

# Introdução à Óptica e espelhos

João Maldonado

*Aula 20*

*IME 2020*

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introdução .....</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1. Fundamentos da óptica geométrica .....</b>                | <b>5</b>  |
| 1.1. Luz .....  | 5         |
| 1.2. Fontes de luz .....  | 5         |
| 1.3. Meios de propagação.....                                   | 6         |
| 1.4. Frente de luz e raio de luz.....                           | 7         |
| 1.5. Pincel e feixe de luz.....                                 | 8         |
| 1.6. Princípios da óptica geométrica.....                       | 9         |
| 1.7. Sombra e penumbra .....                                    | 10        |
| 1.8. Pontos objeto e imagem .....                               | 11        |
| 1.9. Sistema ópticos.....                                       | 14        |
| 1.10. Reflexão versus refração .....                            | 14        |
| 1.11. Cores .....   | 16        |
| <b>2. Eclipses .....</b>  | <b>19</b> |
| 2.1. Eclipse da lua .....                                       | 19        |
| 2.2. Eclipse do Sol .....                                       | 19        |
| 2.3. Fases da lua .....   | 20        |
| <b>3. Espelhos planos .....</b>                                 | <b>22</b> |
| 3.1. Leis da reflexão .....                                     | 22        |
| 3.2. O espelho plano .....                                      | 23        |
| 3.3. Formação da imagem .....                                   | 23        |
| 3.4. Campo visual .....   | 25        |
| 3.5. Associação de espelhos planos .....                        | 25        |
| <b>4. Movimento relativo entre espelho plano e objeto .....</b> | <b>28</b> |
| 4.1. Movimento generalizado .....                               | 28        |
| 4.2. Translação pura .....                                      | 31        |
| 4.3. Rotação pura .....   | 32        |
| <b>5. Espelhos esféricos.....</b>                               | <b>35</b> |
| 5.1. Equação de gauss para espelhos esféricos .....             | 37        |
| 5.2. Raios notáveis.....  | 39        |
| 5.3. Aumento linear .....                                       | 41        |



|  |            |
|--|------------|
| 5.4. Posição das imagens .....                                       | 42         |
| 5.5. Campo visual de um espelho esférico .....                       | 43         |
| 5.6. Relação entre velocidade do objeto e velocidade da imagem ..... | 44         |
| <b>6. Lista de exercícios .....</b>                                  | <b>46</b>  |
| <b>7. Gabarito sem comentários .....</b>                             | <b>68</b>  |
| <b>8. Lista de exercícios comentada .....</b>                        | <b>69</b>  |
| <b>9. Considerações finais .....</b>                                 | <b>116</b> |
| <b>10. Referências bibliográficas .....</b>                          | <b>117</b> |
| <b>11. Versão de aula .....</b>                                      | <b>118</b> |



## Introdução

Nesta aula introduziremos o estudo da Óptica Geométrica. Dessa forma, estudaremos os conceitos iniciais que norteiam esse ramo da Física.

É de extrema importância que você saiba os conceitos iniciais, pois eles serão amplamente utilizados quando a matéria se aprofundar e nossos vestibulares adoram ir na raiz do entendimento sobre sistemas ópticos.

Fique atento ao tópico sobre movimento relativo de corpos próximos a espelhos planos, rotação de espelhos planos e translação de espelhos. O IME gosta muito destes temas.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



ESCLARECENDO!



## 1. Fundamentos da óptica geométrica

A óptica geométrica estuda fenômenos ópticos com o foco na trajetória da luz. A óptica física, que estudaremos nas próximas aulas, estuda os fenômenos ópticos que envolvem a natureza ondulatória (interferência) da luz.

### 1.1. Luz

A luz é uma energia radiante que se propaga através de ondas eletromagnéticas que, atuando nos órgãos visuais, produz sensação de visão

#### 1.1.1. Velocidade de propagação

A velocidade de propagação da luz é uma constante positiva, que no vácuo vale aproximadamente:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Nos meios materiais, a velocidade da luz ( $v$ ) é sempre menor que no vácuo ( $c$ ). Definimos como ano-luz a distância percorrida pela luz durante um ano terrestre. Assim, um ano-luz é equivalente a:

$$1 \text{ ano} - \text{luz} = c \cdot \Delta t \cong 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,16 \cdot 10^7 \text{ s} \cong 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Note que **ano-luz é uma medida de distância** e não de tempo, como as pessoas costumam associar.

### 1.2. Fontes de luz

Fontes de luz são corpos que podem emitir ou refletir luz.

#### 1.2.1. Fontes primárias

São corpos que emitem luz própria. Por exemplo: a chama de uma vela, o Sol, as lâmpadas elétricas quando acessas etc.

#### 1.2.2. Fontes secundárias

São corpos que recebem a luz e a retransmitem por difusão, sofrendo reflexão ou refração. Por exemplo: a Lua, as nuvens etc.



### 1.2.3. Fontes puntiformes

As dimensões das fontes puntiformes são desprezíveis em comparação as dimensões dos objetos que compõem o problema. Uma estrela observada da Terra comporta-se como fonte puntiforme, pois suas dimensões se tornam desprezíveis devido à distância entre a Terra e a estrela. Tenha em mente que estrelas, de um modo geral, são corpos de grandes dimensões.

### 1.2.4. Fontes extensas

As dimensões da fonte são comparáveis às dimensões dos corpos no problema estudado.

## 1.3. Meios de propagação

### 1.3.1. Meios transparentes

São meios que permitem a propagação regular da luz. Toda a energia radiante que incide neste meio é transmitida à diante. Não há reflexão nas superfícies de fronteira deste meio. O vácuo é o único meio perfeitamente transparente.

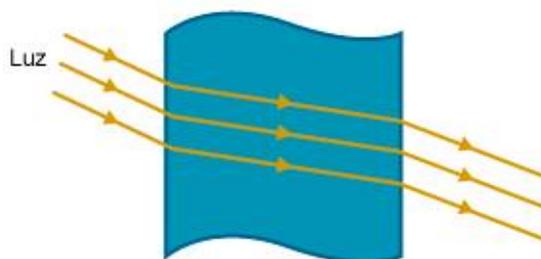


Figura 1: Representação de um meio transparente.

### 1.3.2. Meios translúcidos

São meios em que a luz não se propaga de maneira regular. Há intensa reflexão nas superfícies de fronteira e no interior. O que predomina neste meio é o espalhamento aleatório da luz.

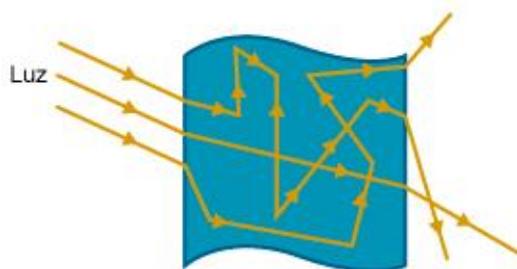


Figura 2: Representação de um meio translúcido.

### 1.3.3. Meios opacos

Não há propagação da luz nesses meios. Ao se incidir sobre um meio opaco, uma parcela da luz é absorvida, outra parcela é refletida, mas nenhuma é transmitida. A porção de luz que foi absorvida pode ser convertida em outros tipos de energia, como a energia térmica.

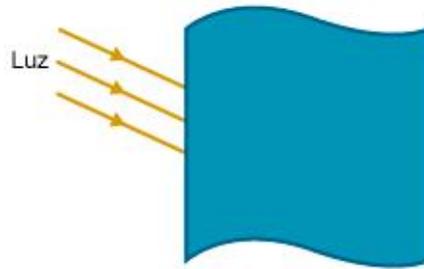


Figura 3: Representação de um meio opaco.

### 1.3.4. Meios isotrópicos

A velocidade de propagação da luz e as propriedades ópticas são independentes da direção que é realizada a medida.

### 1.3.5. Meio ordinário

É um meio transparente, homogêneo e isotrópico. O vácuo é um meio ordinário.

## 1.4. Frente de luz e raio de luz

### 1.4.1. Frente de luz

“É a fronteira entre a região já atingida por um pulso luminoso e a região ainda não atingida.” Para uma fonte puntiforme, as frentes de luz são superfícies esféricas. Considere a fonte primária puntiforme  $F$ . As frentes de luz, de um em um segundo, são esferas de raios crescentes

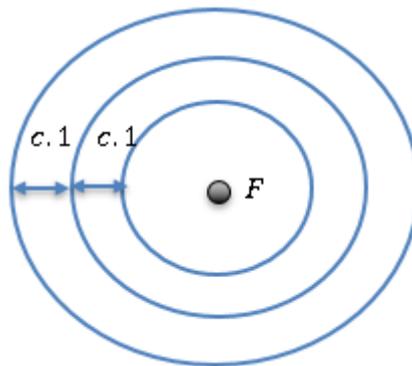


Figura 4: Representação de frente de luz.

Cada frente se desloca com a velocidade da luz ( $c$ ) naquele meio. Se as frentes estão deslocadas de um segundo, a distância entre duas consecutivas é dada por  $c$  metros.

### 1.4.2. Raio de luz

É uma linha orientada que tem origem na fonte de luz e é perpendicular às frentes de luz. Os raios de luz mostram a direção e o sentido de propagação da luz em um meio ou sistema.

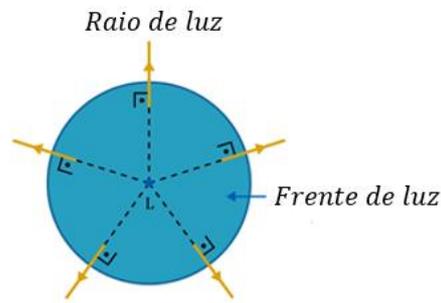


Figura 5: Representação de raio de luz e frente de luz.

Observações:

- i. O raio de luz é apenas uma indicação da direção e do sentido de propagação da luz no meio, não existe uma existência física dele, diferentemente de uma frente de luz que possui existência física.
- ii. Devido à distância entre o Sol e a Terra ser muito grande, podemos considerar que os raios solares que chegam à Terra são praticamente paralelos entre si e as frentes de ondas são assumidas planas, já que elas possuem um grande raio de curvatura.

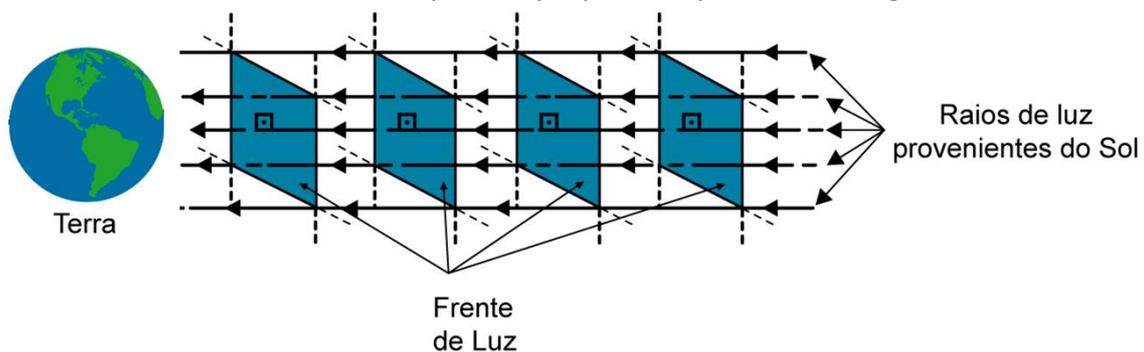


Figura 6: Raios solares chegam praticamente paralelos entre si e as frente de onda são assumidas planas.



## 1.5. Pincel e feixe de luz

Os pinceis de luz são regiões onde há raios de luz se propagando. A união de vários pinceis emanados de um mesmo elemento de superfície da fonte define uma região iluminada com um ângulo de abertura relativamente grande, que é chamada de feixe de luz.

### 1.5.1. Pinceis ou feixes cônicos divergentes

Os raios de luz que divergem a partir de um único ponto  $P$ .



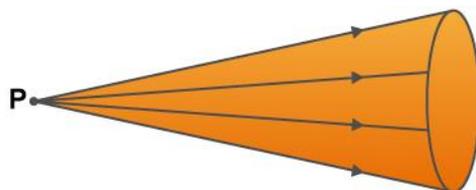


Figura 7: Pincel cônico divergente.

### 1.5.2. Pinceis ou feixes convergentes

Os raios de luz que convergem para um único ponto  $P$ .

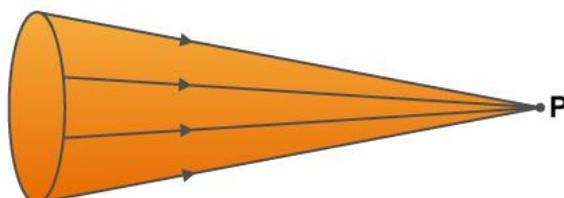


Figura 8: Pincel cônico convergente.

### 1.5.3. Pinceis ou feixes cilíndricos

Os raios de luz são paralelos entre si.

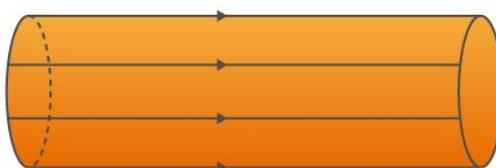


Figura 9: Pincel cilíndrico.

## 1.6. Princípios da óptica geométrica

### 1.6.1. Princípio da independência

A propagação de um feixe não é afetada pela propagação de outro feixe na mesma região do espaço.

Após o cruzamento, os raios continuam independentemente seus respectivos caminhos ópticos.

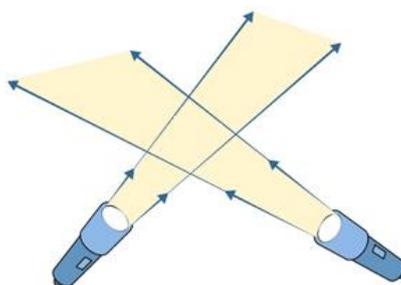


Figura 10: Princípio da independência da luz.



## 1.6.2. Princípio da propagação retilínea

Nos meios transparentes e homogêneos, a luz se propaga em linha reta.

Como consequência destes princípios, surge a reversibilidade da luz:

A trajetória da luz não depende de seu sentido de percurso.

## 1.7. Sombra e penumbra

### 1.7.1. Penumbra

É uma região do espaço parcialmente iluminada. É a transição entre a região iluminada e a região de sombra.

### 1.7.2 Sombra

É uma região completamente isenta de iluminação. Ou seja, raios de luz não atingem a região de sombra.

Considere uma fonte extensa de luz L. A fonte está acima de uma mesa. Veja a configuração dos feixes de luz.

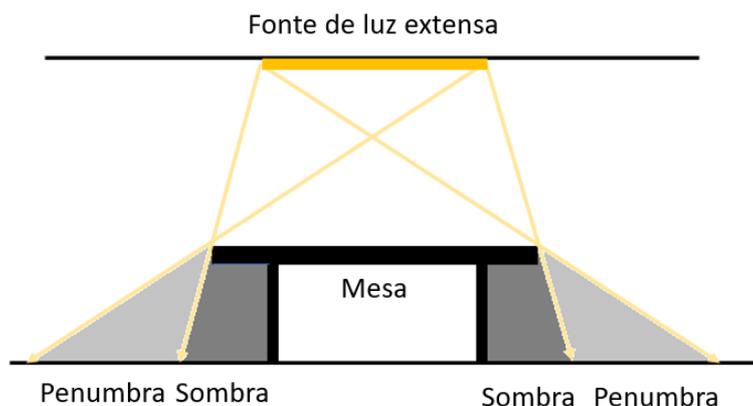


Figura 11: Exemplo de região com sombra e penumbra.

A figura acima mostra a configuração de sombra e penumbra para uma fonte extensa de luz. No tópico de Eclipses veremos mais a fundo este conceito.



## 1.8. Pontos objeto e imagem

Considere S um sistema óptico qualquer.

### 1.8.1. Ponto objeto

Ponto objeto é o vértice do pincel luminoso incidente.

#### (I) Ponto objeto real (POR):

É o vértice de um **pincel incidente divergente**. Ele é formado por um cruzamento efetivo de raios de luz.

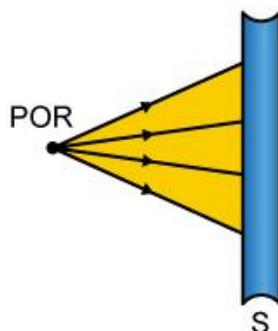


Figura 12: Ponto objeto real em relação a S.

#### (II) Ponto objeto virtual (POV):

É o vértice de um **pincel incidente convergente**. Ele é formado por um cruzamento dos prolongamentos dos raios de luz.

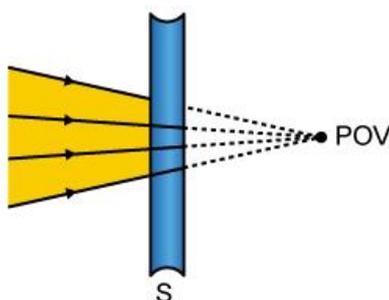


Figura 13: Ponto objeto virtual em relação a S.

#### (III) Ponto objeto impróprio (POI):

É o vértice de um **pincel incidente cilíndrico**. Ele está situado no infinito.

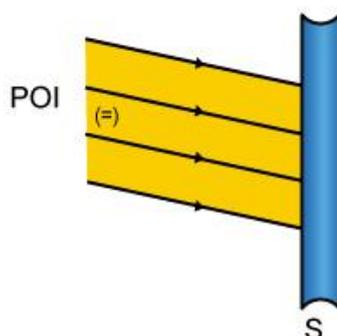


Figura 14: Ponto objeto impróprio em relação a S.

## 1.8.2. Ponto imagem

É o vértice de um pincel luminoso emergente.

### (I) Ponto imagem real (PIR):

É o vértice de um **pincel emergente convergente**. Ele é formado pelo cruzamento efetivos dos raios de luz.

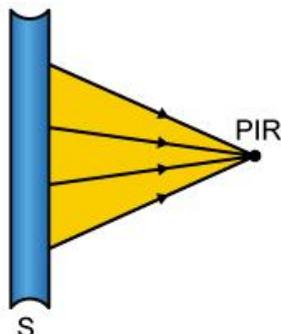


Figura 15: Ponto imagem real em relação a S.

### (II) Ponto imagem virtual (PIV):

É o vértice de um **pincel emergente divergente**. Ele é formado pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios.

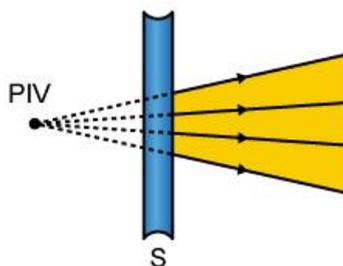


Figura 16: Ponto imagem virtual em relação a S.

### (III) Ponto imagem imprópria (PII):

É o vértice de um **pincel emergente cilíndrico**. Ele está situado no infinito.

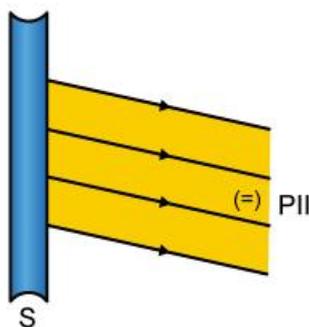
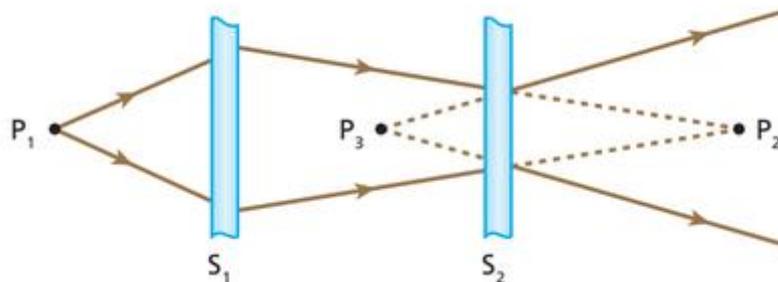


Figura 17: Ponto imagem imprópria em relação a S.

ATENÇÃO  
DECORE!



1.  
Na figura seguinte  $S_1$  e  $S_2$  são sistemas ópticos e  $P_1$  é uma fonte puntiforme de luz:



Com base nessa situação, responda:

- O que representa  $P_1$  em relação a  $S_1$ ?
- O que representa  $P_3$  em relação a  $S_2$ ?
- O que representa  $P_2$  em relação a  $S_1$  e em relação a  $S_2$ ?

**Comentário:**

- O ponto  $P_1$  é o vértice de pincel incidente divergente. Desta forma, podemos dizer que ele é o ponto objeto real.
- O ponto  $P_3$  é o vértice de pincel emergente convergente. Desta forma, podemos dizer que ele é o ponto imagem virtual.
- Em relação a  $S_1$ , o ponto  $P_2$  é o vértice de pincel emergente convergente, portanto  $P_2$  é para  $S_1$  um ponto imagem real. Por outro, para  $S_2$ ,  $P_2$  é o vértice de pincel incidente convergente, ou seja, ele é um ponto objeto virtual.

### 1.8.3. Projeção de imagens

Apenas as **imagens reais** podem ser projetadas em anteparos. Isso ocorre porque não há luz na região em que se forma o ponto imagem virtual.

Embora não possa ser projetada, a imagem virtual pode ser vista por qualquer observador.



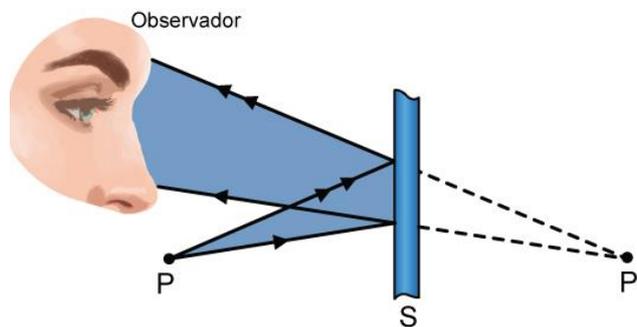


Figura 18: Observador visualizando uma imagem virtual.

Note que em relação ao sistema óptico  $S$ ,  $P'$  é um ponto imagem virtual (formado por um pincel emergente divergente) que não pode ser projetado em anteparos. Contudo, em relação ao observador, esse ponto se comporte como um ponto objeto real (pincel incidente divergente).

## 1.9. Sistema ópticos

### 1.9.1. Sistema estigmático

É aquele em que um ponto objeto conjuga apenas um ponto imagem.

### 1.9.2. Sistema aplanético

É aquele em que um objeto plano e frontal conjuga uma imagem também plana e frontal.

### 1.9.3. Sistema ortoscópio

É aquele em que um objeto conjuga uma imagem geometricamente semelhante.

## 1.10. Reflexão versus refração

Toda vez que um raio de luz atinge a interface entre dois meios, ocorre reflexão e refração da luz. Parte da luz é refletida e a outra parte é refratada. Para caracterizar esses dois fenômenos, temos as seguintes definições:

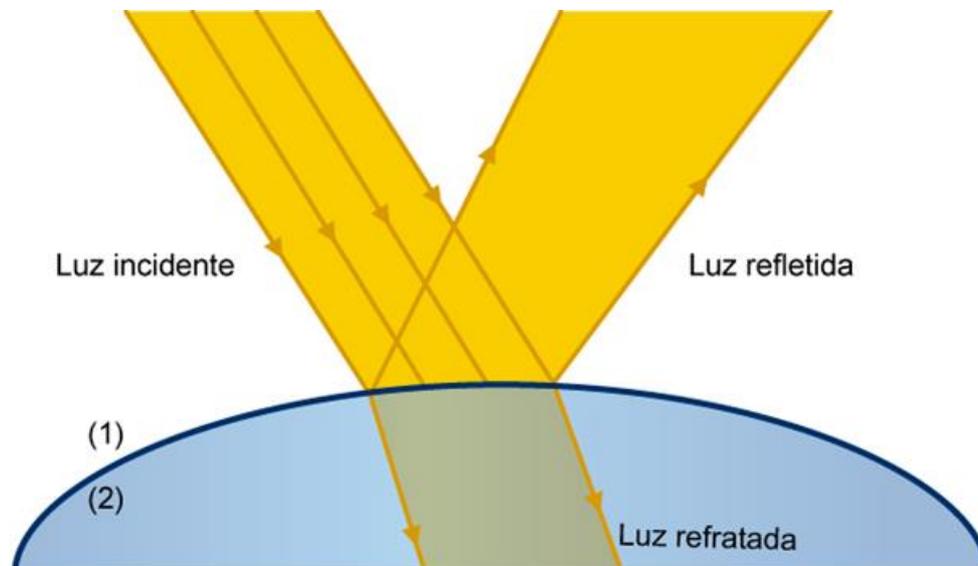


Figura 19: Reflexão e refração da luz na interface entre dois meios distintos.

**Reflexão** é o fenômeno que tem por característica a luz voltar a se propagar no mesmo meio de origem, após incidir na superfície de divisão entre dois meios.

**Refração** é o fenômeno da passagem da luz de um meio para um outro diferente.

As reflexões podem ser divididas em dois grupos: Reflexões regulares e reflexões difusas. As reflexões regulares são aquelas que ocorrem em uma interface regular, isenta de perturbação.

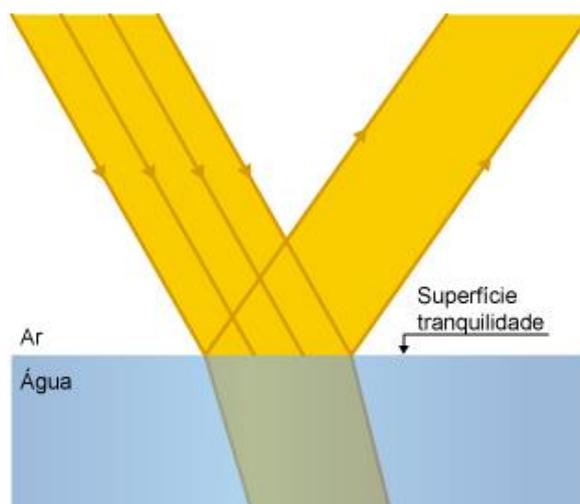


Figura 20: Reflexão e refração em uma superfície sem agitação.

Já as reflexões difusas ocorrem em superfícies com alto grau de desorganização ou sob o efeito de alguma perturbação.

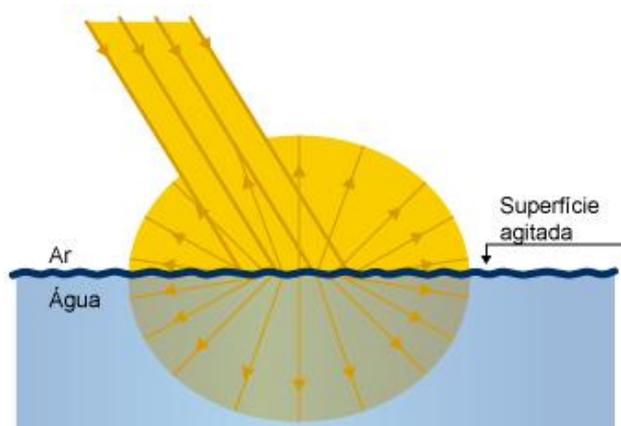


Figura 21: Reflexão e refração em uma superfície agitada.

## 1.11. Cores

A luz branca é a composição de um espectro de cores. As cores mais famosas do espectro são: vermelha, alaranjada, amarela, verde, azul, anil e violeta.

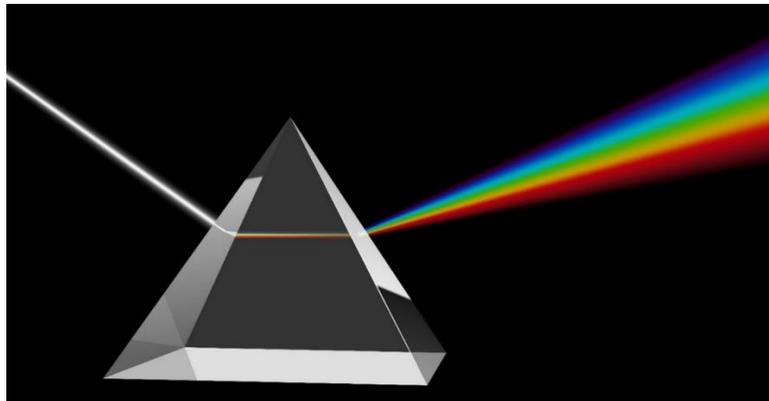


Figura 22: Representação de um sistema óptico dispersivo. Fonte: Shutterstock.

A cor de um objeto é dada pela componente de cor que ele reflete. Simplificadamente, se um corpo é azul, ele absorve vermelho, laranja, amarelo, verde, anil, violeta e reflete o azul.

Listaremos a seguir algumas propriedades:

- Se um corpo é preto, é porque ele absorve todas as cores do espectro.
- Se vemos um corpo branco, é porque ele reflete todas as cores do espectro.
- Um corpo possui cor  $X$  quando iluminado com luz branca. Se ele for iluminado com uma cor diferente de  $X$ , ele apresentará aspecto escurecido.



2.



Considere o logo do Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Se incidirmos luz branca, a disposição visual é a seguinte:



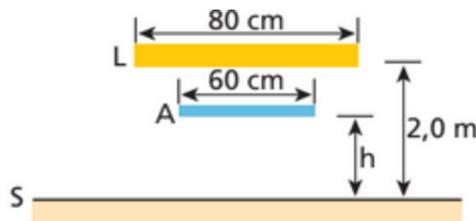
Se incidirmos luz monocromática amarela, qual será a disposição visual do logo?

**Comentário:**

Ao incidir luz amarela, as partes em amarelo se manterão sem nenhuma alteração. A parte em branco terá tonalidade levemente amarelada. As partes em azul e vermelho ficarão escurecidas.



**3. (UEL-PR)**

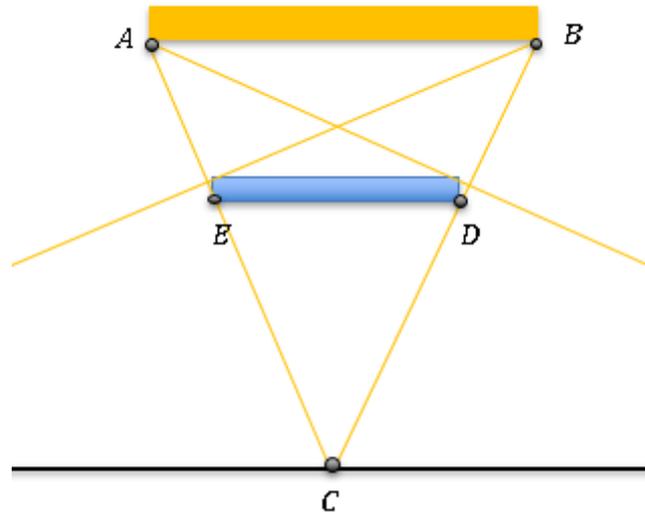


A figura a seguir representa uma fonte extensa de luz  $L$  e um anteparo opaco  $A$  dispostos paralelamente ao solo ( $S$ ). O valor mínimo de  $h$ , em metros, para que sobre o solo não haja formação de sombra é:

- a) 2.   b) 1,5.   c) 0,8.   d) 0,6.   e) 0,3.

**Comentário:**

Para que não haja formação de sombra, devemos ter a seguinte configuração para os raios de luz:



Os triângulos ABC e EDC são semelhantes:

$$\frac{h}{60} = \frac{200}{80} \Rightarrow \boxed{h = 1,5 \text{ m}}$$



## 2. Eclipses

Eclipses são fenômenos astronômicos que ocorrem quando um objeto astronômico é temporariamente obscurecido, seja passando pela sombra de outro corpo ou quando um corpo (fonte secundária) passa entre este e uma fonte primária.

### 2.1. Eclipse da lua

O fenômeno de eclipse ocorre quando a Lua se situa no cone de sombra da Terra. A Terra está entre a lua e o Sol.

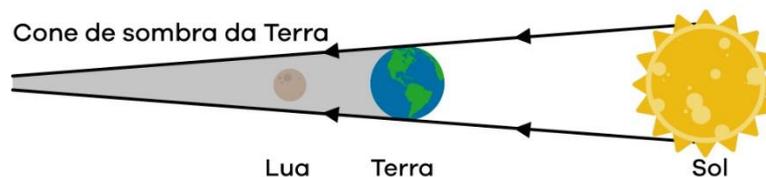


Figura 23: Representação do eclipse da Lua.

Perceba que o eclipse da Lua ocorre na lua cheia.

### 2.2. Eclipse do Sol

O fenômeno ocorre quando a Lua projeta regiões de sombra e de penumbra sobre a Terra. Ele ocorre na lua nova, quando a lua está entre o Sol e a Terra.

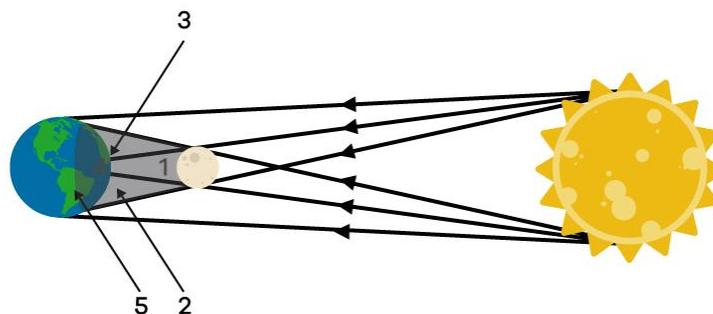


Figura 24: Representação do eclipse do Sol.

- 1: Região de sombra da Lua.
- 2: Região de penumbra.
- 3: Projeção da sombra da Lua na Terra. Observe que nesta região há eclipse total.
- 4: Projeção da penumbra na Terra. Nesta região ocorre eclipse parcial.
- 5: Não há eclipse.



## 2.3. Fases da lua

As fases da lua são algumas disposições visuais que dependem da posição relativa entre Sol, Terra e a própria Lua.

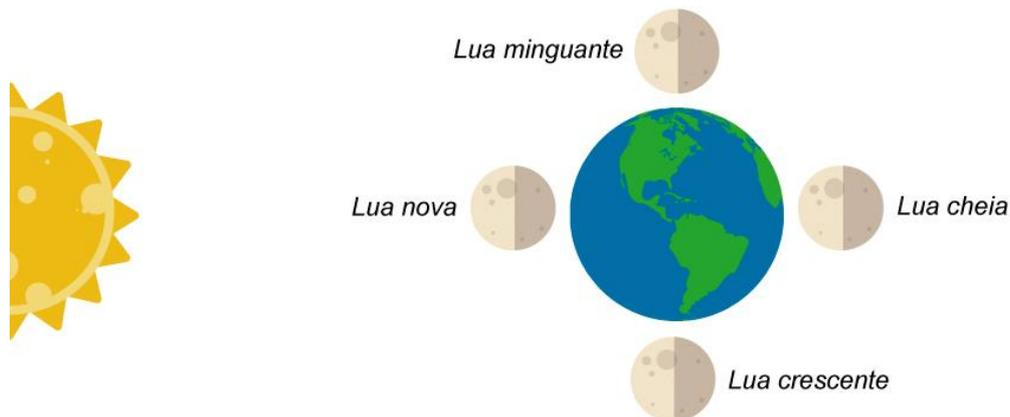


Figura 25: Representação das fases da lua.

### 2.3.1. Lua nova

Ocorre no eclipse solar. Para ambos os hemisférios (norte e sul) sua visualização é a mesma.



Figura 26: Lua nova observada dos hemisférios.

### 2.3.2. Lua crescente

É a fase de transição entre a lua nova e cheia.

**Hemisfério Norte:**



Figura 27: Lua crescente observada do hemisfério norte.

**Hemisfério Sul:**



Figura 28: Lua crescente observada do hemisfério sul.

### 2.3.3. Lua cheia

Ocorre no eclipse lunar. Para os dois hemisférios sua visualização é a mesma.



Figura 29: Lua cheia visualizada dos dois hemisférios.

### 2.3.4. Lua minguante

É a transição entra a lua cheia e a lua nova.

#### Hemisfério Norte



Figura 30: Lua minguante observada do hemisfério norte.

#### Hemisfério Sul



Figura 31: Lua minguante observado do hemisfério sul.



## 3. Espelhos planos

### 3.1. Leis da reflexão

Considere um raio de luz que incide em uma superfície que separa dois meios. Esse raio é chamado de raio incidente. Pelo ponto de intersecção entre a superfície e o raio de luz, traça-se uma reta perpendicular à superfície. Essa reta é chamada de reta normal. Por fim, após a reflexão, temos o raio refletido.

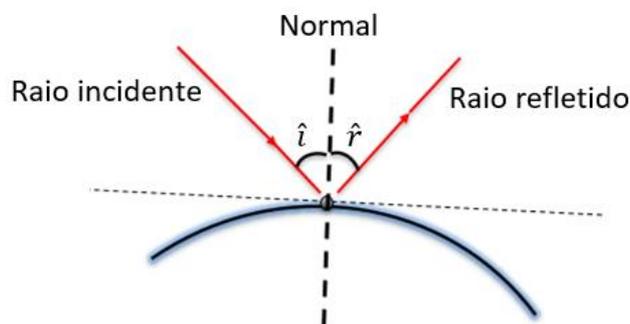


Figura 32: Esquema representativo do raio incidente e refletido.

#### 3.1.1. Primeira lei da reflexão

O raio refletido, o raio incidente e a reta normal que passa pelo ponto onde o raio incide são coplanares.

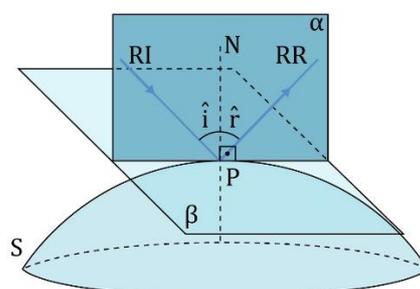


Figura 33: Representação dos raios incidentes e refletidos, da normal e do plano que os contém.

#### 3.1.2. Segunda lei da reflexão



O ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

$$\hat{i} = \hat{r}$$

## 3.2. O espelho plano

Um espelho plano é qualquer superfície plana com alta capacidade de refletir a luz incidente.

Os espelhos planos são feitos através do recobrimento de uma placa de metal com nitrato de prata. A fina camada de nitrato de prata é capaz de refletir a luz incidente.

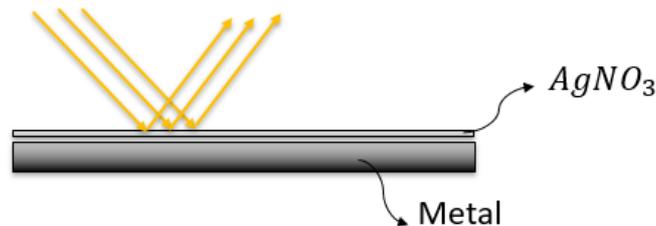


Figura 34: Montagem de espelho plano.

### 3.2.1. Representação

Para simplificar os desenhos e análises dos problemas em óptica, faremos a seguinte representação para um espelho plano:



Figura 35: Representação de um espelho plano.

A parte refletora é a superfície superior, que não contém os “riscos”.

## 3.3. Formação da imagem

Considere um objeto  $O$ , em frente a um espelho plano. Constrói-se um eixo cartesiano com o eixo  $y$  sobre a reta do espelho, conforme figura abaixo. Considere os raios de luz que saem desse objeto e atingem o espelho. Seleccionaremos dois desses raios: O primeiro raio é perpendicular à superfície do espelho e o segundo faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .

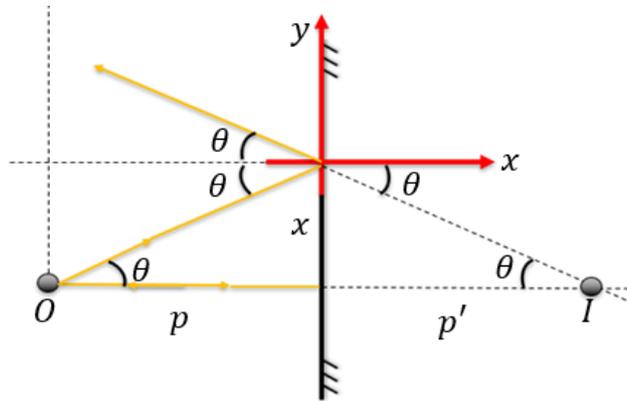


Figura 36: Definição do eixo de referências na reflexão, onde a origem do sistema é o ponto onde o raio incide no espelho.

Após a reflexão no espelho, prolonga-se os raios refletidos. Os raios refletidos prolongados se encontram atrás do espelho. O ponto de encontro é um vértice de um pincel emergente divergente e, portanto, é um ponto imagem virtual.

Para o objeto temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{p}$$

Para a imagem:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{p'}$$

Das duas equações:

$$\boxed{p = p'}$$

Assim, se um objeto puntiforme tem coordenadas  $O = (x_0, y_0)$  e o **espelho está na vertical** (a origem do sistema de coordenadas está sobre a reta do espelho), a posição da imagem será:

$$\boxed{I = (-x_0, y_0)}$$

Se o objeto puntiforme tem coordenadas  $O = (x_0, y_0)$  e o **espelho está na horizontal** (a origem do sistema de coordenadas está sobre a reta do espelho), a posição da imagem será:

$$\boxed{I = (x_0, -y_0)}$$

Características da imagem:

- A imagem tem a mesma orientação do objeto.
- A imagem tem o mesmo tamanho do objeto.
- A imagem e o objeto estão igualmente distanciados do espelho.
- A imagem e o objeto são enantiomorfas (não são sobreponíveis).
- Para objetos reais a imagem é sempre virtual.
- Para objetos virtuais a imagem é sempre real.

### 3.4. Campo visual

O campo visual é a região do espaço dentro da qual todos os objetos nela situados serão vistos por reflexão.

Para determinar o campo visual de um espelho plano, realizaremos os seguintes passos:

1. Determinamos a imagem do olho do observador.
2. A partir da imagem do olho do observador, traçamos retas ligando este ponto imagem às extremidades do espelho.

A região compreendida entre essas retas e seus prolongamentos, será o campo visual do observador. Qualquer objeto nessa região será visto. Portanto, apenas os objetos *A* e *B* são vistos. O objeto *C* não é visto por reflexão.

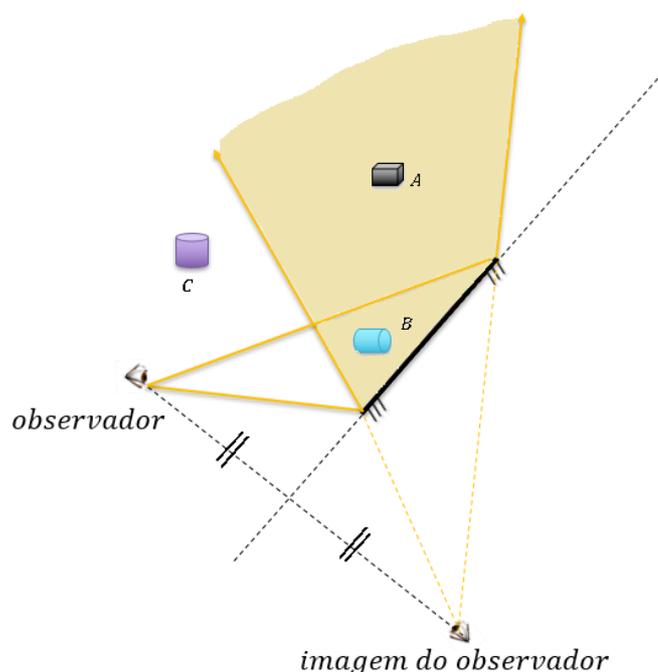


Figura 37: Determinação do campo visual para um observador situado conforme o desenho. note que apenas *A* e *B* serão vistos pelo observador após a reflexão no espelho plano.

O campo visual é determinado pela região hachurada acima.

### 3.5. Associação de espelhos planos

Considere a associação de dois espelhos planos, formando um ângulo  $\alpha$  entre si. O ponto de intersecção entre os espelhos é o ponto *O*. Considere um objeto *P* entre esses espelhos.



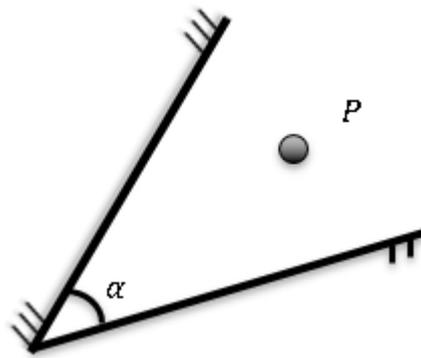


Figura 38: Associação de dois espelhos planos.

As imagens  $I_1$  e  $I_2$  são formadas diretamente pelo objeto  $P$ , após uma reflexão nos espelhos.  $I'_1$  e  $I'_2$  são imagens dos objetos  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Podemos generalizar esse processo:

Deste modo,  $I^n_1$  e  $I^n_2$  são imagens dos objetos  $I^{n-1}_1$  e  $I^{n-1}_2$ , respectivamente. O valor de  $n$  é um inteiro positivo, limitado pelo ângulo ( $\alpha$ ) entre os espelhos e pela posição do objeto  $P$  entre os espelhos.

Veja a distribuição abaixo das imagens, para o caso acima do arranjo de espelhos.

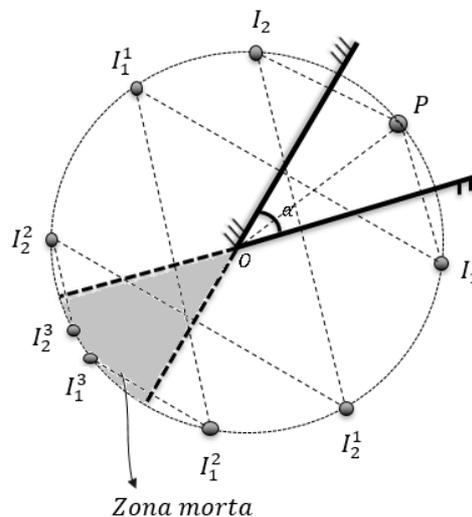


Figura 39: Associação de dois espelhos planos.

As imagens formadas estão sobre uma mesma circunferência de raio  $\overline{OP}$  (segmento que liga o objeto ao ponto de intersecção dos espelhos).

### 3.5.1. Zona morta

É a região espacial, delimitada pelo prolongamento dos espelhos, que faz com que imagens que caem sobre essa zona não produzam mais imagens. Ou seja, imagens dentro dessa zona não servem mais como pontos objetos.  $I^3_2$  e  $I^3_1$  não produzem imagens.

As imagens que estão dentro da zona morta também são visualizadas.



### 3.5.2. Número de imagens

O número correto de imagens formada pela disposição de dois espelhos planos muda de acordo com a posição do objeto em relação aos espelhos. Seja  $\alpha$  o ângulo entre os espelhos, temos a seguinte configuração:

| <i>Número de imagens (N)</i>                                    |   |
|---|---|
| <i>Se <math>\frac{360^\circ}{\alpha}</math> for par</i>         | $N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$ , para qualquer posição do objeto  |
| <i>Se <math>\frac{360^\circ}{\alpha}</math> for ímpar</i>       | $N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$ , se o objeto estiver no plano bissetor dos espelhos   |
| <i>Se <math>\frac{360^\circ}{\alpha}</math> for ímpar</i>       | $N = \frac{360^\circ}{\alpha}$ , se o objeto não estiver no plano bissetor dos espelhos   |
| <i>Se <math>\frac{360^\circ}{\alpha}</math> não for inteiro</i> | <i>É necessário que a contagem seja manual</i><br>No caso de o objeto se localizar no plano bissetor: $N = \frac{360}{\text{mdc}(360, \alpha)} - 1$ |





## 4. Movimento relativo entre espelho plano e objeto

### 4.1. Movimento generalizado

#### 4.1.1. Introdução matemática

Antes de iniciarmos nosso estudo de movimento relativo, faremos uma breve discussão sobre números complexos. Usaremos os números complexos com o objetivo de realizar translações e rotações de maneira simplificada.

Ao se compreender completamente essa análise, é garantida o entendimento completo sobre movimentos envolvendo espelhos planos. À primeira vista a análise pode apresentar-se confusa e complexa, porém releia várias vezes, até que a teoria se torne familiar.

Considere os números complexos  $A = x_A + i \cdot y_A$  e  $B = x_B + i \cdot y_B$ . Tome o vetor  $\overrightarrow{AB}$ , posicionado no plano dos complexos de Argant-Gauss.

Considere também o simétrico desse vetor em relação ao eixo dos reais. Chamaremos esse vetor de  $\overrightarrow{A'B'}$ .

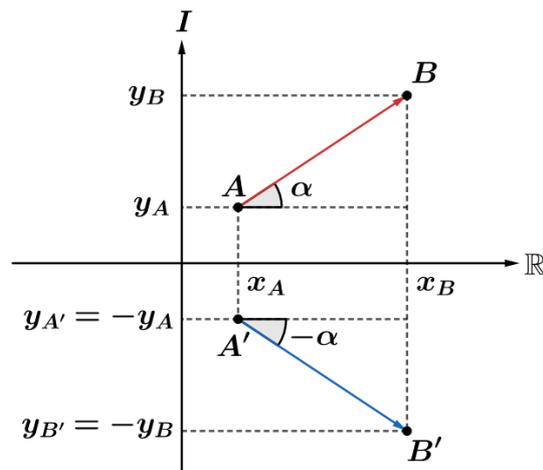


Figura 40: Representação de um vetor e seu simétrico em relação ao eixo dos reais no plano Argant-Gauss.

Os vetores (números complexos)  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{A'B'}$  podem ser escritos da forma algébrica e da forma trigonométrica:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A) + i \cdot (y_B - y_A) = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{cis}(\alpha) \\ \overrightarrow{A'B'} &= (x_B - x_A) - i \cdot (y_B - y_A) = |\overrightarrow{A'B'}| \cdot \text{cis}(-\alpha)\end{aligned}$$



Note que o vetor  $\overrightarrow{A'B'}$  é conjugado do vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Representamos da seguinte forma:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overline{\overrightarrow{AB}}$$

Assim, podemos dizer que o vetor  $\overrightarrow{A'B'}$  é a imagem do vetor  $\overrightarrow{AB}$ , considerando que o eixo dos reais é um espelho plano.

Se um espelho plano está na horizontal, adotando eixos ortonormais, e o espelho estiver contido na reta do eixo dos reais, então a imagem de um vetor complexo objeto é dada pelo seu conjugado.

### 4.1.2. Rotação de vetor

Outra propriedade interessante sobre números complexos é a rotação de vetores. Tome um vetor  $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{cis}(\alpha)$ .

Se o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é multiplicado por  $\text{cis}(\beta)$ , com  $\beta > 0$ , então o vetor resultante terá o mesmo módulo de  $\overrightarrow{AB}$  mas ele será rotacionado no sentido anti-horário de um ângulo  $\beta$ .

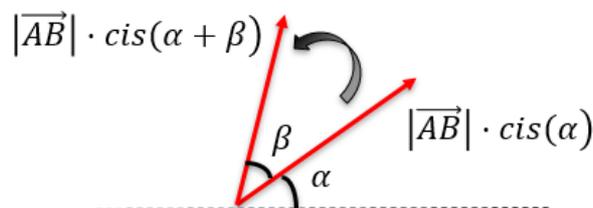


Figura 41: Vetor  $\overrightarrow{AB}$  sendo rotacionado de um ângulo  $\beta$ .

Se o ângulo  $\beta < 0$ , o vetor será rotacionado de  $\beta$  no sentido anti-horário.

### 4.1.3. Movimento relativo

Considere um objeto  $O$  com movimento relativo ao espelho (espelho em repouso) de vetor posição  $\vec{r}_{O/E} = (x(t)_{O/E}, y(t)_{O/E})$ . Um espelho plano  $E$  forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. O objeto está de frente para a parte refletora do espelho.

Podemos associar ao vetor posição um número complexo:

$$r_{O/E} = x(t)_{O/E} + i \cdot y(t)_{O/E}$$

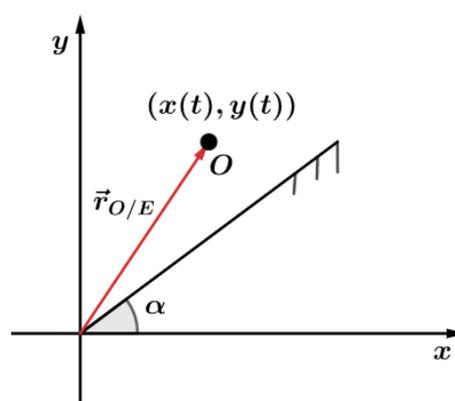


Figura 42: Objeto em frente a um espelho inclinado de  $\alpha$  em relação ao eixo  $x$ .



Para encontrar a imagem do objeto através do complexo conjugado, é conveniente que o espelho esteja na horizontal.

Faremos uma rotação de todos os elementos do sistema para que o espelho fique na horizontal. Para isso multiplicaremos todo o sistema por  $\text{cis}(-\alpha)$ .

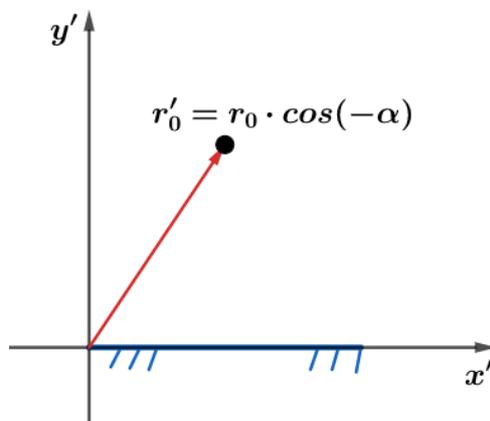


Figura 43: Sistema após a rotação de  $-\alpha$ .

Para esse novo sistema, o vetor complexo objeto  $r'_o$  é dado por:

$$r'_{o/E} = r_{o/E} \cdot \text{cis}(-\alpha)$$

A imagem ( $r_{img/E}(x'y')$ ) deste objeto, em relação ao sistema  $X' - Y'$ , é dada pelo conjugado do vetor complexo  $r'_{o/E}$ .

$$r_{img}(x'y') = \overline{r'_{o/E} \cdot \text{cis}(-\alpha)} = \overline{r_{o/E}} \cdot \text{cis}(\alpha)$$

Entretanto, queremos a imagem em relação ao eixo original. Para isso, basta girar de tal que anule a rotação dos eixos. Para desfazer a rotação original, multiplicamos todo o sistema por  $\text{cis}(\alpha)$ .

Deste modo, o vetor imagem final ( $r_{img/E}$ ) do objeto (em relação ao espelho) em relação aos eixos originais é dado por:

$$r_{img/E} = \overline{r_{o/E}} \cdot \text{cis}(\alpha) \cdot \text{cis}(\alpha)$$

$$r_{img/E} = \overline{r_{o/E}} \cdot \text{cis}(2\alpha)$$

Para  $r_{img/E} = x'(t)_{I/E} + i \cdot y'(t)_{I/E}$  e  $r_{o/E} = x(t)_{O/E} + i \cdot y(t)_{O/E}$ , temos:

$$x'(t)_{I/E} + i \cdot y'(t)_{I/E} = [x(t)_{O/E} - i \cdot y(t)_{O/E}] \cdot (\cos(2\alpha) + i \cdot \text{sen}(2\alpha))$$

Assim, chegamos as equações do movimento relativo:

$$\boxed{x'(t)_{I/E} = x(t)_{O/E} \cdot \cos(2\alpha) + y(t)_{O/E} \cdot \text{sen}(2\alpha)}$$

$$\boxed{y'(t)_{I/E} = x(t)_{O/E} \cdot \text{sen}(2\alpha) - y(t)_{O/E} \cdot \cos(2\alpha)}$$

Desta maneira, conseguimos determinar as posições da imagem em função do tempo a partir da posição do objeto em função do tempo.



## 4.2. Translação pura

Considere um espelho plano vertical que em relação à Terra tem equação  $r_{E/T} = (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T})$ .

O vetor objeto tem equação  $r_o = x(t)_{O/T} + i \cdot y(t)_{O/T}$ , também em relação à terra.

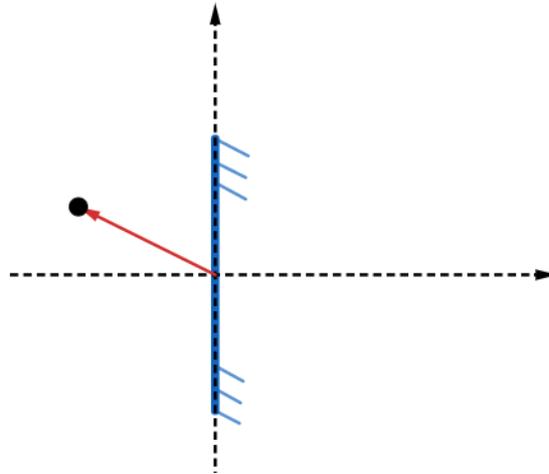


Figura 44: Objeto frente a um espelho vertical.

Para usar a relação que encontramos para a imagem no tópico anterior, a equação horária do objeto deve ser em relação ao espelho e, portanto, o espelho deve estar em repouso. Parando o espelho, temos:

$$\begin{aligned} r_{O/E} &= r_{O/T} - r_{E/T} \\ r_{O/E} &= (x(t)_{O/T}, y(t)_{O/T}) - (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T}) \\ r_{O/E} &= (x(t)_{O/T} - x(t)_{E/T}, y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T}) \end{aligned}$$

Para encontrar a imagem, basta aplicar nas relações encontradas para movimento relativo. Neste caso particular  $\alpha = 90^\circ$ , então:

$$\begin{aligned} x'(t)_{I/E} &= (x(t)_{O/T} - x(t)_{E/T}) \cdot \cos(2 \cdot 90^\circ) + (y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T}) \cdot \text{sen}(2 \cdot 90^\circ) \\ y'(t)_{I/E} &= (x(t)_{O/T} - x(t)_{E/T}) \cdot \text{sen}(2 \cdot 90^\circ) - (y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T}) \cdot \cos(2 \cdot 90^\circ) \\ \begin{cases} x'(t)_{I/E} &= x(t)_{E/T} - x(t)_{O/T} \\ y'(t)_{I/E} &= y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T} \end{cases} \end{aligned}$$

As posições das imagens encontrada acima estão em relação ao referencial do espelho. Para voltar para o referencial da terra, somamos o vetor  $r_E = (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T})$ . Portanto, as posições da imagem em relação à terra são:

$$x'(t)_{I/T} = 2 \cdot x(t)_{E/T} - x(t)_{O/T}$$

$$y'(t)_{I/T} = y(t)_{O/T}$$

Note que se há apenas translação pura do espelho, a posição do espelho está no ponto meio do objeto e da imagem, pois:



$$x'(t)_{I/T} = 2 \cdot x(t)_{E/T} - x(t)_{O/T} \Rightarrow x(t)_{E/T} = \frac{x'(t)_{I/T} + x(t)_{O/T}}{2}$$

Se quisermos saber a relação entre as velocidades, basta derivar em função do tempo.

$$v_x'(t)_{I/T} = 2 \cdot v_x(t)_{E/T} - v_x(t)_{O/T}$$

$$v_y'(t)_{I/T} = v_y(t)_{O/T}$$

**IMPORTANTE:** A relatividade dos movimentos, utilizada para a demonstração acima, só é considerada para a translação. Se o corpo não translada, a posição dele em relação ao corpo é igual a sua posição em relação à terra, se a origem de rotação pura for centro do espelho.

#### 4.2.2. Propriedades

- Se o espelho está em repouso, a velocidade da imagem em módulo é igual a velocidade do objeto.
- Se a velocidade do objeto é nula, a velocidade da imagem é o dobro da velocidade do espelho.

#### 4.3. Rotação pura

Considere um espelho plano que tem centro na origem e que no instante inicial,  $t = 0$  s, começa a rodar em torno da origem com velocidade angular  $\omega$ , em relação à terra no sentido horário. Um objeto tem equação horária  $r_{E/T} = (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T})$ , também em relação à Terra.

Como não há translação do espelho, a posição do objeto em relação à Terra é análoga a posição do objeto em relação ao espelho.

$$r_{O/T} = (x(t)_{O/T}, y(t)_{O/T}) = r_{O/E} = (x(t)_{O/E}, y(t)_{O/E})$$

Para o caso da rotação pura,  $\alpha = \alpha_0 - \omega \cdot t$ . Substituindo nas expressões do movimento relativo, temos:

$$x'(t)_{I/T} = x(t)_{O/T} \cdot \cos(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t) + y(t)_{O/T} \cdot \sen(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t)$$

$$y'(t)_{I/T} = x(t)_{O/T} \cdot \sen(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t) - y(t)_{O/T} \cdot \cos(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t)$$

Denotando  $\theta = 2\alpha_0 - 2\omega \cdot t$ , para encontrar as velocidades, basta derivarmos a posição em relação ao tempo:

(I) Direção  $x$ :

$$v_x'(t)_{I/T} = v_x(t)_{O/T} \cdot \cos\theta + v_y(t)_{O/T} \cdot \sen\theta + 2 \cdot \omega \cdot (x(t)_{O/T} \cdot \sen\theta - y(t)_{O/T} \cdot \cos\theta)$$

(II) Direção  $y$ :

$$v_y'(t)_{I/T} = v_x(t)_{O/T} \cdot \sen\theta - v_y(t)_{O/T} \cdot \cos\theta - 2 \cdot \omega \cdot (x(t)_{O/T} \cdot \cos\theta + y(t)_{O/T} \cdot \sen\theta)$$



### 4.3.1. Situação simplificada

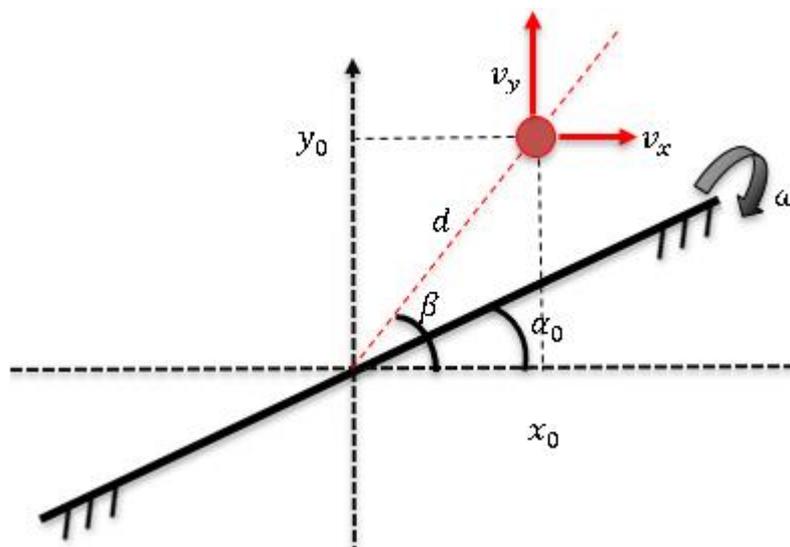


Figura 45: Sistema composto por um corpo com velocidades nos dois eixos e um espelho rotacionando.

Considere que um o objeto esteja se movendo com a equação:

$$r_{O/T} = (x_0 + v_x \cdot t, y_0 + v_y \cdot t)$$

Com:

$$v_{O/T} = (v_x, v_y)$$

Pelo Teorema de Pitágoras podemos escrever que:

$$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Para o instante inicial  $t = 0s$ , temos:

$$r_{O/T} = (x_0, y_0)$$

$$v_{O/T} = (v_x, v_y)$$

Substituindo nas expressões das velocidades:

$$v_x'(t)_{I/T} = v_x \cdot \cos 2\alpha_0 + v_y \cdot \sin 2\alpha_0 + 2 \cdot \omega \cdot (x_0 \cdot \sin 2\alpha_0 - y_0 \cdot \cos 2\alpha_0)$$

$$v_y'(t)_{I/T} = v_x \cdot \sin 2\alpha_0 - v_y \cdot \cos 2\alpha_0 - 2 \cdot \omega \cdot (x_0 \cdot \cos 2\alpha_0 + y_0 \cdot \sin 2\alpha_0)$$

Se pensarmos na velocidade do objeto como,

$$v_x = v \cdot \cos\beta$$

$$v_y = v \cdot \sin\beta$$

E nas posições iniciais como:

$$x_0 = d \cdot \cos\beta$$

$$y_0 = d \cdot \sin\beta$$

Temos as velocidades da imagem como:

$$v_x'(t)_{I/T} = v \cdot \cos(2\alpha_0 - \beta) + 2 \cdot \omega \cdot d \cdot \sin(2\alpha_0 - \beta)$$



$$v_y'(t)_{I/T} = v \cdot \text{sen}(2\alpha_0 - \beta) - 2 \cdot \omega \cdot d \cdot \text{cos}(2\alpha_0 - \beta)$$

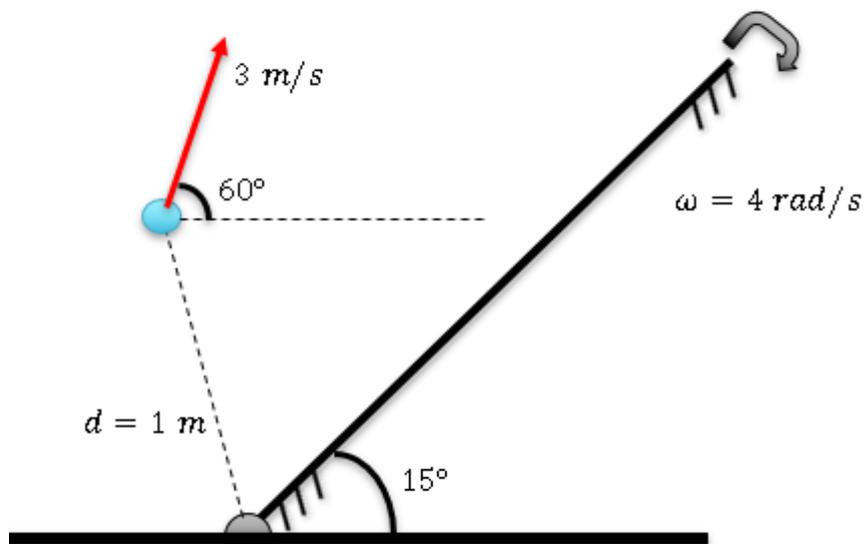
É muito importante você saber demonstrar essas equações e como chegamos nelas, pois elas não são fáceis de decorar e o IME, principalmente, adora essa abordagem.

ATENÇÃO  
DECORE!



4.

Determine as componentes da velocidade da imagem, para o instante mostrado abaixo. O espelho gira com velocidade angular  $4 \text{ rad/s}$ .



**Comentário:**

Aplicando as expressões já deduzidas, temos:

$$v_x'(t)_{I/T} = v \cdot \text{cos}(2\alpha_0 - \beta) + 2 \cdot \omega \cdot d \cdot \text{sen}(2\alpha_0 - \beta)$$

$$v_x'(t)_{I/T} = 3 \cdot \text{cos}(30 - 60) + 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}(30 - 60)$$

$$v_x'(t)_{I/T} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4$$

$$v_y'(t)_{I/T} = 3 \cdot \text{sen}(30 - 60) - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \text{cos}(30 - 60)$$

$$v_y'(t)_{I/T} = -\frac{3}{2} - 4\sqrt{3}$$





## 5. Espelhos esféricos

Um espelho esférico é uma porção retirada de uma esfera espelhada. Dependendo da região do espelhamento da esfera, obtemos um tipo diferente de espelho esférico.

### 5.0.1. Espelho côncavo

É a porção retirada de uma esfera espelhada internamente.

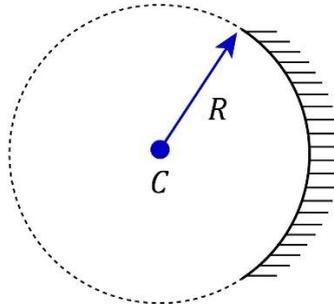


Figura 46: Construção de um espelho côncavo.

### 5.0.2. Espelho convexo

É a porção retirada de uma esfera espelhada externamente.

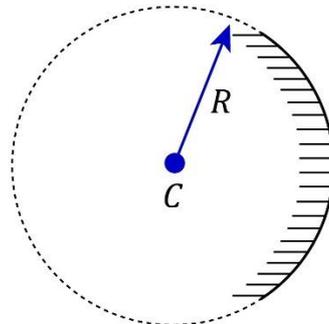


Figura 47: Construção de um espelho convexo.

### 5.0.3. Termos importantes

*Centro de curvatura (C)* – é o centro da esfera da qual foi retirada a porção.

*Eixo principal* – é um dos diâmetros da esfera de origem.

*Vértice (V) ou Polo (P)* – é o ponto de encontro entre a superfície da esfera de origem e o eixo principal.

### 5.0.4. Definição e posição do foco

Considere um raio de luz que incide paralelamente a um espelho côncavo de raio de curvatura  $R$ . O raio incide no espelho a uma altura  $h$  do eixo.



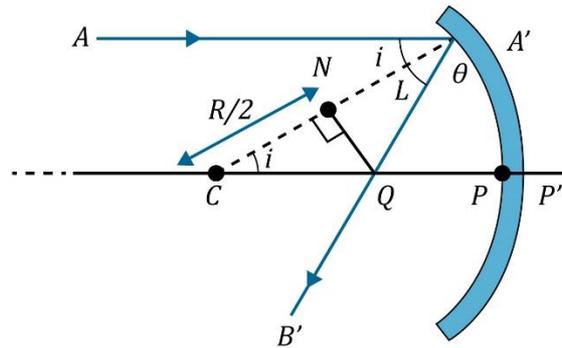


Figura 48: Raios de luz incidindo em um espelho côncavo.

Para o triângulo CNQ:

$$\cos(i) = \frac{R}{2 \cdot CQ} \Rightarrow CQ = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\cos(i)}$$

Da geometria do problema:

$$\cos(i) = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2}$$

Deste modo, temos:

$$CQ = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}$$

(I)  $h \ll R$ :

Para valores de  $h$  muito pequenos, os raios são muito próximos do eixo principal. Esses raios são chamados de para-axiais.

Como  $h \ll R$ ,  $\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \rightarrow 1$ . Dessa forma, chegamos que:

$$CQ = \frac{R}{2} = \text{distância focal para raios para-axiais}$$

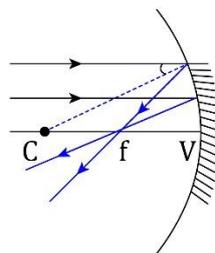


Figura 49: Raios que chegam paralelo ao eixo principal, após a reflexão eles saem pelo foco.

Para a condição de raios para-axiais, o foco ( $F$ ) é o ponto de encontro dos raios refletidos que vem do infinito, paralelos ao eixo principal. Além disso, a distância focal é metade do raio de curvatura.

$$f = R/2$$



(II) Para  $h$  não desprezível frente a  $R$ :

Não há um foco bem determinado. Vários pontos do eixo principal são atingidos, após se refletirem no espelho.

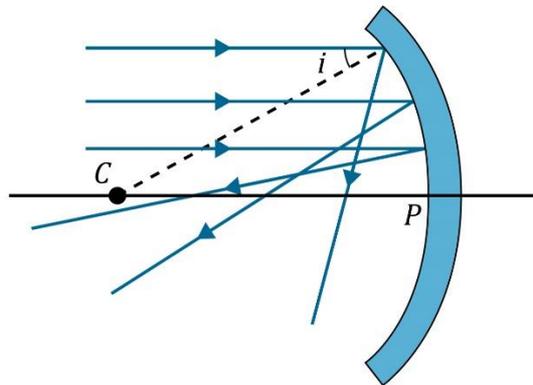


Figura 50: Quando  $h$  não é desprezível em relação a  $R$ , os raios não saem todos pelo foco.

Outra forma de dizer que  $h \ll R$  é considerar que o espelho esférico tem uma abertura muito pequena (menor que  $10^\circ$ ). Cuidado com pegadinhas! Se a questão não deixar claro que os raios são para-axiais e ela for apenas qualitativa, fique atento, pois ele deve estar cobrando justamente se você sabe qual a condição para  $f = R/2$ .

### 5.0.5. Referência e convenção para distâncias verticais

- Todas as distâncias são medidas em relação ao vértice (ou polo).
- Distâncias verticais acima do eixo principal são positivas.
- Distâncias verticais abaixo do eixo principal são negativas.

### 5.0.6. Convenção para distâncias horizontais

Tanto para objetos quanto imagens, a convenção de sinais para distâncias horizontais é a mostrada abaixo.

Para espelhos côncavos e convexos, distâncias do mesmo lado que a superfície espelhada são positivas. Distâncias do lado não espelhado são negativas.

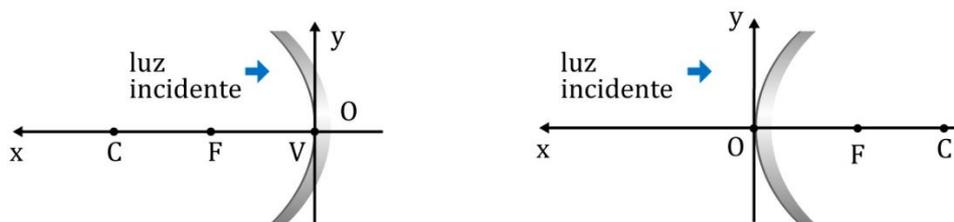


Figura 51: Referencial de Gauss.

## 5.1. Equação de Gauss para espelhos esféricos

Considere um feixe de raios **para-axiais** paralelos que saem de um ponto  $O$ , sobre o eixo principal. Após a reflexão no **espelho** atinge um ponto  $I$ , também sobre o eixo principal do espelho.



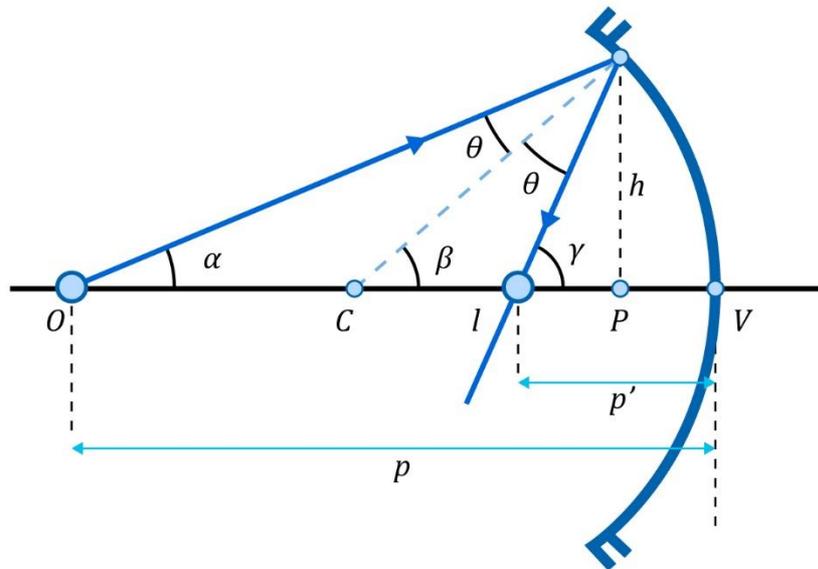


Figura 52: Espelho côncavo sendo incidido por raios para-axiais.

Da geometria e, portanto, dos ângulos externos de triângulos, vem:

$$\alpha + \theta = \beta; \beta + \theta = \gamma \text{ e } \alpha + \gamma = 2\beta$$

Como estamos trabalhando com raios para-axiais, temos a seguinte aproximação:

$$\alpha \approx \text{tg}\alpha; \beta \approx \text{tg}\beta \text{ e } \gamma \approx \text{tg}\gamma$$

E, portanto, temos:

$$\overline{VP} \rightarrow 0, \text{ ou seja, } V \equiv P$$

Isso, implica que:

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\gamma = 2\text{tg}\beta \Rightarrow \frac{h}{OP} + \frac{h}{IP} = 2 \cdot \frac{h}{R} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$$

Como o foco é metade do raio de curvatura, chegamos na equação dos pontos conjugados:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}}$$

- **Espelhos côncavos:**  $f > 0$
- **Espelhos convexos:**  $f < 0$
- **Espelho plano:**  $f \rightarrow \infty$

ATENÇÃO  
DECORE!

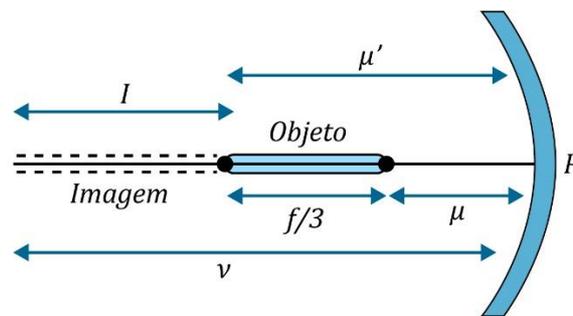


5.

Uma haste fina de comprimento  $f/3$  é colocada ao longo do eixo óptico de um espelho côncavo de comprimento focal  $f$ , tal que sua imagem, que é real e alongada, toca apenas uma extremidade da haste. Calcule o aumento.



**Comentário:**



Se o comprimento da imagem vale  $I$ , temos:

$$A = \frac{I}{f/3} \Rightarrow I = A \cdot \frac{f}{3}$$

O final da imagem coincide com o objeto, pois este ponto deve coincidir com o centro de curvatura do espelho para que esta condição seja satisfeita. Então:

$$u' = 2f$$

Assim:

$$u' = u + \frac{f}{3} \Rightarrow u = 2f - \frac{f}{3} \Rightarrow u = \frac{5f}{3}$$

$$v = u' + I \Rightarrow v = 2f + A \cdot \frac{f}{3} \Rightarrow v = f \left( 2 + \frac{A}{3} \right)$$

Utilizando a equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{5f}{3}} + \frac{1}{f \left( 2 + \frac{A}{3} \right)}$$

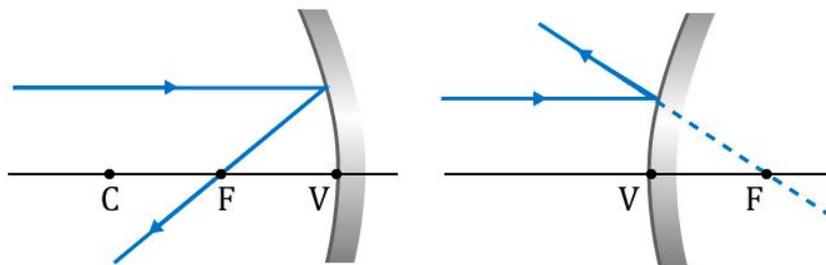
$$1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{2 + \frac{A}{3}} \Rightarrow \boxed{A = 1,5}$$

## 5.2. Raios notáveis

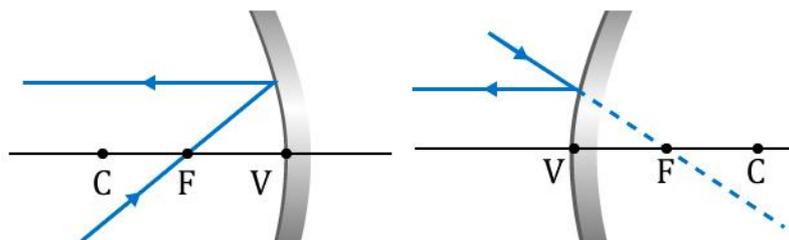
Para os espelhos esféricos, temos alguns raios notáveis que facilitam a construção de uma imagem. Veremos alguns deles abaixo:

**1º Raio:** Todo raio luminoso que incide paralelamente ao eixo principal se reflete alinhado com o foco principal.

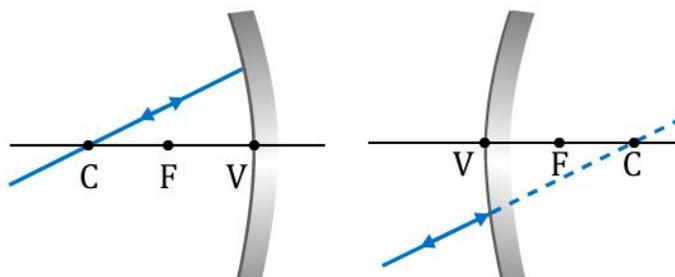




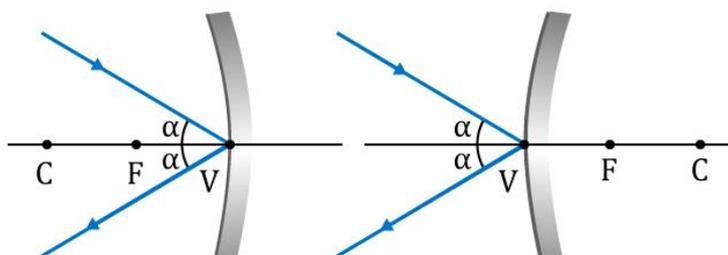
**2º Raio:** Todo raio luminoso que incide alinhado com o foco principal se reflete paralelamente ao eixo principal.



**3º Raio:** Todo raio que incide na direção do centro de curvatura, reflete-se e volta na mesma direção, mas no sentido oposto.



**4º Raio:** Todo raio luminoso que incide no vértice do espelho gera, relativamente ao eixo principal, um raio refletido simétrico.





### 5.3. Aumento linear

O aumento é a medida do poder de ampliação ou redução de um instrumento ópticos. Para os espelhos esféricos o aumento é linear e é dado por:

$$A = \frac{h_i}{h_o} = \frac{\text{comprimento da imagem}}{\text{comprimento do objeto}}$$

Considere um objeto e uma imagem, produzida por um espelho côncavo. Utilizando o raio quatro, mostrado no tópico acima, temos:

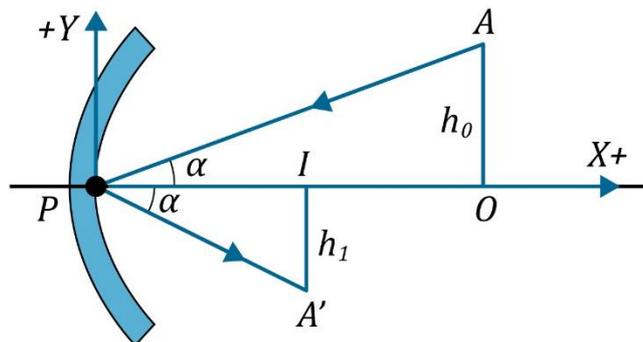


Figura 53: Determinação do aumento linear para um espelho côncavo.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{PO} = \frac{A'I}{PI} \Rightarrow \frac{h_o}{p} = \frac{-h_i}{p'} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = -\frac{p'}{p}$$

Desta forma, temos:

$$A = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{p'}{p}$$

Apesar da demonstração ser feita para o espelho côncavo, ela também é válida para espelhos convexos. Pela equação dos pontos conjugados, podemos reescrever o aumento linear da seguinte forma:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{p'}{p} + 1 = \frac{p'}{f} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{p'}{f} - 1 \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{p' - f}{f} \Rightarrow -\frac{p'}{p} = \frac{f - p'}{f}$$

Ou ainda:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{f}{p - f}$$

$$\therefore A = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{p'}{p} = \frac{f}{f - p}$$



### 5.3.1. Classificação

(I) Imagem invertida ( $A < 0$ ):

- Uma imagem é invertida se o seu aumento é negativo.

(II) Imagem direita ( $A > 0$ ):

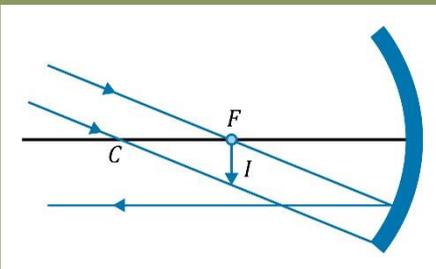
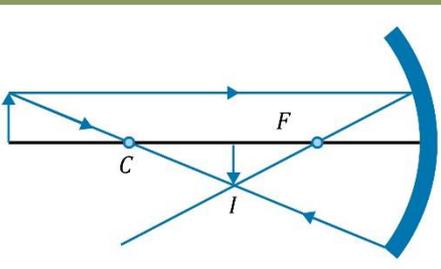
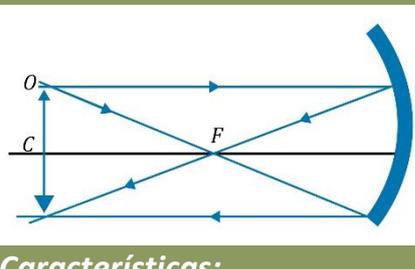
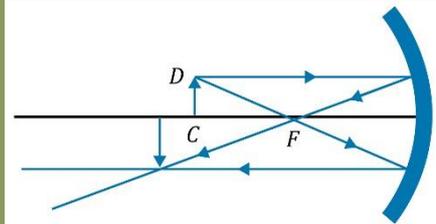
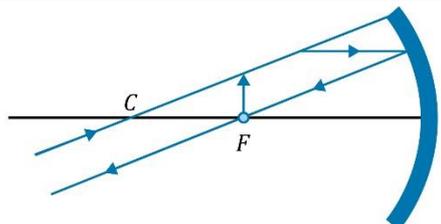
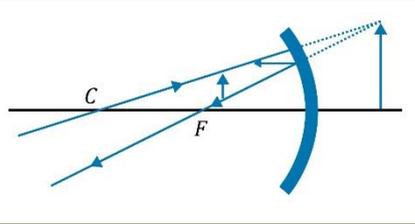
- Uma imagem é direita se o seu aumento é positivo.

## 5.4. Posição das imagens

A posição da imagem depende da posição do objeto em relação ao vértice do espelho esférico. Para cada posição do objeto, imagens com características distintas são formadas.

### 5.4.1. Espelho Côncavo

As possíveis posição do objeto e da imagem diante de um espelho côncavo são:

| Objeto real está no infinito<br>( $p \rightarrow \infty$ )  | Objeto real após o centro de curvatura<br>( $2f < p < \infty$ )   | Objeto real está no centro de curvatura<br>$p = 2f$   |
|---|---|---|
|  <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• A imagem se forma no foco do espelho</li> </ul> |  <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• Imagem está entre o foco e o centro de curvatura.</li> <li>• Imagem é menor que o objeto.</li> </ul> |  <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• Imagem está no centro de curvatura.</li> <li>• Imagem tem o mesmo tamanho do objeto.</li> </ul> |
| Objeto real está entre o centro e o foco<br>( $f < p < 2f$ )  | Objeto real está no foco<br>( $p = f$ )   | Objeto real entre o foco e vértice<br>( $0 < p < f$ )   |
|    |   |    |



**Características:**

- Imagem real.
- Imagem invertida.
- Imagem é maior que o objeto.

**Características:**

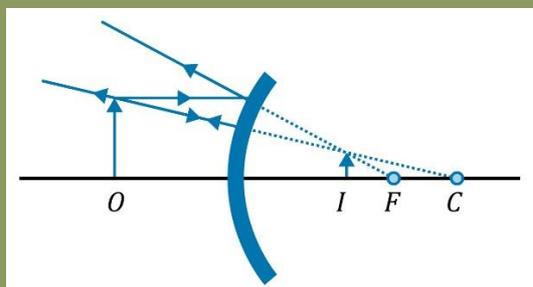
- Imagem imprópria.
- Imagem está localizada no infinito.

**Características:**

- Imagem virtual.
- Imagem direita.
- Imagem maior que o objeto.

### 5.4.2. Espelho Convexo

Objeto real em qualquer posição



**Características:**

- Imagem virtual.
- Imagem direita.
- Imagem menor que o objeto.
- Imagem está entre o vértice e o foco.

### 5.5. Campo visual de um espelho esférico

Considere um observador em frente a um espelho convexo de raio  $R$ . Determinaremos o campo visual deste observador. Seguiremos os mesmos passos utilizados no espelho plano: Consideraremos o espelho côncavo.

- 1) Determinaremos a imagem do observador.
- 2) Ligaremos essa imagem às *extremidades* do espelho.



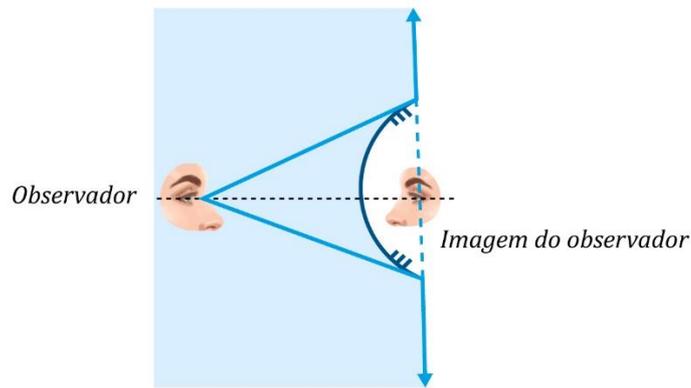


Figura 54: Campo visual de um espelho esférico.

Para o espelho convexo, realizamos o mesmo procedimento.

## 5.6. Relação entre velocidade do objeto e velocidade da imagem

Considere um objeto em frente a um espelho esférico de foco  $f$ . O objeto possui velocidade  $\vec{v}_{OBJ}$ . Para encontrar a velocidade da imagem, utilizaremos a equação de Gauss para espelhos esféricos, considerando raios para-axiais.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

Derivando a expressão em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{p \cdot f}{p - f} \right) \\ \frac{dp'}{dt} &= \left( \frac{\frac{dp}{dt} \cdot f \cdot (p - f) - p \cdot f \cdot \frac{dp}{dt}}{(p - f)^2} \right) \\ \frac{dp'}{dt} &= - \frac{f^2}{(p - f)^2} \cdot \frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

A velocidade do objeto é dada por:

$$v_{OBJ} = \frac{dp}{dt}$$

Deste modo, sendo a velocidade da imagem  $\frac{dp'}{dt}$ , temos:

$$v_{IMG} = - \frac{f^2}{(p - f)^2} \cdot v_{OBJ}$$



ATENÇÃO  
DECORE!



6.

Considere um espelho côncavo de raio de curvatura 20 cm, que se move para a direita com velocidade 1 m/s, e um objeto que está a 15 cm do vértice desse espelho. O objeto se move com velocidade 10 m/s para a esquerda. As velocidades estão na mesma direção. Encontre a velocidade da imagem.

**Comentário:**

A posição do objeto é dada por:

$$p = 15 \text{ cm}$$

A expressão para a velocidade da imagem é dada por:

$$v_{\text{IMG/E}} = -\frac{f^2}{(p-f)^2} \cdot v_{\text{OBJ/E}}$$

A velocidade do objeto e da imagem são em relação ao espelho em repouso.

$$v_{\text{OBJ/E}} = (-10) - (1) = -11 \text{ m/s}$$

Assim, temos:

$$v_{\text{IMG/E}} = -\frac{10^2}{(15-10)^2} \cdot (-11) = +44 \text{ m/s}$$

Em relação a terra, temos:

$$v_{\text{IMG/T}} = v_{\text{IMG/E}} + v_{\text{E/T}}$$

$$v_{\text{IMG/T}} = 44 + 1$$

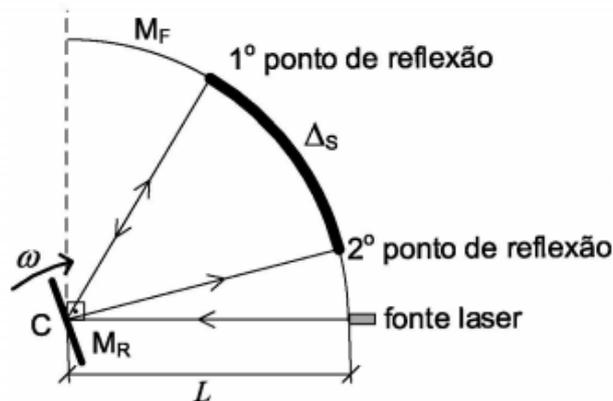
$$v_{\text{IMG/T}} = 45 \text{ m/s}$$





## 6. Lista de exercícios

### 1. (IME – 2020 – 1ª Fase)



Em um experimento, uma fonte laser emite um pulso luminoso instantâneo, que é refletido por um espelho plano ( $M_R$ ), girando em velocidade angular constante  $\omega$ . Um outro espelho fixo, côncavo e circular ( $M_F$ ), encontra-se acima da fonte laser, ambos localizados a uma distância  $L = 3 \text{ km}$  de  $M_R$ , conforme mostra a figura. O centro de curvatura (C) de  $M_F$  localiza-se no ponto onde a luz do laser encontra  $M_R$  e coincide com seu centro de rotação.

Dados:

- velocidade da luz:  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Observações:

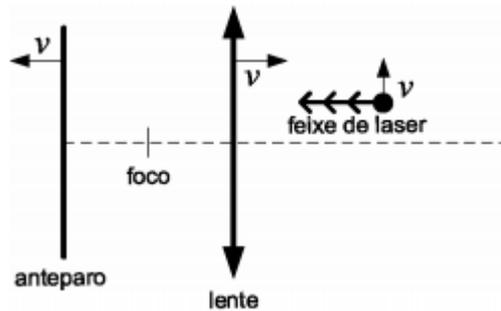
- a posição de  $M_R$  e  $M_F$  são tais que o feixe consegue chegar a  $M_F$ , pelo menos, duas vezes; e
- despreze o comprimento da fonte laser.

Para que o pulso luminoso seja refletido em  $M_F$  pela 2ª vez, a um comprimento de arco  $\Delta_s = 30 \text{ cm}$  do 1º ponto de reflexão, o valor de  $\omega$ , em rad/s, é:

- a) 1,25
- b) 2,50
- c) 3,33
- d) 5,00
- e) 10,00



2. (IME – 2020 – 1ª Fase)

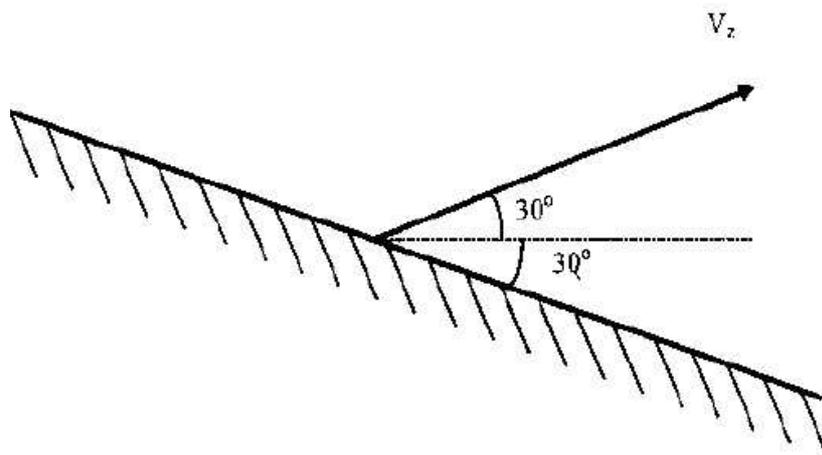


Uma partícula emite um feixe laser horizontal de encontro a uma lente convergente de distância focal  $f$ . Após ser desviado, o feixe atinge um anteparo localizado depois do foco da lente. Sabendo que a partícula, a lente e o anteparo estão em movimento em velocidade escalar  $v$  nos respectivos sentidos indicados na figura, a aceleração do ponto de impacto do feixe, no referencial do anteparo, é:

- a)  $v^2/4f$
- b)  $v^2/3f$
- c)  $v^2/2f$
- d)  $2v^2/f$
- e)  $4v^2/f$

3. (IME – 1998)

Um objeto é lançado da superfície de um espelho, segundo um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, com velocidade inicial  $V_2$ . Sabendo que o espelho está inclinado de  $30^\circ$ , conforme a figura, determine:



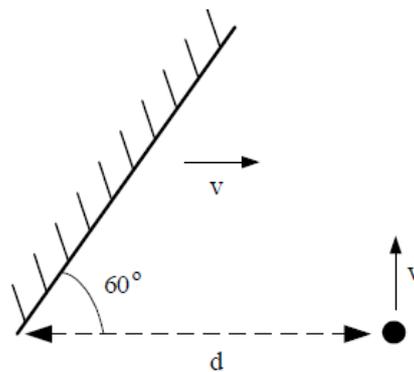
- a) O tempo gasto para que o objeto atinja o espelho.
- b) as componentes vertical e horizontal, em função do tempo, do vetor velocidade da imagem do objeto lançado.

Dado:

A aceleração da gravidade vale  $g$ .

#### 4. (IME – 2003)

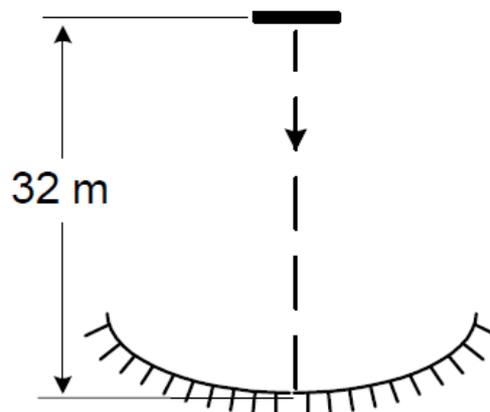
Um espelho plano, de superfície infinita, desloca-se na horizontal com velocidade constante  $v$ . Um objeto puntiforme se desloca na vertical também com velocidade constante  $v$  e, no instante  $t = 0$  segundos, as posições do espelho e do objeto estão em conformidade com a figura. Considerando que no instante  $t = \alpha$  ocorre o choque do objeto com o espelho, determine:



- as componentes vertical e horizontal da velocidade da imagem do objeto refletida no espelho.
- o instante  $\alpha$  em que o objeto e o espelho se chocam.

#### 5. (IME – 2008)

Uma pequena barra metálica é solta no instante  $t = 0$  s do topo de um prédio de 32 m de altura. A aceleração da gravidade local é  $10 \text{ m/s}^2$ . A barra cai na direção de um espelho côncavo colocado no solo, conforme indicado na figura ao lado. Em certo instante, a imagem da barra fica invertida, 30 cm acima da barra e quatro vezes maior que ela. O instante que isso ocorre é, aproximadamente,



- 2,1 s
- 2,2 s
- 2,3 s



- d) 2,4 s
- e) 2,5 s

**6. (IME – 2010)**

A figura mostra o perfil de um par de espelhos planos articulado no ponto O e, inicialmente, na vertical. Ao centro do espelho OB é colocado um pequeno corpo, cuja massa é muito maior que a do espelho. O espelho AO encontra-se fixo e, frente ao mesmo, é colocado um objeto P. Em um dado instante, é aplicado um impulso no espelho OB, conferindo a extremidade B uma velocidade inicial  $v_0$ , sentido de fechar os espelhos face contra face. Tomando como referência o eixo x, determine:

- a) a altura máxima atingida pela extremidade B.
- b) os módulos dos vetores velocidade da extremidade B, para cada instante em que uma imagem adicional do objeto P é formada, até que atinja sua altura máxima.

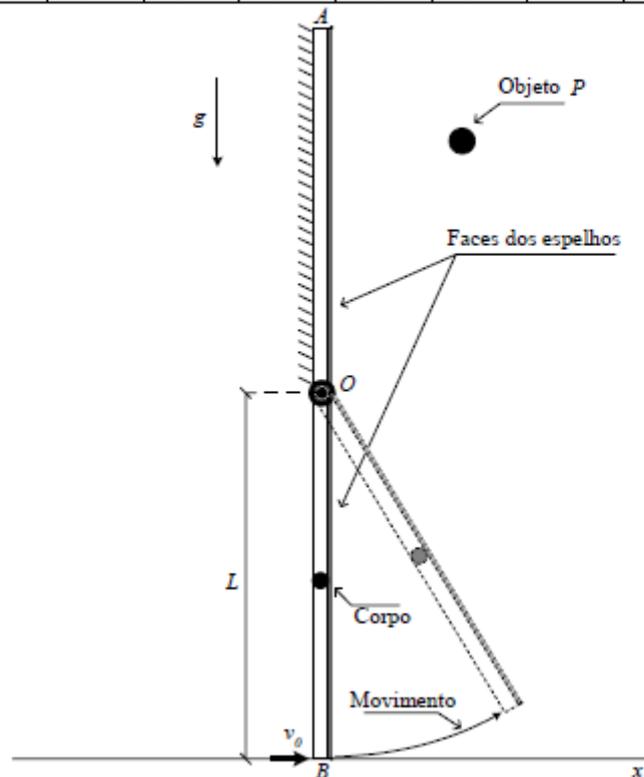
Dados:

$L = 90 \text{ cm}$

$v_0 = 7 \text{ m/s}$

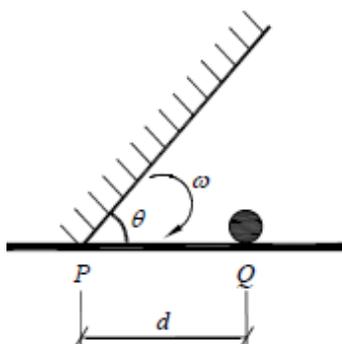
$g = 10 \text{ m/s}^2$

|               |            |            |            |              |            |            |            |             |             |
|---------------|------------|------------|------------|--------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| $\alpha$      | $36^\circ$ | $40^\circ$ | $45^\circ$ | $51,4^\circ$ | $60^\circ$ | $72^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $180^\circ$ |
| $\cos \alpha$ | 0,81       | 0,77       | 0,71       | 0,62         | 0,5        | 0,31       | 0          | -0,5        | -1          |



### 7. (IME – 2012)

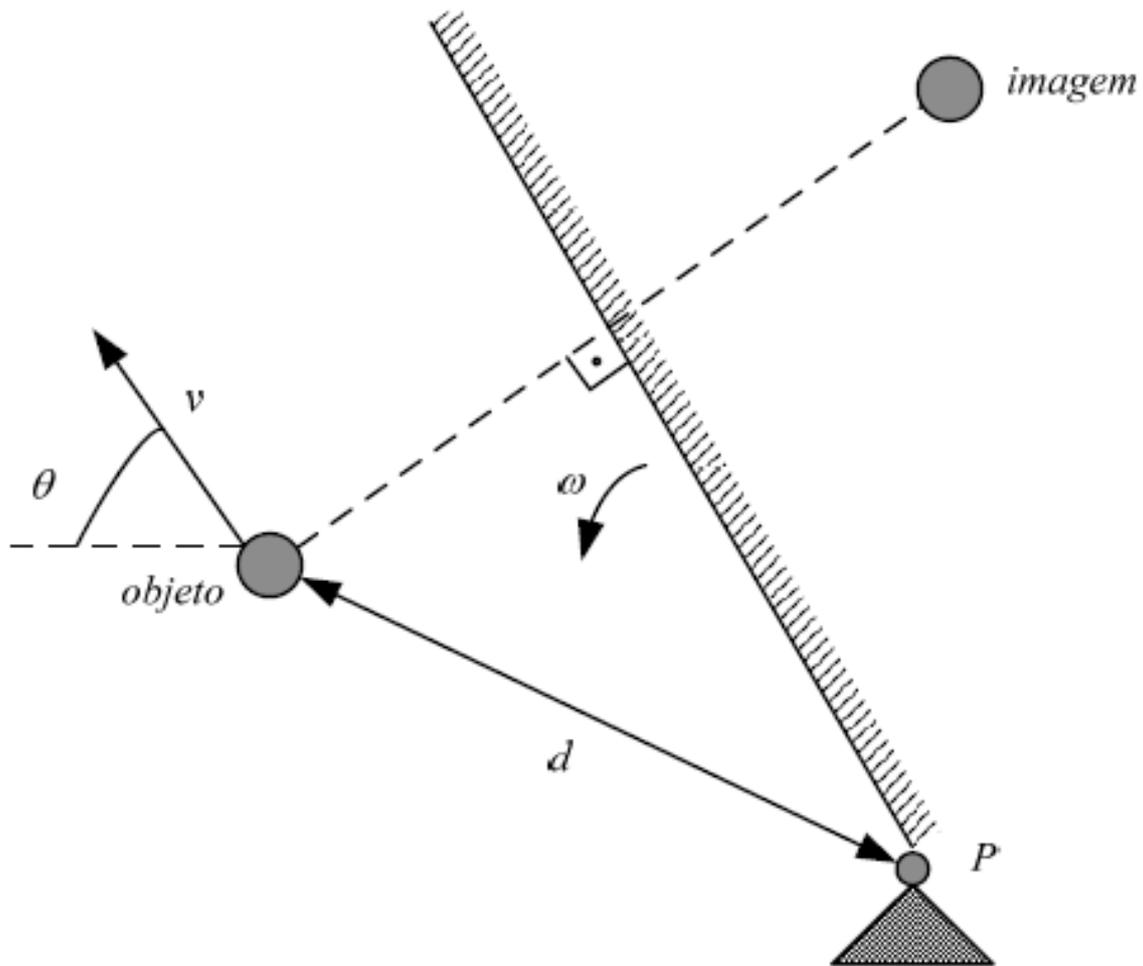
Num instante inicial, um espelho começa a girar em uma de suas extremidades, apoiada em P, com aceleração angular constante e valor inicial de  $\theta = \pi/2$ . A trajetória que a imagem do objeto puntiforme parado em Q percorre até que a outra extremidade do espelho atinja o solo é um(a):



- a) semicircunferência
- b) arco de parábola
- c) arco de senóide
- d) arco de espiral
- e) arco de elipse, sem se constituir em uma circunferência

### 8. (IME – 2014)



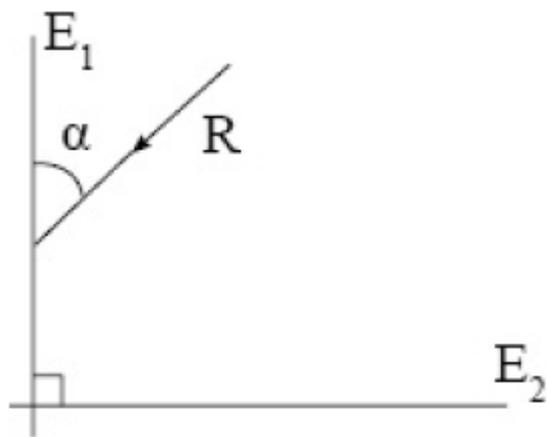


Um espelho plano gira na velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um ponto fixo P, enquanto um objeto se move na velocidade  $v$ , de módulo constante, por uma trajetória não retilínea. Em um determinado instante, a uma distância  $d$  do ponto P, o objeto pode tomar um movimento qualquer, direção e sentido conforme a figura acima, sempre mantendo constante a velocidade escalar  $v$ . A máxima e a mínima velocidade escalar da imagem do objeto gerado pelo espelho são, respectivamente:

- a)  $\omega d + v$  e  $|\omega d - v|$
- b)  $\omega d + v$  e  $\sqrt{(\omega d)^2 + v^2}$
- c)  $\sqrt{(\omega d)^2 + v^2}$  e  $|\omega d - v|$
- d)  $2\omega d + v$  e  $|2\omega d - v|$
- e)  $2\omega d + v$  e  $\sqrt{(2\omega d)^2 + v^2}$

### 9. (ITA - 1971)

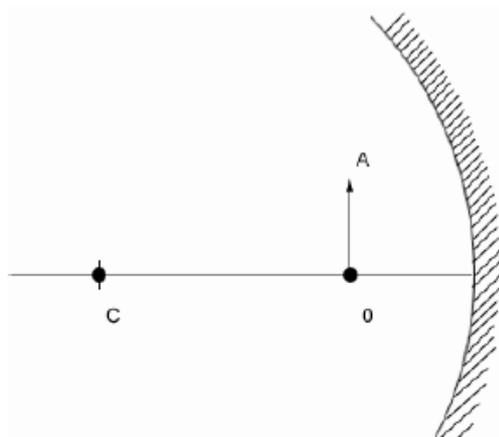
Considere o desenho, em que  $E_1$  e  $E_2$  são dois espelhos planos em ângulo reto cortados por um plano perpendicular que contém o raio luminoso R, incidente em  $E_1$  e  $R'$  emergente de  $E_2$  (não mostrado). Para  $0 < \alpha < \pi/2$  podemos afirmar que:



- a) R' poderá ser paralelo a R dependendo de  $\alpha$
- b) R' é paralelo a R qualquer que seja  $\alpha$
- c) R' nunca é paralelo a R
- d) R' só será paralelo a R se o sistema estiver no vácuo
- e) R' será paralelo a R qualquer que seja o ângulo entre os espelhos.

### 10. (ITA – 1980)

Determinar graficamente a imagem de um objeto AO colocado diante de um espelho côncavo, esférico, de raio R. A distância do centro de curvatura C ao objeto é igual a  $2R/3$ . A imagem é:



- a) virtual, direta e menor que o objeto.
- b) real, invertida e maior que o objeto.
- c) real, invertida e menor que o objeto.
- d) real, direta e maior que o objeto.
- e) virtual, direta e maior que o objeto.

### 11. (ITA - 1991)

Um edifício iluminado pelos raios solares, projeta uma sombra de comprimento  $L = 72,0$  m. Simultaneamente, uma vara vertical de  $2,50$  m de altura, colocada ao lado do edifício projeta uma sombra de comprimento  $l = 3,00$  m. Qual é a altura do edifício?



### 12. (ITA - 1991)

Seja E um espelho côncavo cujo raio de curvatura é 60,0 cm. Qual tipo de imagem obteremos se colocarmos um objeto real de 7,50 cm de altura, verticalmente, a 20,0 cm do vértice de E?

- a) virtual e reduzida a  $1/3$  do tamanho do objeto.
- b) real e colocada a 60,0 cm da frente do espelho.
- c) virtual e três vezes mais alta que o objeto.
- d) real, invertida e de tamanho igual ao do objeto.
- e) nenhuma das anteriores.

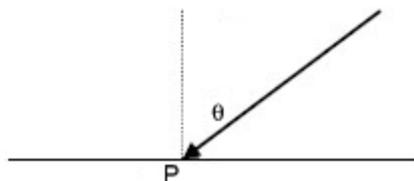
### 13. (ITA - 1992)

Um jovem estudante para fazer a barba mais eficientemente, resolve comprar um espelho esférico que aumenta duas vezes a imagem do seu rosto quando ele se coloca a 50 cm dele. Que tipo de espelho ele deve usar e qual o raio de curvatura?

- a) Convexo com  $r = 50$  cm.
- b) Côncavo com  $r = 200$  cm.
- c) Côncavo com  $r = 33,3$  cm.
- d) Convexo com  $r = 67$  cm.
- e) Um espelho diferente dos mencionados.

### 14. (ITA - 1993)

Um raio luminoso incide com um ângulo em relação à normal, sobre um espelho refletor. Se esse espelho girar de um ângulo igual a  $\theta$  em torno de um eixo que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano da figura, qual o ângulo de rotação do raio refletido?

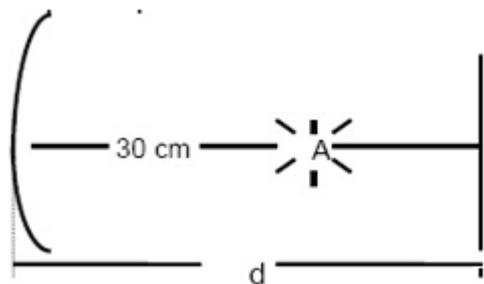


### 15. (ITA - 1997)

Um espelho plano está colocado em frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa A, centrada no eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente sobre os dois espelhos e formam sobre a própria fonte A, uma imagem real da mesma. O raio de curvatura do espelho é 40 cm e a distância do centro



da fonte A até o centro do espelho esférico é de 30 cm. A distância  $d$  do espelho plano até o centro do espelho côncavo é, então:



- a) 20 cm
- b) 30 cm
- c) 40 cm
- d) 45 cm
- e) 50 cm

### 16. (ITA - 1999)

Um excitador pulsado que gera faíscas a uma frequência de 106 Hz está localizado no centro de curvatura  $C$  de um espelho côncavo de 1 m de raio de curvatura. Considere que o tempo de duração de cada faísca seja desprezível em relação ao intervalo de tempo entre duas consecutivas. A 2m do centro de curvatura do espelho está situada um anteparo normal aos raios refletidos. O espelho gira em torno de  $C$  com uma frequência de 500 rotações por segundo, formando faixas luminosas equidistantes no anteparo. O comprimento do intervalo entre duas faixas luminosas formadas pelos raios refletidos no anteparo é de, aproximadamente:

- a) 3,1 mm
- b) 6,3 mm
- c) 12,6 m
- d) 1 m
- e) 9,4 mm

### 17. (ITA - 2001)

Considere as seguintes afirmações:

- I) Se um espelho plano transladar de uma distância  $d$  ao longo da direção perpendicular a seu plano, a imagem real de um objeto fixo transladará  $2d$ .
- II) Se um espelho plano girar de um ângulo  $\alpha$  em torno de um eixo perpendicular à direção de incidência da luz, o raio refletido girará de um ângulo  $2\alpha$ .



III) Para que uma pessoa de altura  $h$  possa observar seu corpo inteiro em um espelho plano, a altura deste deve ser de no mínimo  $2h/3$ .

Então podemos dizer que:

- a) apenas I e II são verdadeiras
- b) apenas I e III são verdadeiras
- c) apenas II e III são verdadeiras
- d) todas são verdadeiras
- e) todas são falsas

### 18. (ITA - 2001)

Um objeto linear de altura  $h$  está assentado perpendicularmente no eixo principal de um espelho esférico, a 15 cm de seu vértice. A imagem produzida é direita e tem altura de  $h/5$ . Este espelho é:

- a) côncavo, de raio 15 cm
- b) côncavo, de raio 7,5 cm
- c) convexo, de raio 7,5 cm
- d) convexo, de raio 15 cm
- e) convexo, de raio 10 cm

### 19. (ITA 2004)

Ao olhar-se num espelho plano, retangular, fixado no plano de uma parede vertical, um homem observa a imagem de sua face tangenciando as quatro bordas do espelho, isto é, a imagem de sua face encontra-se ajustada ao tamanho do espelho. A seguir, o homem afasta-se, perpendicularmente à parede, numa certa velocidade em relação ao espelho, continuando a observar sua imagem. Nestas condições, pode-se afirmar que essa imagem:

- a) torna-se menor que o tamanho do espelho tal como visto pelo homem.
- b) torna-se maior que o tamanho do espelho tal como visto pelo homem.
- c) continua ajustada ao tamanho do espelho tal como visto pelo homem.
- d) desloca-se com o dobro da velocidade do homem.
- e) desloca-se com metade da velocidade do homem.

### 20. (ITA – 2007)

Um raio de luz de uma lanterna acesa em A ilumina o ponto B, ao ser refletido por um espelho horizontal sobre a semirreta DE da figura, estando todos os pontos num mesmo plano vertical. Determine a distância entre a imagem virtual da lanterna A e o ponto B. Considere  $AD = 2$  m,  $BE = 3$  m e  $DE = 5$  m.





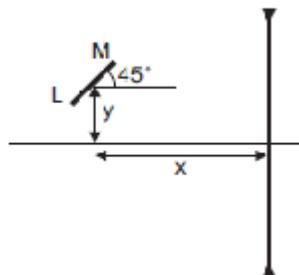
**21. (ITA - 2009)**

Um espelho esférico convexo reflete uma imagem equivalente a  $\frac{3}{4}$  da altura de um objeto dele situado a uma distância  $p_1$ . Então, para que essa imagem seja refletida com apenas  $\frac{1}{4}$  da sua altura, o objeto deverá se situar a uma distância  $p_2$  do espelho, dada por:

- a)  $p_2 = 9p_1$ .
- b)  $p_2 = 9p_1/4$ .
- c)  $p_2 = 9p_1/7$ .
- d)  $p_2 = 15p_1/7$ .
- e)  $p_2 = -15p_1/7$ .

**22. (ITA-2010)**

A figura mostra uma barra  $LM$  de  $10\sqrt{2}$  cm de comprimento, formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal, tendo o seu centro situado a  $x = 30,0$  cm de uma lente divergente, com distância focal igual a  $20,0$  cm, e a  $y = 10,0$  cm acima do eixo óptico da mesma. Determine o comprimento da  $x$  imagem da barra e faça um desenho esquemático para mostrar a orientação da imagem.



**23. (ITA – 2019)**

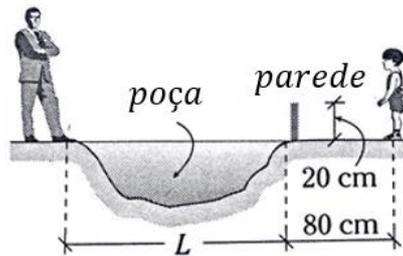
A imagem de um objeto formada por um espelho côncavo mede metade do tamanho do objeto. Se este é deslocado de uma distância de 15 cm em direção ao espelho, o tamanho da imagem terá o dobro do tamanho do objeto. Estime a distância focal do espelho e assinale a alternativa correspondente.

- a) 40 cm      b) 30 cm      c) 20 cm      d) 10 cm      e) 5 cm

**24.**

Uma criança cujos olhos se encontram a 80 cm do chão vê totalmente a imagem de uma pessoa de 1,8 m de altura que está no outro extremo de uma poça de água (charco). Se a poça reflete nitidamente a imagem da pessoa, determine o mínimo valor de  $L$ .

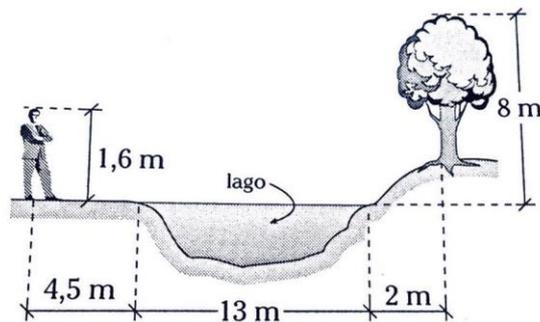




- a) 1,5 m
- b) 1,8 m
- c) 2,0 m
- d) 2,2 m
- e) 2,5 m

**25.**

Determine a distância necessária que deve caminhar um jovem para pode observar a copa da árvore refletida em um pequeno lago (considere o lago como um espelho plano).



- a) 1,0 m
- b) 1,2 m
- c) 1,3 m
- d) 1,5 m
- e) 1,6 m

**26.**

A imagem de um edifício é vista completamente em um espelho plano de 50 cm de altura quando afastamos (apenas horizontalmente) este espelho 30 cm dos olhos. Se o edifício de encontra a 9 m do espelho, determine a altura do edifício.

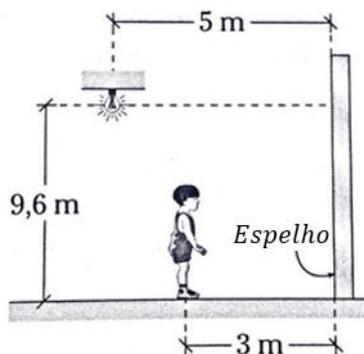
- a) 13,5 m
- b) 12,5 m
- c) 16,5 m
- d) 15,5 m



e) 14,5 m

**27.**

A criança abaixo se encontra a 3 m do espelho. Determine sua altura se ele observa a lâmpada com um ângulo de elevação.



- a) 1 m
- b) 1,6 m
- c) 2,0 m
- d) 1,5 m
- e) 1,7 m

**28.**

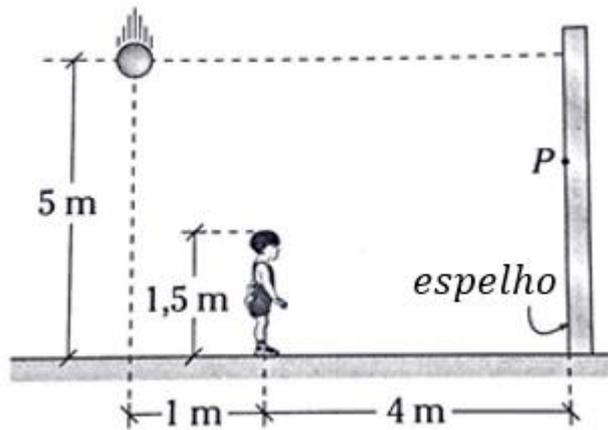
Um espelho plano circular de 40 cm de diâmetro é colocado sobre uma mesa. A 30 cm acima do espelho e sobre seu eixo se encontra uma fonte luminosa. Determine o diâmetro da superfície iluminada no teto, situado a 1,8 m da mesa.

- a) 0,7 m    b) 1,4 m    c) 2,8 m
- d) 5,6 m    e) 8,5 m

**29.**

Determine a que distância do solo se encontra o ponto do espelho que o olho do menino utiliza para ver a imagem da bolinha em queda livre.

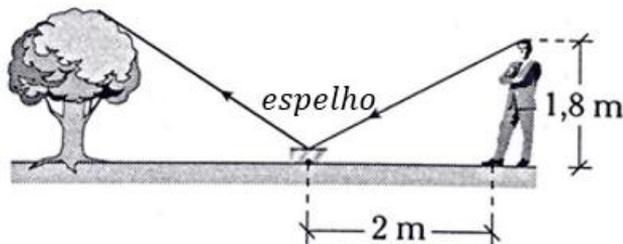




- a) 3,05 m
- b) 2,05 m
- c) 2,06 m
- d) 3,04 m
- e) 3,25 m

**30.**

Um espelho plano se encontra localizado horizontalmente. O observador consegue ver a ponta da árvore através do espelho, que dista 30 m da árvore. Determine a altura da árvore.



- a) 25 m
- b) 27 m
- c) 30 m
- d) 32,5 m
- e) 28,5 m

**31.**

Um homem de 1,60 m de altura tem seus olhos à 10 cm abaixo do limite de sua cabeça. Se ele se encontra a 120 cm de um espelho plano, a que altura deverá estar localizado o espelho (80 cm de comprimento) para que ele veja sua imagem por completo?

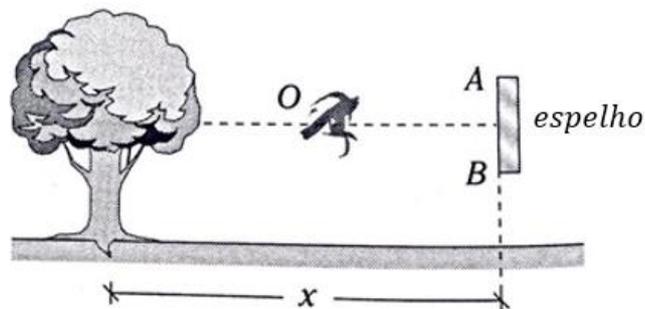




- a) 1 m
- b) 1,2 m
- c) 1,4 m
- d) 1,5 m
- e) 1,55 m

**32.**

O observa O se encontra a 0,5 m do espelho AB de 0,2 m. Determine a que distância  $x$  deve-se encontrar a árvore de 20,2 m de altura, para o jovem observe a imagem completa da árvore.

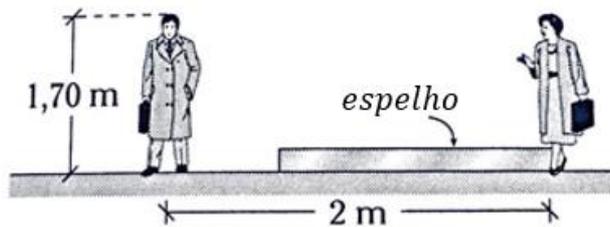


- a) 25 m
- b) 50 m
- c) 75 m
- d) 80 m
- e) 100 m

**33.**

Dois pessoas de mesma altura estão distanciadas a uma distância de 2 m. Qual deve ser o tamanho do espelho para que uma delas possa ver completamente a imagem da outra?

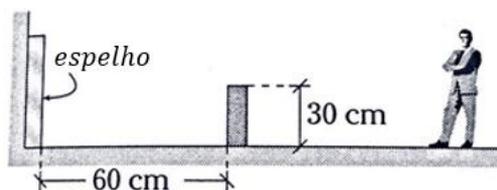




- a) 85 cm
- b) 2 m
- c) 1 m
- d) 1,5 m
- e) 1,7 m

**34.**

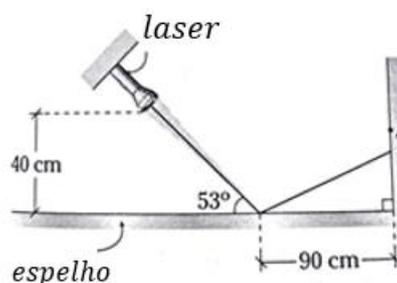
Uma pessoa de 1,8 m de altura está afastada de um espelho grudado na parede. A que distância pode-se afastar do muro para que continue vendo completamente sua imagem.



- a) 2 m
- b) 1 m
- c) 0,3 m
- d) 1,2 m
- e) 2,4 m

**35.**

Um laser gira no sentido anti-horário rodando com uma velocidade angular constante. Determine quanto avança o ponto de incidência A sobre a parede em 2 s ( $\omega = \pi/45$  rad/s).



- a) 80 cm

- b) 40 cm
- c) 30 cm
- d) 25 cm
- e) 20 cm

**36.**

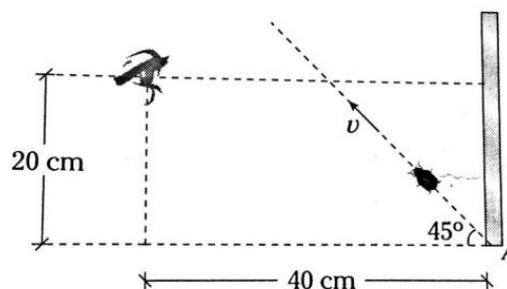
Um caminhão que se move com velocidade constante possui instalado em sua traseira um espelho plano. Determine a velocidade com qual se move a imagem do jovem, considere que a pessoa realize um MRU.



- a)  $\sqrt{95}$  m/s
- b)  $\sqrt{105}$  m/s
- c) 5 m/s
- d)  $\sqrt{97}$  m/s
- e) 7 m/s

**37.**

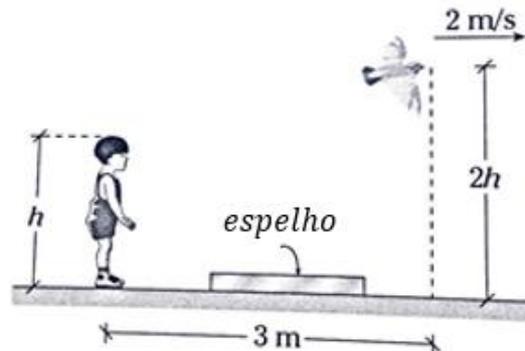
Determine o tempo que um observador vê, através do espelho, a imagem de uma aranha que realiza MRU, a partir de A. Dado:  $l_{\text{espelho}} = 40 \text{ cm}$ ;  $v = 8\sqrt{2} \text{ cm/s}$



- a) 6 s
- b) 8 s
- c) 10 s
- d) 12 s
- e) 4 s

38.

Uma criança, através de um pequeno espelho que está no solo, observa uma ave que voa com uma velocidade constante de  $2 \text{ m/s}$ , tal como se mostra a figura abaixo. A partir desse instante quanto deve voltar a criança para poder ver a ave, através do espelho, depois de  $3 \text{ s}$ .



- a) 1 m
- b) 2 m
- c) 3 m
- d) 4 m
- e) 5 m

39.

Qual deve ser a distância focal de um espelho para que forme uma imagem de  $5 \text{ cm}$  de altura de um objeto de  $10 \text{ cm}$  de altura, se a distância entre o objeto e a imagem é de  $120 \text{ cm}$ ?

- a) 20 cm
- b) 40 cm
- c) 50 cm
- d) 60 cm
- e) 80 cm

40.

Um dentista põe um espelho côncavo de  $6 \text{ cm}$  de raio de curvatura a uma distância de  $2 \text{ cm}$  do dente do paciente. Qual é o aumento obtido?

- a) + 1
- b) + 2
- c) + 3
- d) - 2
- e) - 3



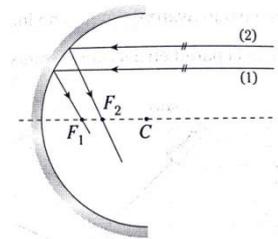
41.

Um espelho esférico de 15 cm de distância focal apresenta sobre uma tela (140 cm do espelho) uma imagem de 20 cm de altura. Qual é a altura do objeto?

- a) 1,4 cm
- b) 2 cm
- c) 2,4 cm
- d) 7 cm
- e) 15 cm

42.

A figura abaixo mostra dois raios paralelos. Ambos ao se refletir em um espelho esférico côncavo se interceptam com o eixo óptico principal. Indique verdadeiro (V) ou falso (F).



- I. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  devem estar sobrepostos (devem coincidir).
- II. O raio (2) não é paraxial.
- III. Existe aberração esférica.

- a) VFV
- b) FFF
- c) FVV
- d) FFF
- e) FVF

43.

Um objeto colocado a frente de um espelho esférico tem um aumento  $A = -3$ . Se a distância entre o objeto e a imagem é 16 cm, determine o raio de curvatura do espelho e o tipo de espelho.

- a) 6 cm; côncavo
- b) 12 cm; convexo
- c) 12 cm; côncavo
- d) 6 cm; convexo



e) 8 cm; convexo

**44.**

Se um objeto colocado a 1,2 m de um espelho esférico gera uma imagem real, determine a distância focal e o tipo de espelho, sabendo que o tamanho da imagem é a terça parte do tamanho do objeto.

- a) 0,3 m; côncavo
- b) 0,3 m; convexo
- c) 0,4 m; côncavo
- d) 0,5 m; convexo
- e) 0,1 m; côncavo

**45.**

Um espelho esférico gera uma imagem real cuja altura é 25% a do objeto. Se a distância entre o objeto e a imagem é 150 cm, determine a distância focal do espelho.

- a) – 40 cm
- b) – 60 cm
- c) 30 cm
- d) 40 cm
- e) – 15 cm

**46.**

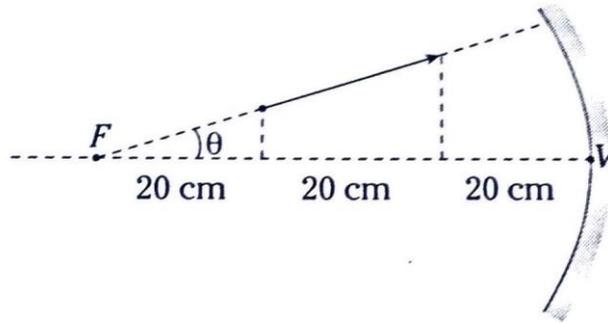
Qual é a distância focal de um espelho que duplica o tamanho aparente da face de uma pessoa que está a 30 cm dele?

- a) 20 cm
- b) 30 cm
- c) 40 cm
- d) 60 cm
- e) 50 cm

**47.**

Determine o comprimento da imagem que se forma através do espelho côncavo ( $\theta$  é muito pequeno).





- a) 60 cm
- b) 90 cm
- c) 100 cm
- d) 120 cm
- e) 50 cm

**48.**

Um objeto de 4 cm de altura, situado em frente a um espelho côncavo, dista 15 cm do vértice do espelho. Se o raio de curvatura é 40 cm, que altura tem a imagem?

- a) 60 cm
- b) 100 cm
- c) 1 cm
- d) 40 cm
- e) 16 cm

**49.**

Um espelho côncavo produz uma imagem real com o dobro do tamanho do objeto. Qual é o raio de curvatura desse espelho, se a distância da imagem ao objeto é 30 cm?

- a) 10 cm
- b) 20 cm
- c) 30 cm
- d) 40 cm
- e) 50 cm

**50.**

Quando um objeto é colocada em frente a um espelho convexo, o aumento que se obtém é 0,5 e quando o objeto é aproximado em 20 cm o aumento é de 0,75. Determine a distância focal do espelho.



- a) – 10 cm
- b) – 20 cm
- c) – 30 cm
- d) – 40 cm
- e) – 50 cm





## 7. Gabarito sem comentários

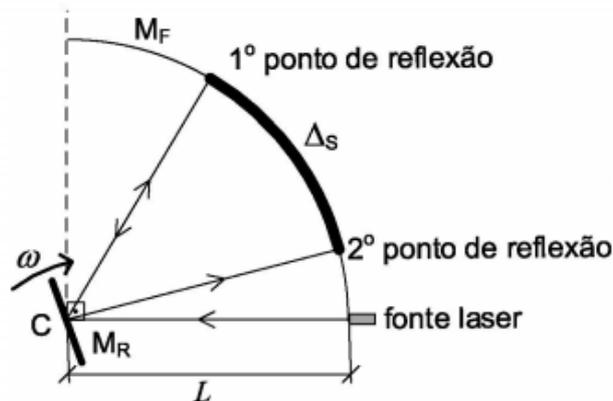
- |  |       |
|--|-------|
| 1) E   | 35) B |
| 2) E   | 36) D |
| 3) a) $\frac{2v_2}{g}$ b) $\frac{g}{2} \cdot t$ e $- v_2  + \frac{g\sqrt{3}}{2} \cdot t$   | 37) C |
| 4) a) $\vec{v}_{I,S} = \frac{v}{2}((3 + \sqrt{3})\hat{x} - (\sqrt{3} - 1)\hat{y})$ b) $\frac{d}{v} \cdot \frac{(3 - \sqrt{3})}{2}$ | 38) C |
| 5) E   | 39) E |
| 6) a) $1,225 m$ b) $\sqrt{31} m/s, \sqrt{13} m/s$ e $\sqrt{1,84} m/s$  | 40) C |
| 7) A   | 41) C |
| 8) D   | 42) C |
| 9) B   | 43) C |
| 10) E  | 44) A |
| 11) 60   | 45) D |
| 12) C  | 46) A |
| 13) B  | 47) B |
| 14) $2\theta$  | 48) E |
| 15) D  | 49) D |
| 16) B  | 50) C |
| 17) E  |       |
| 18) C  |       |
| 19) C  |       |
| 20) $5\sqrt{2} m$  |       |
| 21) A  |       |
| 22) $5,1 cm$   |       |
| 23) D  |       |
| 24) E  |       |
| 25) D  |       |
| 26) D  |       |
| 27) B  |       |
| 28) C  |       |
| 29) A  |       |
| 30) B  |       |
| 31) E  |       |
| 32) B  |       |
| 33) C  |       |
| 34) C  |       |





## 8. Lista de exercícios comentada

### 1. (IME – 2020 – 1ª Fase)



Em um experimento, uma fonte laser emite um pulso luminoso instantâneo, que é refletido por um espelho plano ( $M_R$ ), girando em velocidade angular constante  $\omega$ . Um outro espelho fixo, côncavo e circular ( $M_F$ ), encontra-se acima da fonte laser, ambos localizados a uma distância  $L = 3 \text{ km}$  de  $M_R$ , conforme mostra a figura. O centro de curvatura ( $C$ ) de  $M_F$  localiza-se no ponto onde a luz do laser encontra  $M_R$  e coincide com seu centro de rotação.

#### Dados:

- velocidade da luz:  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

#### Observações:

- a posição de  $M_R$  e  $M_F$  são tais que o feixe consegue chegar a  $M_F$ , pelo menos, duas vezes; e
- despreze o comprimento da fonte laser.

Para que o pulso luminoso seja refletido em  $M_F$  pela 2ª vez, a um comprimento de arco  $\Delta_s = 30 \text{ cm}$  do 1º ponto de reflexão, o valor de  $\omega$ , em rad/s, é:

- 1,25
- 2,50
- 3,33
- 5,00
- 10,00



**Comentários:**

O ângulo formado entre os dois feixes vale:

$$\theta = \omega t$$

Logo:

$$\omega t R = \Delta s$$

Além disso:

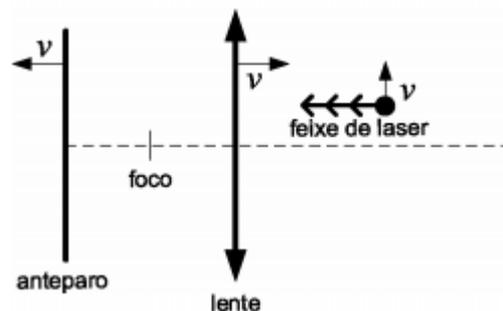
$$t = \frac{R}{c}$$

Logo:

$$\frac{\omega R^2}{c} = \Delta s \rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

**Gabarito: E**

**2. (IME – 2020 – 1ª Fase)**



Uma partícula emite um feixe laser horizontal de encontro a uma lente convergente de distância focal  $f$ . Após ser desviado, o feixe atinge um anteparo localizado depois do foco da lente. Sabendo que a partícula, a lente e o anteparo estão em movimento em velocidade escalar  $v$  nos respectivos sentidos indicados na figura, a aceleração do ponto de impacto do feixe, no referencial do anteparo, é:

- a)  $v^2/4f$
- b)  $v^2/3f$
- c)  $v^2/2f$
- d)  $2v^2/f$
- e)  $4v^2/f$

**Comentários:**

No referencial do anteparo a lente se distancia com velocidade  $2v$  e o objeto sobe diagonalmente com  $V_x = V_y = v$ . A abscissa da lente é:

$$x_F = x_L - F = x_{0L} + 2vt - f$$



$$x_L = x_{0L} + 2vt$$

$$x_O = x_{0O} + vt$$

$$y_O = y_{0O} + vt$$

A reta que une o ponto onde o raio de laser atinge a lente e o foco (que sabemos que ele passa) é:

$$y = y_F + \frac{y_O - y_F}{x_L - x_F} (x - x_F) = \frac{y_O}{x_L - x_F} (x - x_F)$$

Para  $x=0$ :

$$y = -\frac{y_O x_F}{x_L - x_F} = -\frac{(y_{0O} + vt)(x_{0L} + 2vt - f)}{f}$$

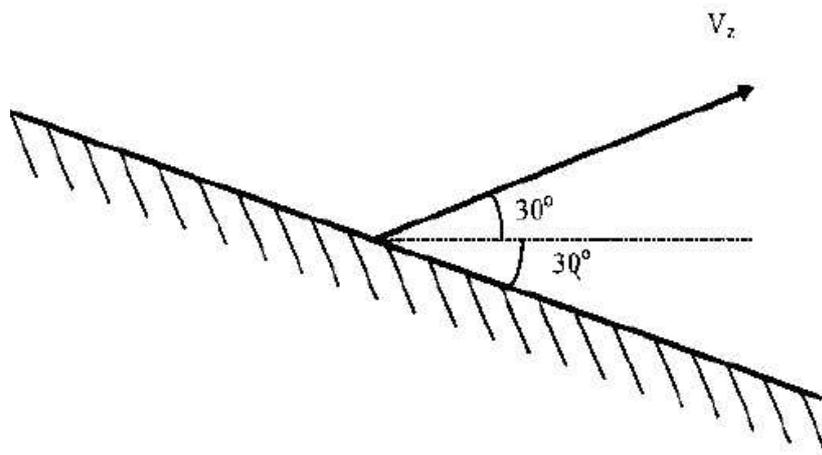
Cuja componente  $t^2$  é:

$$-\frac{2v^2 t^2}{f} = \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$a_y = \frac{4v^2}{f}$$

**Gabarito: E**

### 3. (IME – 1998)

Um objeto é lançado da superfície de um espelho, segundo um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, com velocidade inicial  $V_2$ . Sabendo que o espelho está inclinado de  $30^\circ$ , conforme a figura, determine:



- O tempo gasto para que o objeto atinja o espelho.
- as componentes vertical e horizontal, em função do tempo, do vetor velocidade da imagem do objeto lançado.

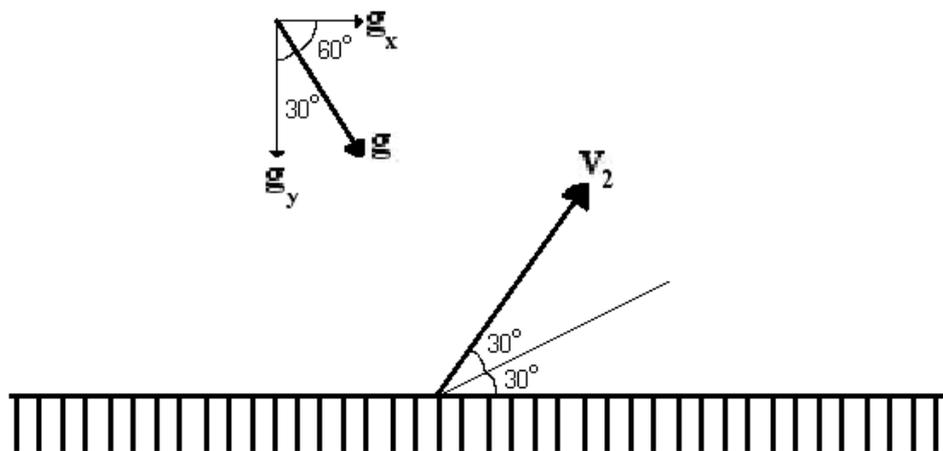
Dado:

A aceleração da gravidade vale  $g$ .



### Comentários:

Dividindo a gravidade nas componentes normal e tangencial ao espelho:



a)

$$g_y = g \cdot \cos 30^\circ \text{ e } g_x = g \cdot \cos 60^\circ$$

Para que o objeto atinja o espelho, vamos utilizar a função horária da velocidade do objeto na direção normal ao espelho:

$$v_{2n} = (v_{2n})_{\text{inicial}} - g_y \cdot t$$

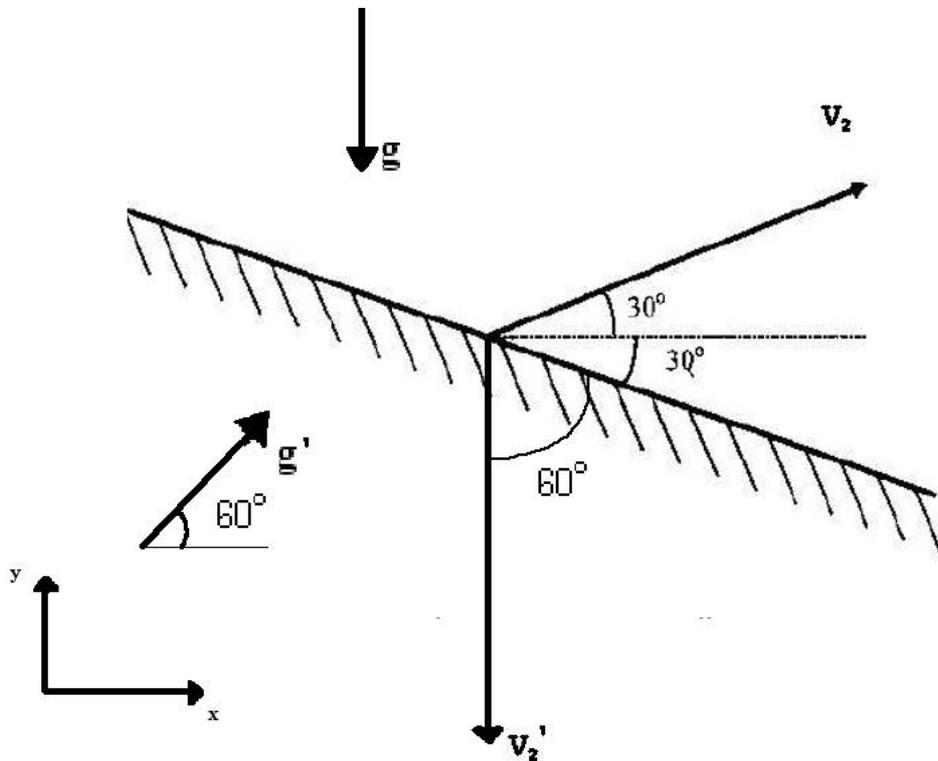
Se analisarmos o lançamento com os eixos normal e tangencial no ponto onde o objeto foi lançado, então para atingir o ponto máximo do lançamento oblíquo o objeto gastará metade do tempo até chegar ao espelho novamente. Então:

$$v_{2n} = 0 \Rightarrow 0 = V_2 \cdot \text{sen } 60^\circ - g \cdot \cos 30^\circ \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{V_2}{g}$$

$$t_{\text{voo}} = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow t_{\text{voo}} = \frac{2V_2}{g}$$

b)





Espelha-se o vetor da gravidade, buscando entender sua influência no movimento da imagem.

Ao espelhar o vetor velocidade  $v_2$ , tem-se um  $v'_2$  tal que ele é totalmente vertical no início (faz  $90^\circ$  com a horizontal) e  $|v'_2| = |v_2|$ .

Desse modo, a velocidade da imagem  $v_i$  em função do tempo é de:

- No eixo  $x$ :

$$v'_{2x}(t) = v'_{2x} + g'_x \cdot t \Rightarrow v'_{2x}(t) = 0 + g \cdot \cos 60^\circ \cdot t \Rightarrow v'_{2x}(t) = \frac{g}{2} \cdot t$$

- No eixo  $y$ :

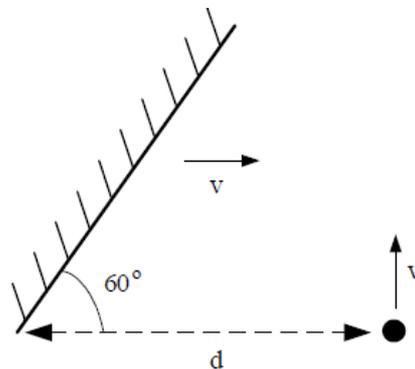
$$v'_{2y}(t) = v'_{2y} + g'_y \cdot t \Rightarrow v'_{2y}(t) = -|v_2| + g \cdot \sin 60^\circ \cdot t \Rightarrow v'_{2y}(t) = -|v_2| + \frac{g\sqrt{3}}{2} \cdot t$$

**Gabarito:** a)  $\frac{2v_2}{g}$  b)  $\frac{g}{2} \cdot t$  e  $-|v_2| + \frac{g\sqrt{3}}{2} \cdot t$

#### 4. (IME – 2003)

Um espelho plano, se superfície infinita, desloca-se na horizontal com velocidade constante  $v$ . Um objeto puntiforme se desloca na vertical também com velocidade constante  $v$  e, no instante  $t = 0$  segundos, as posições do espelho e do objeto estão em conformidade com a figura. Considerando que no instante  $t = \alpha$  ocorre o choque do objeto com o espelho, determine:



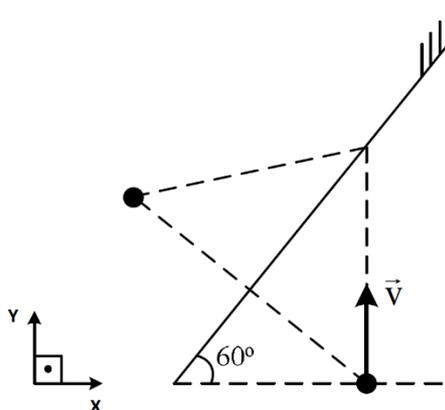


- a) as componentes vertical e horizontal da velocidade da imagem do objeto refletida no espelho.  
b) o instante  $\alpha$  em que o objeto e o espelho se chocam.

**Comentários:**

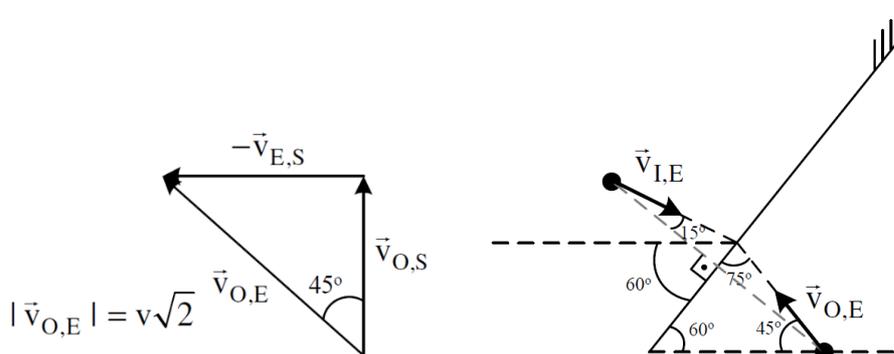
a)

Por simetria é possível construir a imagem:



Temos que  $\vec{v}_{O,S} = \vec{v}_{O,E} + \vec{v}_{E,S}$ , sendo que:

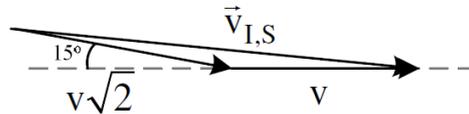
- $\vec{v}_{O,S}$  : velocidade do objeto em relação ao solo.
- $\vec{v}_{O,E}$  : velocidade do objeto em relação ao espelho.
- $\vec{v}_{E,S}$  : velocidade do espelho em relação ao solo.



Seja  $\vec{v}_{I,E}$  : velocidade da imagem em relação ao espelho,  $\vec{v}_{O,E}$  e  $\vec{v}_{I,E}$  são simétricos em relação ao espelho. Assim:



$$\vec{v}_{I,S} = \vec{v}_{I,E} + \vec{v}_{I,S}$$



$$\vec{v}_{I,S} = (v\sqrt{2} \cdot \cos 15^\circ + v)\hat{x} - v\sqrt{2} \cdot \sin 15^\circ\hat{y}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

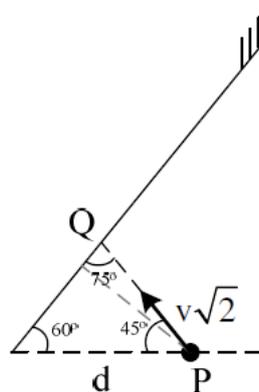
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Obtemos, assim:

$$\vec{v}_{I,S} = (v\sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}))\hat{x} - v\sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4})\hat{y}$$

$$\vec{v}_{I,S} = \frac{v}{2}((3 + \sqrt{3})\hat{x} - (\sqrt{3} - 1)\hat{y})$$

a)



Com  $\vec{v}_{O,E}$  obtido em a) e as condições do problema, temos pela lei dos senos:

$$\frac{\sin 75^\circ}{d} = \frac{\sin 60^\circ}{PQ}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ \text{ e } \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PQ = \frac{d\sqrt{3}}{2 \cos 15^\circ}$$

$$\Delta t = \alpha = \frac{\Delta s}{v} = \frac{PQ}{|\vec{v}_{O,E}|} \Rightarrow \alpha = \frac{d\sqrt{3}}{2v\sqrt{2} \cos 15^\circ} = \frac{d\sqrt{3} \cdot 4}{2v\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$$

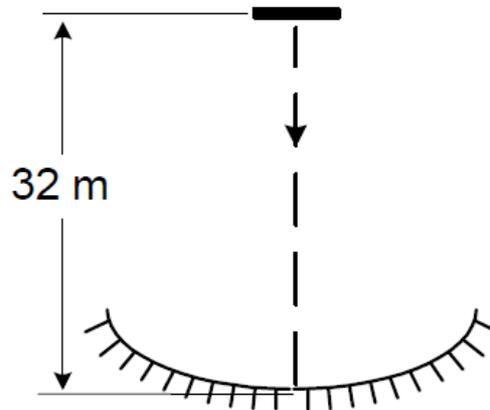
$$\boxed{\alpha = \frac{d}{v} \cdot \frac{(3 - \sqrt{3})}{2}}$$



**Gabarito:** a)  $\vec{v}_{I,S} = \frac{v}{2}((3 + \sqrt{3})\hat{x} - (\sqrt{3} - 1)\hat{y})$  b)  $\frac{d}{v} \cdot \frac{(3-\sqrt{3})}{2}$

**5. (IME – 2008)**

Uma pequena barra metálica é solta no instante  $t = 0$  s do topo de um prédio de 32 m de altura. A aceleração da gravidade local é  $10 \text{ m/s}^2$ . A barra cai na direção de um espelho côncavo colocado no solo, conforme indicado na figura ao lado. Em certo instante, a imagem da barra fica invertida, 30 cm acima da barra e quatro vezes maior que ela. O instante que isso ocorre é, aproximadamente,



- a) 2,1 s
- b) 2,2 s
- c) 2,3 s
- d) 2,4 s
- e) 2,5 s

**Comentários:**

Pela fórmula do aumento, vem:

$$A = \frac{-p'}{p} - 4 = \frac{-(p + 30)}{p} \Rightarrow p = 10 \text{ cm}$$

Usando as equações do movimento, temos:

$$S = S_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow 0,1 = 32 + 0 - 5t^2 \Rightarrow t \cong 2,5 \text{ s}$$

**Gabarito: E**

**6. (IME – 2010)**

A figura mostra o perfil de um par de espelhos planos articulado no ponto O e, inicialmente, na vertical. Ao centro do espelho OB é colocado um pequeno corpo, cuja massa é muito maior que a do espelho. O espelho AO encontra-se fixo e, frente ao mesmo, é colocado um objeto P.

Em um dado instante, é aplicado um impulso no espelho OB, conferindo a extremidade B uma velocidade inicial  $v_0$ , sentido de fechar os espelhos face contra face. Tomando como referência o eixo x, determine:

- a altura máxima atingida pela extremidade B.
- os módulos dos vetores velocidade da extremidade B, para cada instante em que uma imagem adicional do objeto P é formada, até que atinja sua altura máxima.

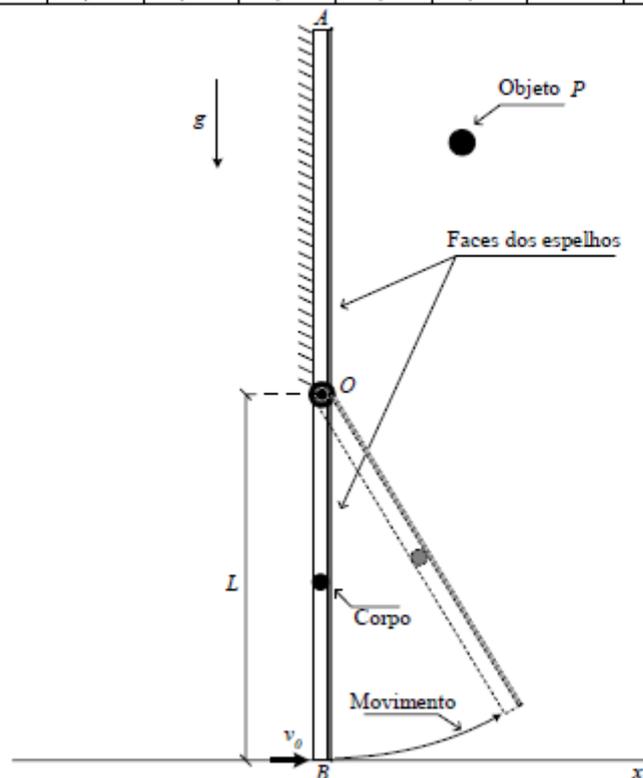
Dados:

$$L = 90 \text{ cm}$$

$$v_0 = 7 \text{ m/s}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

| $\alpha$      | $36^\circ$ | $40^\circ$ | $45^\circ$ | $51,4^\circ$ | $60^\circ$ | $72^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $180^\circ$ |
|---------------|------------|------------|------------|--------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| $\cos \alpha$ | 0,81       | 0,77       | 0,71       | 0,62         | 0,5        | 0,31       | 0          | -0,5        | -1          |



### Comentários:

Para qualquer instante de tempo, o corpo possui metade da velocidade do ponto B. Isso porque possuem o mesmo  $\omega$  e o corpo está na metade da distância até o eixo.

Vamos adotar o referencial no ponto O e escrever as expressões da energia para o corpo no momento inicial e para um ângulo  $\alpha$  :

$$E_i = E_f \Rightarrow -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} m \left( \frac{v_0}{2} \right)^2 = m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} m v_c^2$$



$$\begin{aligned} \therefore v_c &= \sqrt{\frac{v_0^2}{4} - gL(1 + \cos \alpha)} \\ \therefore v_B &= \sqrt{v_0^2 - 4gL(1 + \cos \alpha)} \\ &\Rightarrow v_B = \sqrt{13 - 36 \cos \alpha} \end{aligned}$$

a)

Altura máxima:

$$v_B = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0,36 \Rightarrow h_{\text{máx}} = L(1 + \cos \alpha) = 1,225 \text{ m}$$

b)

O número de imagens é dado por:

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$$

Assim,

$$n = 2 \therefore \alpha = 120^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -0,5 \Rightarrow v_B = \sqrt{13 - 36 \cdot (-0,5)} = \sqrt{31} \text{ m/s}$$

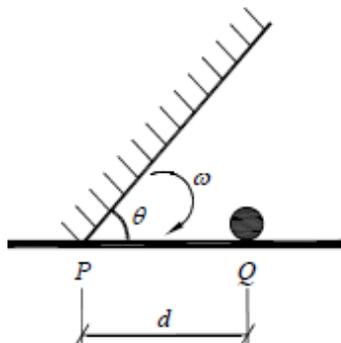
$$n = 3 \therefore \alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{13 - 36 \cdot (0)} = \sqrt{13} \text{ m/s}$$

$$n = 4 \therefore \alpha = 72^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0,31 \Rightarrow v_B = \sqrt{13 - 36 \cdot (0,31)} = \sqrt{1,84} \text{ m/s}$$

**Gabarito: a) 1,225 m b)  $\sqrt{31} \text{ m/s}$ ,  $\sqrt{13} \text{ m/s}$  e  $\sqrt{1,84} \text{ m/s}$**

### 7. (IME – 2012)

Num instante inicial, um espelho começa a girar em uma de suas extremidades, apoiada em P, com aceleração angular constante e valor inicial de  $\theta = \pi/2$ . A trajetória que a imagem do objeto puntiforme parado em Q percorre até que a outra extremidade do espelho atinja o solo é um(a):



- a) semicircunferência
- b) arco de parábola



- c) arco de senóide
- d) arco de espiral
- e) arco de elipse, sem se constituir em uma circunferência

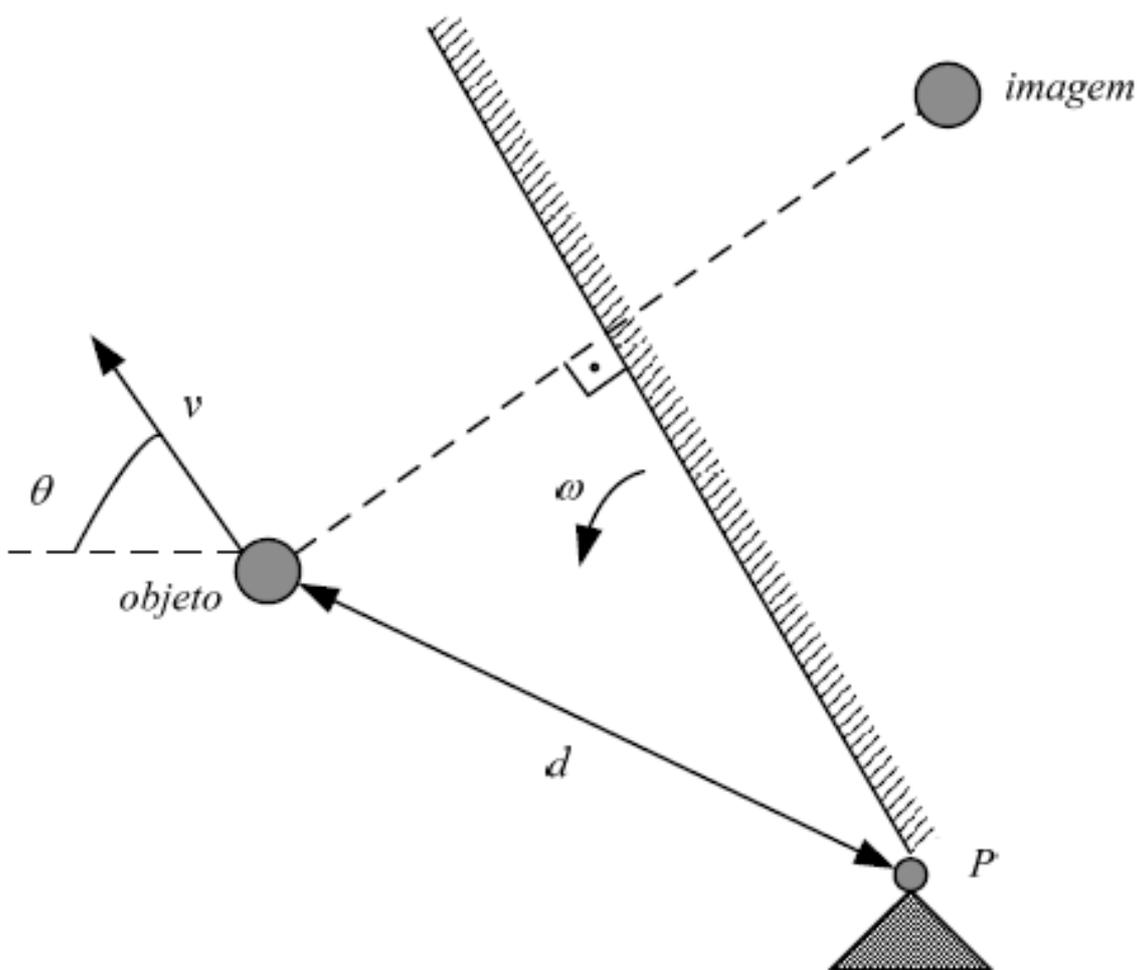
**Comentários:**

A imagem gerada por um espelho plano, é sempre simétrica ao objeto em relação ao plano do espelho. Portanto, a imagem e o objeto estão sempre a mesma distância do espelho e, assim, a imagem está sempre a mesma distância do ponto P para qualquer instante de tempo.

Dessa forma, pela própria definição de circunferência, a trajetória da imagem é uma semicircunferência.

**Gabarito: A**

**8. (IME – 2014)**



Um espelho plano gira na velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um ponto fixo P, enquanto um objeto se move na velocidade  $v$ , de módulo constante, por uma trajetória não retilínea. Em um determinado instante, a uma distância  $d$  do ponto P, o objeto pode tomar um



movimento qualquer, direção e sentido conforme a figura acima, sempre mantendo constante a velocidade escalar  $v$ . A máxima e a mínima velocidade escalar da imagem do objeto gerado pelo espelho são, respectivamente:

- a)  $\omega d + v$  e  $|\omega d - v|$
- b)  $\omega d + v$  e  $\sqrt{(\omega d)^2 + v^2}$
- c)  $\sqrt{(\omega d)^2 + v^2}$  e  $|\omega d - v|$
- d)  $2\omega d + v$  e  $|2\omega d - v|$
- e)  $2\omega d + v$  e  $\sqrt{(2\omega d)^2 + v^2}$

### Comentários:

A velocidade da imagem é influenciada pela velocidade do objeto e pela velocidade do espelho. Tal influência é dada pela equação  $v_i = 2\vec{v}_e - \vec{v}$ .

Assim, para a velocidade máxima, o objeto se aproxima do espelho:

$$v_{\text{máx}} = 2v_e + v$$

Para a velocidade mínima, o objeto se afasta do espelho:

$$v_{\text{mín}} = |2v_e - v|$$

Agora devemos encontrar a velocidade escalar do espelho:

$$v_e = \omega \cdot R$$

Onde  $R$  é a distância de  $P$  à mediatriz da linha que une o objeto e a imagem. Mas para encontrarmos solução, vamos considerar o objeto muito próximo do espelho, de modo que  $d \cong R$

Assim,

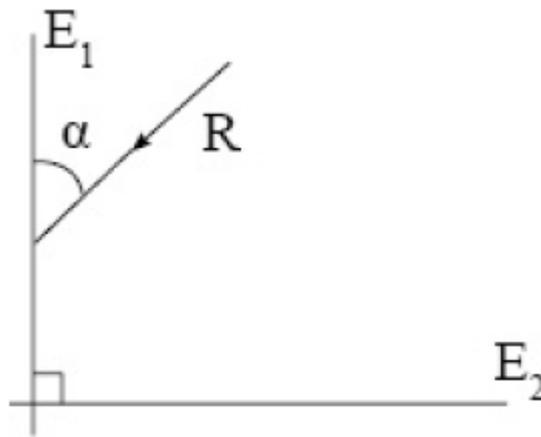
$$v_{\text{máx}} = 2\omega \cdot d + v \text{ e } v_{\text{mín}} = |2\omega \cdot d - v|$$

### Gabarito: D

#### 9. (ITA - 1971)

Considere o desenho, em que  $E_1$  e  $E_2$  são dois espelhos planos em ângulo reto cortados por um plano perpendicular que contém o raio luminoso  $R$ , incidente em  $E_1$  e  $R'$  emergente de  $E_2$  (não mostrado). Para  $0 < \alpha < \pi/2$  podemos afirmar que:

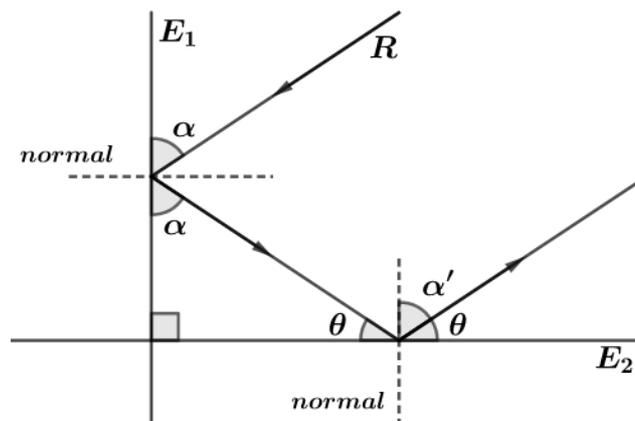




- a) R' poderá ser paralelo a R dependendo de  $\alpha$
- b) R' é paralelo a R qualquer que seja  $\alpha$
- c) R' nunca é paralelo a R
- d) R' só será paralelo a R se o sistema estiver no vácuo
- e) R' será paralelo a R qualquer que seja o ângulo entre os espelhos.

**Comentários:**

Sabemos que o ângulo refletido é igual ao ângulo de incidência. Além disso, temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Assim podemos encontrar os ângulos da figura:



$$\alpha + \theta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$$

E:

$$\alpha' + \theta = 90^\circ$$

Assim:

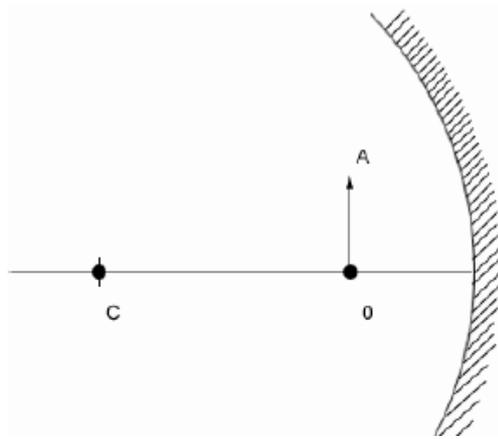
$$\alpha' = \alpha$$

Portanto, R' é paralelo a R, qualquer que seja  $\alpha$ .

**Gabarito: B**

### 10. (ITA – 1980)

Determinar graficamente a imagem de um objeto AO colocado diante de um espelho côncavo, esférico, de raio R. A distância do centro de curvatura C ao objeto é igual a  $2R/3$ . A imagem é:



- a) virtual, direta e menor que o objeto.
- b) real, invertida e maior que o objeto.
- c) real, invertida e menor que o objeto.
- d) real, direta e maior que o objeto.
- e) virtual, direta e maior que o objeto.

#### Comentários:

Podemos usar a Equação de Gauss, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Como o espelho é côncavo de raio R, temos que  $f = \frac{R}{2}$ . Substituindo  $p = \frac{R}{3}$ , temos:

$$\frac{2}{R} = \frac{3}{R} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = -R$$

O que nos leva a concluir que a imagem é virtual. Pela fórmula do aumento, vem:

$$A = \frac{-p'}{p} = 3$$

Portanto, a imagem é virtual, direita e maior.

#### Gabarito: E

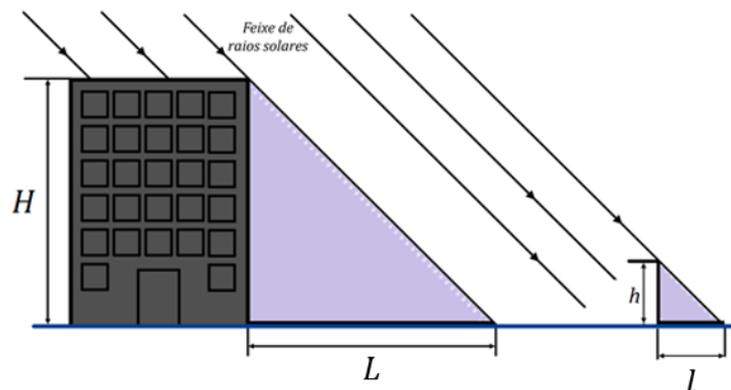
### 11. (ITA - 1991)

Um edifício iluminado pelos raios solares, projeta uma sombra de comprimento  $L = 72,0 \text{ m}$ . Simultaneamente, uma vara vertical de  $2,50 \text{ m}$  de altura, colocada ao lado do edifício projeta uma sombra de comprimento  $l = 3,00 \text{ m}$ . Qual é a altura do edifício?



### Comentários:

Os triângulos formados são semelhantes, já que a inclinação dos raios solares é igual para o edifício e para a vara. Assim:



$$\frac{H_{\text{edifício}}}{L} = \frac{h_{\text{vara}}}{l} \Rightarrow H_{\text{edifício}} = 60 \text{ m}$$

**Gabarito: 60 m**

### 12. (ITA - 1991)

Seja E um espelho côncavo cujo raio de curvatura é 60,0 cm. Qual tipo de imagem obteremos se colocarmos um objeto real de 7,50 cm de altura, verticalmente, a 20,0 cm do vértice de E?

- a) virtual e reduzida a 1/3 do tamanho do objeto.
- b) real e colocada a 60,0 cm da frente do espelho.
- c) virtual e três vezes mais alta que o objeto.
- d) real, invertida e de tamanho igual ao do objeto.
- e) nenhuma das anteriores.

### Comentários:

Aplicando a equação dos espelhos conjugados de Gauss para um espelho é côncavo de raio 60 cm, ou seja,  $f = 30 \text{ cm}$ , com  $p = 20 \text{ cm}$ , temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{20} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = -60 \text{ cm}$$

O que nos leva a concluir que a imagem é virtual. Pela fórmula do Aumento, vem:

$$A = \frac{-p'}{p} = 3$$

Portanto, a imagem é virtual e três vezes mais alta que o objeto.

**Gabarito: C**



### 13. (ITA - 1992)

Um jovem estudante para fazer a barba mais eficientemente, resolve comprar um espelho esférico que aumenta duas vezes a imagem do seu rosto quando ele se coloca a 50 cm dele. Que tipo de espelho ele deve usar e qual o raio de curvatura?

- a) Convexo com  $r = 50$  cm.
- b) Côncavo com  $r = 200$  cm.
- c) Côncavo com  $r = 33,3$  cm.
- d) Convexo com  $r = 67$  cm.
- e) Um espelho diferente dos mencionados.

#### Comentários:

Pela fórmula do Aumento, temos:

$$A = \frac{f}{f - p} \Rightarrow 2 = \frac{f}{f - 50} \Rightarrow f = 100 \text{ cm}$$

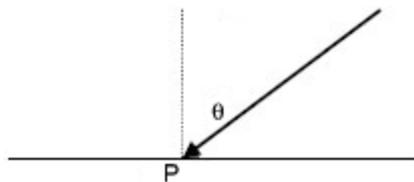
Como  $f > 0$ , o espelho deve ser côncavo e com  $r = 2f = 200$  cm .

#### Gabarito: B

---

### 14. (ITA - 1993)

Um raio luminoso incide com um ângulo em relação à normal, sobre um espelho refletor. Se esse espelho girar de um ângulo igual a  $\theta$  em torno de um eixo que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular ao plano da figura, qual o ângulo de rotação do raio refletido?

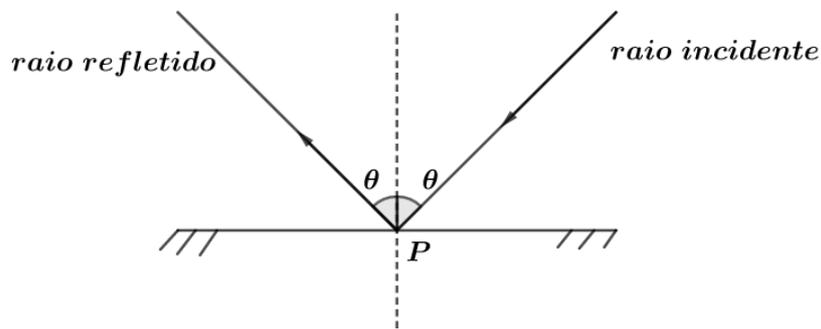


#### Comentários:

Inicialmente, temos a seguinte situação:

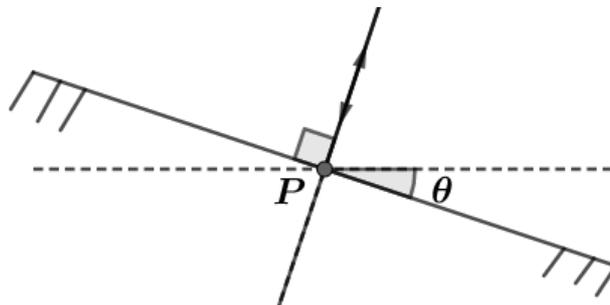
Analisaremos o que ocorre com o raio refletido ao se rotacionar o espelho plano. Veja a figura a seguir:



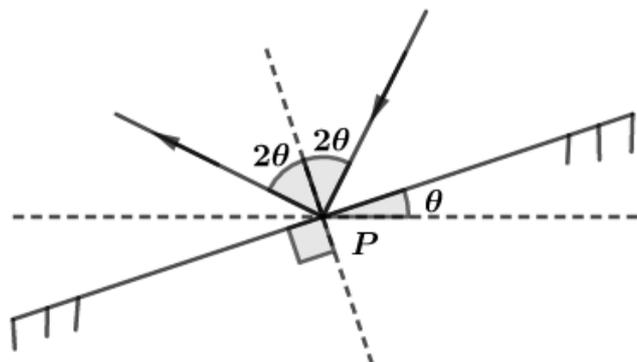


Note que pela segunda lei da reflexão, o ângulo entre o raio incidente e o raio refletido é de  $2\theta$ . Como não foi mencionado o sentido de rotação do espelho, vamos dividir em duas possibilidades:

1) O espelho rotaciona de  $\theta$  no sentido horário:



2) O espelho rotaciona de  $\theta$  no sentido anti-horário:



O ângulo compreendido entre o raio incidente e o raio refletido é de  $4\theta$ .

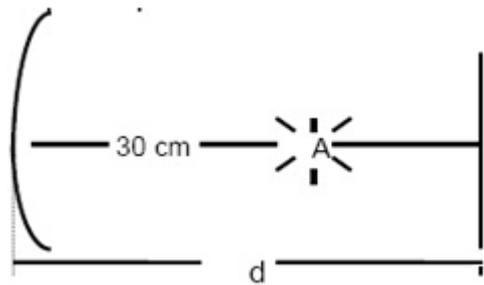
Observe que nos dois casos o ângulo compreendido entre o raio incidente e o raio refletido sofre uma variação de  $2\theta$ .

**Gabarito:  $2\theta$**

### 15. (ITA - 1997)

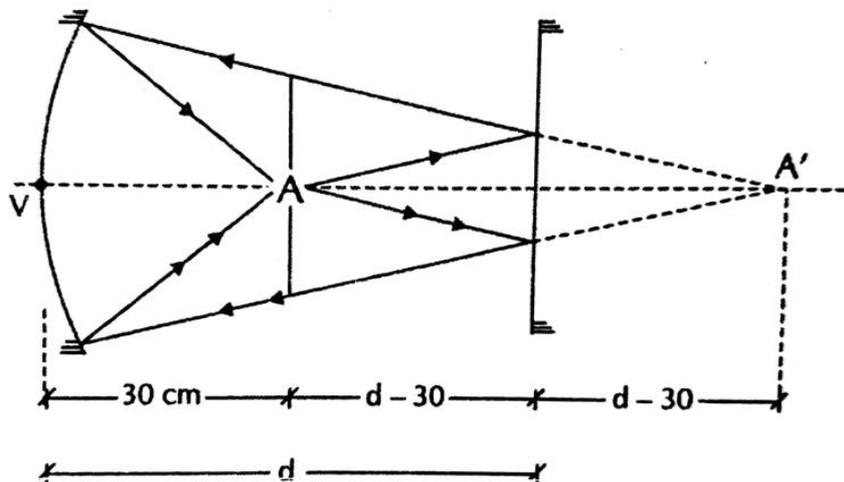
Um espelho plano está colocado em frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa A, centrada no eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente sobre os dois espelhos e formam sobre a própria fonte A, uma imagem real da mesma. O raio de curvatura do espelho é 40 cm e a distância do centro da fonte A até o centro do espelho esférico é de 30 cm. A distância d do espelho plano até o centro do espelho côncavo é, então:





- a) 20 cm
- b) 30 cm
- c) 40 cm
- d) 45 cm
- e) 50 cm

**Comentários:**



O objeto está inicialmente a uma distância  $d - 30$  do espelho plano. A sua primeira imagem, formada pelo espelho plano, está, portanto, a uma distância  $2d - 30$  do espelho esférico. Sabemos disso porque a imagem de um espelho plano é sempre simétrica.

Sabemos ainda que  $f = \frac{r}{2} = 20 \text{ cm}$  e que a imagem final se forma em cima do objeto. Então,  $p' = 30 \text{ cm}$ .

Assim, podemos escrever que:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2d - 30} + \frac{1}{30} \Rightarrow d = 45 \text{ cm}$$

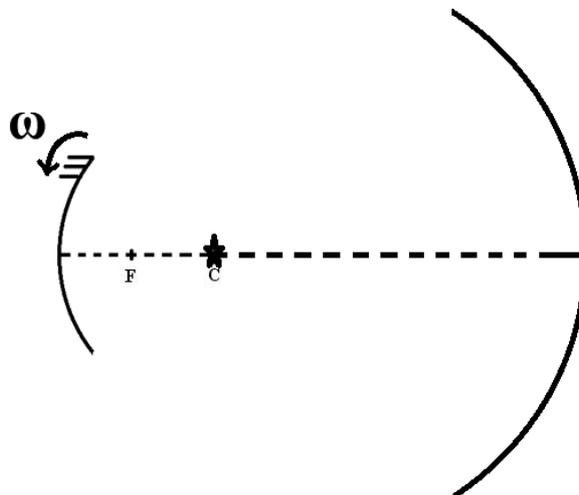
**Gabarito: D**

**16. (ITA - 1999)**

Um excitador pulsado que gera faíscas as uma frequência de 106 Hz está localizado no centro de curvatura C de um espelho côncavo de 1 m de raio de curvatura. Considere que o tempo de duração de cada faísca seja desprezível em relação ao intervalo de tempo entre duas consecutivas. A 2m do centro de curvatura do espelho está situada um anteparo normal aos raios refletidos. O espelho gira em torno de C com uma frequência de 500 rotações por segundo, formando faixas luminosas equidistantes no anteparo. O comprimento do intervalo entre duas faixas luminosas formadas pelos raios refletidos no anteparo é de, aproximadamente:

- a) 3,1 mm
- b) 6,3 mm
- c) 12,6 m
- d) 1 m
- e) 9,4 mm

**Comentários:**



$$\omega_{\text{espelho}} = 500 \text{ rps} = 1000\pi \text{ rad/s}$$
$$f_{\text{faíscas}} = 10^6 \text{ Hz}$$

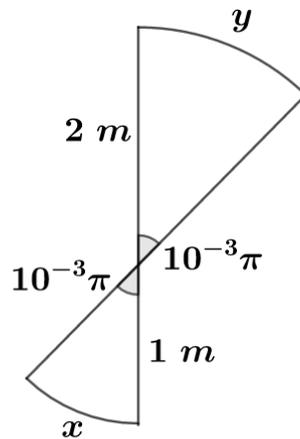
Tempo entre duas faíscas consecutivas:

$$T = \frac{1}{f_{\text{faíscas}}} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6} \text{ s}$$

Calculando o ângulo que o espelho rotaciona num período  $T$ , temos:

$$\theta = \omega_{\text{espelho}} \cdot T = 10^{-3}\pi \text{ rad}$$





A rotação do espelho num período  $T$ , então, leva à formação de faixas luminosas cujo espaçamento é  $y$ . Pela definição de radiano como  $\frac{\text{arco}}{\text{raio}}$ , vem:

$$\theta = 10^{-3}\pi = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot 10^{-3}\pi \cong 6,3\text{ mm}$$

**Gabarito: B**

### 17. (ITA - 2001)

Considere as seguintes afirmações:

- I) Se um espelho plano transladar de uma distância  $d$  ao longo da direção perpendicular a seu plano, a imagem real de um objeto fixo transladará  $2d$ .
- II) Se um espelho plano girar de um ângulo  $\alpha$  em torno de um eixo perpendicular à direção de incidência da luz, o raio refletido girará de um ângulo  $2\alpha$ .
- III) Para que uma pessoa de altura  $h$  possa observar seu corpo inteiro em um espelho plano, a altura deste deve ser de no mínimo  $2h/3$ .

Então podemos dizer que:

- a) apenas I e II são verdadeiras
- b) apenas I e III são verdadeiras
- c) apenas II e III são verdadeiras
- d) todas são verdadeiras
- e) todas são falsas

### Comentários:

- I) **INCORRETA.** Não foi definido em qual referencial foi feita a translação da imagem.
- II) **INCORRETA.** Não existe um único eixo fixo perpendicular à direção de incidência da luz.
- III) **INCORRETA.** Não foi definido o plano que contém o espelho.



**Gabarito: E**

---

**18. (ITA - 2001)**

Um objeto linear de altura  $h$  está assentado perpendicularmente no eixo principal de um espelho esférico, a 15 cm de seu vértice. A imagem produzida é direita e tem altura de  $h/5$ . Este espelho é:

- a) côncavo, de raio 15 cm
- b) côncavo, de raio 7,5 cm
- c) convexo, de raio 7,5 cm
- d) convexo, de raio 15 cm
- e) convexo, de raio 10 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, temos:

$$A = \frac{f}{f - p} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{f}{f - 15} \Rightarrow f = -\frac{15}{4} \text{ cm}$$

Como  $f < 0$ , temos que o espelho deve ser convexo e com  $r = 2|f| = 7,5 \text{ cm}$ .

**Gabarito: C**

---

**19. (ITA 2004)**

Ao olhar-se num espelho plano, retangular, fixado no plano de uma parede vertical, um homem observa a imagem de sua face tangenciando as quatro bordas do espelho, isto é, a imagem de sua face encontra-se ajustada ao tamanho do espelho. A seguir, o homem afasta-se, perpendicularmente à parede, numa certa velocidade em relação ao espelho, continuando a observar sua imagem. Nestas condições, pode-se afirmar que essa imagem:

- a) torna-se menor que o tamanho do espelho tal como visto pelo homem.
- b) torna-se maior que o tamanho do espelho tal como visto pelo homem.
- c) continua ajustada ao tamanho do espelho tal como visto pelo homem.
- d) desloca-se com o dobro da velocidade do homem.
- e) desloca-se com metade da velocidade do homem.

**Comentários:**



O tamanho da imagem num espelho plano não sofre influência da distância do objeto até o espelho. Por isso, permanece inalterada. Além disso, a velocidade da imagem seria, em módulo, igual a velocidade do objeto.

**Gabarito: C**

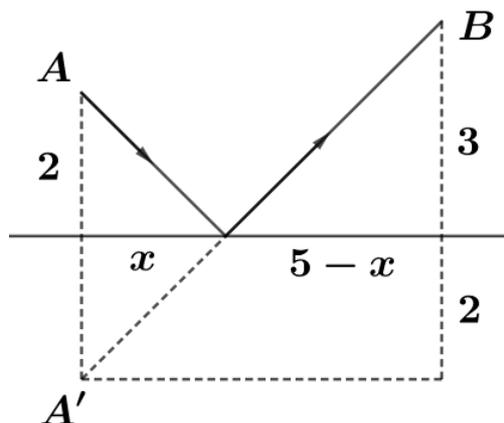
**20. (ITA – 2007)**

Um raio de luz de uma lanterna acesa em A ilumina o ponto B, ao ser refletido por um espelho horizontal sobre a semirreta DE da figura, estando todos os pontos num mesmo plano vertical. Determine a distância entre a imagem virtual da lanterna A e o ponto B. Considere  $AD = 2\text{ m}$ ,  $BE = 3\text{ m}$  e  $DE = 5\text{ m}$ .



**Comentários:**

Usando que a imagem da lanterna é simétrica em relação ao plano do espelho. Temos:



Assim, pelo Teorema de Pitágoras,  $\overline{A'B} = 5\sqrt{2}\text{ m}$ .

**Gabarito:  $5\sqrt{2}\text{ m}$**

**21. (ITA - 2009)**

Um espelho esférico convexo reflete uma imagem equivalente a  $3/4$  da altura de um objeto dele situado a uma distância  $p_1$ . Então, para que essa imagem seja refletida com apenas  $1/4$  da sua altura, o objeto deverá se situar a uma distância  $p_2$  do espelho, dada por:

a)  $p_2 = 9p_1$ .

- b)  $p_2 = 9p_1/4$ .
- c)  $p_2 = 9p_1/7$ .
- d)  $p_2 = 15p_1/7$ .
- e)  $p_2 = -15p_1/7$ .

**Comentários:**

De acordo com a equação do aumento linear, temos:

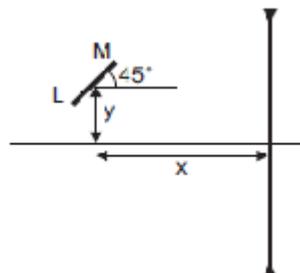
$$\frac{3}{4} = \frac{f}{f - p_1} \quad e \quad \frac{1}{4} = \frac{f}{f - p_2}$$

Com  $f < 0$ , já que é um espelho convexo. Portanto, encontramos  $p_2 = 9p_1$ .

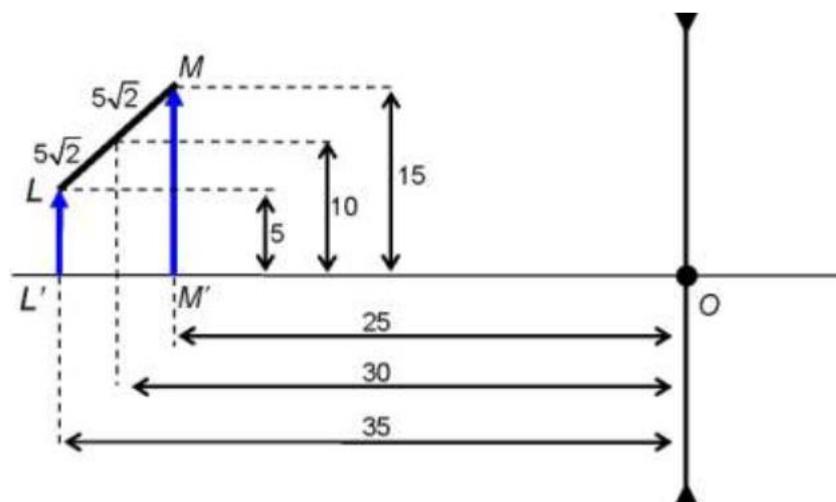
**Gabarito: A**

**22. (ITA-2010)**

A figura mostra uma barra  $LM$  de  $10\sqrt{2}$  cm de comprimento, formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal, tendo o seu centro situado a  $x = 30,0$  cm de uma lente divergente, com distância focal igual a  $20,0$  cm, e a  $y = 10,0$  cm acima do eixo óptico da mesma. Determine o comprimento da  $x$  imagem da barra e faça um desenho esquemático para mostrar a orientação da imagem.



**Comentários:**



Como a lente é divergente,  $f = -20 \text{ cm}$ . Das equações dos pontos conjugados e do aumento linear, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \text{ e } \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

Para  $L'L$ :

$$o = 5 \text{ cm e } p = 35 \text{ cm}$$

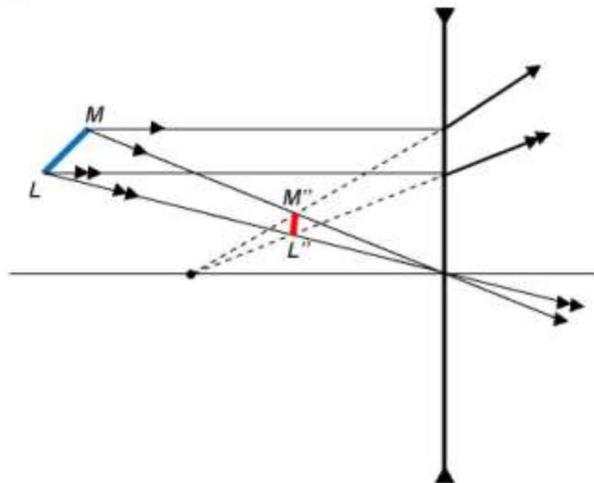
$$\therefore p' = \frac{35 \cdot (-20)}{35 - (-20)} = -\frac{140}{11} \text{ e } i = -\left(-\frac{140}{11}\right) \cdot \frac{5}{35} = \frac{20}{11}$$

Para  $M'M$ :

$$o = 15 \text{ cm e } p = 25 \text{ cm}$$

$$\therefore p' = \frac{25 \cdot (-20)}{25 - (-20)} = -\frac{100}{9} \text{ e } i = -\left(-\frac{100}{9}\right) \cdot \frac{15}{25} = \frac{20}{3}$$

Então é possível construir a imagem:



Com os dados obtidos, é possível calcular o tamanho de  $M''L''$ :

$$M''L'' = \sqrt{(i_l - i_m)^2 + (p'_l - p'_m)^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{11} - \frac{20}{3}\right)^2 + \left(-\frac{140}{11} + \frac{100}{9}\right)^2}$$

$$M''L'' = \frac{160}{99} \sqrt{10} \text{ cm} \cong 5,1 \text{ cm}$$

**Gabarito:  $L'M' \cong 5,1 \text{ cm}$**

### 23. (ITA – 2019)

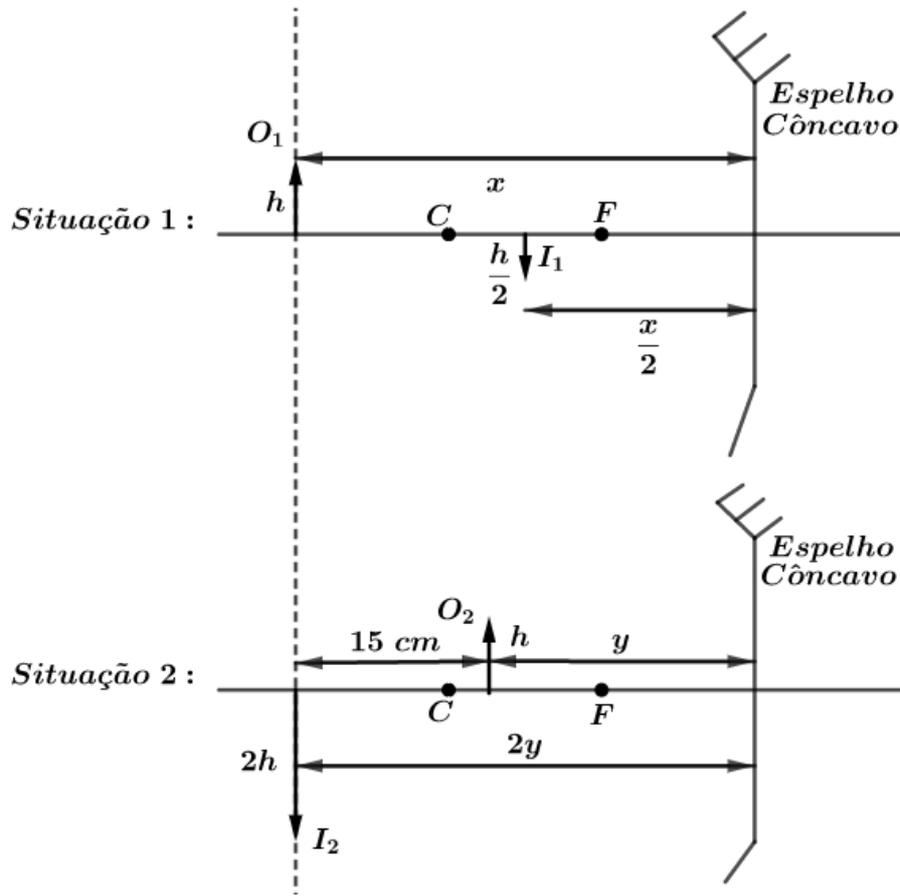
A imagem de um objeto formada por um espelho côncavo mede metade do tamanho do objeto. Se este é deslocado de uma distância de 15 cm em direção ao espelho, o tamanho da imagem terá o dobro do tamanho do objeto. Estime a distância focal do espelho e assinale a alternativa correspondente.

- a) 40 cm      b) 30 cm      c) 20 cm      d) 10 cm      e) 5 cm



**Comentários:**

Diante das duas situações propostas pelo enunciado, temos a seguinte configuração:



Dessa forma, vamos escrever a equação dos pontos conjugados de Gauss para cada uma das situações:

- Situação 1:

$$A = -\frac{p'}{p} = -\frac{1}{2} \Rightarrow p' = p/2$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x/2} \Rightarrow \boxed{x = 3f}$$

- Situação 2:

$$A = -\frac{p'}{p} = -2 \Rightarrow p' = 2p$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}f}$$

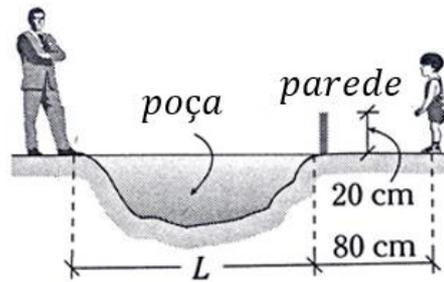
Quando o objeto é deslocado, temos a seguinte condição:

$$x = 15 + y \Rightarrow 3f = 15 + \frac{3}{2}f \Rightarrow \boxed{f = 10 \text{ cm}}$$

**Gabarito: D**

24.

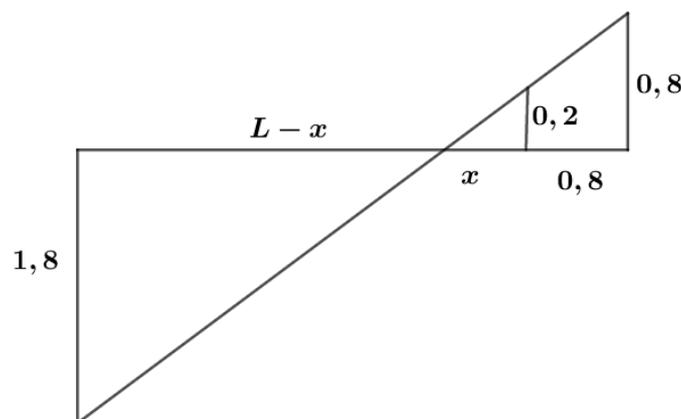
Uma criança cujos olhos se encontram a 80 cm do chão vê totalmente a imagem de uma pessoa de 1,8 m de altura que está no outro extremo de uma poça de água (charco). Se a poça reflete nitidamente a imagem da pessoa, determine o mínimo valor de  $L$ .



- a) 1,5 m
- b) 1,8 m
- c) 2,0 m
- d) 2,2 m
- e) 2,5 m

**Comentários:**

Consideramos que a poça atua como um espelho plano. Na condição de  $L$  mínimo, para que a criança consiga ver totalmente a imagem da pessoa, temos a seguinte configuração:



Assim, temos da geometria:

$$\frac{0,2}{0,8} = \frac{x}{0,8 + x} \Rightarrow x = \frac{0,8}{3}$$

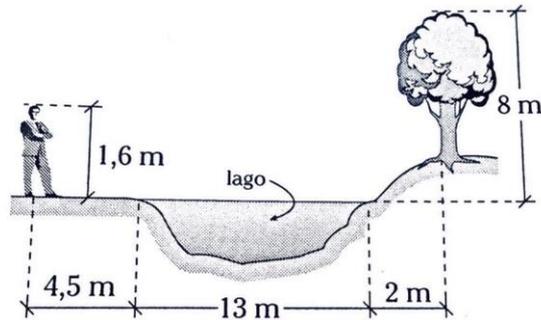
Usando a tangente dos ângulos opostos pelo vértice,

$$\frac{1,8}{L + x} = \frac{0,8}{x + 0,8} \Rightarrow L = 2,66 \text{ m}$$

**Gabarito: E**

25.

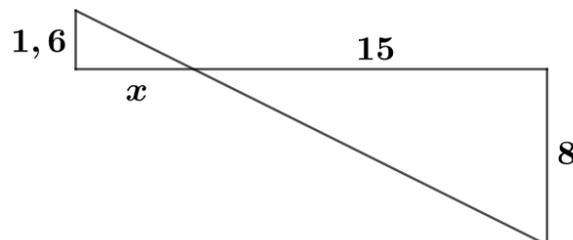
Determine a distância necessária que deve caminhar um jovem para pode observar a copa da árvore refletida em um pequeno lago (considere o lago como um espelho plano).



- a) 1,0 m
- b) 1,2 m
- c) 1,3 m
- d) 1,5 m
- e) 1,6 m

**Comentários:**

Considerando que o lago atua como um espelho plano e sabendo que a imagem formada é simétrica ao objeto em relação ao plano do espelho. Temos, quando o jovem começa a ver a copa da árvore, a seguinte configuração:



Assim, pela geometria, temos:

$$\frac{1,6}{x} = \frac{8}{15} \Rightarrow x = 3$$

Portanto, o jovem andou 1,5 m.

**Gabarito: D**

26.

A imagem de um edifício é vista completamente em um espelho plano de 50 cm de altura quando afastamos (apenas horizontalmente) este espelho 30 cm dos olhos. Se o edifício de encontra a 9 m do espelho, determine a altura do edifício.

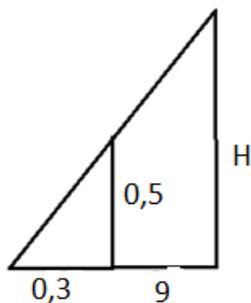
- a) 13,5 m



- b) 12,5 m
- c) 16,5 m
- d) 15,5 m
- e) 14,5 m

**Comentários:**

Temos a seguinte configuração dos raios notáveis (proporções da figura não foram preservadas):



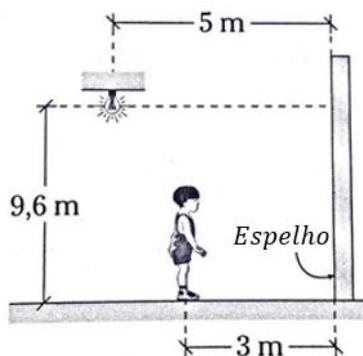
Assim, usando a semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{0,5}{0,3} = \frac{H}{9,3} \Rightarrow H = 15,5 \text{ m}$$

**Gabarito: D**

**27.**

A criança abaixo se encontra a 3 m do espelho. Determine sua altura se ele observa a lâmpada com um ângulo de elevação.

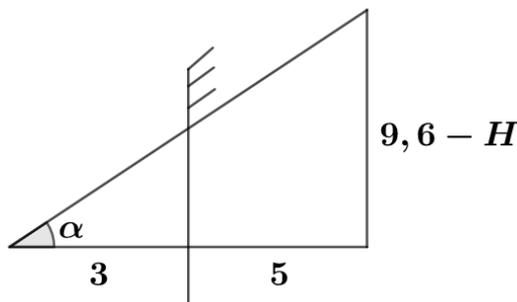


- a) 1 m
- b) 1,6 m
- c) 2,0 m
- d) 1,5 m
- e) 1,7 m



**Comentários:**

O exercício tal como está escrito é indeterminado. Para chegarmos na solução, devemos considerar o ângulo de elevação como sendo  $45^\circ$ . Assim, temos a seguinte configuração dos raios luminosos:



Com  $\alpha = 45^\circ$ . Assim, temos a relação:

$$\frac{9,6 - H}{8} = \operatorname{tg}45^\circ = 1 \Rightarrow H = 1,6 \text{ m}$$

**Gabarito: B**

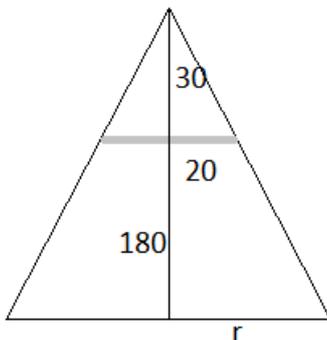
**28.**

Um espelho plano circular de 40 cm de diâmetro é colocado sobre uma mesa. A 30 cm acima do espelho e sobre seu eixo se encontra uma fonte luminosa. Determine o diâmetro da superfície iluminada no teto, situado a 1,8 m da mesa.

- a) 0,7 m    b) 1,4 m    c) 2,8 m  
d) 5,6 m    e) 8,5 m

**Comentários:**

A configuração dos raios notáveis é esquematizada logo abaixo:



$$\frac{20}{r} = \frac{30}{210} \Rightarrow r = 140 \text{ cm}$$

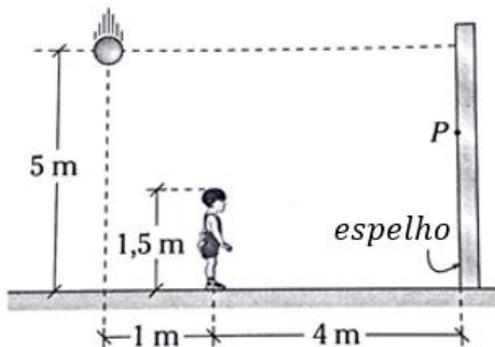
Assim o diâmetro da superfície iluminada no teto é de 2,8 m.



**Gabarito: C**

29.

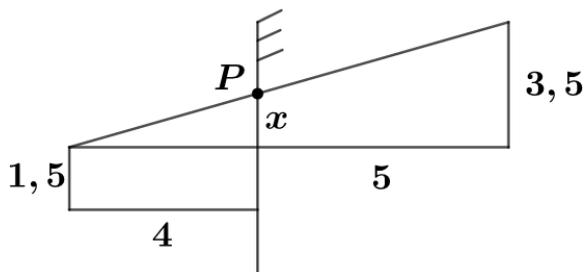
Determine a que distância do solo se encontra o ponto do espelho que o olho do menino utiliza para ver a imagem da bolinha em queda livre.



- a) 3,05 m
- b) 2,05 m
- c) 2,06 m
- d) 3,04 m
- e) 3,25 m

**Comentários:**

Sabemos que a imagem gerada pelo espelho plano é simétrica em relação ao plano do espelho. Assim:



Pela geometria:

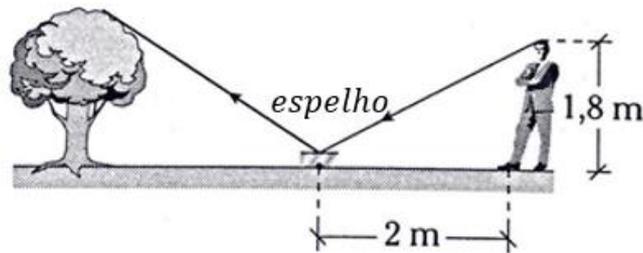
$$\frac{x}{3,5} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 1,55 \text{ m}$$

Assim a altura do ponto P é 3,05 m.

**Gabarito: A**

30.

Um espelho plano se encontra localizado horizontalmente. O observador consegue ver a ponta da árvore através do espelho, que dista 30 m da árvore. Determine a altura da árvore.



- a) 25 m
- b) 27 m
- c) 30 m
- d) 32,5 m
- e) 28,5 m

**Comentários:**

Sabemos que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Dessa forma, podemos usar a tangente desse ângulo para escrever:

$$\frac{H}{30} = \frac{1,8}{2} \Rightarrow H = 27 \text{ m}$$

**Gabarito: B**

31.

Um homem de 1,60 m de altura tem seus olhos à 10 cm abaixo do limite de sua cabeça. Se ele se encontra a 120 cm de um espelho plano, a que altura deverá estar localizado o espelho (80 cm de comprimento) para que ele veja sua imagem por completo?



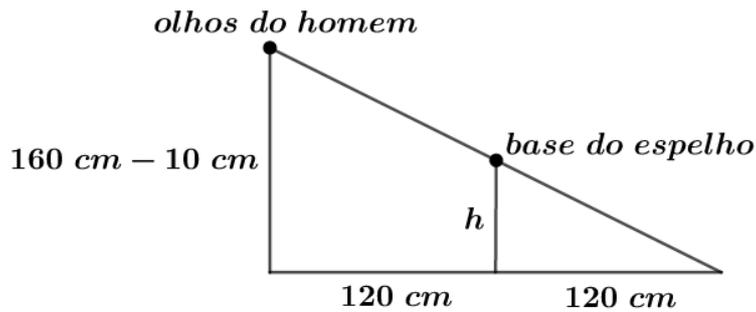
- a) 1 m
- b) 1,2 m
- c) 1,4 m



- d) 1,5 m
- e) 1,55 m

**Comentários:**

Usando a simetria da imagem gerada pelo espelho plano, temos a seguinte configuração dos raios luminosos:



Pela geometria, temos:

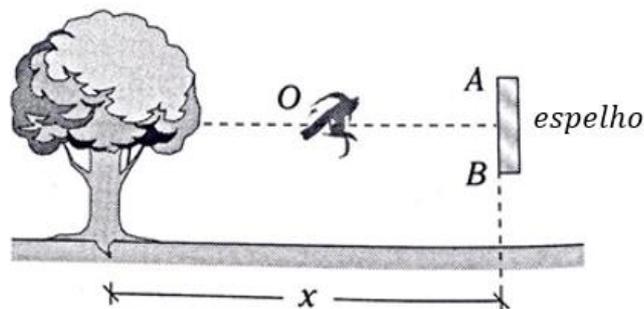
$$\frac{160 - 10}{120 + 120} = \frac{h}{120} \Rightarrow \boxed{h = 75 \text{ cm}}$$

Assim, a base do espelho deve estar a 75 cm de altura, portanto o topo do espelho deve estar a  $75 + 80 = 155 \text{ cm}$  do solo.

**Gabarito: E**

**32.**

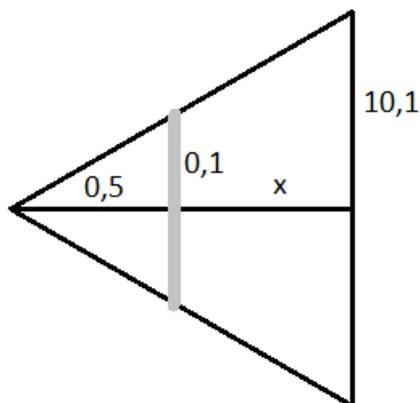
O observa O se encontra a 0,5 m do espelho AB de 0,2 m. Determine a que distância x deve-se encontrar a árvore de 20,2 m de altura, para o jovem observe a imagem completa da árvore.



- a) 25 m
- b) 50 m
- c) 75 m
- d) 80 m
- e) 100 m

**Comentários:**

Usando a simetria da imagem gerada pelo espelho plano, temos a seguinte configuração dos raios luminosos:



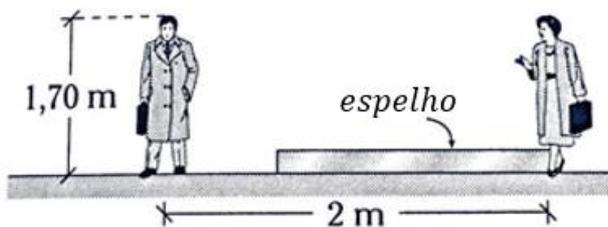
Pela geometria, temos:

$$\frac{0,1}{10,1} = \frac{0,5}{0,5 + x} \Rightarrow x = 50 \text{ m}$$

**Gabarito: B**

**33.**

Dois pessoas de mesma altura estão distanciadas a uma distância de 2 m. Qual deve ser o tamanho do espelho para que uma delas possa ver completamente a imagem da outra?

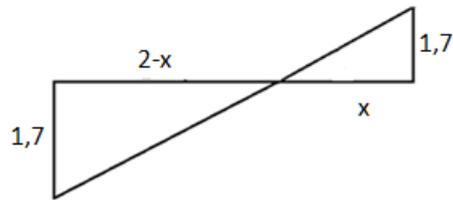


- a) 85 cm
- b) 2 m
- c) 1 m
- d) 1,5 m
- e) 1,7 m

**Comentários:**

Temos a seguinte configuração dos raios luminosos:



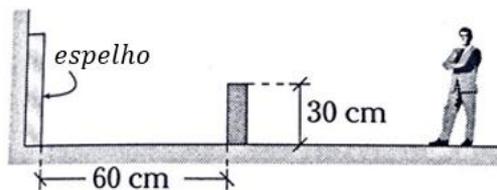


Assim, pela geometria e simetria do problema, temos  $x = 1 \text{ m}$ .

**Gabarito: C**

**34.**

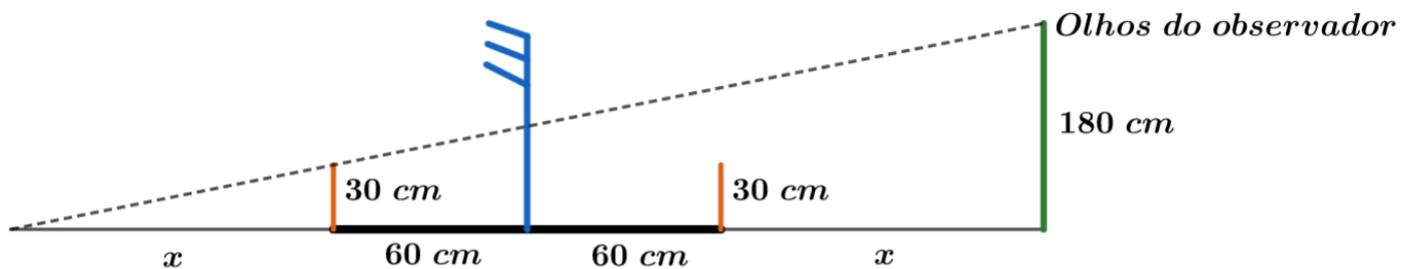
Uma pessoa de 1,8 m de altura está afastada de um espelho grudado na parede. A que distância pode-se afastar do muro para que continue vendo completamente sua imagem.



- a) 2 m
- b) 1 m
- c) 0,3 m
- d) 1,2 m
- e) 2,4 m

**Comentários:**

Temos, para a distância de afastamento máxima, a seguinte configuração dos raios luminosos:



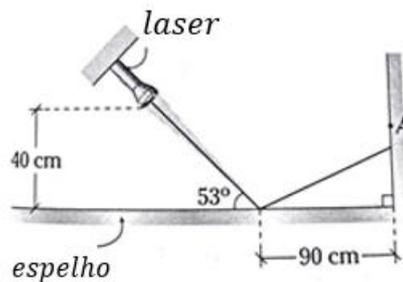
Assim:

$$\frac{x}{120 + 2x} = \frac{30}{180} \Rightarrow 6x = 120 + 2x \Rightarrow x = 30 \text{ cm}$$

**Gabarito: C**

35.

Um laser gira no sentido anti-horário rodando com uma velocidade angular constante. Determine quanto avança o ponto de incidência A sobre a parede em 2 s ( $\omega = \pi/45$  rad/s).



- a) 80 cm
- b) 40 cm
- c) 30 cm
- d) 25 cm
- e) 20 cm

**Comentários:**

Inicialmente, a altura do ponto A é dada por  $\text{tg } 53^\circ = \frac{h_A}{90}$ . Assim:

$$h_A = 120 \text{ cm}$$

E a distância horizontal entre o laser e o ponto onde ocorre a reflexão é dada por:

$$\text{tg } 53^\circ = \frac{40}{d} \Rightarrow d = 30 \text{ cm}$$

Depois de 2s, a distância horizontal entre o laser e o ponto onde ocorre a reflexão é dada por:

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{40}{d'} \Rightarrow d' = 40 \text{ cm}$$

Assim, a altura do ponto A é dada por  $\text{tg } 45^\circ = \frac{h_{A'}}{80}$ .

$$h_{A'} = 80 \text{ cm}$$

Portanto, A avançou 40 cm.

**Gabarito: B**

36.

Um caminhão que se move com velocidade constante possui instalado em sua traseira um espelho plano. Determine a velocidade com qual se move a imagem do jovem, considere que a pessoa realize um MRU.





- a)  $\sqrt{95}$  m/s
- b)  $\sqrt{105}$  m/s
- c) 5 m/s
- d)  $\sqrt{97}$  m/s
- e) 7 m/s

**Comentários:**

A velocidade da imagem é dada pela seguinte expressão:

$$v_{i,x} = 2v_e - v_{o,x}$$

Note, que só a velocidade do objeto perpendicular ao eixo do espelho influencia a velocidade da imagem. Por isso, devemos decompor a velocidade do ciclista:

$$v_{o,x} = v_o \cdot \cos 53^\circ = 3 \text{ m/s} \Rightarrow v_{i,x} = 12 - 3 = 9 \text{ m/s}$$

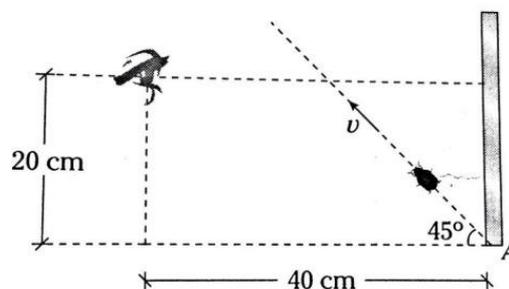
Já no eixo Y,  $v_{i,y} = v_{o,y} = v_o \cdot \text{sen}53^\circ = 4 \text{ m/s}$ . Assim:

$$v_i = \sqrt{v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2} = \sqrt{97} \text{ m/s}$$

**Gabarito: D**

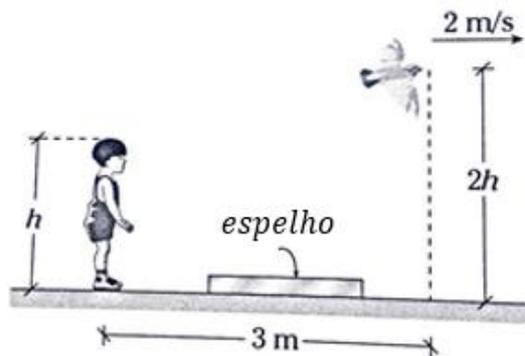
**37.**

Determine o tempo que um observador vê, através do espelho, a imagem de uma aranha que realiza MRU, a partir de A. Dado:  $l_{\text{espelho}} = 40 \text{ cm}$ ;  $v = 8\sqrt{2} \text{ cm/s}$



- a) 6 s
- b) 8 s
- c) 10 s

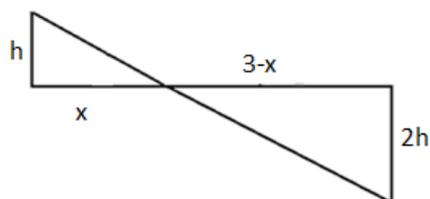




- a) 1 m
- b) 2 m
- c) 3 m
- d) 4 m
- e) 5 m

**Comentários:**

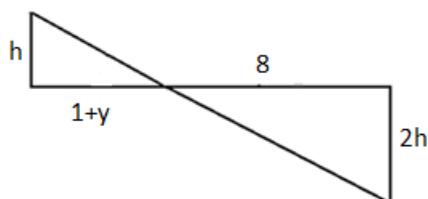
No momento inicial, temos:



Assim, podemos descobrir a posição do espelho, que é fixa. Então:

$$x = 1$$

Depois de 3 segundos, temos:



Pela geometria:

$$\frac{h}{1+y} = \frac{2h}{8} \Rightarrow y = 3 \text{ m}$$

Portanto, a criança voltou 3 m.

**Gabarito: C**



39.

Qual deve ser a distância focal de um espelho para que forme uma imagem de 5 cm de altura de um objeto de 10 cm de altura, se a distância entre o objeto e a imagem é de 120 cm?

- a) 20 cm
- b) 40 cm
- c) 50 cm
- d) 60 cm
- e) 80 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, vem:

$$A = \frac{-p'}{p} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-p'}{120 + p'} \Rightarrow p' = -40 \text{ cm}$$

Da equação dos pontos conjugados, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{80} + \frac{1}{-40} \Rightarrow f = -80 \text{ cm}$$

**Gabarito: E**

---

40.

Um dentista põe um espelho côncavo de 6 cm de raio de curvatura a uma distância de 2 cm do dente do paciente. Qual é o aumento obtido?

- a) + 1
- b) + 2
- c) + 3
- d) - 2
- e) - 3

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, temos:

$$A = \frac{f}{f - p}$$

Como  $f > 0$  e  $f = \frac{r}{2}$ , chegamos que:

$$\Rightarrow A = \frac{3}{3 - 2} = +3$$



**Gabarito: C**

---

**41.**

Um espelho esférico de 15 cm de distância focal apresenta sobre uma tela (140 cm do espelho) uma imagem de 20 cm de altura. Qual é a altura do objeto?

- a) 1,4 cm
- b) 2 cm
- c) 2,4 cm
- d) 7 cm
- e) 15 cm

**Comentários:**

Sabemos que a fórmula do aumento é dada por:

$$A = \frac{f - p'}{f}$$

Temos  $f = \pm 15 \text{ cm}$  e  $p' = +140 \text{ cm}$ , visto que a imagem tem que ser real pra ser projetada. Assim,

$$\pm \frac{20}{h_{obj}} = \frac{\pm 15 - 140}{\pm 15}$$

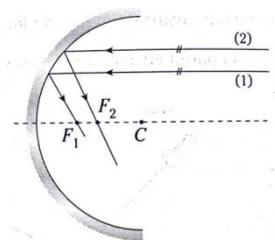
Encontramos duas soluções possíveis, mas pelas alternativas  $h = 2,4 \text{ cm}$ .

**Gabarito: C**

---

**42.**

A figura abaixo mostra dois raios paralelos. Ambos ao se refletir em um espelho esférico côncavo se interceptam com o eixo óptico principal. Indique verdadeiro (V) ou falso (F).



- I. Os pontos F1 e F2 devem estar sobrepostos (devem coincidir).
  - II. O raio (2) não é paraxial.
  - III. Existe aberração esférica.
- a) VFV



- b) FFF
- c) FVV
- d) FFF
- e) FVF

**Comentários:**

O fato conhecido, e muito usado em questões, de que raios paralelos são refletidos e passam pelo foco só é válido para raios paraxiais.

Um raio ou feixe paraxial é um raio que faz um pequeno ângulo com o eixo óptico do sistema durante todo o trajeto por meio deste.

Aberração esférica é um fenômeno da óptica geométrica em que os raios de luz incidentes próximos à borda das lentes são muito mais refratados do que os raios que incidem próximos ao eixo óptico e os raios de luz incidentes próximo das bordas dos espelhos são refletidos além do foco.

Sendo assim, concluímos que a afirmação I é falsa e as afirmações II e III são verdadeiras.

**Gabarito: C**

---

**43.**

Um objeto colocado a frente de um espelho esférico tem um aumento  $A = -3$ . Se a distância entre o objeto e a imagem é 16 cm, determine o raio de curvatura do espelho e o tipo de espelho.

- a) 6 cm; côncavo
- b) 12 cm; convexo
- c) 12 cm; côncavo
- d) 6 cm; convexo
- e) 8 cm; convexo

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento,

$$A = \frac{f - p'}{f}$$

Temos  $p' - p = 16$ . Assim,

$$-3 = \frac{-p'}{-16 + p'} \Rightarrow p' = 24 \text{ cm}$$



Podemos usar a Equação de Gauss da seguinte forma:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \Rightarrow f = 6 \text{ cm}$$

Assim, o raio de curvatura é de 12 cm e o espelho é côncavo.

### Gabarito: C

---

**44.**

Se um objeto colocado a 1,2 m de um espelho esférico gera uma imagem real, determine a distância focal e o tipo de espelho, sabendo que o tamanho da imagem é a terça parte do tamanho do objeto.

- a) 0,3 m; côncavo
- b) 0,3 m; convexo
- c) 0,4 m; côncavo
- d) 0,5 m; convexo
- e) 0,1 m; côncavo

### Comentários:

Pela fórmula do Aumento, temos:

$$A = \frac{f}{f - p}$$

Temos  $p' > 0$  e  $p = 1,2 \text{ m}$ . Assim:

$$\pm \frac{1}{3} = \frac{f}{f - 1,2}$$

Pelas alternativas:

$$f = +0,3 \text{ m}$$

Portanto, o espelho é côncavo.

### Gabarito: A

---

**45.**

Um espelho esférico gera uma imagem real cuja altura é 25% a do objeto. Se a distância entre o objeto e a imagem é 150 cm, determine a distância focal do espelho.

- a) – 40 cm



- b) – 60 cm
- c) 30 cm
- d) 40 cm
- e) – 15 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento,

$$|A| = \left| \frac{-p'}{p} \right|$$

Temos  $p' > 0$  e  $p - p' = 150 \text{ cm}$ . Assim:

$$0,25 = \frac{p - 150}{p}$$

Logo:

$$p = 200 \text{ cm e } p' = 50 \text{ cm}$$

Usando a equação dos pontos conjugados, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{200} + \frac{4}{200} \Rightarrow f = 40 \text{ cm}$$

**Gabarito: D**

---

**46.**

Qual é a distância focal de um espelho que duplica o tamanho aparente da face de uma pessoa que está a 30 cm dele?

- a) 20 cm
- b) 30 cm
- c) 40 cm
- d) 60 cm
- e) 50 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, vem:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{f}{f - p} \Rightarrow \pm 2 = \frac{f}{f - 30} \Rightarrow f = 20 \text{ cm ou } 60 \text{ cm}$$

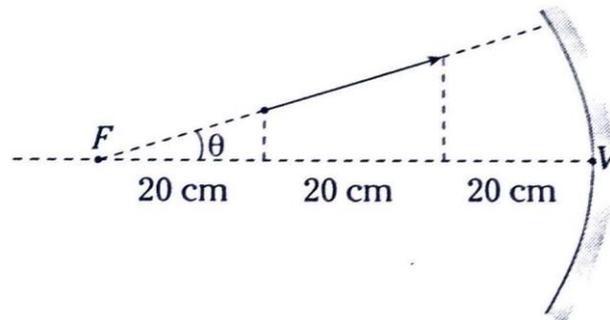
**Gabarito: A**

---



47.

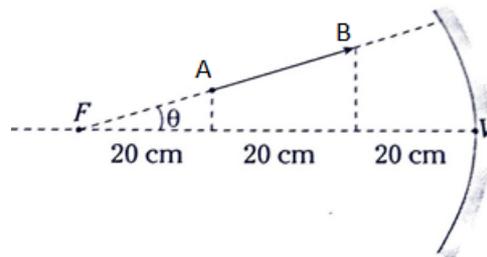
Determine o comprimento da imagem que se forma através do espelho côncavo ( $\theta$  é muito pequeno).



- a) 60 cm
- b) 90 cm
- c) 100 cm
- d) 120 cm
- e) 50 cm

**Comentários:**

Dado que  $\theta$  é muito pequeno, devemos considerar a distância horizontal dos pontos como sendo o comprimento da figura:



Para o ponto A, vamos encontrar sua imagem A'. Para isso usaremos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Assim:

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{40} + \frac{1}{p'_A} \Rightarrow p'_A = -120 \text{ cm}$$

Para o ponto B, vamos encontrar sua imagem B':

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{20} + \frac{1}{p'_B} \Rightarrow p'_B = -30 \text{ cm}$$

Portanto, o comprimento da imagem é dado por  $|p'_A| - |p'_B| = 90 \text{ cm}$ .

**Gabarito: B**

---

**48.**

Um objeto de 4 cm de altura, situado em frente a um espelho côncavo, dista 15 cm do vértice do espelho. Se o raio de curvatura é 40 cm, que altura tem a imagem?

- a) 60 cm
- b) 100 cm
- c) 1 cm
- d) 40 cm
- e) 16 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, temos:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{f}{f - p}$$

Temos  $f = +20 \text{ cm}$  e  $p = 15 \text{ cm}$ . Assim:

$$\frac{i}{4} = \frac{20}{20 - 15} \Rightarrow i = 16 \text{ cm}$$

**Gabarito: E**

---

**49.**

Um espelho côncavo produz uma imagem real com o dobro do tamanho do objeto. Qual é o raio de curvatura desse espelho, se a distância da imagem ao objeto é 30 cm?

- a) 10 cm
- b) 20 cm
- c) 30 cm
- d) 40 cm
- e) 50 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, vem:

$$|A| = \left| \frac{-p'}{p} \right|$$

Temos  $f > 0$  e  $p' - p = 30 \text{ cm}$ . Assim:



$$2 = \frac{30 + p}{p}$$

Logo:

$$p = 30 \text{ cm e } p' = 60 \text{ cm}$$

Usando:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{2}{60} + \frac{1}{60}$$

$$\boxed{f = 20 \text{ cm}}$$

Portanto, o raio de curvatura é 40 cm.

**Gabarito: D**

---

**50.**

Quando um objeto é colocado em frente a um espelho convexo, o aumento que se obtém é 0,5 e quando o objeto é aproximado em 20 cm o aumento é de 0,75. Determine a distância focal do espelho.

- a) – 10 cm
- b) – 20 cm
- c) – 30 cm
- d) – 40 cm
- e) – 50 cm

**Comentários:**

Pela fórmula do Aumento, temos:

$$A = \frac{f}{f - p}$$

Temos  $f < 0$  e  $p_2 = p_1 - 20$ . Assim:

$$0,5 = \frac{f}{f - p_1}$$

Então:

$$0,75 = \frac{f}{f - p_1 + 20}$$

Portanto:

$$\boxed{f = -30 \text{ cm}}$$



**Gabarito: C**

---



## 9. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Revise todos os conceitos apresentados nessa aula, faça pequenos resumos sobre cada tópico estudado.

Essa aula é cheia de definições e considerações iniciais no estudo de Óptica Geométrica. Anote essas informações no seu resumo de estudo.

Na aula 21, daremos continuidade ao estudo da Óptica Geométrica, trabalhando com refração, lentes esféricas, equação dos fabricantes e uma breve noção de instrumentos ópticos e óptica da visão.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



## 10. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 4. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 523p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.
- [6] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p.



## 11. Versão de aula

| Versão de Aula | Data da última atualização |
|----------------|----------------------------|
| 1.0            | 21/09/2019                 |

