GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Geometria Plana

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Fundamentos da Geometria Plana

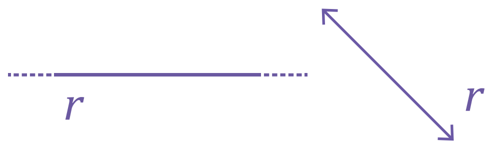
- Três entes primitivos: ponto, reta e plano.
- Não há definição matemática para esses entes.

Ponto

- É adimensional, ou seja, que não possui dimensão.
- É representado por letras maiúsculas do alfabeto $(A, B, C, \ldots, P, \ldots)$.

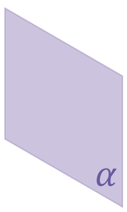
Reta

- É unidimensional, ou seja, que possui apenas uma dimensão.
- É infinita.
- É representada por letras minúsculas do alfabeto $(r, s, t, \ldots)$.



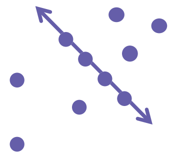
Plano

- É bidimensional, ou seja, que possui duas dimensões.
- É infinito.
- É representado por letras minúsculas do alfabeto grego $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, \ldots)$.

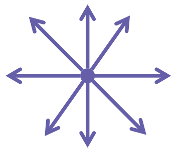


Postulados

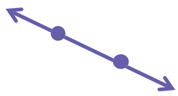
1. Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



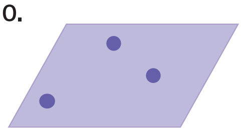
2. Por um ponto passam infinitas retas.



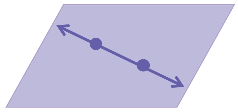
3. Por dois pontos distintos passa uma única reta.



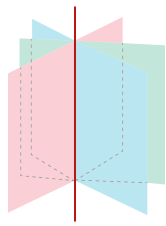
4. Por três pontos não colineares passa um único plano.



5. Se uma reta possui dois pontos distintos que estão num plano, então a reta está contida no plano.



6. Por uma reta passam infinitos planos.



Geometria Plana

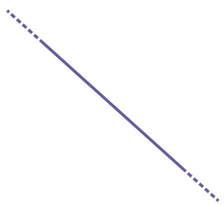
Reta

Posições Absolutas da Reta

- **Horizontal:** quando a reta está na posição horizontal (ou seja, “deitada”).

- **Vertical:** quando a reta está na posição vertical (ou seja, “em pé”).

- **Oblíqua (ou inclinada):** quando a reta está na posição diagonal (ou seja, “inclinada”). Essa inclinação pode ser tanto de um lado como de outro.



Posições Relativas das Retas

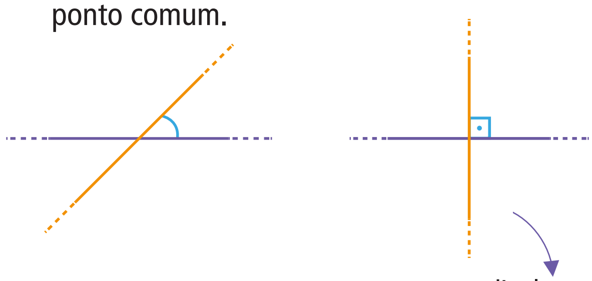
- **Paralelas:** quando a distância entre as duas retas é sempre a mesma. Podem ser: distintas (quando não possuem nenhum ponto em comum) ou coincidentes (quando possuem todos os pontos em comum).

Paralelas distintas:

Paralelas coincidentes:

Em ambos os casos, se chamarmos a reta roxa de r e a reta laranja de s, temos que $r//s$. Vale ressaltar também que no caso de retas paralelas coincidentes, temos que $r \equiv s$.

- **Concorrentes:** quando as duas retas possuem intersecção em um único ponto. Isto quer dizer que elas se cruzam em um ponto comum.



Outras Definições da Geometria Plana

Segmento de Reta

Dados dois pontos A e B sobre uma reta, chamamos de segmento de reta $\overline{AB}$ o conjunto de todos os pontos entre A e B (com ambos inclusos).

Semirreta

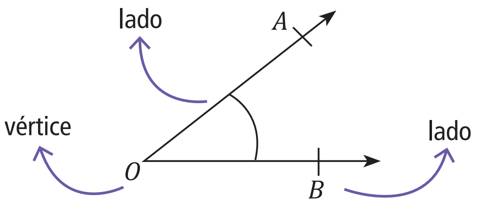
Dados dois pontos A e B sobre uma reta, chamamos de semirreta $\overrightarrow{AB}$ o conjunto formado pela união do segmento $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos P tais que B está entre A e P.

Ponto Médio

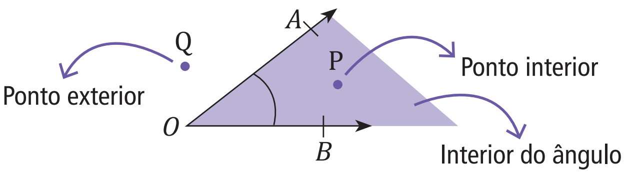
Dado um ponto M pertencente ao segmento de reta $\overline{AB}$, dizemos que M é ponto médio de $\overline{AB}$ quando M divide o segmento em dois segmentos congruentes, ou seja, $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Ângulos

Ângulo é a abertura formada por 2 semirretas não contidas na mesma reta que possuem a mesma origem.



A notação para ângulos é $A\hat{O}B$, Ô, ou ainda, letras gregas $(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$.



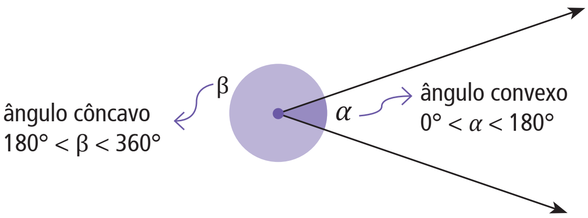
2 unidades de medida: graus e radianos.

1 grau é uma parte das 360 partes da circunferência, ou seja, $1°=1/360$ partes da circunferência.

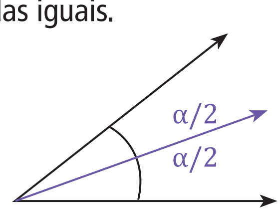
1 radiano é um arco sob a circunferência cuja medida é igual à medida do raio $(1\,rad \cong 57{,}3°)$.

$360°=2\pi rad$ e, consequentemente, $180° = \pi$ rad. Usando essas relações e através de uma regra de três é possível fazer as transformações de unidades de ângulos.

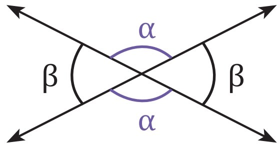
Dizemos que um ângulo α é convexo se sua medida estiver entre 0° e 180°. Por outro lado, dizemos que um ângulo β é côncavo se sua medida estiver entre 180° e 360°.



Bissetriz de um ângulo é a semirreta que parte do vértice e divide o ângulo em dois ângulos com medidas iguais.



Quando temos duas semirretas concorrentes, dizemos que os ângulos de seus lados opostos são **ângulos opostos pelo vértice** (OPV).



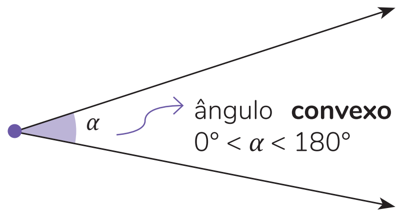
Dizemos que dois ângulos são **congruentes** se, e somente se, possuem **medidas iguais.**

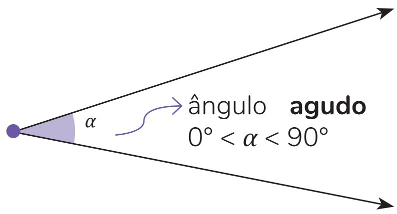
Classificação dos Ângulos

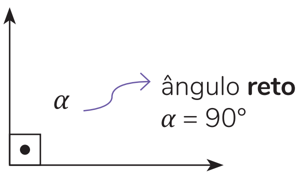
Classificação dos ângulos quanto à sua medida

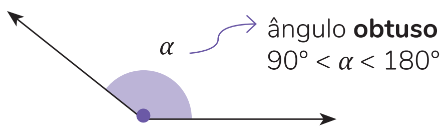
Para os ângulos convexos temos três distinções:

- Ângulos agudos: quando estão entre 0° e 90°;
- Ângulos retos: que são exatamente iguais a 90°;
- Ângulos obtusos: quando estão entre 90° e 180°.





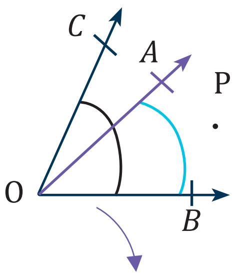




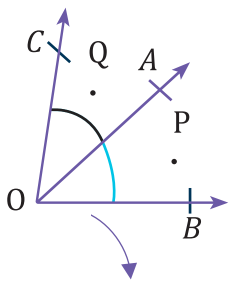
Os ângulos côncavos não possuem distinções.

Classificação dos ângulos quanto à sua posição

Em relação à posição, os ângulos podem ser **consecutivos** ou **adjacentes.** Dois ângulos são ditos consecutivos quando, além de possuírem um vértice em comum, possuírem um de seus lados em comum. Já dois ângulos são ditos adjacentes quando eles são consecutivos, mas não possuírem nenhum ponto interno em comum.



Consecutivos

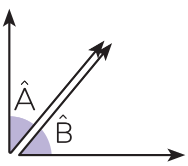


Adjacentes

Classificação dos ângulos quanto à sua soma

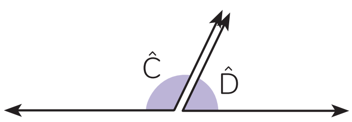
Dados dois ângulos quaisquer, dependendo do valor de sua soma, esses ângulos recebem denominações especiais.

- Ângulos complementares: dois ângulos são ditos complementares quando sua soma é igual a 90°. Dizemos que o complemento de um ângulo x é 90° $-x$.



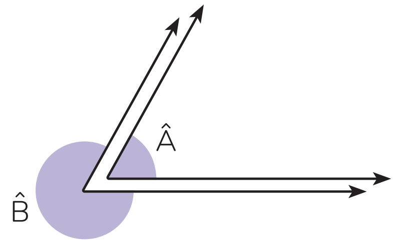
$\hat{A} + \hat{B} = 90°$

- Ângulos suplementares: dois ângulos são ditos suplementares quando sua soma é igual a 180°. Dizemos que o suplemento de um ângulo x é 180° $-x$.



$\hat{C} + \hat{D} = 180°$

- Ângulos replementares: dois ângulos são ditos replementares quando sua soma é igual a 360°. Dizemos que o replemento de um ângulo x é 360° $-x$.



$\hat{A} + \hat{B} = 360°$

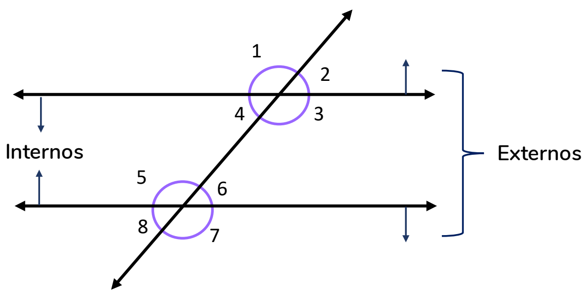
- Ângulos explementares: dois ângulos são ditos explementares quando o módulo da sua diferença é igual a 180°. Dados dois ângulos α e β, dizemos que eles são explementares quando $|\alpha - \beta| = 180°$.

$|\alpha - \beta| = 180°$

Retas Paralelas Cortadas por Reta Transversal

Os ângulos que estão entre as duas retas paralelas recebem a denominação de ângulos **internos**, já, os que estão do lado de fora das retas paralelas recebem a denominação de ângulos **externos**.

Em relação à reta transversal, ângulos que estão de um mesmo lado são denominados ângulos **colaterais** e ângulos que estão em **lados opostos** são denominados ângulos **alternos**.



- Os pares de ângulos **1** e **5, 2** e **6, 3** e **7** e **4** e **8** são chamados de **ângulos correspondentes** e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

- Os pares de ângulos **1** e **8** e **2** e **7** são chamados de **ângulos colaterais externos** e os ângulos que compõem cada par são **suplementares**.

- Os pares de ângulos **4** e **5** e **3** e **6** são chamados de **ângulos colaterais internos** e os ângulos que compõem cada par são **suplementares**.

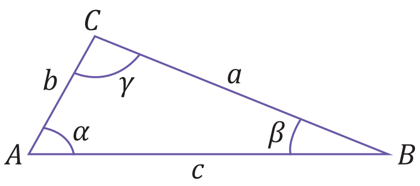
- Os pares de ângulos **1** e **7** e **2** e **8** são chamados de **ângulos alternos externos** e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

- Os pares de ângulos **3** e **5** e **4** e **6** são chamados de **ângulos alternos internos** e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

- Os pares de ângulos **1** e **3, 2** e **4, 5** e **7** e **6** e 8 são **ângulos opostos pelo vértice** e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

Triângulos

Um triângulo é uma figura formada por três pontos não colineares e três segmentos de retas que têm em suas extremidades dois desses pontos.



Os pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são os **vértices** do triângulo, os segmentos de reta $\overline{\boldsymbol{AB}}=\boldsymbol{c}$, $\overline{\boldsymbol{AC}}=\boldsymbol{b}$ e $\overline{\boldsymbol{BC}}=\boldsymbol{a}$ são os **lados** do triângulo e $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ são os **ângulos internos** do triângulo.

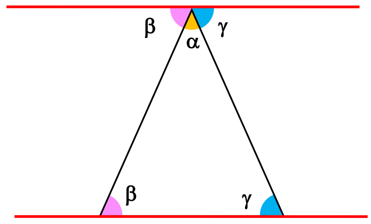
Para nos referirmos ao triângulo da figura utilizamos a notação ΔABC, ou ΔBAC, ou ΔBCA , etc. A ordem das letras não importa quando tratamos do mesmo triângulo.

O **maior lado** do triângulo **sempre** será **oposto ao maior ângulo.**

Para que um triângulo seja formado, os valores dos seus lados precisam obedecer à uma **condição de existência:**

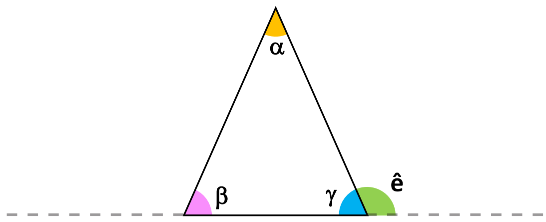
$$|a-c|<b<a+c$$

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180°.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

O ângulo externo de um triângulo é o suplemento do ângulo interno adjacente a ele.



$$\hat{e} = 180^\circ - \gamma$$
$$\hat{e} = \alpha + \beta$$

A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

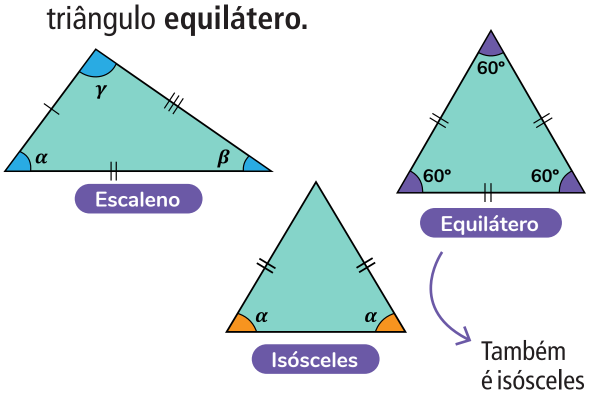
Classificação dos Triângulos

Classificação quanto aos lados:

- Quando triângulo possui **três lados com diferentes medidas** cada um, dizemos que ele é um triângulo **escaleno;**

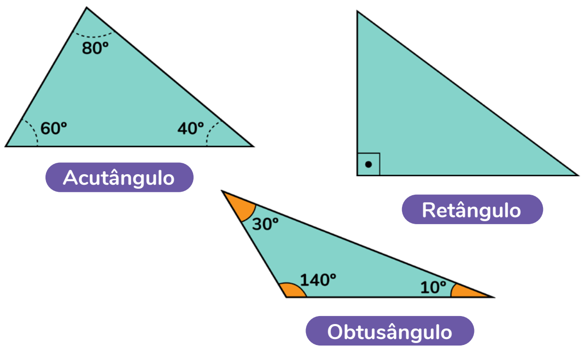
- Quando o triângulo possui **pelo menos dois lados de mesma medida**, chamamos de triângulo **isósceles;**

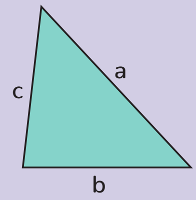
- Quando o triângulo possui os **três lados com a mesma medida**, chamamos de triângulo **equilátero.**



Classificação quanto aos ângulos internos:

- Quando **todos os ângulos** internos do triângulo forem **menores que 90°**, temos um triângulo **acutângulo**;
- Quando **um ângulo** interno for **igual a 90°**, chamamos o triângulo de triângulo **retângulo**;
- Quando **um ângulo** interno for **maior que 90°**, este será um triângulo **obtusângulo**.





$a>b$ e $a>c$

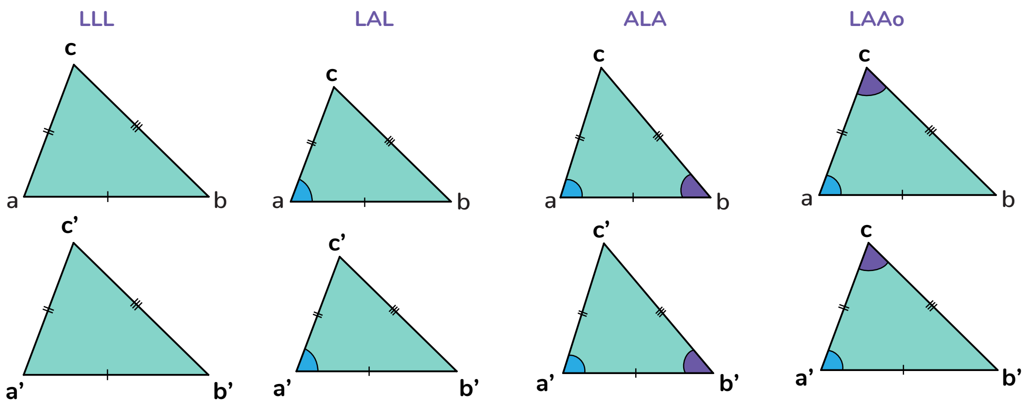
- Se ocorrer a desigualdade $a^2<b^2+c^2$, então o triângulo será acutângulo;
- Se ocorrer a desigualdade $a^2>b^2+c^2$, então o triângulo será obtusângulo e;
- Se ocorrer a igualdade $a^2=b^2+c^2$, então o triângulo será retângulo.

Congruência de Triângulos

Dois triângulos são **congruentes** se, e somente se, possuem **três lados ordenadamente congruentes** e possuem **três ângulos ordenadamente congruentes.**

Critérios de Congruência

- **Lado-Lado-Lado (LLL):** Se um triângulo tem três lados iguais aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.
- **Lado-Ângulo-Lado (LAL):** Se um triângulo tem dois lados e o ângulo entre eles iguais aos dois lados e ao ângulo de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.
- **Ângulo-Lado-Ângulo (ALA):** Se um triângulo tem dois ângulos e o lado entre eles iguais aos dois ângulos e o lado entre eles de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.
- **Lado-Ângulo-Ângulo Oposto (LAAo):** Dados dois triângulos que possuem dois ângulos iguais e os lados opostos a um desses ângulos também iguais, então os dois triângulos são congruentes.

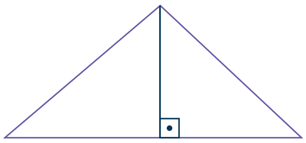


Pontos Notáveis do Triângulo

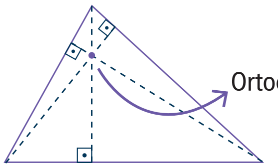
Uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta no qual uma de suas extremidades está em um vértice do triângulo e a outra está no lado oposto a esse vértice.

Todo triângulo possui três cevianas, são elas: altura, mediana e bissetriz.

A **altura** de um triângulo é um segmento de reta com uma extremidade em um vértice e a outra no lado oposto ao vértice, formando com esse lado oposto um ângulo de 90°.

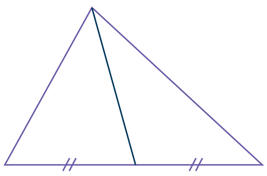


As três alturas de um triângulo qualquer se encontram em um ponto, o **ortocentro (O).**

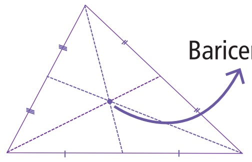


- **Triângulo acutângulo:** ortocentro interno ao triângulo;
- **Triângulo retângulo:** ortocentro no vértice de 90°;
- **Triângulo obtusângulo:** ortocentro externo ao triangulo.

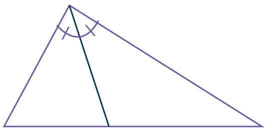
A **mediana** de um triângulo é um segmento de reta com uma extremidade em um vértice e a outra no ponto médio do lado oposto.



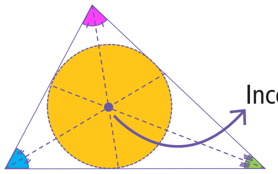
As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um ponto, o **baricentro (G).**



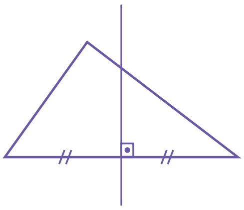
A **bissetriz** é o segmento de reta com uma extremidade em um vértice e a outra no lado oposto, dividindo o ângulo do vértice em dois ângulos congruentes.



As três bissetrizes de um triângulo qualquer se encontram em um ponto, o **incentro (I).**

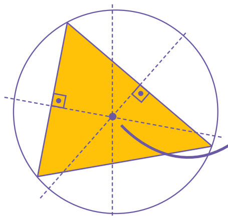


A **mediatriz** é uma reta perpendicular a um segmento, que passa pelo seu ponto médio.



As três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um ponto, o **circuncentro (C).**

A mediatriz **não** é uma ceviana.

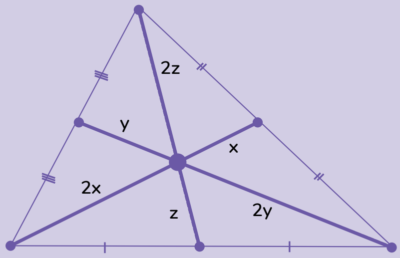


Todo triângulo tem uma circunferência inscrita que tangencia os lados do triângulo e uma circunferência circunscrita que toca os vértices do triângulo.

Geometria Plana

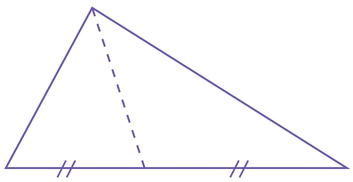
Propriedades das Medianas

O baricentro de um triângulo divide as medianas na proporção 2:1.



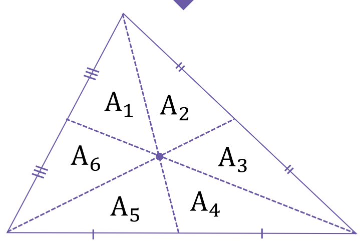
O segmento da mediana que liga o vértice ao baricentro possui o dobro do comprimento em relação ao segmento que liga o baricentro ao ponto médio do lado oposto. Isto vale para todas as medianas do triângulo.

A mediana divide o triângulo em 2 triângulos de mesma área.



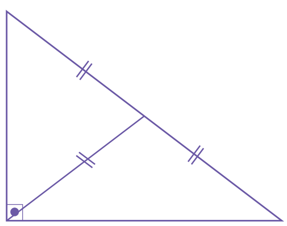
Os dois triângulos possuem a mesma área.

Consequência



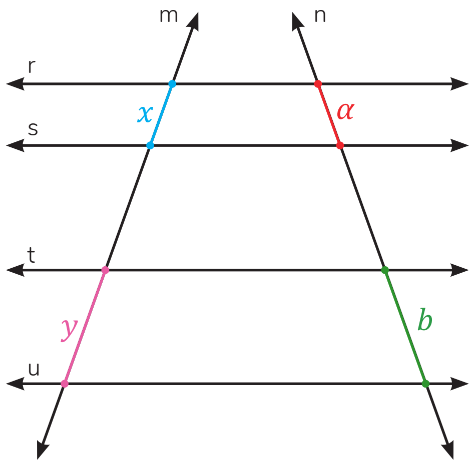
$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6$

Mediana relativa à hipotenusa mede metade do comprimento da hipotenusa.



Teorema de Tales

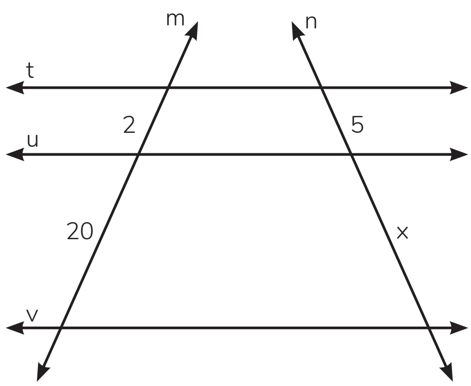
Duas retas transversais quaisquer que passem sob retas paralelas distintas são divididas em segmentos proporcionais.



Pelo teorema, a razão entre dois segmentos de retas da primeira transversal é proporcional à razão entre os dois segmentos de reta correspondentes na segunda transversal.

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Exemplo: Na figura abaixo, as retas m e n são transversais às retas t,u e v, com t//u//v. Determine o valor de x.



$$\frac{2}{20} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 50$$

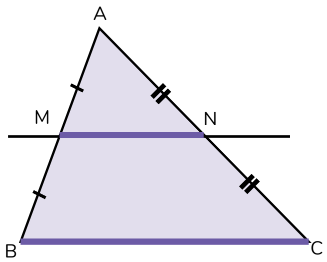
ou

$$\frac{2}{5} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 50$$

manter a ordem dos segmentos nas razões

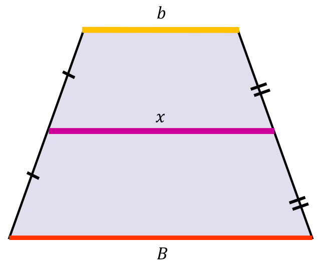
Base Média

Em um triângulo qualquer, o segmento de reta que une os pontos médios de dois dos lados e é paralelo à base do triângulo é chamado de **base média do triângulo**. Além disso, a medida deste segmento de reta é igual **à metade da medida da base.**



$$\overline{MN} // \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

Em um trapézio qualquer, o segmento de reta que une os pontos médios dos dois lados não paralelos e que é paralelo às bases do trapézio é chamado de **base média do trapézio**. Além disso, a medida deste segmento de reta é igual à **metade da soma da base maior com a base menor**.

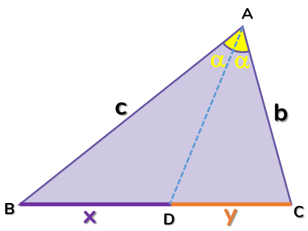


$$x//b//B \;\Rightarrow x = \frac{B+b}{2}$$

Teorema das Bissetrizes

Teorema da Bissetriz Interna

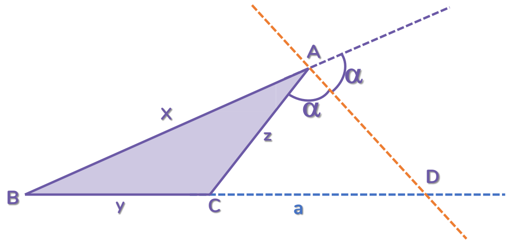
Em um triângulo qualquer, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos de reta proporcionais aos lados adjacentes.



$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

Teorema da Bissetriz Externa

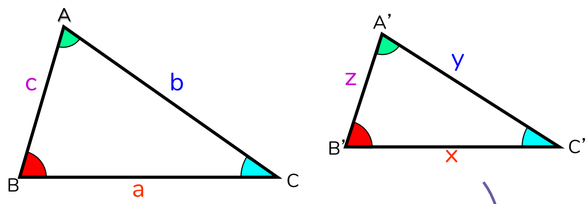
Em um triângulo qualquer, a reta suporte da bissetriz de um ângulo externo que se encontra com a reta suporte que contém o lado oposto a esse ângulo divide os segmentos do lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados do triângulo.



$$\frac{x}{y+a} = \frac{z}{a}$$

Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** se e somente se os seus ângulos internos são **ordenadamente** congruentes e os lados de cada triângulo que estão na mesma posição são **proporcionais.**



$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

A notação de semelhança é: ~

$$\Delta ABC \sim \Delta A'\,B'\,C'$$

Vale ressaltar que a igualdade acima também pode ser igualada à uma constante k, chamada de constante de proporcionalidade ou razão de semelhança.

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$$

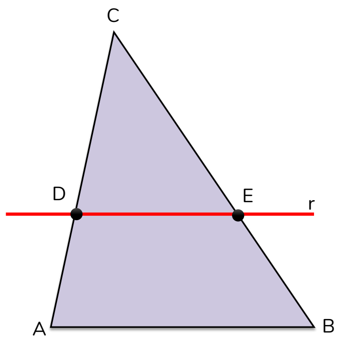
Propriedade de grandezas proporcionais

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a+b+c}{x+y+z}$$

Observações:

- A expressão lados homólogos pode aparecer como sinônimo de lados correspondentes;
- Dois triângulos semelhantes **não necessariamente** têm lados congruentes, mas sim proporcionais;
- Triângulos que são congruentes também são semelhantes, mas não vale a volta.

Caso, em um triângulo qualquer, traçarmos uma reta sobre ele que seja paralela a um dos lados, o triângulo original e o triângulo interno delimitado por tal reta serão semelhantes.



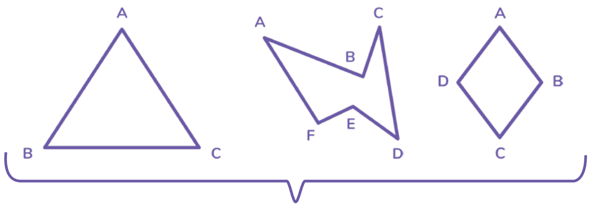
$\Delta ABC \sim \Delta CDE$

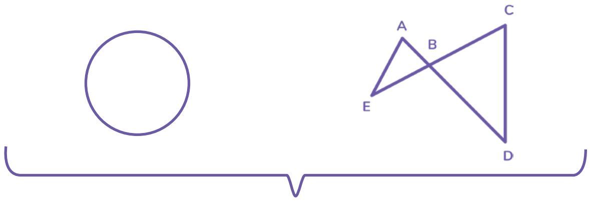
Critérios de Semelhança

- **Dois ângulos ordenados congruentes:** Se temos dois triângulos com dois ângulos ordenadamente congruentes, então os dois triângulos são semelhantes.
- **Lados proporcionais e ângulo entre eles congruente (LAL):** Se temos um triângulo com dois lados que são proporcionais aos de outro triângulo e o ângulo entre eles for congruente nos dois triângulos, então os dois triângulos são semelhantes.
- **Lados homólogos proporcionais (LLL):** Se temos um triângulo com os três lados homólogos proporcionais aos de outro triângulo, então os dois triângulos são semelhantes.

Polígonos

Um polígono é um conjunto de segmentos de reta unidos por pontos.



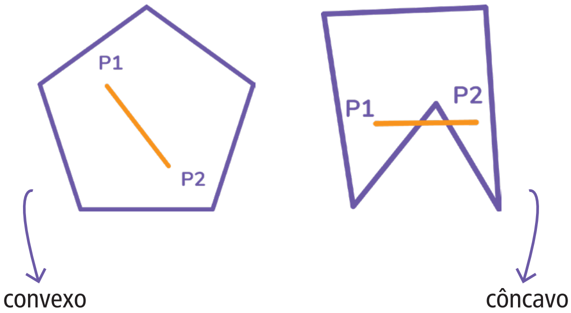


- Os **segmentos de reta** são os **lados** do polígono e os **pontos** são os **vértices** do polígono;
- Utilizamos **letras maiúsculas** do alfabeto para nos referirmos aos **vértices** do polígono;
- Quando não sabemos a quantidade de lados do polígono, dizemos que o polígono possui n lados;
- O número de lados de um polígono é igual ao seu número de vértices;
- Todos os n vértices são distintos.

Classificação e Nomenclatura de Polígonos

Classificação

Os polígonos são ditos **convexos** se, ao traçarmos qualquer reta passando por esse polígono, a reta corta o polígono em no máximo dois de seus lados. Já os polígonos são ditos **côncavos** se, ao traçarmos qualquer reta passando por esse polígono, a reta corta o polígono em mais do que dois de seus lados.



Forma alternativa de descobrir a classificação:

Os polígonos são ditos **convexos** se, ao traçarmos qualquer segmento de reta entre dois de seus lados, o segmento permanecer em seu interior. Já os polígonos são ditos **côncavos** se existe pelo menos um segmento de reta entre dois de seus lados em que o segmento não fique completamente em seu interior.

Nomenclatura

Os polígonos podem receber nomes especiais de acordo com o número de lados que possuem.

Lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono
20	Icoságono

Ângulos e Diagonais de um Polígono

Dado um polígono qualquer, os ângulos compreendidos entre dois de seus lados são os **ângulos internos** do polígono.

A soma dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados é dada por:

$$S_i = 180°.(n-2)$$

Dado um polígono qualquer e um ângulo interno desse polígono, o suplemento desse ângulo interno é chamado de **ângulo externo.**

$$a_i + a_e = 180°$$

A soma dos ângulos externos de um polígono de n lados é **sempre igual** a 360°.

$$S_e = 360°$$

O **número de diagonais** de um polígono de n lados é calculado através da seguinte equação:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Fique atento: a expressão acima nos informa o **número total** de diagonais do polígono, mas **de cada vértice** de um polígono de n lados partem $(n-3)$ diagonais.

Polígonos Regulares

Dizemos que um **polígono é um polígono regular** quando **todos os lados são congruentes e todos os seus ângulos (internos e externos) são congruentes.**

O número de diagonais, soma dos ângulos internos e soma dos ângulos externos de polígonos regulares são calculados da mesma forma que em polígonos gerais. O que muda é que **nos polígonos regulares é possível encontrar o valor exato de cada ângulo externo e cada ângulo interno.**

Cada um dos ângulos internos (a_i) do polígono regular de n lados é calculado da seguinte forma:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{180°.(n-2)}{n}$$

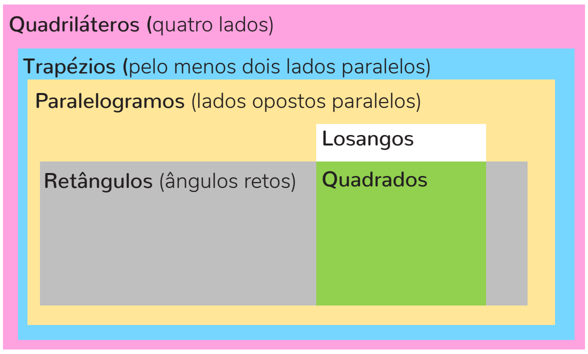
Cada um dos ângulos externos (a_e) do polígono regular de n lados é calculado da seguinte forma:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$$

Apenas em polígonos regulares

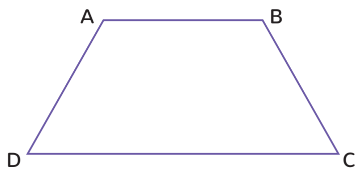
Quadriláteros

Os quadriláteros são polígonos convexos de quatro lados.



Trapézio

O trapézio é um quadrilátero que possui **dois lados paralelos.**



$\overline{AB} \,//\, \overline{AC}$

▸ Os lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio;

▸ No trapézio da imagem acima vale: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$.

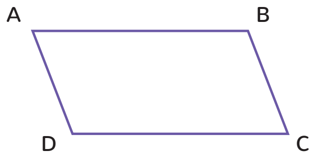
▸ Se os **lados não paralelos** forem **congruentes**, o trapézio é chamado de **trapézio isósceles** (neste caso, os ângulos de cada base são congruentes);

▸ Se os **lados não paralelos não forem congruentes**, o trapézio é chamado de **trapézio escaleno**;

▸ Se o trapézio possui **dois ângulos retos** ele é chamado de **trapézio retângulo**.

Paralelogramo (Quadrilátero Notável)

O paralelogramo é um quadrilátero que possui os **lados opostos paralelos.**



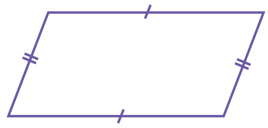
$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AC} // \overline{BD}$

Propriedades dos Paralelogramos

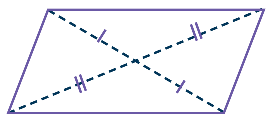
1. Os seus ângulos opostos são congruentes.

$\alpha + \beta = 180°$

2. Os seus lados opostos são congruentes.

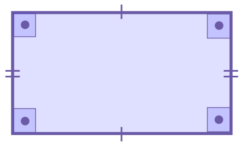


3. As suas diagonais dividem-se ao meio.

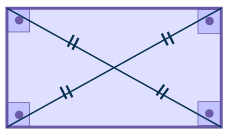


Retângulo

O retângulo é um quadrilátero que possui **todos os ângulos internos congruentes.**

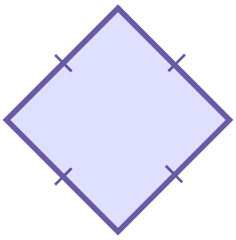


Propriedade do retângulo: todo retângulo possui diagonais congruentes.

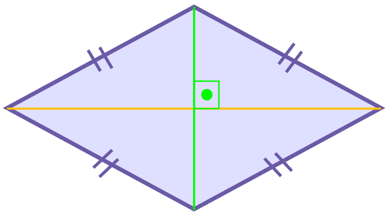


Losango

O losango é um quadrilátero que possui **todos os lados congruentes.**



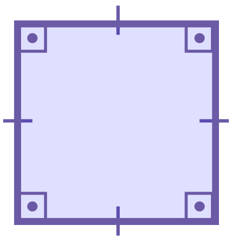
Propriedade do losango: todo losango possui diagonais perpendiculares.



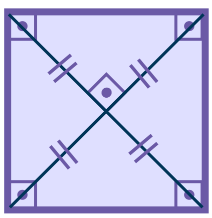
- As diagonais são as bissetrizes dos ângulos internos;
- As diagonais não são do mesmo tamanho;
- Chamamos uma diagonal de diagonal maior e a outra de diagonal menor;
- Quando as diagonais são traçadas, são formados quatro triângulos retângulos.

Quadrado

Quadrado é um quadrilátero que possui **todos os ângulos internos congruentes e todos os lados congruentes.**



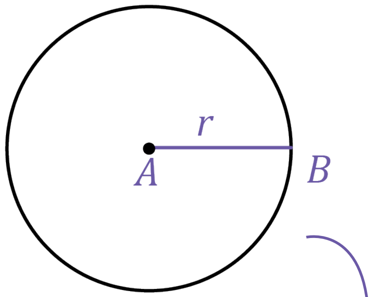
Propriedade do quadrado: todo quadrado possui diagonais congruentes e perpendiculares.



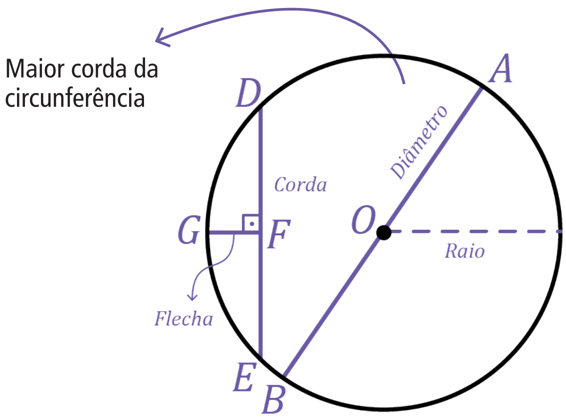
Circunferência e Círculo

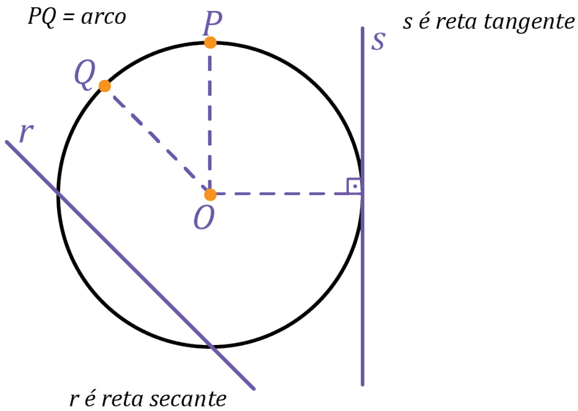
Circunferência

Suponha um ponto A. Definimos uma circunferência de centro A como o conjunto de todos os pontos B equidistantes do ponto A. O valor de $\overline{AB}$ é denominado raio da circunferência.



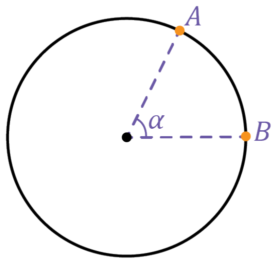
Elementos da Circunferência





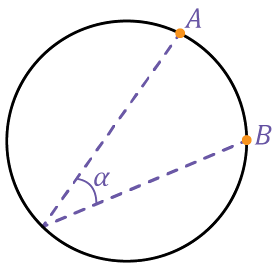
Ângulos na Circunferência

Ângulo Central



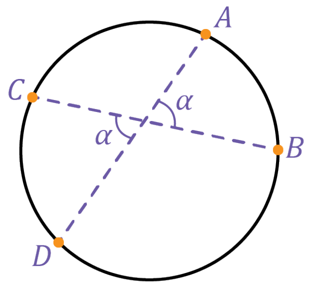
$$\alpha = arco(AB)$$

Ângulo Inscrito



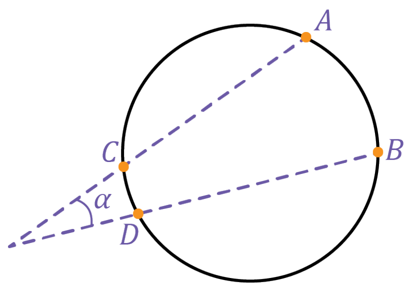
$$\alpha = \frac{arco(AB)}{2}$$

Ângulo Excêntrico Interior



$$\alpha = \frac{arco(AB) + arco(CD)}{2}$$

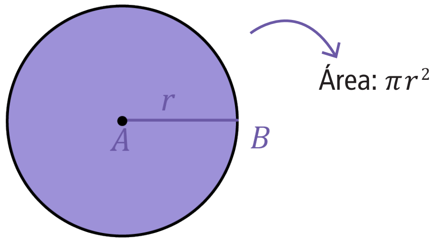
Ângulo Excêntrico Exterior



$$\alpha = \frac{arco(AB) - arco(CD)}{2}$$

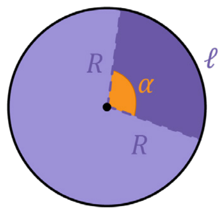
Círculo

Suponha uma circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$. O círculo de centro A e raio $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos C tais que a distância entre A e C seja menor ou igual à distância entre A e B.



Elementos do Círculo e suas Áreas

Setor Circular

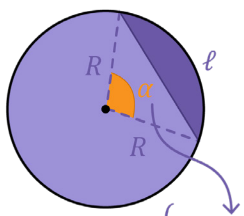


$$\begin{array}{ll} 360° & -\ \pi R^2 \\ \alpha & -\ A_{setor} \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ll} 2\pi R & -\ \pi R^2 \\ l & -\ A_{setor} \end{array}$$

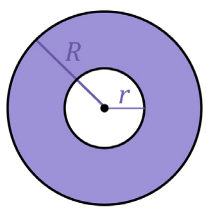
Segmento Circular



$$\begin{cases} A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot sen\alpha \\ A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\alpha \end{cases}$$

$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{triângulo}$$

Coroa Circular



$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi_r^2$$

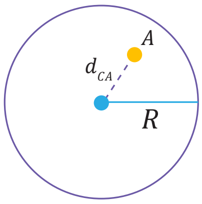
$$A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A_{coroa} = \pi(R + r)(R - r)$$

Posições Relativas

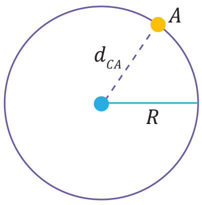
Posições entre Circunferência e Ponto

Ponto **interior** à circunferência:



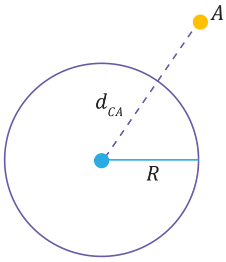
$d_{CA} < R$

Ponto **pertencente** à circunferência:



$d_{CA} = R$

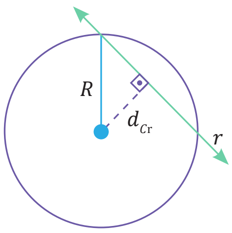
Ponto **exterior ou externo** à circunferência:



$d_{CA} > R$

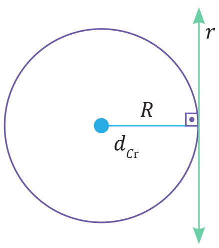
Posições entre Circunferência e Reta

Reta **secante** à circunferência:



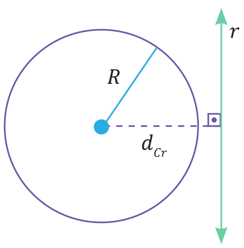
$d_{Cr} < R$

Reta **tangente** à circunferência:



$d_{Cr} = R$

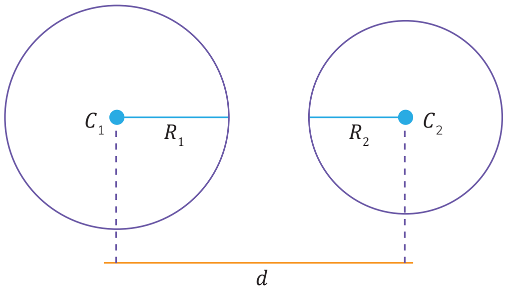
Reta **externa** à circunferência:



$d_{Cr} > R$

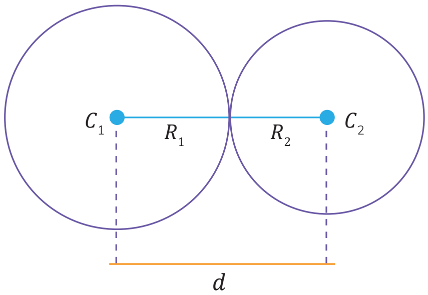
Posições entre Circunferências

Circunferências **externas**:



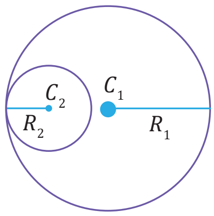
$d > R_1 + R_2$

Circunferências **tangentes externas:**



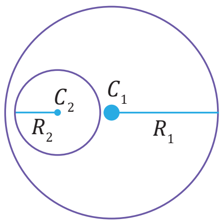
$d = R_1 + R_2$

Circunferências **tangentes internas:**



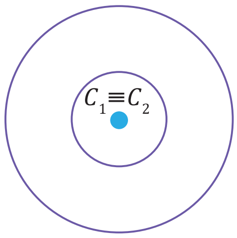
$d = R_1 - R_2$

Circunferências **internas:**



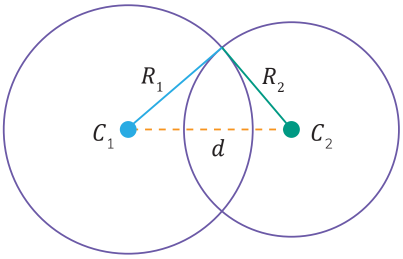
$d < R_1 - R_2$

Circunferências **concêntricas:**



$d = 0$

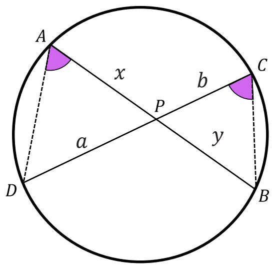
Circunferências **secantes**:



$$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$$

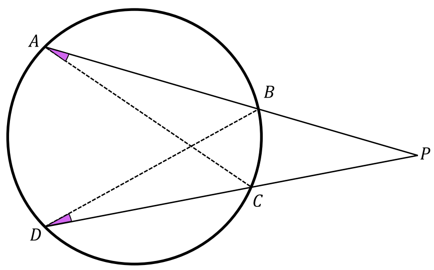
Potências de um Ponto

Caso 1: P é interior à C



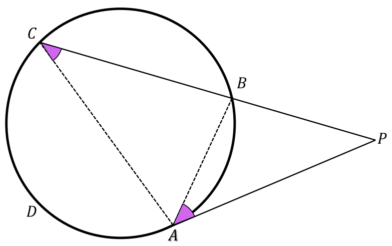
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

Caso 2: P é exterior à C

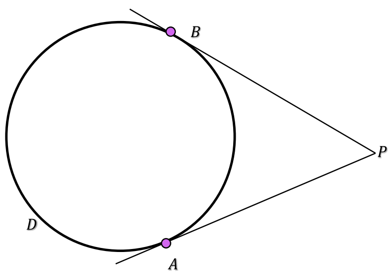


$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

2 casos específicos:



$$(\overline{PA})^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$$

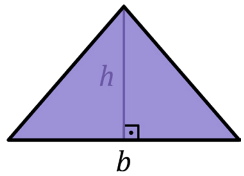


$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Áreas

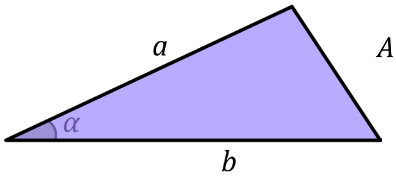
Áreas e Perímetro do Triângulo

1. Área de um triângulo com base b e altura h conhecida.



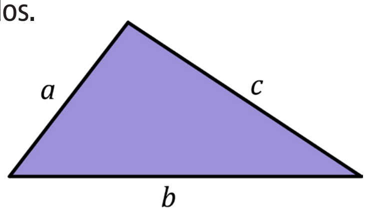
$$A = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$$

2. Área de um triângulo com ângulo α e lados adjacentes conhecidos.



$$A = \frac{1}{2} a . b . sen\, \alpha$$

3. Área de um triângulo com os três lados conhecidos.

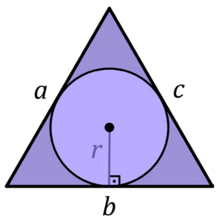


$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

semiperímetro

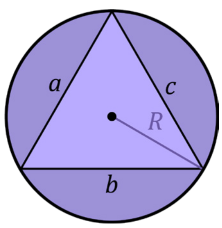
Fórmula de Heron

4. Área de um triângulo com perímetro e raio da circunferência inscrita conhecidos.



$$A = 2p.r$$

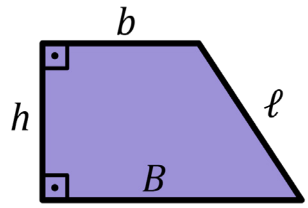
5. Área de um triângulo com os três lados e o raio da circunferência circunscrita conhecidos.



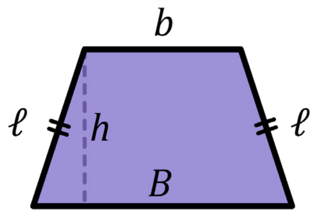
$$A = \frac{a.b.c}{4R}$$

Lembre-se: o perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos seus lados. Assim, um triângulo de lados a, b e c possui perímetro igual a $2p = a + b + c$.

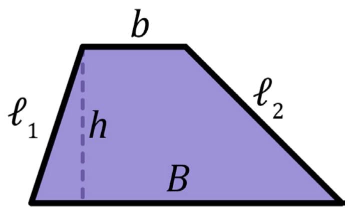
Área e Perímetro do Trapézio



Trapézio Retângulo



Trapézio Isóceles



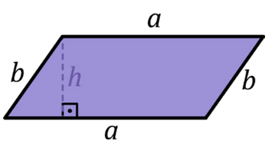
Trapézio Escaleno

$$A = h \cdot \frac{(b+B)}{2} = \frac{(b+B) \cdot h}{2}$$

É possível calcular o perímetro do trapézio da seguinte forma:

- No trapézio retângulo: $2p = B + h + b + l$
- No trapézio isósceles: $2p = B + l + b + l$
- No trapézio escaleno: $2p = B + l_1 + b + l_2$

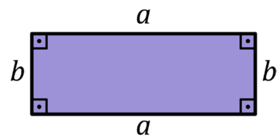
Área e Perímetro do Paralelogramo



$$A = a.h$$

$$2p = 2a + 2b$$

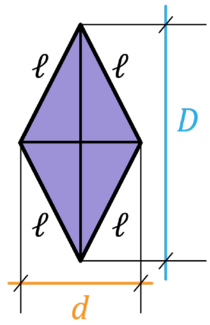
Área e Perímetro do Retângulo



$$A = a.b$$

$$2p = 2a + 2b$$

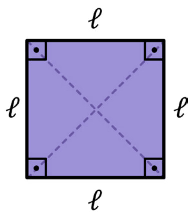
Área e Perímetro do Losango



$$A = \frac{d.D}{2}$$

$$2p = 4l$$

Área e Perímetro do Quadrado



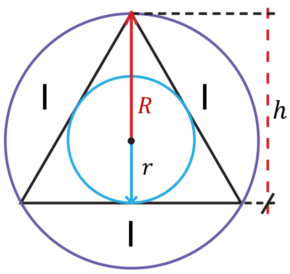
$$A = l^2$$

$$P = 4l$$

Polígonos Regulares

Todo polígono regular possui uma circunferência inscrita que tangencia cada um dos seus lados e uma circunferência circunscrita que toca cada um de seus vértices.

Triângulo Equilátero



$$h = r + R$$

$$r = a = \frac{1}{3}h$$

apótema

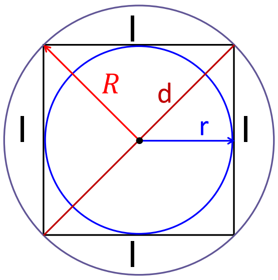
$$R = \frac{2}{3}h$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

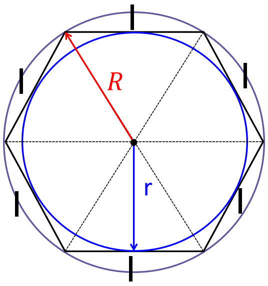
$$2p = 3l$$

Quadrado



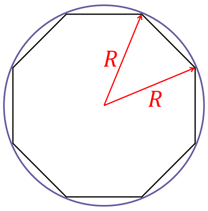
$$\begin{cases} r = a = \dfrac{l}{2} \\ d = 2R \\ d = l\sqrt{2} \\ R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{l\sqrt{2}}{2} \\ A = l^2 \\ 2p = 4l \end{cases}$$

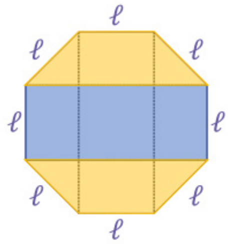
Hexágono Regular



$$\begin{cases} r = a = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \\ R = l \\ d = 2r = l\sqrt{3} \\ A = 6\left(\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) \\ 2p = 6l \end{cases}$$

Octógono Regular





$$a_{central} = \frac{360°}{8} = 45°$$

$$a_i = 135°$$

$$A = \frac{1}{2}R.R.sen45°$$

$$A_{oct} = 8 \cdot A = 2\sqrt{2}.R^2$$

$$A_{oct} = 2.A_{trapézio} + A_{retângulo}$$

$$A_{oct} = 2l^2.(1 + \sqrt{2})$$

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@paulojubilut
@Prof_jubilut
biologiajubilut
+biologiatotalbrjubilut