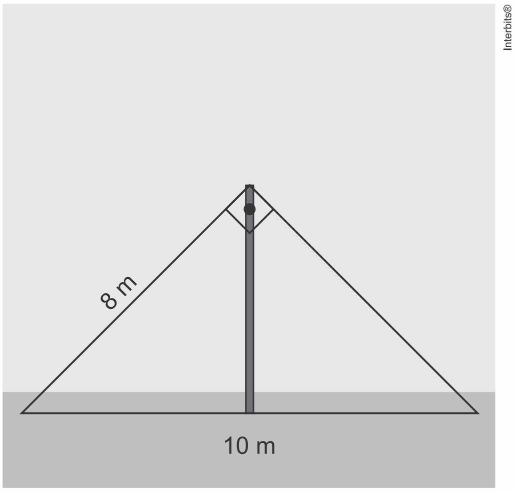
b) $0{,}5 < S \leq 1{,}0$.

c) $1{,}0 < S \leq 1{,}5$.

d) $1{,}5 < S < 2{,}0$.

---

8. (ifsc 2019) Para instalar uma antena parabólica utiliza-se um poste sustentado por dois cabos, como indicado na figura abaixo. Calcule a altura aproximada deste poste.



Assinale a alternativa **CORRETA**.

a) $6,00\text{ m}$

b) $6,24\text{ m}$

c) $8,00\text{ m}$

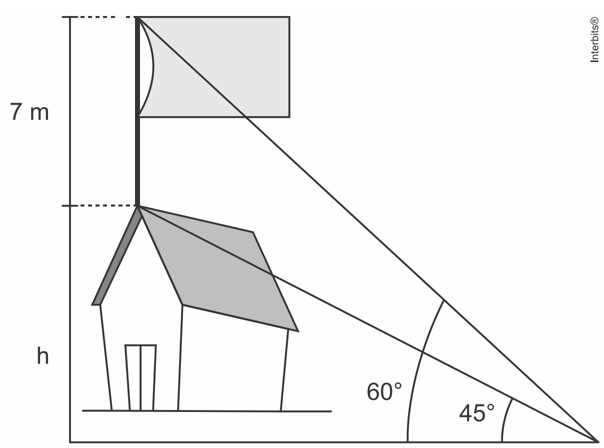
d) $8,36\text{ m}$

e) $9,43\text{ m}$

---

9. (cp2 2019) A haste (de 7 m de comprimento) de uma bandeira está apoiada, verticalmente, sobre o telhado de uma escola. De um ponto do plano horizontal onde a escola se situa, avistam-se a ponta superior e a base dessa haste, em ângulos de 60° e 45°, respectivamente, conforme mostra a figura:

Considere: $\sqrt{3} \cong 1,7$

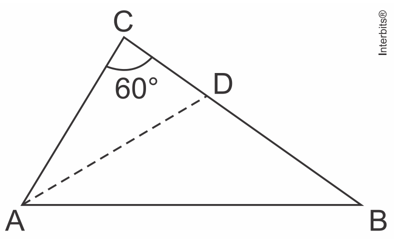


A altura aproximada da escola, em metros, é

a) 4.
b) 7.
c) 10.
d) 17.

---

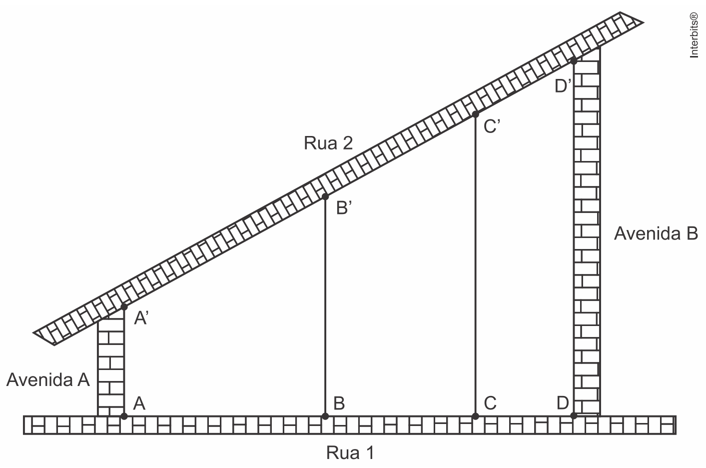
10. (Unicamp 2019) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e $\overline{AD} = \overline{DB}$.



O ângulo interno em A é igual a
a) $60°$.
b) $70°$.
c) $80°$.
d) $90°$.

---

11. (Ufu 2018) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio $ADD'A'$, com $\overline{AD} = 90\text{ m}$ e $\overline{A'D'} = 135\text{ m}$, como mostra o esquema da figura abaixo.



Tal área foi dividida em terrenos $ABB'A', BCC'B'$ e $CDD'C'$, todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $\overline{AB} = 40\text{ m}, \overline{BC} = 30\text{ m}$ e $\overline{CD} = 20\text{ m}$.

De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $\overline{A'B'} - \overline{C'D'}$ é igual a

a) 20.

b) 30.

c) 15.

d) 45.

---

12. (Puccamp 2018) Quando a dimensão da tela de uma TV é indicada em polegadas, tal valor se refere à medida da diagonal do retângulo que representa a tela. Considere uma TV retangular de 16 *polegadas* e outra de 21 *polegadas.* Se as telas das duas TVs são retângulos semelhantes, então, a área da maior tela supera a da menor em, aproximadamente,

a) 36%.

b) 31%.

c) 72%.

d) 76%.

e) 24%.

---

13. (ifal 2018) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $13\text{ cm}.$ Determine o valor da medida do cateto maior sabendo que o cateto menor mede $5\text{ cm}.$

a) $6\text{ cm}.$

b) $8\text{ cm}.$

c) $10\text{ cm}.$

d) $11\text{ cm}.$

e) $12\text{ cm}.$

---

14. (Mackenzie 2018) Em um triângulo retângulo $ABC,$ reto em $B,$ as medidas de seus lados AB, BC e AC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão $3.$ Então, das alternativas abaixo, as medidas de AB, BC e AC são, respectivamente,

a) $3, 6$ e 9

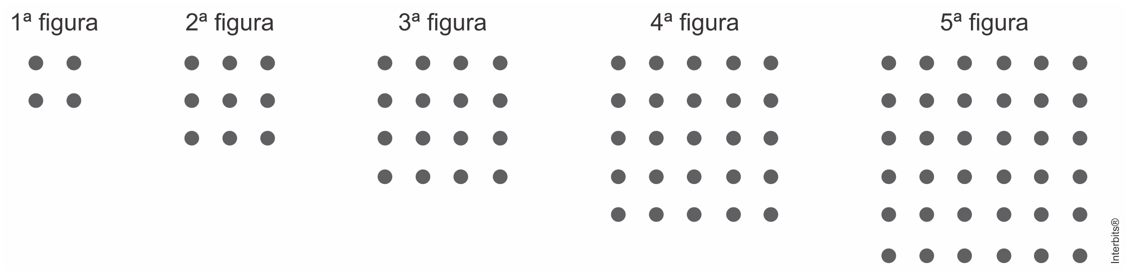
b) $6, 9$ e 12

c) $9, 12$ e 15

d) $12, 15$ e 18

e) $15, 18$ e 21

15. (Uerj 2018) Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas.



Observe que os números inteiros $3^2, 4^2$ e 5^2, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao Teorema de Pitágoras. Dessa forma $(3, 4, 5)$ é uma tripla pitagórica.

Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e n^a figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de n igual a:

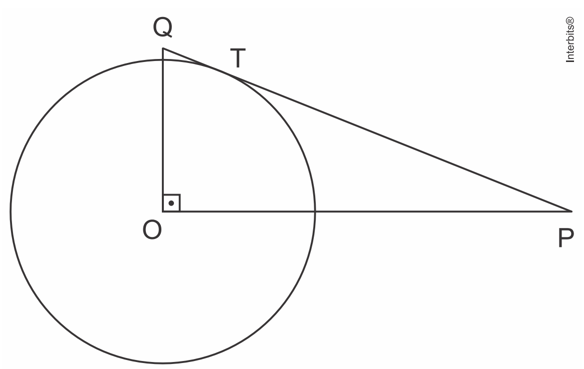
a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

16. (Udesc 2018) Na figura abaixo sem escala, o raio da circunferência de centro O é $r = 3\text{ cm}$ e o segmento $\overline{OP}$ mede 5 cm.



Sabendo que o segmento $\overline{PQ}$ tangencia a circunferência no ponto T, pode-se dizer que o segmento $\overline{OQ}$ mede:

a) $1{,}25\text{ cm}$

b) 5 cm

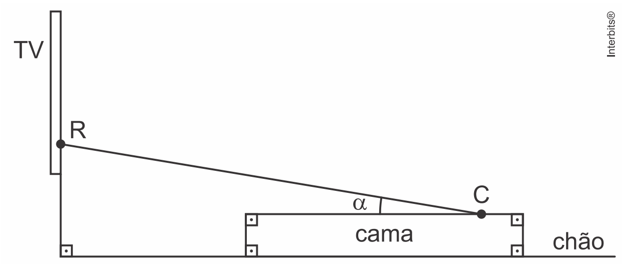
c) 3,75 cm

d) 4 cm

e) 3,5 cm

---

17. (Puccamp 2018) Paulo está deitado na cama e assistindo à TV. Na figura, C representa um ponto sobre a cama a partir do qual o controle remoto da TV foi acionado na direção do receptor de sinal indicado por R. A medida do ângulo entre a linha que representa o sinal transmitido e a cama é igual a á.



Dados:

α	$11,3°$	$11,5°$	$12,1°$	$12,4°$	$78,5°$
sen α	0,196	0,199	0,210	0,215	0,980
cos α	0,981	0,980	0,978	0,977	0,199
tg α	0,200	0,203	0,214	0,220	4,915

Sabe-se, ainda, que:

- R está a 1,2 m do chão;
- a altura da cama em relação ao chão é de 40 cm;
- C está a 4 metros de distância da parede em que a TV está fixada;
- a espessura da TV é desprezível.

Nas condições descritas e consultando a tabela, α é igual a

a) $78,5°$

b) $11,5°$

c) $12,1°$

d) $12,4°$

e) $11{,}3°$

---

18. (Uece 2018) Se a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, o valor do seno do menor dos ângulos internos desse triângulo é

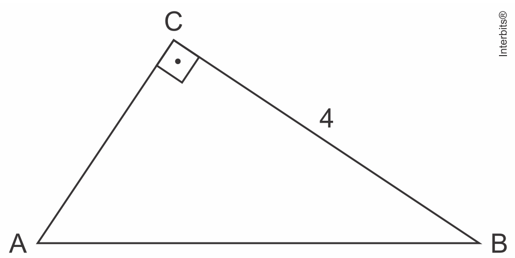
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. (Mackenzie 2018)



Na figura acima, o triângulo ABC é retângulo em C e sua área vale 6, então o valor do $\text{sen}\hat{B}$ é

a) $\frac{3}{5}$

b) 1

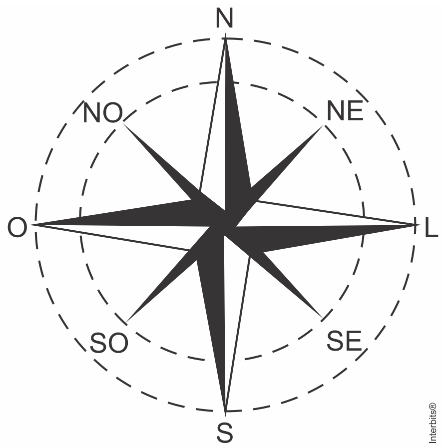
c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{5}$

---

20. (Enem 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?
a) 75° no sentido horário.
b) 105° no sentido anti-horário.
c) 120° no sentido anti-horário.
d) 135° no sentido anti-horário.
e) 165° no sentido horário.

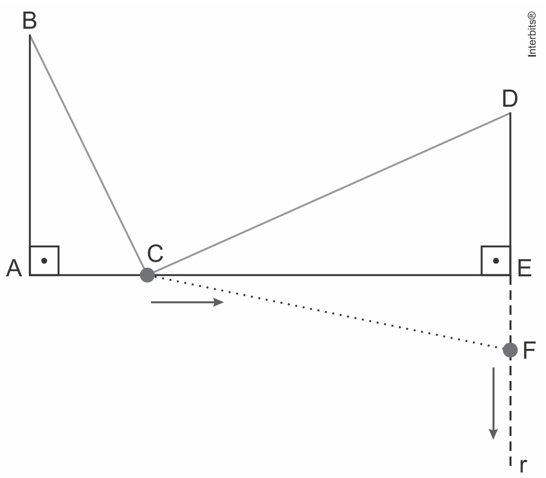
---

21. (Uece 2018) Considere um hexágono regular com centro no ponto O, cuja medida do lado é igual a $2\,m$. Se U e V são dois vértices consecutivos desse hexágono, e se a bissetriz do ângulo $O\hat{U}V$ intercepta o segmento OV no ponto W, então, a medida em metros do perímetro do triângulo UVW é
a) $(3+\sqrt{5})$.
b) $(2+\sqrt{5})$.
c) $(3+\sqrt{3})$.
d) $(2+\sqrt{3})$.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
Considere o texto e a imagem a seguir para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Na figura, BAC e DEC são triângulos retângulos em $\hat{A}$ e $\hat{E}$, com $AB = 15$ cm, $ED = 10$ cm e $AE = 30$ cm. O ponto C pertence a $\overline{AE}$ e o ponto F pertence a r, que é reta suporte de $\overline{DE}$.

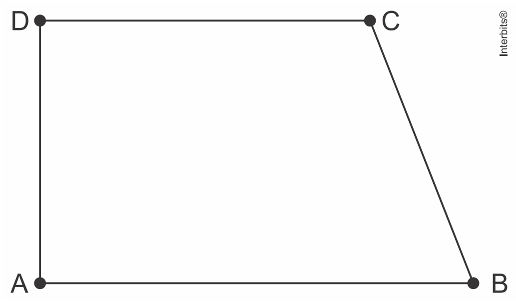
O ponto C pode mover-se ao longo de $\overline{AE}$, e o ponto F pode mover-se ao longo de r, como mostra a figura.



A partir dessas condições, demonstra-se facilmente que $BC + CD$ será mínimo na circunstância em que o triângulo DCF é isósceles de base $\overline{DF}$.

22. (Insper 2018) A medida de $\overline{BD}$, em centímetros, é igual a
a) $5\sqrt{53}$
b) $5\sqrt{37}$
c) $6\sqrt{26}$
d) $5\sqrt{41}$
e) $18\sqrt{3}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
O trapézio retângulo ABCD da figura representa a superfície de um reservatório de água.
Na figura, tem-se que:



$AB = 20 \text{ m};$
$CD = 15 \text{ m};$
$AD = 12 \text{ m};$
o ângulo $D\hat{A}B$ é reto.

23. (cps 2018) Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de
a) $60.$
b) $59.$
c) $58.$
d) $57.$
e) $56.$

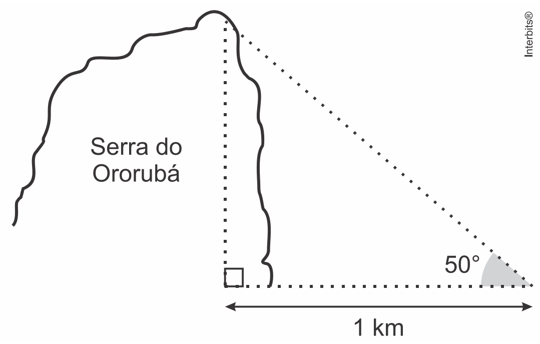
---

24. (ifsp 2017) O perímetro de um triângulo é de $36 \text{ dm}.$ As medidas são expressas por três números inteiros e consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta quanto mede o **menor** lado do triângulo.
a) $9 \text{ dm}.$
b) $10 \text{ dm}.$
c) $11 \text{ dm}.$
d) $12 \text{ dm}.$
e) $13 \text{ dm}.$

---

25. (ifpe 2017) O professor de matemática do *Campus* Pesqueira lançou um desafio à turma de Edificações: estimar a altura da Serra do Ororubá utilizando apenas um transferidor. Sara, aluna da turma, lembrou que existe uma placa turística a 1km de distância da serra de onde se consegue enxergar o cume da Serra. Chegando a esta placa, Sara, com o transferidor perpendicular ao solo, estimou um ângulo de $50°$ entre a base e o cume da Serra do Ororubá. Sabendo que $\operatorname{sen} 50° = 0,77;$ $\cos 50° = 0,64;$ $\operatorname{tg} 50° = 1,19;$ e tomando como referência o esquema mostrado na figura abaixo, certo

que Sara não errou os cálculos, qual é a altitude estimada da Serra do Ororubá calculada por ela?



a) 1.000 m

b) 640 m

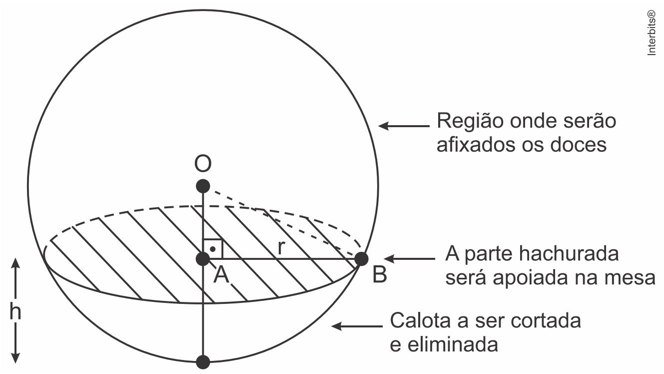
c) 770 m

d) 1.190 m

e) 830 m

---

26. (Enem 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo $10\text{ cm},$ o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos $3\text{ cm}.$ Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura $h,$ em centímetro, igual a

a) $5-\dfrac{\sqrt{91}}{2}$

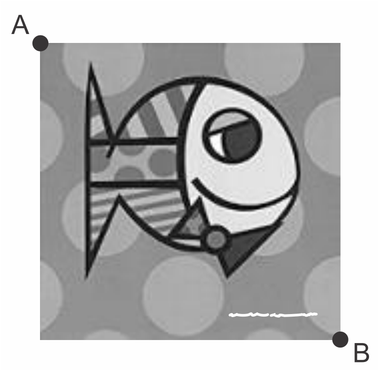
b) $10-\sqrt{91}$

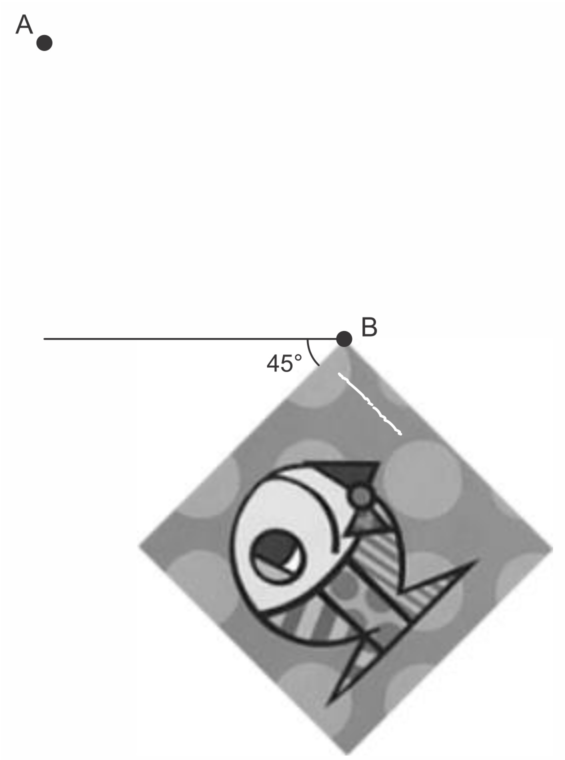
c) 1

d) 4
e) 5

---

27. (Enem 2017) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.
Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de $45°$ com a linha do horizonte.





Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°.

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

a) 90° no sentido horário.
b) 135° no sentido horário.
c) 180° no sentido anti-horjrio.
d) 270° no sentido anti-horário.
e) 315° no sentido horário.

---

28. (ifce 2016) O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

a) 64 cm e 32 cm.
b) 60 cm e 48 cm.
c) 48 cm e 24 cm.
d) 96 cm e 48 cm.
e) 96 cm e 64 cm.

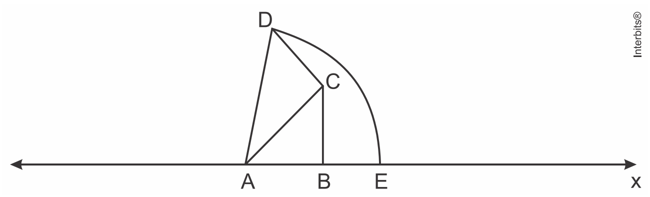
---

29. (ifce 2016) Um retângulo cujo comprimento excede a largura em 2 m está inscrito em um círculo de 5 m de raio. A área desse retângulo, em metros quadrados, vale

a) 56.
b) 35.
c) 48.
d) 50.
e) 64.

---

30. (Ulbra 2016) Considere a construção representada na figura abaixo, sobre o eixo x dos números reais.



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ medem 1 unidade cada um. $\overset{\frown}{DE}$ é um arco de circunferência de centro em A. Qual número real está associado ao ponto E, no eixo x? Sabe-se que A está na origem do eixo x, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{AC} \perp \overline{CD}$.

a) $\sqrt{6}$.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{5}$.

d) $\sqrt{3}$.

e) $\sqrt{8}$.

---

31. (ifpe 2016) Um fio foi esticado entre as extremidades de duas torres de transmissão. Sabendo que a torre menor tem 16 m de altura, a torre maior tem 21 m de altura e que a distância entre as duas torres é de 12 m, qual é o comprimento do fio?

a) 13 m

b) 5 m

c) 37 m

d) 12 m

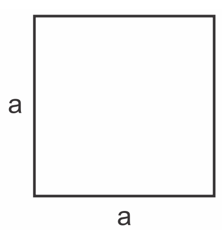
e) 10 m

---

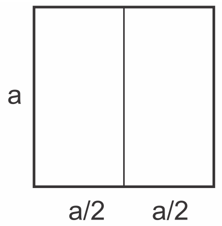
32. (Upf 2016) Um quadrilátero áureo apresenta um valor especial para a razão entre as suas medidas da base (lado maior) e da altura (lado menor).

Os passos para a construção de um quadrilátero áureo são:

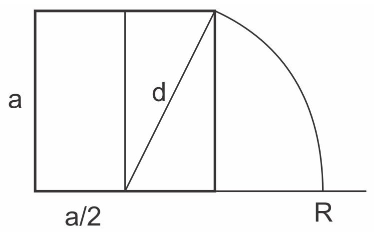
1. Construir um quadrado de lado a.



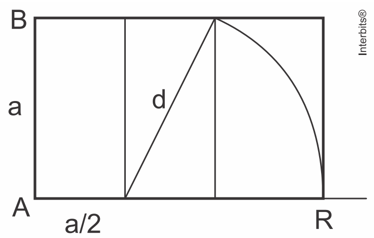
2. Dividir esse quadrado em dois retângulos iguais.



3. Traçar a diagonal do segundo retângulo e, com o compasso, marcar o ponto R sobre a horizontal.



4. Dessa forma, ficam definidas as medidas da base, $\overline{AR} = \frac{a}{2} + d$, e da altura, $\overline{AB} = a$, desse retângulo.



Sendo assim, a razão entre a medida da base e da altura do quadrilátero áureo é:

a) $1+\sqrt{5}$

b) $1+\sqrt{2}$

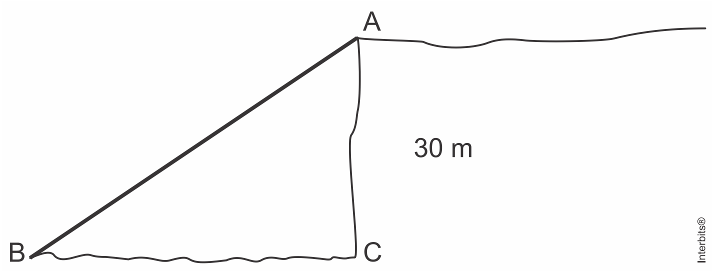
c) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$

---

33. (ifba 2016) Um grupo de corredores de aventura se depara com o ponto A no topo de um despenhadeiro vertical (o ângulo C é reto), ponto este que já está previamente ligado ao ponto B por uma corda retilínea de 60 m, conforme a figura a seguir:



Se a altura $(AC = 30\text{ m})$ do despenhadeiro fosse a metade do que é, o comprimento da corda deveria ser igual a:

a) $15\text{ m}.$

b) $30\text{ m}.$

c) $3\sqrt{15}\text{ m}.$

d) $13\sqrt{15}\text{ m}.$

e) $15\sqrt{13}\text{ m}.$

---

34. (ifce 2016) Um retângulo inscrito em um círculo de raio 5 cm tem um dos lados medindo 2 cm a mais que o outro. A área desse retângulo, em centímetros quadrados, é

a) 30.

b) 56.

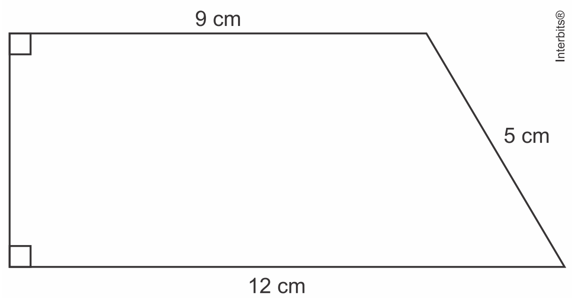
c) 48.

d) 24.

e) 40.

---

35. (Unisinos 2016) Na figura abaixo, temos um trapézio retângulo cujas bases medem 9 cm e 12 cm e cujo lado não perpendicular às bases mede $5\text{ cm}.$



Qual o perímetro, em cm, desse trapézio?

a) 26.

b) 29.

c) 30.

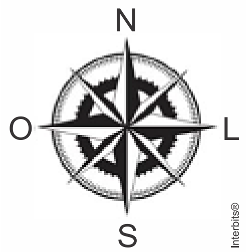
d) 31.

e) 48.

---

36. (ifpe 2016) Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:

1. ande 200 metros na direção NORTE;
2. ande 120 metros na direção LESTE;
3. ande 50 metros na direção SUL;
4. ande 40 metros na direção OESTE.



Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, a distância calculada por Luiz foi de

a) 170 metros.

b) 150 metros.

c) 180 metros.

d) 200 metros.

e) 210 metros.

---

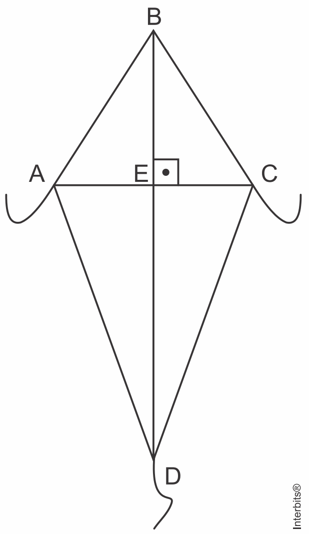
37. (ifal 2016) Um prédio projeta, no chão, uma sombra de 15 metros de comprimento. Sabendo que, nesse momento, o sol faz um ângulo de 45° com a horizontal, determine a altura desse prédio em metros.

a) 10.

b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 30.

---

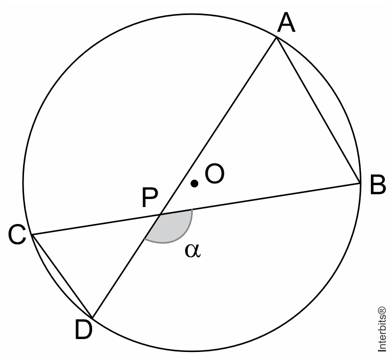
38. (cftmg 2016) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero $ABCD$, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$. A vareta $\overline{BD}$ da pipa intercepta a vareta $\overline{AC}$ em seu ponto médio E, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ usadas são, respectivamente, 25 cm e 20 cm, e a medida de $\overline{AC}$ equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de $\overline{BD}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a
a) 25.
b) 40.
c) 55.
d) 70.

---

39. (Fgv 2016) As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo $B\hat{P}D$, indicado na figura por α, é igual a

a) $120°$.

b) $124°$.

c) $128°$.

d) $130°$.

e) $132°$.

---

40. (Uece 2015) Seja AEC um triângulo isósceles (as medidas dos lados AE e AC são iguais) e O um ponto do lado AC tal que a medida do ângulo $E\hat{O}C$ é 120 graus. Se existe um ponto B, do lado AE, tal que o segmento OB é perpendicular ao lado AE e a medida do ângulo $E\hat{O}B$ seja igual a 40 graus, então a medida do ângulo $O\hat{E}C$, em graus, é igual a

a) 9.

b) 7.

c) 5.

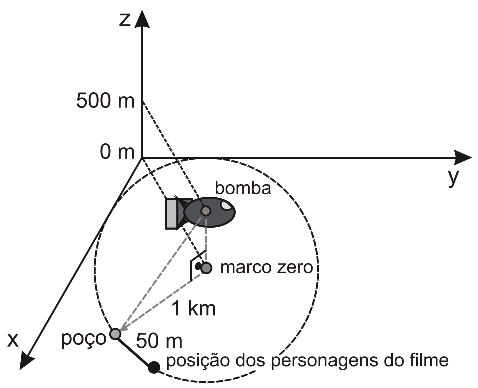
d) 3.

41. (Unesp 2015) Em 09 de agosto de 1945, uma bomba atômica foi detonada sobre a cidade japonesa de Nagasaki. A bomba explodiu a 500 m de altura acima do ponto que ficaria conhecido como "marco zero".

(www.nicholasgimenes.com.br) (http://wemersonjj.blogspot.com.br)

No filme *Wolverine Imortal*, há uma sequência de imagens na qual o herói, acompanhado do militar japonês Yashida, se encontrava a 1 km do marco zero e a 50 m de um poço. No momento da explosão, os dois correm e se refugiam no poço, chegando nesse local no momento exato em que uma nuvem de poeira e material radioativo, provocada pela explosão, passa por eles.

A figura a seguir mostra as posições do "marco zero", da explosão da bomba, do poço e dos personagens do filme no momento da explosão da bomba.



Se os ventos provocados pela explosão foram de $800\,\text{km/h}$ e adotando a aproximação $\sqrt{5} \cong 2{,}24,$ os personagens correram até o poço, em linha reta, com uma velocidade média, em $\text{km/h},$ de aproximadamente

a) 28.

b) 24.

c) 40.

d) 36.

e) 32.

---

42. (Ucs 2015) Uma escada está apoiada em uma parede a uma altura de $16\,\text{m}$ do solo plano. A distância do pé da escada até a parede é igual a $12\,\text{m}.$ O centro de gravidade da escada está a um terço do comprimento dela, medido a partir do seu apoio no chão. Nessa situação, o comprimento da escada e a altura aproximada do seu centro de gravidade até o chão são, respectivamente, iguais a

a) $20\,\text{m}$ e $5{,}3\,\text{m}.$

b) $20\,\text{m}$ e $6{,}6\,\text{m}.$

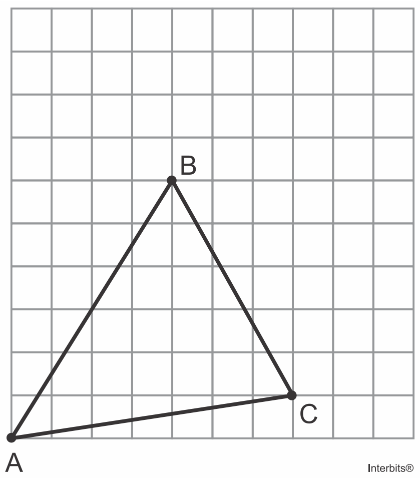
c) $28\,\text{m}$ e $9{,}3\,\text{m}.$

d) $\sqrt{56}\,\text{m}$ e $5{,}3\,\text{m}.$

e) $\sqrt{56}\,\text{m}$ e $2{,}6\,\text{m}.$

---

43. (Uern 2015) Matheus marcou, em uma folha quadriculada de $1 \times 1\text{cm},$ três pontos e ligou-os formando o seguinte triângulo:

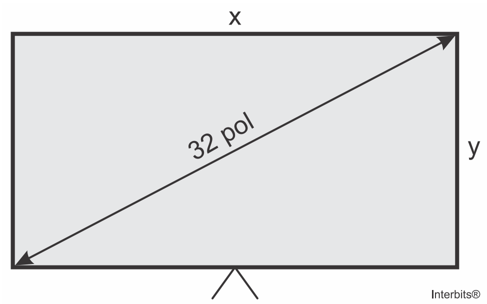


É correto afirmar que o produto dos lados do triângulo é

a) $10\sqrt{13}.$
b) $20\sqrt{17}.$
c) $10\sqrt{221}.$
d) $20\sqrt{221}.$

---

44. (Pucrs 2015) Considere a figura e o texto abaixo.



As medidas de comprimento e largura da tela de uma televisão, em geral, obedecem à proporção $16:9,$ sendo que o número de polegadas $(1\,\text{pol} = 2{,}5\text{ cm})$ desse aparelho indica a medida da diagonal de sua tela.

Considerando essas informações, as medidas do comprimento e da largura, em centímetros, de uma TV de 32 polegadas, como mostra a figura acima, podem ser obtidas com a resolução do seguinte sistema:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

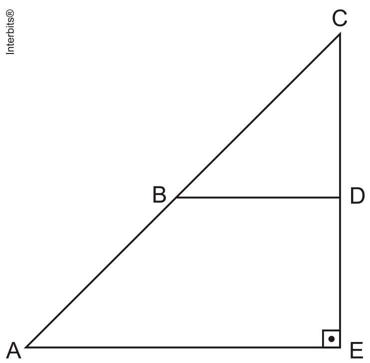
c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 1024 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$

45**.** (Cefet MG 2014) A figura abaixo tem as seguintes características:

- o ângulo $\hat{E}$ é reto;
- o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede

a) 8.

b) 12.

c) 13.

d) $\sqrt{61}$.

e) $5\sqrt{10}$.

46. (ifsc 2014) O município de Mossoró, no estado do Rio Grande do Norte é o maior produtor de sal marinho do Brasil. Esse sal é transportado, por meio terrestre, até a capital do estado, Natal, que fica a, aproximadamente, $200\ \mathrm{km}$ a leste e $150\ \mathrm{km}$ ao sul da cidade de Mossoró, de acordo com mapa abaixo:

Imagem disponível em: https://maps.google.com.br/maps?hl=pt-BR&tab=ll Aceso: 13 out. 2013

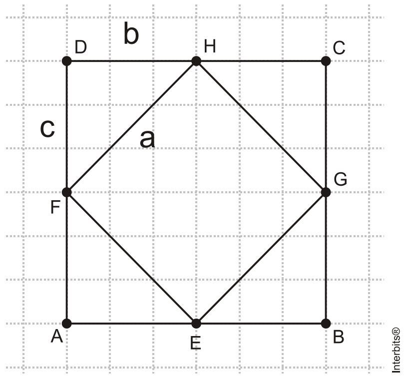
Com base em seus conhecimentos de geometria, é CORRETO afirmar que a distância em linha reta entre as cidades de Mossoró e de Natal, em km, é de:

a) 70
b) 500
c) 450
d) 350
e) 250

47. (ifal 2014) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é $a+3$ e um dos catetos $a-3$. Se o outro cateto vale 18, quanto vale a?

a) 20
b) 22
c) 24
d) 27
e) 30

48. (ifce 2014) Na figura abaixo, o valor da área do quadrado de lado "**a**", em função dos segmentos "**b**" e "**c**", é



a) $b^2 + c^2$
b) $b^2 - c^2$
c) b^2c^2
d) $c^2 - b^2$
e) b^2/c^2

49. (Unifor 2014) Cada pneu traseiro de um trator tem raio $0{,}8\ \text{m}$ e cada pneu dianteiro tem raio $0{,}3\ \text{m}$. Sabendo-se que a distância entre os pontos A e B, onde esses pneus tocam o solo plano, é de $2{,}5\ \text{m}$, a distância x entre os centros dos pneus é de:

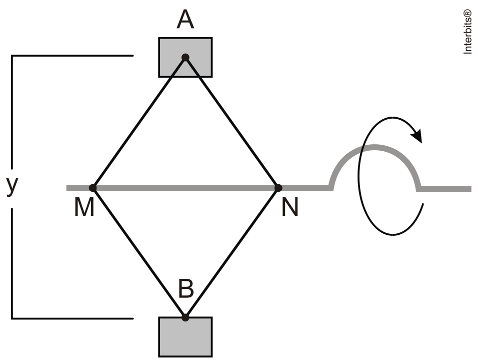
a) $\sqrt{6{,}2}\ \text{m}$
b) $\sqrt{6{,}3}\ \text{m}$
c) $\sqrt{6{,}4}\ \text{m}$
d) $\sqrt{6{,}5}\ \text{m}$
e) $\sqrt{6{,}6}\ \text{m}$

50. (Pucrj 2013) Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou.
Assim, a distância entre a bicicleta e o hidrante passou a ser:
a) 8 metros
b) 10 metros
c) 12 metros
d) 14 metros

e) 16 metros

---

51. (Uerj 2013) Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:



Considere as seguintes medidas: $AM = AN = BM = BN = 4$ dm; $MN = x$ dm; $AB = y$ dm.
O valor, em decímetros, de y em função de x corresponde a:

a) $\sqrt{16-4x^2}$

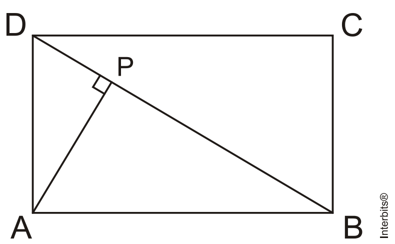
b) $\sqrt{64-x^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{16-4x^2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{64-2x^2}}{2}$

---

52. (Uepb 2013) No retângulo ABCD de lado $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = \sqrt{7}$cm, o segmento AP é perpendicular à diagonal BD.



O segmento BP mede em cm:

a) $\frac{9}{2}$

b) $\frac{7}{4}$

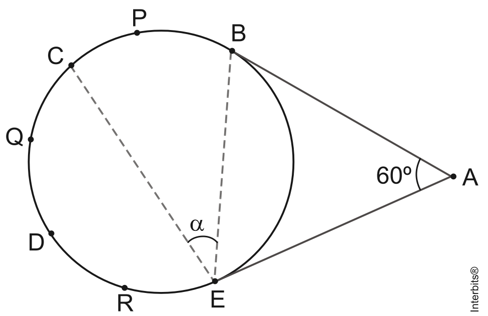
c) $\frac{9}{4}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{4}$

---

53. (Fgv 2013) Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$.



Se os arcos $\overset{\frown}{BPC}$, $\overset{\frown}{CQD}$ e $\overset{\frown}{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a

a) 20°

b) 40°

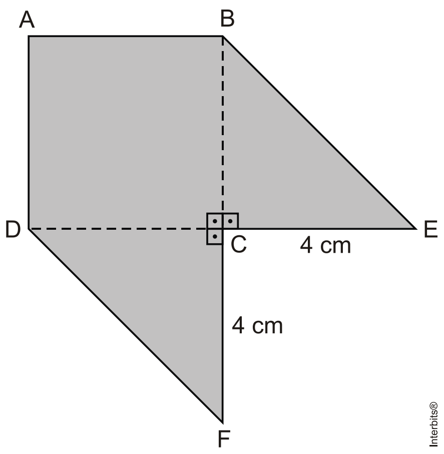
c) 45°

d) 60°

e) 80°

---

54. (Espm 2012) Na figura plana abaixo, ABCD é um quadrado de área 10 cm^2. Os segmentos CE e CF medem 4 cm cada. Essa figura deverá ser dobrada nas linhas tracejadas, fazendo com que os pontos E e F coincidam com um ponto P do espaço.



A distância desse ponto P ao ponto A é igual a:

a) 6 cm

b) 5 cm

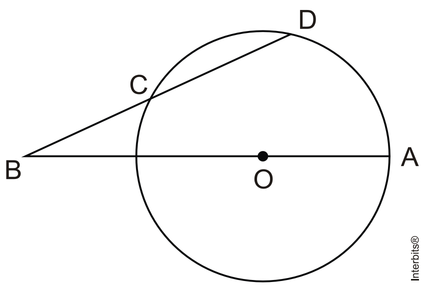
c) $4\sqrt{2}$ cm

d) $5\sqrt{2}$ cm

e) $6\sqrt{2}$ cm

---

55. (Mackenzie 2012) Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = OA, então a razão entre as medidas dos ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ é



a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) 2

d) $\frac{4}{3}$

e) 3

56. (Enem 2012) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3’ 0” a leste do Meridiano de Greenwich. Dado: 1° equivale a 60’ e 1’ equivale a 60”.

PAVARIN, G. *Galileu*, fev. 2012 (adaptado)

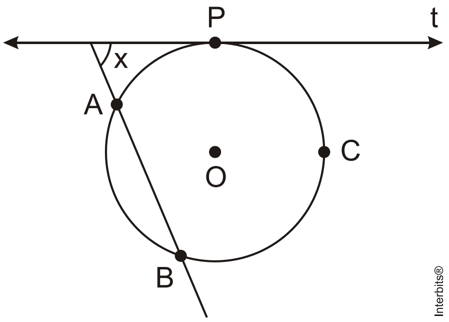
A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é
a) 124,02°.
b) 124,05°.
c) 124,20°.
d) 124,30°.
e) 124,50°.

---

57. (col. naval 2011) ABCD é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferencia, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferencia tangente ao lado AB em A e tangente à K. Nessas condições, o raio da semicircunferencia T será
a) $\frac{5L}{6}$
b) $\frac{4L}{5}$
c) $\frac{2L}{3}$
d) $\frac{3L}{5}$
e) $\frac{L}{3}$

---

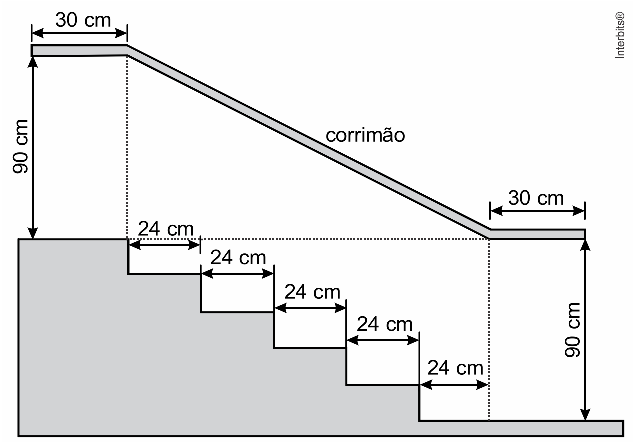
58. (ifsp 2011) Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\widehat{AB}$ é 100º e a do arco $\widehat{BCP}$ é 194º. O valor de x, em graus, é



a) 53.
b) 57.
c) 61.
d) 64.
e) 66.

---

59. (Enem 2006)

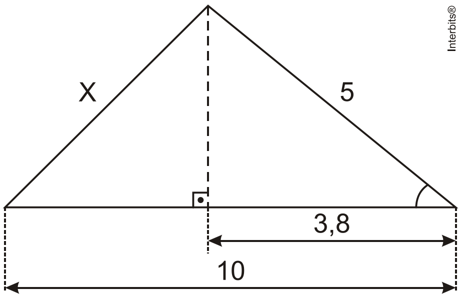


Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a) 1,8 m.
b) 1,9 m.
c) 2,0 m.
d) 2,1 m.
e) 2,2 m.

---

60. (G1 1996) No triângulo da figura a seguir, o valor de x é:



a) 6

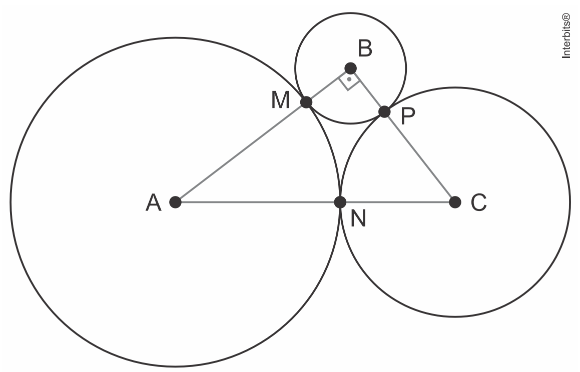
b) 7

c) 8

d) 9

9. Questões Comentadas

1. (Uerj 2019) A figura ilustra três circunferências, de raios $1, 2$ e $3,$ tangentes duas a duas nos pontos M, N e $P.$



O comprimento do segmento de reta MN é igual à raiz quadrada de:

a) $3,6$

b) $3,8$

c) $4,2$

d) $4,4$

Comentário:

Calculando:

$\cos A = \frac{4}{5}$

$\left(\overline{MN}\right)^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot \cos A = 18 - 18\cdot \frac{4}{5} = \frac{18}{5} \Rightarrow \left(\overline{MN}\right)^2 = 3{,}6 \Rightarrow \overline{MN} = \sqrt{3{,}6}$

Gabarito: A

---

2. (Ueg 2019) Três ruas paralelas são cortadas por duas avenidas transversais nos pontos A, B e C da Avenida 1 e nos pontos D, E e F da Avenida 2, de tal forma que $AB = 90\text{ m},$ $BC = 100\text{ m},$ $DE = x$ e $EF = 80\text{ m}.$

Nessas condições, o valor de x é

a) 62 m

b) 60 m

c) 72 m

d) 74 m

e) 68 m

Comentário:

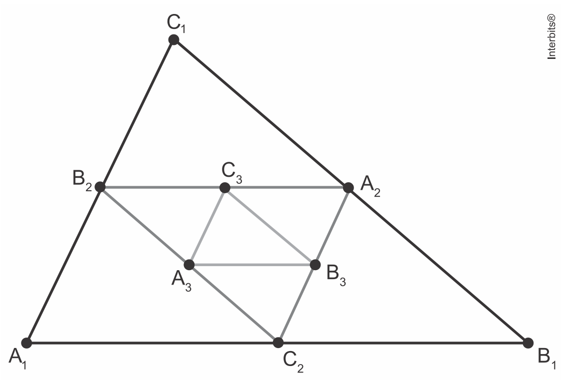
Pelo Teorema de Tales, segue que

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{x}{90} = \frac{80}{100} \Leftrightarrow x = 72\text{ m}.$

Gabarito: C

---

3. (Uerj 2019) Os triângulos $A_1B_1C_1,$ $A_2B_2C_2,$ $A_3B_3C_3,$ ilustrados abaixo, possuem perímetros $p_1, p_2, p_3,$ respectivamente. Os vértices desses triângulos, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior.



Admita que $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = 7$ e $\overline{A_1C_1} = 4.$

Assim, (p_1, p_2, p_3) define a seguinte progressão:

a) aritmética de razão $= -8$

b) aritmética de razão $= -6$

c) geométrica de razão $= \frac{1}{2}$

d) geométrica de razão $= \frac{1}{4}$

Comentário:

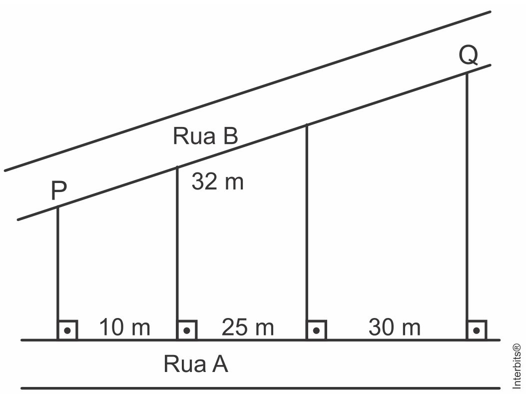
Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = 7+7+4 = 18 \\ p_2 = 3,5+3,5+2 = 9 \\ p_3 = 1,75+1,75+1 = 4,5 \end{array}\right\} \Rightarrow PG \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Gabarito: C

---

4. (cotil 2019) Com a urbanização, as cidades devem melhorar sua infraestrutura, como, por exemplo, fazendo mais vias asfaltadas. Sendo assim, a figura abaixo mostra a rua $B,$ que precisa ser asfaltada do ponto P até o ponto $Q.$ Na rua $A,$ já asfaltada, há três terrenos com frente para a rua B e para rua $A.$ As divisas dos lotes são perpendiculares à rua $A.$ As frentes dos lotes $1, 2$ e $3,$ para a rua $A,$ medem, respectivamente, $10\text{ m}, 25\text{ m}$ e $30\text{ m}.$ A frente do lote 2 para a rua B mede $32\text{ m}.$



Quantos metros de asfalto serão necessários?

a) 65 m

b) 72 m

c) $38,4 \text{ m}$

d) $83,2 \text{ m}$

Comentário:

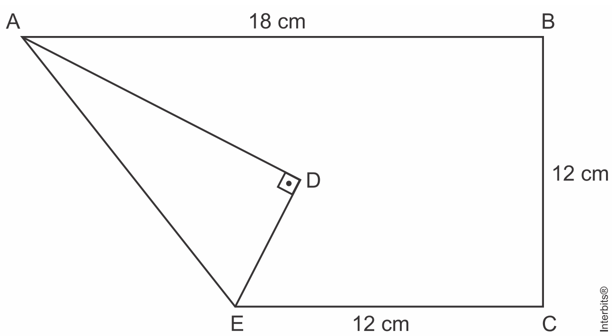
De acordo com o Teorema de Tales, podemos escrever que:

$$\frac{32}{PQ} = \frac{25}{10+25+30} \Rightarrow 25 \cdot PQ = 32 \cdot 65 \Rightarrow PQ = 83,2 \text{ m}$$

Gabarito: D

---

5. (Enem 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

a) $2\sqrt{22}$ cm.

b) $6\sqrt{3}$ cm.

c) 12 cm.

d) $6\sqrt{5}$ cm.

e) $12\sqrt{2}$ cm.

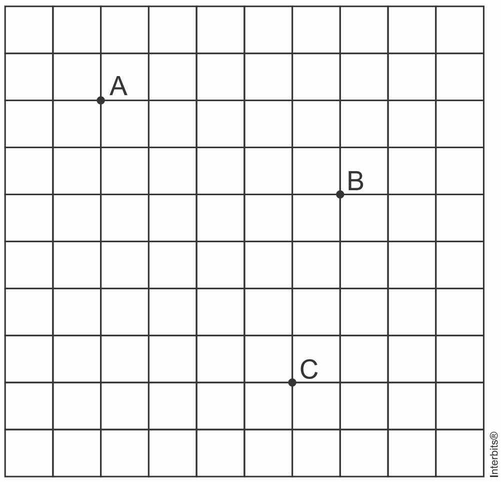
Comentário:

Desde que $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{DC}$, temos $\overline{DE} = 6\,\text{cm}$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 &\Rightarrow \overline{AE}^2 = 12^2 + 6^2 \\ &\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{5 \cdot 36} \\ &\Rightarrow \overline{AE} = 6\sqrt{5}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Gabarito: D

6. (cmrj 2019) A figura abaixo apresenta 100 quadrados de lado medindo $1\,\text{cm}$. Uma formiga saiu do ponto A, passou pelo ponto B e foi até o ponto C. Se ela tivesse seguido o caminho em linha reta de A até C, teria percorrido



a) $\sqrt{13}$ cm

b) $2\sqrt{13}$ cm

c) 8 cm

d) 10 cm

e) 52 cm

Comentário:

Seja D o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta horizontal que passa por C. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = 6^2 + 4^2$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{52}$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{13}\,\text{cm}.$$

Gabarito: B

7. (cftmg 2019) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos mede 9 cm. S é a soma dos senos dos ângulos agudos desse triângulo. Pode-se afirmar, corretamente, que

a) $0 < S \le 0,5$.

b) $0,5 < S \le 1,0$.

c) $1,0 < S \le 1,5$.

d) $1,5 < S < 2,0$.

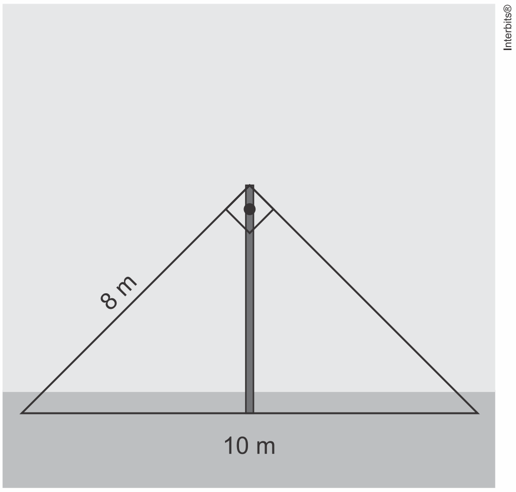
Comentário:

Se a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos mede 9 cm, o outro cateto deve medir 12 cm (derivado do triângulo pitagórico do tipo 3/4/5). Assim, pode-se calcular os senos:

$$S = \frac{12}{15} + \frac{9}{15} = \frac{21}{15} = 1,4 \Rightarrow 1 < S \le 1,5$$

Gabarito: C

8. (ifsc 2019) Para instalar uma antena parabólica utiliza-se um poste sustentado por dois cabos, como indicado na figura abaixo. Calcule a altura aproximada deste poste, sabendo que o triângulo retângulo formado abaixo é isósceles.



Assinale a alternativa **CORRETA**.

a) 6,00 m

b) 6,24 m

c) 8,00 m

d) 8,36 m

e) 9,43 m

Comentário:

Por ser um triângulo isósceles, a altura também é mediana. Assim, a hipotenusa fica dividida em dois segmentos iguais a 5m.

Aplicando Pitágoras, no triângulo menor que possui hipotenusa 8m, temos:

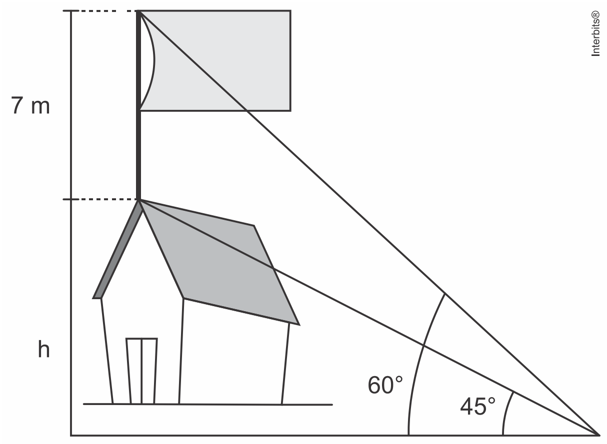
$$8^2 = 5^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = 64 - 25 \Longrightarrow h^2 = 39 \Longrightarrow h \sim 6{,}24m$$

Gabarito: B

---

9. (cp2 2019) A haste (de $7\,\text{m}$ de comprimento) de uma bandeira está apoiada, verticalmente, sobre o telhado de uma escola. De um ponto do plano horizontal onde a escola se situa, avistam-se a ponta superior e a base dessa haste, em ângulos de $60°$ e $45°$, respectivamente, conforme mostra a figura:

Considere: $\sqrt{3} \cong 1{,}7$



A altura aproximada da escola, em metros, é

a) 4.

b) 7.

c) 10.

d) 17.

Comentário:

Calculando:

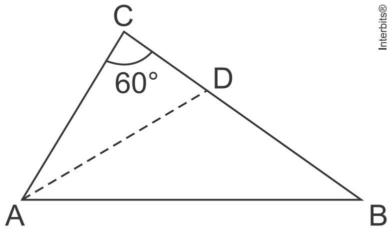
$$\operatorname{tg} 45° = \frac{h}{x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{h+7}{h} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h+7}{h} \Rightarrow h\sqrt{3} - h = 7 \Rightarrow 1{,}7h - h = 7 \Rightarrow h = \frac{7}{0{,}7} = 10$$

Gabarito: C

---

10. (Unicamp 2019) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e $\overline{AD} = \overline{DB}$.



O ângulo interno em A é igual a

a) $60°$.

b) $70°$.

c) $80°$.
d) $90°$.

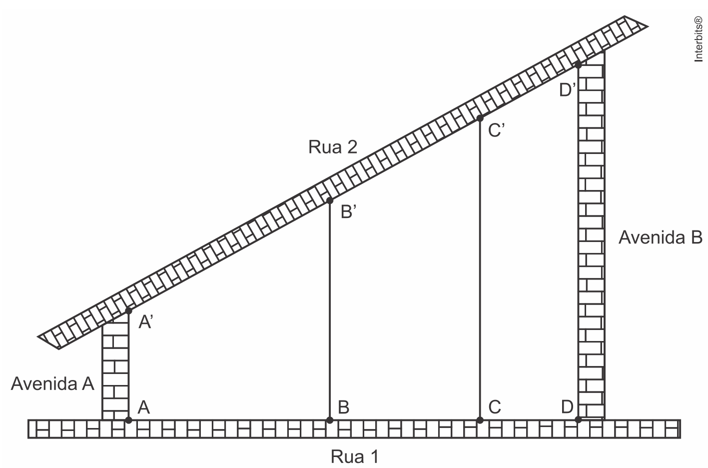
Comentário:

Se $\overline{AD}=\overline{DB}$, então $DAB \equiv DBA$. Ademais, AD é bissetriz de BAC e, portanto, temos $DBA=\frac{1}{2}\cdot BAC$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, vem

$$ABC+BCA+BAC=180° \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot BAC+BAC+60°=180°$$
$$\Leftrightarrow BAC=80°.$$

Gabarito: C

11**.** (Ufu 2018) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio $ADD'A'$, com $\overline{AD}=90\text{ m}$ e $\overline{A'D'}=135\text{ m}$, como mostra o esquema da figura abaixo.



Tal área foi dividida em terrenos $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $CDD'C'$, todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $\overline{AB}=40\text{ m}$, $\overline{BC}=30\text{ m}$ e $\overline{CD}=20\text{ m}$.

De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $\overline{A'B'}-\overline{C'D'}$ é igual a
a) 20.
b) 30.
c) 15.
d) 45.

Comentário:

Pelo Teorema De Tales, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}}{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}}\Leftrightarrow\frac{40}{\overline{A'B'}}=\frac{30}{\overline{B'C'}}=\frac{20}{\overline{C'D'}}=\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}\overline{A'B'}=60\text{ m}\\ \overline{C'D'}=30\text{ m}\end{array}\right..$$

Em consequência, a resposta é $\overline{A'B'}-\overline{C'D'}=60-30=30\text{ m}.$

Gabarito: B

---

12. (Puccamp 2018) Quando a dimensão da tela de uma TV é indicada em polegadas, tal valor se refere à medida da diagonal do retângulo que representa a tela. Considere uma TV retangular de 16 *polegadas* e outra de 21 *polegadas.* Se as telas das duas TVs são retângulos semelhantes, então, a área da maior tela supera a da menor em, aproximadamente,

a) 36%.

b) 31%.

c) 72%.

d) 76%.

e) 24%.

Comentário:

Sendo x e y as dimensões da TV menor, pode-se calcular:

$$16^2=x^2+y^2$$
$$21^2=(kx)^2+(ky)^2=k^2\cdot\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow 21^2=k^2\cdot 16^2\Rightarrow k^2=\left(\frac{21}{16}\right)^2$$
$$A_1=xy$$
$$A_2=kx\cdot ky=k^2\cdot xy=\left(\frac{21}{16}\right)^2\cdot A_1\Rightarrow A_2=1{,}723\cdot A_1\Rightarrow\approx 72\%\text{ de acréscimo}$$

Gabarito: C

---

13. (ifal 2018) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $13\text{ cm}.$ Determine o valor da medida do cateto maior sabendo que o cateto menor mede $5\text{ cm}.$

a) $6\text{ cm}.$

b) $8\text{ cm}.$

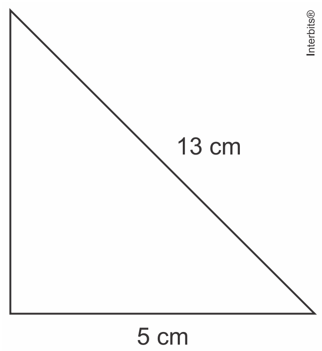
c) $10\text{ cm}.$

d) 11 cm.

e) 12 cm.

Comentário:

Considere a situação:



Aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$
\begin{aligned}
&hip^2 = cat^2 + cat^2\\
&13^2 = 5^2 + cat^2\\
&cat^2 = 169 - 25\\
&cat^2 = 144\\
&cat = \sqrt{144}\\
&cat = 12 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Gabarito: E

14. (Mackenzie 2018) Em um triângulo retângulo ABC, reto em B, as medidas de seus lados AB, BC e AC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão 3. Então, das alternativas abaixo, as medidas de AB, BC e AC são, respectivamente,

a) $3, 6$ e 9

b) $6, 9$ e 12

c) $9, 12$ e 15

d) $12, 15$ e 18

e) $15, 18$ e 21

Comentário:

Para resolver a questão pode-se testar cada um dos conjuntos de valores utilizando o Teorema de Pitágoras. Outra solução seria verificar quais dos conjuntos de valores são proporcionais aos triângulos pitagóricos, como o $3, 4$ e 5. Nesse caso, percebe-se facilmente que os valores $9, 12$ e 15 formam um triângulo semelhante ao pitagórico:

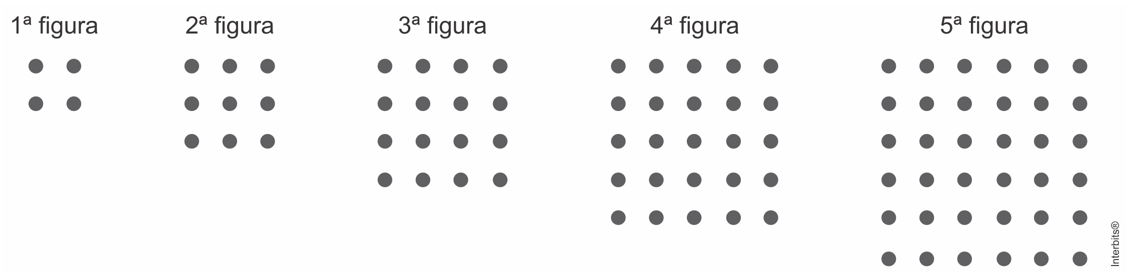
$3 \cdot 3 = 9$

$4 \cdot 3 = 12$

$5 \cdot 3 = 15$

Gabarito: C

15. (Uerj 2018) Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas.



Observe que os números inteiros $3^2, 4^2$ e 5^2, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao Teorema de Pitágoras. Dessa forma $(3, 4, 5)$ é uma tripla pitagórica.

Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e nª figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de n igual a:

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

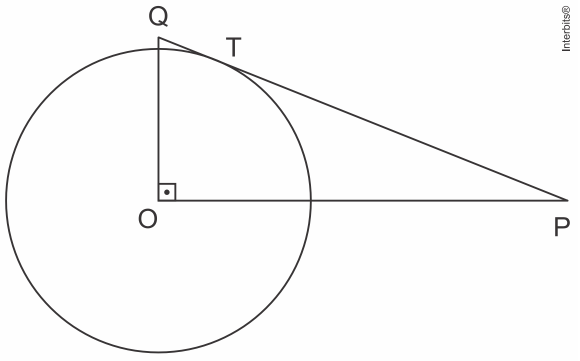
Comentário:

Desde que o número representado pela 4ª figura é 5^2 e o número representado pela 11ª figura é 12^2, podemos concluir, pelo Teorema de Pitágoras, que

$(n+1)^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow (n+1)^2 = 169 \Rightarrow n = 12.$

Gabarito: B

16. (Udesc 2018) Na figura abaixo sem escala, o raio da circunferência de centro O é $r = 3\text{ cm}$ e o segmento $\overline{OP}$ mede 5 cm.



Sabendo que o segmento $\overline{PQ}$ tangencia a circunferência no ponto T, pode-se dizer que o segmento $\overline{OQ}$ mede:

a) $1,25\ \text{cm}$

b) $5\ \text{cm}$

c) $3,75\ \text{cm}$

d) $4\ \text{cm}$

e) $3,5\ \text{cm}$

Comentário:

Tem-se que $\overline{OT} = 3\text{cm}$ e $\overline{OP} = 5\text{cm}$ implicam de imediato em $\overline{PT} = 4\text{cm}$. Logo, vem

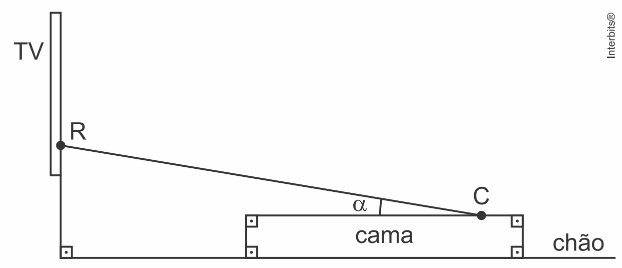
$$\overline{OP}^2 = \overline{PT} \cdot \overline{PQ} \Leftrightarrow 5^2 = 4 \cdot \overline{PQ} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{25}{4}\text{cm}.$$

Em consequência, temos

$$\overline{OQ} \cdot \overline{OP} = \overline{OT} \cdot \overline{PQ} \Leftrightarrow \overline{OQ} \cdot 5 = 3 \cdot \frac{25}{4} \Leftrightarrow \overline{OQ} = 3,75\text{cm}.$$

Gabarito: C

17. (Puccamp 2018) Paulo está deitado na cama e assistindo à TV. Na figura, C representa um ponto sobre a cama a partir do qual o controle remoto da TV foi acionado na direção do receptor de sinal indicado por R. A medida do ângulo entre a linha que representa o sinal transmitido e a cama é igual a á.



Dados:

α	$11,3°$	$11,5°$	$12,1°$	$12,4°$	$78,5°$
$\text{sen}\,\alpha$	0,196	0,199	0,210	0,215	0,980
$\cos\alpha$	0,981	0,980	0,978	0,977	0,199
$\text{tg}\,\alpha$	0,200	0,203	0,214	0,220	4,915

Sabe-se, ainda, que:

- R está a $1,2\text{ m}$ do chão;
- a altura da cama em relação ao chão é de 40 cm;
- C está a 4 metros de distância da parede em que a TV está fixada;
- a espessura da TV é desprezível.

Nas condições descritas e consultando a tabela, α é igual a

a) $78,5°$
b) $11,5°$
c) $12,1°$
d) $12,4°$
e) $11,3°$

Comentário:

Calculando:

$$\left(\overline{RC}\right)^2 = 0,8^2 + 4^2 \Rightarrow \overline{RC} = 4,08$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{0,8}{4,08} = 0,196 \Rightarrow \alpha = 11,3°$$

Gabarito: E

---

18. (Uece 2018) Se a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

o valor do seno do menor dos ângulos internos desse triângulo é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comentário:

Calculando:

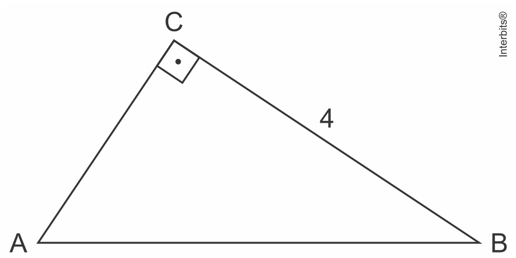
$$\frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: B

19**.** (Mackenzie 2018)



Na figura acima, o triângulo ABC é retângulo em C e sua área vale $6,$ então o valor do $\text{sen}\hat{B}$ é

a) $\frac{3}{5}$

b) 1

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{5}$

Comentário:

Calculando:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 6 = \frac{4 \cdot \overline{AC}}{2} \Rightarrow \overline{AC} = 3$$

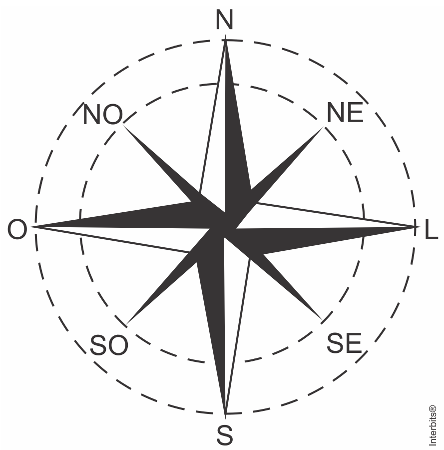
$$\left(\overline{AB}\right)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \overline{AB} = 5$$

$$\text{sen } B = \frac{3}{5}$$

Gabarito: A

---

20. (Enem 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: $135°$ no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: $60°$ no sentido horário;
- 3ª mudança: $45°$ no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

a) $75°$ no sentido horário.

b) $105°$ no sentido anti-horário.

c) $120°$ no sentido anti-horário.

d) $135°$ no sentido anti-horário.

e) $165°$ no sentido horário.

Comentário:

Considerando *NO* a origem e o sentido anti-horário o dos arcos positivos, tem-se que inicialmente a posição da câmera é $45°$. Desse modo, após as três mudanças, a câmera estará na posição $45° + 135° - 60° + 45° = 165°$. Em consequência, a resposta é $165°$ no sentido horário.

Gabarito: E

---

21. (Uece 2018) Considere um hexágono regular com centro no ponto O, cuja medida do lado é igual a 2 m. Se U e V são dois vértices consecutivos desse hexágono, e se a bissetriz do ângulo $O\hat{U}V$ intercepta o segmento OV no ponto W, então, a medida em metros do perímetro do triângulo UVW é

a) $(3+\sqrt{5})$.

b) $(2+\sqrt{5})$.

c) $(3+\sqrt{3})$.

d) $(2+\sqrt{3})$.

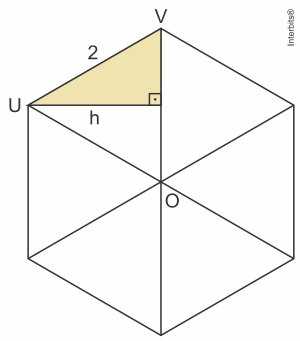
Comentário:

Um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros iguais cujos vértices são o centro do hexágono e dois vértices consecutivos deste. Conclui-se que a bissetriz do ângulo $O\hat{U}V$ é, portanto, a altura de um triângulo equilátero de lado 2 m. Assim, pode-se calcular:

$$\text{Perímetro} = 2 + \frac{2}{2} + h$$

$$2^2 = 1^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$\text{Perímetro} = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$$

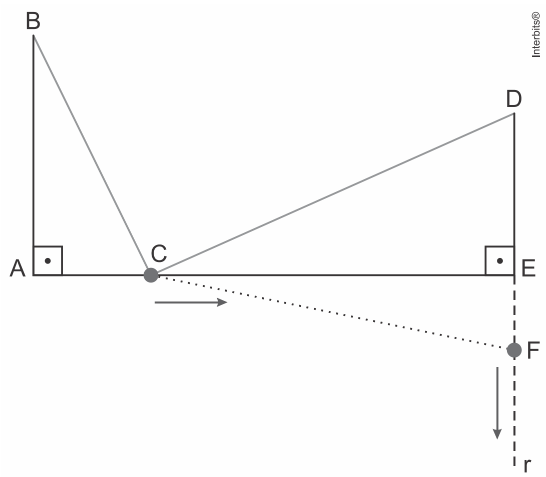


Gabarito: C

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
Considere o texto e a imagem a seguir para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Na figura, BAC e DEC são triângulos retângulos em $\hat{A}$ e $\hat{E}$, com $AB = 15$ cm, $ED = 10$ cm e $AE = 30$ cm. O ponto C pertence a $\overline{AE}$ e o ponto F pertence a r, que é reta suporte de $\overline{DE}$.

O ponto C pode mover-se ao longo de $\overline{AE}$, e o ponto F pode mover-se ao longo de r, como mostra a figura.



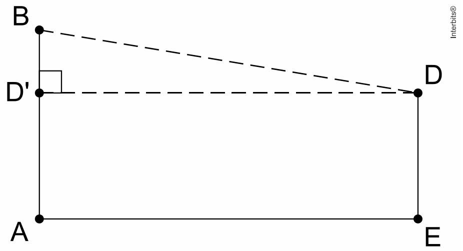
A partir dessas condições, demonstra-se facilmente que $BC + CD$ será mínimo na circunstância em que o triângulo DCF é isósceles de base $\overline{DF}$.

22. (Insper 2018) A medida de $\overline{BD}$, em centímetros, é igual a
a) $5\sqrt{53}$

b) $5\sqrt{37}$
c) $6\sqrt{26}$
d) $5\sqrt{41}$
e) $18\sqrt{3}$

Comentário:

Considere a figura, em que D' é o pé da perpendicular conduzida por D sobre AB.

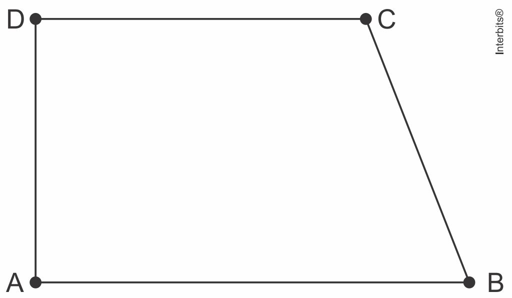


Portanto, sendo $\overline{D'B} = 15 - 10 = 5\,\text{cm}$ e $\overline{D'D} = \overline{AE},$ pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{BD}^2 = \overline{D'B}^2 + \overline{D'D}^2 \Rightarrow \overline{BD}^2 = 5^2 + 30^2$$
$$\Rightarrow \overline{BD} = 5\sqrt{37}\,\text{cm}.$$

Gabarito: B

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
O trapézio retângulo $ABCD$ da figura representa a superfície de um reservatório de água.
Na figura, tem-se que:



$AB = 20$ m;
$CD = 15$ m;
$AD = 12$ m;
o ângulo $D\hat{A}B$ é reto.

23. (cps 2018) Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de

a) 60.

b) 59.

c) 58.

d) 57.

e) 56.

Comentário:

Calculando:

$$\overline{CB}^2 = 12^2 + (20-15)^2 \Rightarrow \overline{CB}^2 = 144 + 25 \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{169} \Rightarrow \overline{CB} = 13$$
$$P = 12 + 15 + 20 + 13 = 60 \text{ m}$$

Gabarito: A

---

24. (ifsp 2017) O perímetro de um triângulo é de 36 dm. As medidas são expressas por três números inteiros e consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta quanto mede o **menor** lado do triângulo.

a) 9 dm.

b) 10 dm.

c) 11 dm.

d) 12 dm.

e) 13 dm.

Comentário:

Sabendo que um triângulo possui três lados temos:

$$36 = 11 + 12 + 13$$

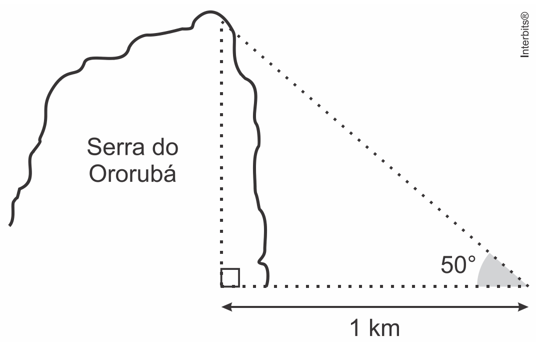
Logo, o menor lado é 11 dm.

Gabarito: C

---

25. (ifpe 2017) O professor de matemática do *Campus* Pesqueira lançou um desafio à turma de Edificações: estimar a altura da Serra do Ororubá utilizando apenas um transferidor. Sara, aluna da

turma, lembrou que existe uma placa turística a $1\,\text{km}$ de distância da serra de onde se consegue enxergar o cume da Serra. Chegando a esta placa, Sara, com o transferidor perpendicular ao solo, estimou um ângulo de $50°$ entre a base e o cume da Serra do Ororubá. Sabendo que $\text{sen}\,50° = 0{,}77;$ $\cos 50° = 0{,}64;$ $\text{tg}\,50° = 1{,}19;$ e tomando como referência o esquema mostrado na figura abaixo, certo que Sara não errou os cálculos, qual é a altitude estimada da Serra do Ororubá calculada por ela?



a) $1.000\,\text{m}$

b) $640\,\text{m}$

c) $770\,\text{m}$

d) $1.190\,\text{m}$

e) $830\,\text{m}$

Comentário:

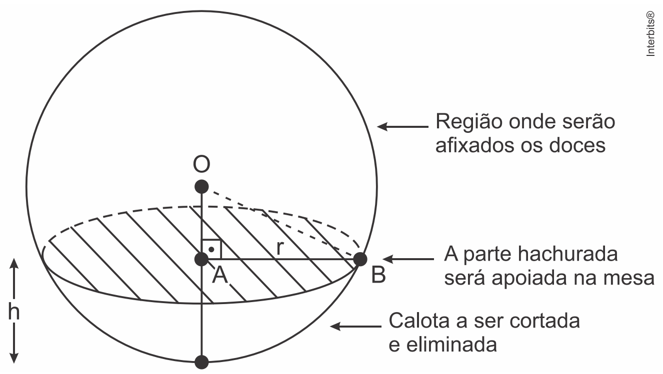
Utilizando a relação tangente do triangulo em questão temos:

$$\text{tg}(5°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Leftrightarrow 1{,}19 = \frac{\text{cateto oposto}}{1} \Rightarrow \text{cateto oposto} = 1{,}19\,\text{km}$$

Como o $\text{cateto oposto} = \text{altura}$ temos que, em metros: $\text{altura} = 1.190\,\text{m}.$

Gabarito: D

26. (Enem 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo $10\,\text{cm},$ o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos $3\,\text{cm}.$ Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

a) $5-\frac{\sqrt{91}}{2}$

b) $10-\sqrt{91}$

c) 1

d) 4

e) 5

Comentário:

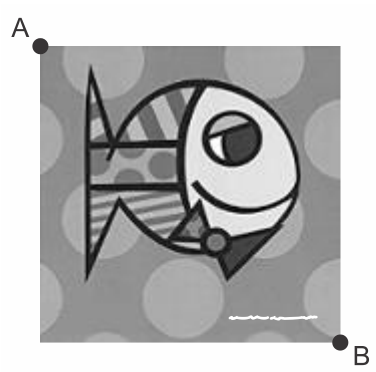
O triângulo OAB é um triângulo pitagórico do tipo 3-4-5, portanto:

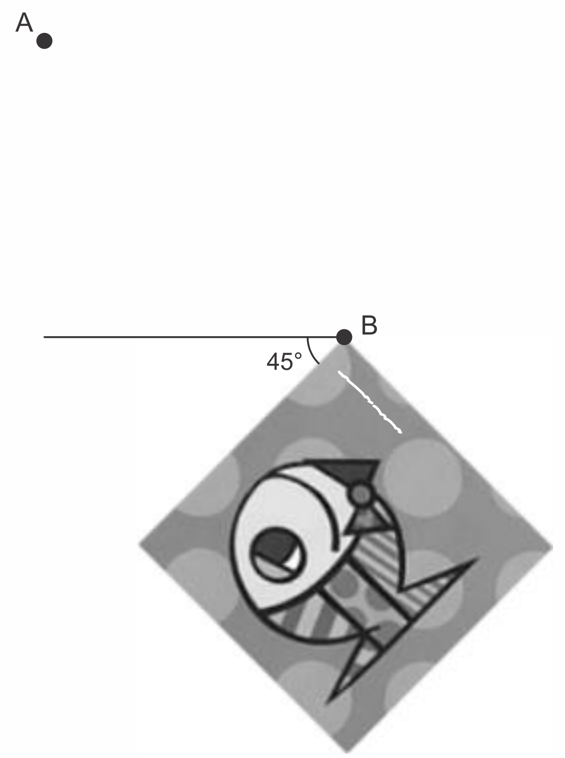
$$\overline{OA}=4$$
$$AB=r=3$$
$$R=5$$
$$h=R-\overline{OA}=5-4\Rightarrow h=1$$

Gabarito: C

27**.** (Enem 2017) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de $45°$ com a linha do horizonte.





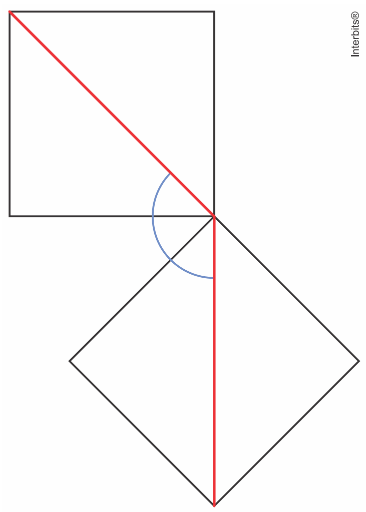
Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a $360°$.

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

a) $90°$ no sentido horário.
b) $135°$ no sentido horário.
c) $180°$ no sentido anti-horjrio.
d) $270°$ no sentido anti-horário.
e) $315°$ no sentido horário.

Comentário:

A figura a seguir ilustra a movimentação do quadro:



Assim, para retorná-lo à posição original, este deve ser girado $135°$ $(90° + 45°)$ no sentido horário.

Gabarito: B

---

28. (ifce 2016) O triângulo ABC tem lados medindo $8\text{ cm},$ 10 cm e $16\text{ cm},$ enquanto o triângulo $DEF,$ semelhante a $ABC,$ tem perímetro $204\text{ cm}.$ O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

a) 64 cm e $32\text{ cm}.$

b) 60 cm e $48\text{ cm}.$

c) 48 cm e $24\text{ cm}.$

d) 96 cm e $48\text{ cm}.$

e) 96 cm e $64\text{ cm}.$

Comentário:

Sendo x o maior lado e y o menor lado do triângulo $DEF,$ pode-se escrever:

$$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$$
$$34 \text{ ——— } 204$$
$$16 \text{ ——— } x$$
$$x = 96$$
$$34 \text{ ——— } 204$$
$$8 \text{ ——— } y$$
$$y = 48$$

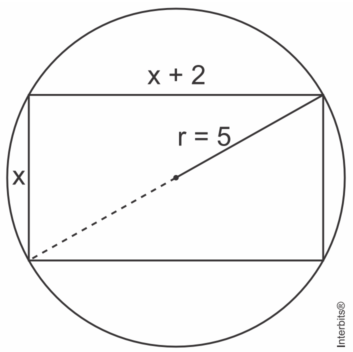
Gabarito: D

29. (ifce 2016) Um retângulo cujo comprimento excede a largura em $2\,\text{m}$ está inscrito em um círculo de $5\,\text{m}$ de raio. A área desse retângulo, em metros quadrados, vale

a) 56.
b) 35.
c) 48.
d) 50.
e) 64.

Comentário:

Teremos:



$(2r)^2 = x^2 + (x+2)^2$

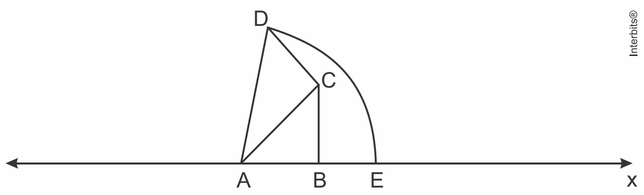
$(10)^2 = x^2 + (x+2)^2 \rightarrow 100 = x^2 + x^2 + 4x + 4 \rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$

$2x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -8 \text{ (não convém)} \\ x = 6 \end{cases}$

$S_{\text{retângulo}} = 6 \cdot (6+2) = 48$

Gabarito: C

30. (Ulbra 2016) Considere a construção representada na figura abaixo, sobre o eixo x dos números reais.



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ medem 1 unidade cada um. $\overset{\frown}{DE}$ é um arco de circunferência de centro em A. Qual número real está associado ao ponto E, no eixo x? Sabe-se que A está na origem do eixo x, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{AC} \perp \overline{CD}$.

a) $\sqrt{6}$.
b) $\sqrt{2}$.
c) $\sqrt{5}$.
d) $\sqrt{3}$.
e) $\sqrt{8}$.

Comentário:

$\overline{AD} = \overline{AE}$
$\overline{AC} = \sqrt{2}$
$\left(\overline{AD}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3} \rightarrow \overline{AE} = \sqrt{3}$

Gabarito: D

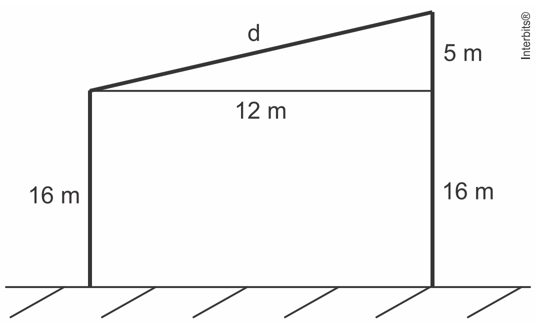
---

31. (ifpe 2016) Um fio foi esticado entre as extremidades de duas torres de transmissão. Sabendo que a torre menor tem $16\,\text{m}$ de altura, a torre maior tem $21\,\text{m}$ de altura e que a distância entre as duas torres é de $12\,\text{m}$, qual é o comprimento do fio?

a) $13\,\text{m}$
b) $5\,\text{m}$
c) $37\,\text{m}$
d) $12\,\text{m}$
e) $10\,\text{m}$

Comentário:

Considere a ilustração a seguir:



Logo, aplicando teorema de Pitágoras, temos:

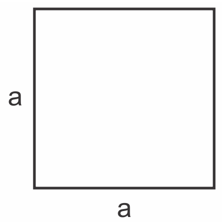
$$d^2 = (5)^2 + (12)^2 \Rightarrow d = \sqrt{25+144} \Rightarrow d = 13m$$

Gabarito: A

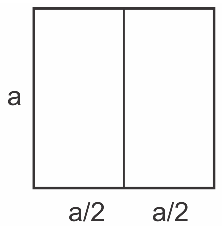
32. (Upf 2016) Um quadrilátero áureo apresenta um valor especial para a razão entre as suas medidas da base (lado maior) e da altura (lado menor).

Os passos para a construção de um quadrilátero áureo são:

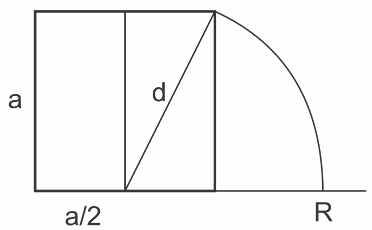
1. Construir um quadrado de lado a.



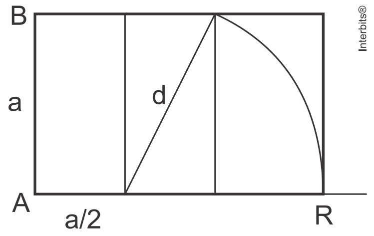
2. Dividir esse quadrado em dois retângulos iguais.



3. Traçar a diagonal do segundo retângulo e, com o compasso, marcar o ponto R sobre a horizontal.



4. Dessa forma, ficam definidas as medidas da base, $\overline{AR} = \frac{a}{2} + d$, e da altura, $\overline{AB} = a$, desse retângulo.



Sendo assim, a razão entre a medida da base e da altura do quadrilátero áureo é:

a) $1+\sqrt{5}$

b) $1+\sqrt{2}$

c) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$

Comentário:

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, vem

$$\overline{AR} = a + d = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

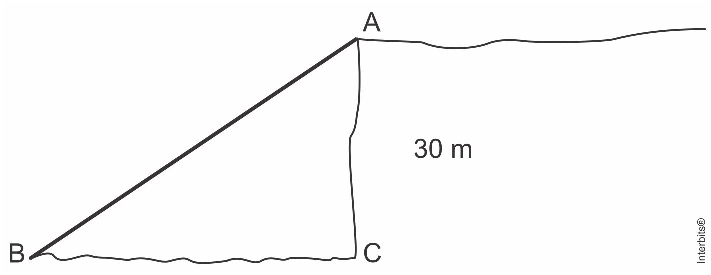
e, portanto, segue que a resposta é

$$\frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Gabarito: D

---

33. (ifba 2016) Um grupo de corredores de aventura se depara com o ponto A no topo de um despenhadeiro vertical (o ângulo C é reto), ponto este que já está previamente ligado ao ponto B por uma corda retilínea de $60\text{ m},$ conforme a figura a seguir:



Se a altura $(AC = 30\text{ m})$ do despenhadeiro fosse a metade do que é, o comprimento da corda deveria ser igual a:

a) 15 m.

b) 30 m.

c) $3\sqrt{15}\text{ m}$.

d) $13\sqrt{15}\text{ m}$.

e) $15\sqrt{13}\text{ m}$.

Comentário:

Utilizando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$60^2 = 30^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow \overline{BC}^2 = 2700 \rightarrow \overline{BC} = 30\sqrt{3}$$

$$\overline{A'B}^2 = \left(30\sqrt{3}\right)^2 + 15^2 = 2700 + 225 \rightarrow \overline{A'B}^2 = 2925 \rightarrow \overline{A'B}^2 = 15\sqrt{13}\text{ m}$$

Gabarito: E

---

34. (ifce 2016) Um retângulo inscrito em um círculo de raio 5 cm tem um dos lados medindo 2 cm a mais que o outro. A área desse retângulo, em centímetros quadrados, é

a) 30.

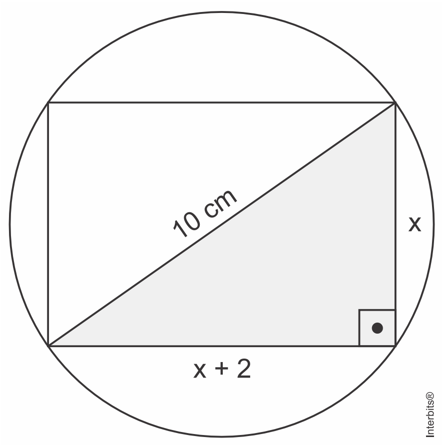
b) 56.

c) 48.

d) 24.

e) 40.

Comentário:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado, temos:

$(x+2)^2 + x^2 = 10^2$

$x^2 + 4 \cdot x + 4 + x^2 = 100$

$2x^2 + 4 \cdot x - 96 = 0$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{-2 \pm 14}{2}$

$x = 6$ ou $x = -8$ (não convém)

$x = 6 \Rightarrow x + 2 = 8$

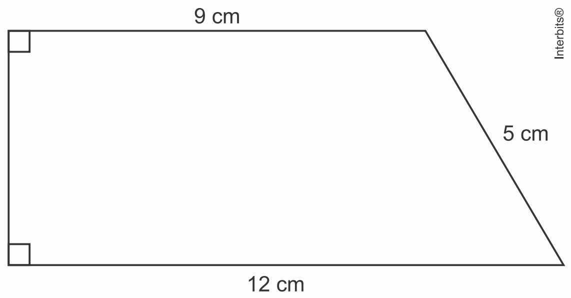
Portanto, a área A do retângulo, em cm^2, será dada por:

$A = 6 \cdot 8 = 48\ cm^2.$

Gabarito: C

---

35. (Unisinos 2016) Na figura abaixo, temos um trapézio retângulo cujas bases medem $9\ cm$ e $12\ cm$ e cujo lado não perpendicular às bases mede $5\ cm$.

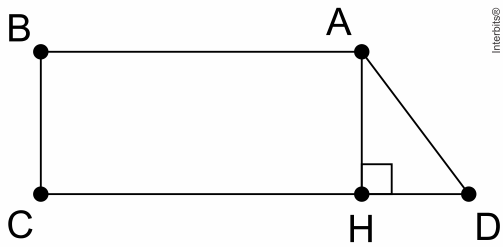


Qual o perímetro, em cm, desse trapézio?

a) 26.
b) 29.
c) 30.
d) 31.
e) 48.

Comentário:

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de A sobre CD.

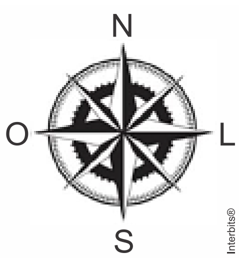


Tem-se que $\overline{AB} = \overline{CH} = 9$ cm. Logo, vem $\overline{DH} = \overline{CD} - \overline{CH} = 3$ cm. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ADH, concluímos que $\overline{AH} = \overline{BC} = 4$ cm.

A resposta é $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 9 + 4 + 12 + 5 = 30$ cm.

Gabarito: C

36. (ifpe 2016) Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:
1. ande 200 metros na direção NORTE;
2. ande 120 metros na direção LESTE;
3. ande 50 metros na direção SUL;
4. ande 40 metros na direção OESTE.



Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, a distância calculada por Luiz foi de

a) 170 metros.

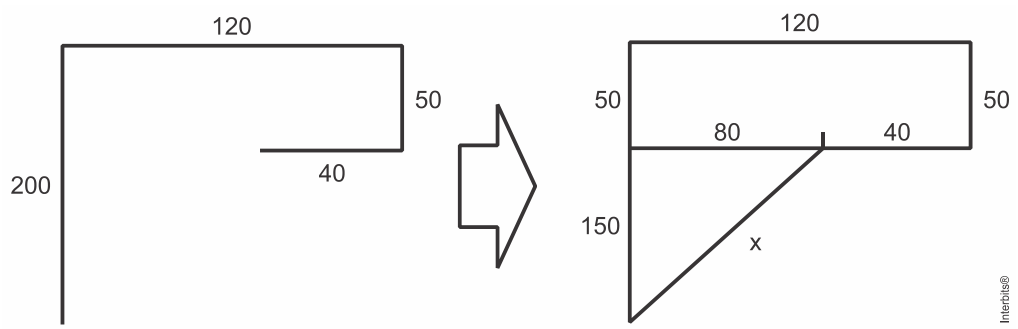
b) 150 metros.

c) 180 metros.

d) 200 metros.

e) 210 metros.

Comentário:



Aplicando Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 150^2 + 80^2$$
$$x^2 = 22500 + 6400$$
$$x = \sqrt{28900}$$
$$x = 170\text{ m}$$

Gabarito: A

---

37. (ifal 2016) Um prédio projeta, no chão, uma sombra de 15 metros de comprimento. Sabendo que, nesse momento, o sol faz um ângulo de $45°$ com a horizontal, determine a altura desse prédio em metros.

a) $10.$

b) $15.$

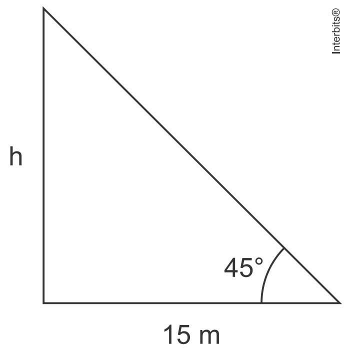
c) $20.$

d) $25.$

e) $30.$

Comentário:

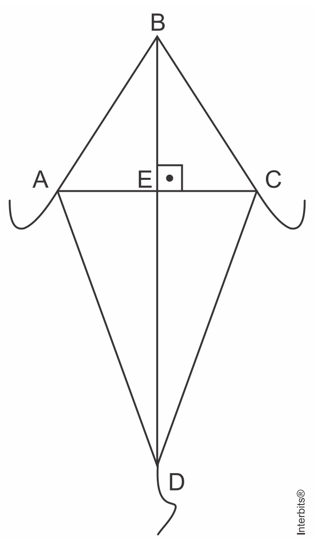
Conforme enunciado, tem-se:



Se o ângulo formato é $45°$, então o triângulo retângulo terá catetos iguais e portanto $h = 15$.

Gabarito: B

38**.** (cftmg 2016) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero $ABCD$, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$. A vareta $\overline{BD}$ da pipa intercepta a vareta $\overline{AC}$ em seu ponto médio E, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ usadas são, respectivamente, 25 cm e 20 cm, e a medida de $\overline{AC}$ equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de $\overline{BD}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a

a) 25.
b) 40.
c) 55.
d) 70.

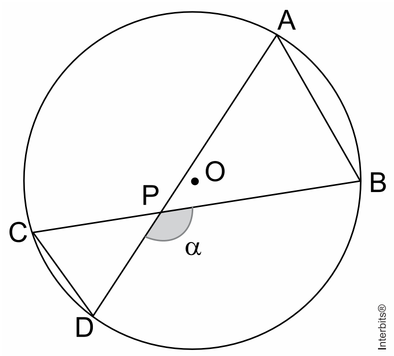
Comentário:

O triângulo BEC é semelhante ao triângulo retângulo pitagórico de lados $3, 4$ e 5. Logo, tem-se que $\overline{EC} = 15\,cm$. Daí, vem $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{EC} = 30\,cm$ e, assim, $\overline{BD} = \frac{5}{2} \cdot \overline{AC} = 75\,cm$. Portanto, segue que o resultado é $\overline{DE} = \overline{BD} - \overline{BE} = 55\,cm$.

Gabarito: C

---

39. (Fgv 2016) As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo BPD, indicado na figura por α, é igual a

a) $120°$.
b) $124°$.
c) $128°$.
d) $130°$.
e) $132°$.

Comentário:

Se o lado AB refere-se a um polígono regular de 6 lados, então o arco AB mede $60°$.
Se o lado CD refere-se a um polígono regular de 10 lados, então o arco CD mede $36°$.
A circunferência tem um total de $360°$, logo o ângulo pedido será:

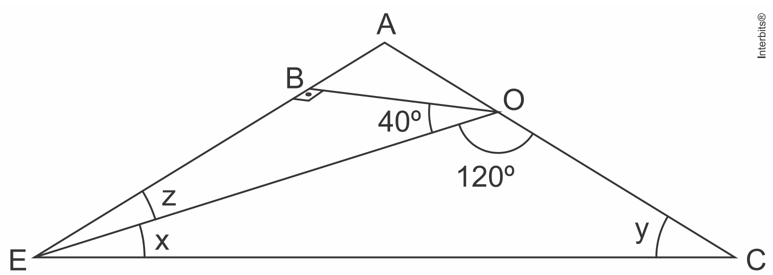
$$\alpha = \frac{360 - 60 - 36}{2} \Rightarrow \alpha = 132°$$

Gabarito: E

40. (Uece 2015) Seja AEC um triângulo isósceles (as medidas dos lados AE e AC são iguais) e O um ponto do lado AC tal que a medida do ângulo $E\hat{O}C$ é 120 graus. Se existe um ponto $B,$ do lado $AE,$ tal que o segmento OB é perpendicular ao lado AE e a medida do ângulo $E\hat{O}B$ seja igual a 40 graus, então a medida do ângulo $O\hat{E}C,$ em graus, é igual a

a) $9.$
b) $7.$
c) $5.$
d) $3.$

Comentário:



Se o segmento OB é perpendicular ao lado $AE,$ sabe-se então que o triângulo EBO é um triângulo retângulo e que um de seus ângulos é $40°$ (ângulo $E\hat{O}B$). Assim, sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°,$ tem-se:

$$40° + 90° + z = 180°$$
$$z = 50°$$

Sabe-se também que o triângulo é isósceles, portanto os ângulos dos vértices E e C são iguais. Logo:

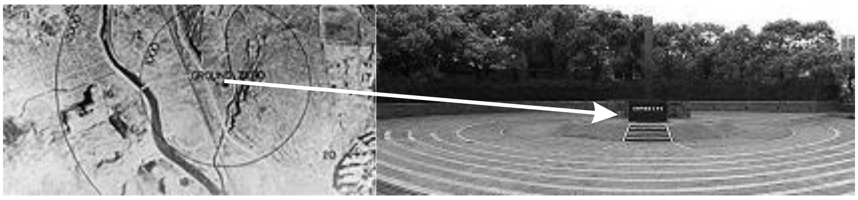
$$x + y = z$$
$$y = x + 50°$$

Novamente, sabendo que a soma dos ângulos internos do triângulo EOC é igual a $180°,$ conclui-se:

$$y + 120° + x = 180°$$
$$x + 50° + 120° + x = 180°$$
$$2x + 170° = 180°$$
$$2x = 10°$$
$$x = 5°$$

Gabarito: C

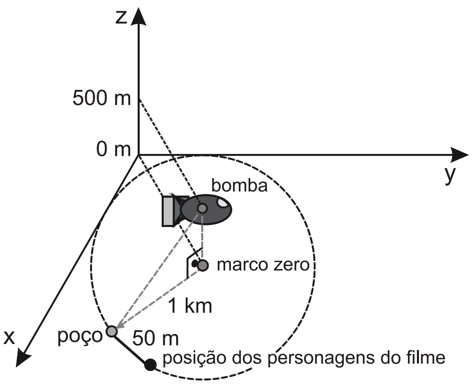
41. (Unesp 2015) Em 09 de agosto de 1945, uma bomba atômica foi detonada sobre a cidade japonesa de Nagasaki. A bomba explodiu a $500\,\text{m}$ de altura acima do ponto que ficaria conhecido como "marco zero".



(www.nicholasgimenes.com.br) (http://wemersonjj.blogspot.com.br)

No filme *Wolverine Imortal*, há uma sequência de imagens na qual o herói, acompanhado do militar japonês Yashida, se encontrava a $1\,\text{km}$ do marco zero e a $50\,\text{m}$ de um poço. No momento da explosão, os dois correm e se refugiam no poço, chegando nesse local no momento exato em que uma nuvem de poeira e material radioativo, provocada pela explosão, passa por eles.

A figura a seguir mostra as posições do "marco zero", da explosão da bomba, do poço e dos personagens do filme no momento da explosão da bomba.



Se os ventos provocados pela explosão foram de $800\,\text{km/h}$ e adotando a aproximação $\sqrt{5} \cong 2{,}24$, os personagens correram até o poço, em linha reta, com uma velocidade média, em km/h, de aproximadamente

a) 28.

b) 24.

c) 40.

d) 36.

e) 32.

Comentário:

A distância d do ponto em que a bomba explodiu até o poço é dada por

$$\begin{aligned} d^2 = 1^2 + (0,5)^2 &\Rightarrow d = \sqrt{1,25} \\ &\Rightarrow d \cong 0,5 \cdot 2,24 \\ &\Rightarrow d \cong 1,12\,\text{km}. \end{aligned}$$

Desse modo, a nuvem de poeira atinge o poço em $\frac{1,12}{800} = 0,0014\text{ h}$ e, portanto, podemos concluir que a velocidade média dos personagens foi de $\frac{0,05}{0,0014} \cong 36\,\text{km/h}.$

Gabarito: D

---

42. (Ucs 2015) Uma escada está apoiada em uma parede a uma altura de 16 m do solo plano. A distância do pé da escada até a parede é igual a $12\text{ m}.$ O centro de gravidade da escada está a um terço do comprimento dela, medido a partir do seu apoio no chão. Nessa situação, o comprimento da escada e a altura aproximada do seu centro de gravidade até o chão são, respectivamente, iguais a

a) 20 m e $5,3\text{ m}.$

b) 20 m e $6,6\text{ m}.$

c) 28 m e $9,3\text{ m}.$

d) $\sqrt{56}\text{ m}$ e $5,3\text{ m}.$

e) $\sqrt{56}\text{ m}$ e $2,6\text{ m}.$

Comentário:

Sendo x o comprimento da escada e y a altura aproximada do seu centro de gravidade, pode-se escrever, utilizando o Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos:

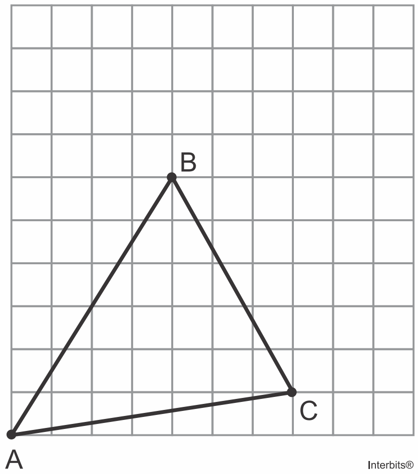
$$x^2 = 16^2 + 12^2 \rightarrow x = 20\text{ metros}$$

$$\frac{y}{16} = \frac{20/3}{20} \rightarrow y = 5,33\text{ metros}$$

Gabarito: A

---

43. (Uern 2015) Matheus marcou, em uma folha quadriculada de $1 \times 1\text{cm},$ três pontos e ligou-os formando o seguinte triângulo:



É correto afirmar que o produto dos lados do triângulo é

a) $10\sqrt{13}$.

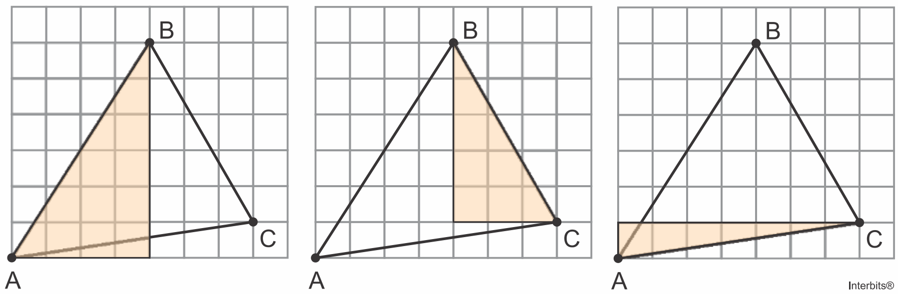
b) $20\sqrt{17}$.

c) $10\sqrt{221}$

d) $20\sqrt{221}$

Comentário:

Cada um dos segmentos pode ser medido utilizando o Teorema de Pitágoras, conforme os triângulos retângulos apresentados na figura a seguir:



Assim, pode-se escrever:

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 6^2 \to \overline{AB}^2 = 52 \to \overline{AB} = \sqrt{52}$$

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 3^2 \to \overline{BC}^2 = 34 \to \overline{BC} = \sqrt{34}$$

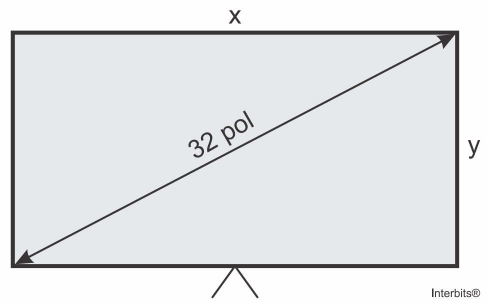
$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 7^2 \to \overline{AC}^2 = 50 \to \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Logo, o produto dos lados do triângulo será:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = \sqrt{52} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{88400} \to \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = 20\sqrt{221}$$

Gabarito: D

44. (Pucrs 2015) Considere a figura e o texto abaixo.



As medidas de comprimento e largura da tela de uma televisão, em geral, obedecem à proporção $16:9,$ sendo que o número de polegadas $(1\,\text{pol} = 2{,}5\text{ cm})$ desse aparelho indica a medida da diagonal de sua tela.

Considerando essas informações, as medidas do comprimento e da largura, em centímetros, de uma TV de 32 polegadas, como mostra a figura acima, podem ser obtidas com a resolução do seguinte sistema:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 1024 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$

Comentário:

Aplicando o Teorema de Pitágoras e a utilizando a proporção dada no enunciado, pode-se montar o seguinte sistema:

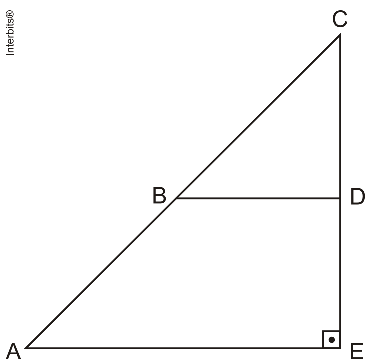
$$x^2 + y^2 = (32 \cdot 2{,}5)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$$

Gabarito: E

45. (Cefet MG 2014) A figura abaixo tem as seguintes características:

- o ângulo $\hat{E}$ é reto;
- o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede

a) 8.
b) 12.
c) 13.
d) $\sqrt{61}$.
e) $5\sqrt{10}$.

Comentário:

Desde que os triângulos ACE e BCD são semelhantes por AA, vem

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{CD}+3} = \frac{4}{5}$$
$$\Leftrightarrow \overline{CD} = 12.$$

Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACE, encontramos

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 15^2$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = 5\sqrt{10}.$$

Gabarito: E

46. (ifsc 2014) O município de Mossoró, no estado do Rio Grande do Norte é o maior produtor de sal marinho do Brasil. Esse sal é transportado, por meio terrestre, até a capital do estado, Natal, que fica a, aproximadamente, 200 km a leste e 150 km ao sul da cidade de Mossoró, de acordo com mapa abaixo:

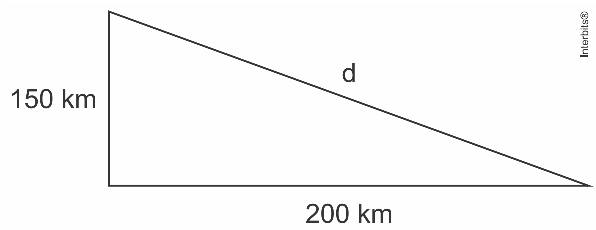
Imagem disponível em: https://maps.google.com.br/maps?hl=pt-BR&tab=ll Aceso: 13 out. 2013

Com base em seus conhecimentos de geometria, é CORRETO afirmar que a distância em linha reta entre as cidades de Mossoró e de Natal, em km, é de:

a) 70
b) 500
c) 450
d) 350
e) 250

Comentário:

Segundo o trajeto temos:



Aplicando teorema de Pitágoras temos:

$d^2 = 150^2 + 200^2$

$d^2 = 22500 + 40000$

$d = \sqrt{62500} = 250 \text{ km}$

Gabarito: E

---

47. (ifal 2014) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é $a+3$ e um dos catetos $a-3$. Se o outro cateto vale 18, quanto vale a?

a) 20
b) 22
c) 24
d) 27
e) 30

Comentário:

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$hip^2 = cat^2 + cat^2$

$(a+3)^2 = (a-3) + 18^2$

$a^2 + 6a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 324$

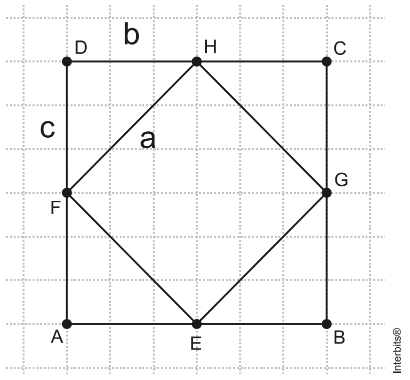
$12a = 324$

$a = 27$

Gabarito: D

---

48. (ifce 2014) Na figura abaixo, o valor da área do quadrado de lado "**a**", em função dos segmentos "**b**" e "**c**", é



a) $b^2 + c^2$

b) $b^2 - c^2$

c) b^2c^2

d) $c^2 - b^2$

e) b^2/c^2

Comentário:

A área A de um quadrado de lado a é dada por $A = a^2$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DFH, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, $A = b^2 + c^2$.

Gabarito: A

---

49. (Unifor 2014) Cada pneu traseiro de um trator tem raio $0{,}8\text{ m}$ e cada pneu dianteiro tem raio $0{,}3\text{ m}$. Sabendo-se que a distância entre os pontos A e B, onde esses pneus tocam o solo plano, é de $2{,}5\text{ m}$, a distância x entre os centros dos pneus é de:

a) $\sqrt{6{,}2}\text{ m}$

b) $\sqrt{6{,}3}\text{ m}$

c) $\sqrt{6{,}4}\text{ m}$

d) $\sqrt{6{,}5}\text{ m}$

e) $\sqrt{6{,}6}\text{ m}$

Comentário:

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$x^2 = (0{,}5)^2 + (2{,}5)^2 \Rightarrow x = \sqrt{6{,}5}\text{ m}.$$

Gabarito: D

50. (Pucrj 2013) Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou.
Assim, a distância entre a bicicleta e o hidrante passou a ser:
a) 8 metros
b) 10 metros
c) 12 metros
d) 14 metros
e) 16 metros

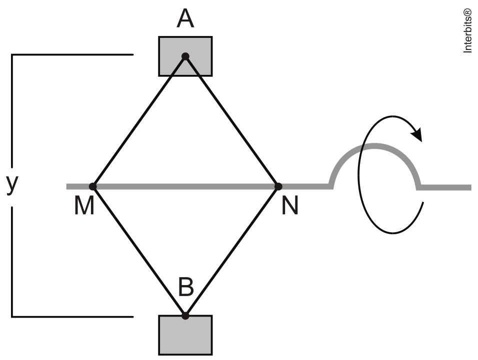
Comentário:

Sejam A o ponto onde se encontrava inicialmente a bicicleta e B o ponto a 6 metros ao norte de A. Chamando de C o ponto onde se encontra o hidrante, segue que a distância pedida corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, reto em A. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 &= 8^2 + 6^2 \\ \Rightarrow \overline{BC} &= \sqrt{100} \\ \Rightarrow \overline{BC} &= 10 \text{ m}.\end{aligned}$$

Gabarito: B

51. (Uerj 2013) Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:



Considere as seguintes medidas: $AM = AN = BM = BN = 4$ dm; $MN = x$ dm; $AB = y$ dm.

O valor, em decímetros, de y em função de x corresponde a:

a) $\sqrt{16-4x^2}$

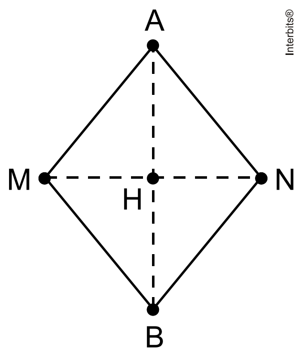
b) $\sqrt{64-x^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{16-4x^2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{64-2x^2}}{2}$

Comentário:

Considere a figura.



Seja H o ponto de interseção dos segmentos AB e MN.

Como AMN e MBN são triângulos isósceles congruentes, segue que AMBN é losango. Logo, $\overline{AH}=\dfrac{y}{2}$ e $\overline{HN}=\dfrac{x}{2}$.

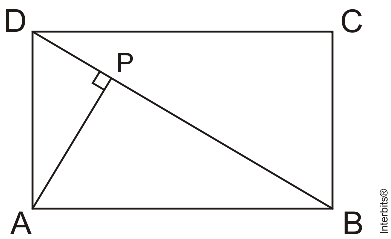
Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AHN, obtemos

$$\overline{AH}^2+\overline{HN}^2=\overline{AN}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=4^2$$
$$\Leftrightarrow y^2=64-x^2$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{64-x^2}\text{ dm.}$$

Gabarito: B

---

52. (Uepb 2013) No retângulo ABCD de lado $\overline{AB}=3\text{ cm}$, $\overline{BC}=\sqrt{7}\text{cm}$, o segmento AP é perpendicular à diagonal BD.



O segmento $\overline{BP}$ mede em cm:

a) $\dfrac{9}{2}$

b) $\dfrac{7}{4}$

c) $\dfrac{9}{4}$

d) $\dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{5}{4}$

Comentário:

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 3^2 + (\sqrt{7})^2$$
$$\Rightarrow \overline{BD} = 4\,\text{cm}.$$

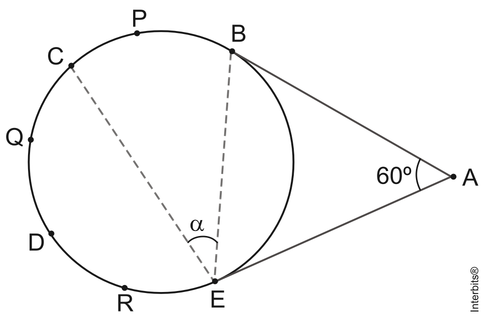
Portanto, como o quadrado de um cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa, vem:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{BD} \Leftrightarrow 3^2 = \overline{BP} \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{9}{4}\,\text{cm}.$$

Gabarito: C

---

53. (Fgv 2013) Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$.



Se os arcos $\widehat{BPC}$, $\widehat{CQD}$ e $\widehat{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a

a) 20°

b) 40°

c) 45°

d) 60°

e) 80°

Comentário:

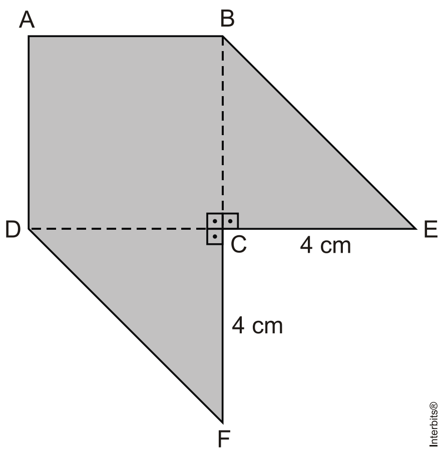
Seja S um ponto do menor arco $\widehat{BE}$.

Como $\widehat{BPC} = \widehat{CQD} = \widehat{DRE} = 2\alpha$, segue-se que $\widehat{BSE} = 360° - 6\alpha$. Portanto, como $E\hat{A}B$ é excêntrico exterior, temos

$$\begin{aligned} E\hat{A}B = \frac{\widehat{BQE} - \widehat{BSE}}{2} &\Leftrightarrow 60° = \frac{6\alpha - (360° - 6\alpha)}{2} \\ &\Leftrightarrow 60° = 6\alpha - 180° \\ &\Leftrightarrow \alpha = 40°. \end{aligned}$$

Gabarito: B

54**.** (Espm 2012) Na figura plana abaixo, ABCD é um quadrado de área 10 cm^2. Os segmentos CE e CF medem 4 cm cada. Essa figura deverá ser dobrada nas linhas tracejadas, fazendo com que os pontos E e F coincidam com um ponto P do espaço.



A distância desse ponto P ao ponto A é igual a:

a) 6 cm

b) 5 cm

c) $4\sqrt{2}$ cm

d) $5\sqrt{2}$ cm

e) $6\sqrt{2}$ cm

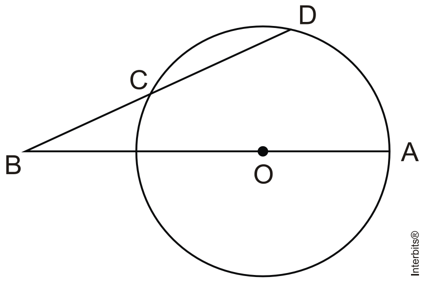
Comentário:

Como o quadrado ABCD tem área igual a $10\,cm^2$, vem que $\overline{AB}^2 = 10\,cm^2$.
De acordo com as informações, temos que o segmento PA é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos $\overline{CP} = 4\,cm$ e $\overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{2}\,cm$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\overline{PA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2 \Leftrightarrow \overline{PA}^2 = (\overline{AB}\sqrt{2})^2 + \overline{CP}^2$$
$$\Rightarrow \overline{PA}^2 = 2 \cdot 10 + 4^2$$
$$\Rightarrow \overline{PA}^2 = 36$$
$$\Rightarrow \overline{PA} = 6\,cm.$$

Gabarito: A

55. (Mackenzie 2012) Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = OA, então a razão entre as medidas dos ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ é



a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

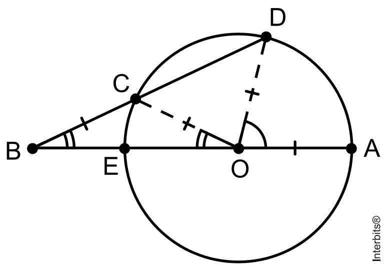
c) 2

d) $\frac{4}{3}$

e) 3

Comentário:

Considere a figura.



Sejam $AOD = \alpha$ e $COB = \beta.$

Sabendo que $\overline{BC} = \overline{OA} = \overline{OC},$ vem $OBC = \beta.$ Daí, como $AD = \alpha$ e $CE = \beta,$ encontramos

$$OBC = \frac{AD - CE}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 3.$$

Gabarito: E

56. (Enem 2012) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3’ 0” a leste do Meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60’ e 1’ equivale a 60”.

PAVARIN, G. *Galileu*, fev. 2012 (adaptado)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é

a) 124,02°.
b) 124,05°.
c) 124,20°.
d) 124,30°.
e) 124,50°.

Comentário:

3’= (3/60)° = 0,05°

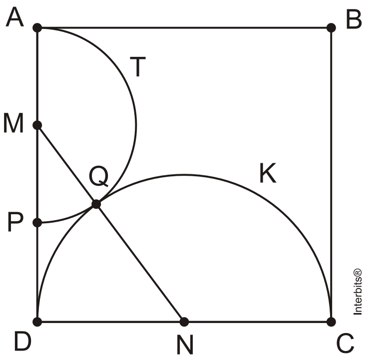
124° 3’ 0” = 124,05°

Gabarito: B

57**.** (col. naval 2011) ABCD é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferencia, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferencia tangente ao lado AB em A e tangente à K. Nessas condições, o raio da semicircunferencia T será

a) $\frac{5L}{6}$
b) $\frac{4L}{5}$
c) $\frac{2L}{3}$
d) $\frac{3L}{5}$
e) $\frac{L}{3}$

Comentário:

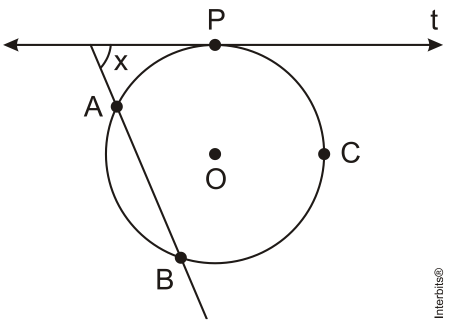


Sejam Q o ponto em que T tangencia K, M o centro de T e N o centro de K. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo MND, vem:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{ND}^2 \Rightarrow \left(\overline{MQ} + \frac{L}{2}\right)^2 = (L - \overline{MQ})^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \overline{MQ}^2 + L \cdot \overline{MQ} + \frac{L^2}{4} = L^2 - 2L \cdot \overline{MQ} + \overline{MQ}^2 + \frac{L^2}{4}$$
$$\Rightarrow 3L \cdot \overline{MQ} = L^2$$
$$\Rightarrow \overline{MQ} = \frac{L}{3}.$$

Gabarito: E

58. (ifsp 2011) Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 100º e a do arco $\overset{\frown}{BCP}$ é 194º. O valor de x, em graus, é



a) 53.
b) 57.
c) 61.
d) 64.
e) 66.

Comentário:

Como x é excêntrico exterior, segue que:

$$x = \frac{\overset{\frown}{BCP} - \overset{\frown}{AP}}{2}.$$

Mas

$\overset{\frown}{AP} = 360° - (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BCP}).$

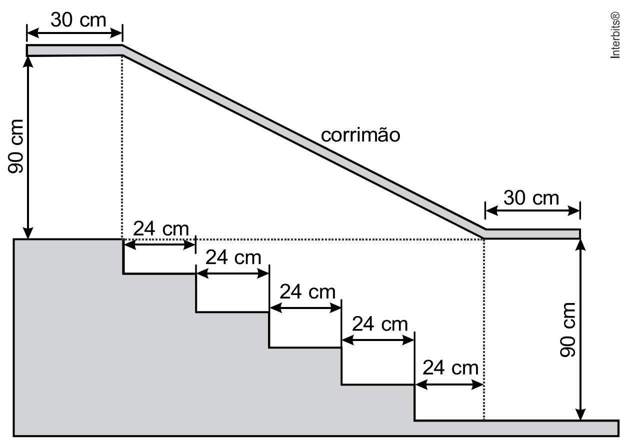
Portanto,

$$x = \frac{194° - 360° + 100° + 194°}{2} = \frac{128°}{2} = 64°.$$

Gabarito: D

---

59. (Enem 2006)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a) 1,8 m.

b) 1,9 m.

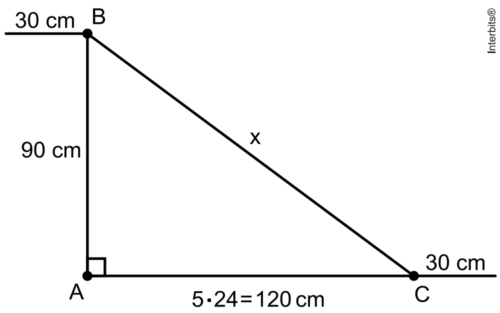
c) 2,0 m.

d) 2,1 m.

e) 2,2 m.

Comentário:

Considere a figura, em que $\overline{BC} = x.$



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos

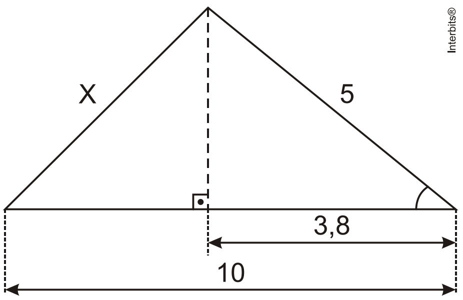
$$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x = \sqrt{22500} = 150\,cm = 1{,}5\ m.$$

Portanto, o comprimento total do corrimão é $1{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 = 2{,}1\,m.$

Gabarito: D

---

60. (G1 1996) No triângulo da figura a seguir, o valor de x é:



a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

Comentário:

Altura = h

$(3,8)^2 + h^2 = 5^2 \qquad [I]$

$(10 - 3,8)^2 + h^2 = x^2 \qquad [II]$

Fazendo a diferença [II] – [I]:

$(10 - 3,8)^2 + h^2 - (3,8)^2 - h^2 = x^2 - 5^2$

$(10 - 3,8)^2 - (3,8)^2 = x^2 - 5^2$

$100 - 38 - 38 + (3,8)^2 - (3,8)^2 = x - 5^2$

$100 - 76 = x^2 - 5^2$

$\therefore x^2 = 100 - 76 + 25$

$x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Gabarito: B

Qualquer crítica, sugestão ou elogio, só entrar em contato pelas redes sociais abaixo:

	Fale comigo!	
@profismael_santos	***Ismael Santos***	***@IsmaelSantos***

Vamos que vamos! Fé na missão!