PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Assim como outros assuntos da matemática, os determinantes também possuem propriedades. São elas:

DETERMINANTE NULO

O determinante de uma matriz é nulo quando:

- A matriz possuir uma linha ou coluna completas de zero.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$detA=0+0+0-0-0-0=0$$

- A matriz possuir duas linhas ou colunas iguais.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 9 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$detA=-25+135+105+25-135-105=0$$

- A matriz possuir duas linhas ou colunas proporcionais.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$detA=-30+30+18+30-18-30=0$$

Observação: perceba que a primeira e terceira coluna são proporcionais: a coluna 3 é o dobro da coluna 1.

- A matriz possuir uma linha ou coluna que seja combinação linear de outras duas.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$10=2\cdot 2+3\cdot 2$$

$$2=1\cdot 2+0\cdot 2$$

$$6=0\cdot 2+3\cdot 2$$

$$detA=0+30+0-0-18-12=0$$

DETERMINANTE NÃO SE ALTERA

O determinante não se altera nos seguintes casos:

- Efetuar a transposta da matriz.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow detA = -23$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow detA^t = -23$$

- Quando trocamos uma linha ou coluna por uma combinação linear dela com outra paralela a ela.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow detA = -15$$

$$Coluna\ 3 = Coluna\ 1 + Coluna\ 3$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow detB = -15$$

Esse item é conhecido como **Teorema de Jacobi**.

DETERMINANTE SE ALTERA

- Quando há troca de linhas ou colunas paralelas: neste caso, o determinante terá o sinal trocado.

Exemplo: Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, seu determinante é: $detB = 14$

Agora trocando de posição a coluna 1 com a coluna 3, temos que:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ C = -14$$

- Multiplicação de uma linha ou coluna por um escalar: se multiplicarmos uma linha ou uma coluna da matriz por um escalar, então seu determinante também será multiplicado por esse escalar.

Exemplo: Dada a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, seu determinante é: $detC = 10$

Agora, se multiplicarmos a segunda linha da matriz por 3, o determinante também será multiplicado por 3:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 \cdot 3 & 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow detD = 30 = 3 \cdot 10$$

- Multiplicação da matriz por um escalar: se multiplicarmos a matriz por um escalar, seu determinante fica multiplicado por este escalar elevado à ordem da matriz.

Exemplo: Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, seu determinante é: $detM{=}{-8}$

Se multiplicarmos a matriz por 3, temos que:

$$3 \cdot M = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 21 & 27 \end{bmatrix} \Rightarrow det(3M) = -8 \cdot 3^2 = -8 \cdot 9 = -72$$

Perceba que o determinante da matriz M foi multiplicado pelo valor do escalar (3), elevado à sua ordem (2).

Ainda existem algumas propriedades interessantes dos determinantes, que serão elencadas a seguir:

OUTRAS PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

- Propriedade de Binet: O determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Exemplo: Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, encontre o determinante da matriz $C{=}B \cdot A$.

Solução: Pela propriedade de Binet temos:

$$detC = detB \cdot detA$$

$$detB = -11 \text{ e } detA = -6$$

Assim,

$$detC = (-11) \cdot (-6) = 66$$

A propriedade de Binet possui a seguinte consequência: $|A^n| = |A|^n$

Vale ressaltar ainda que **não vale**: $|A+B| = |A| + |B|$

- Propriedade da Inversa: O determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz original.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, encontre o determinante de A^{-1}.

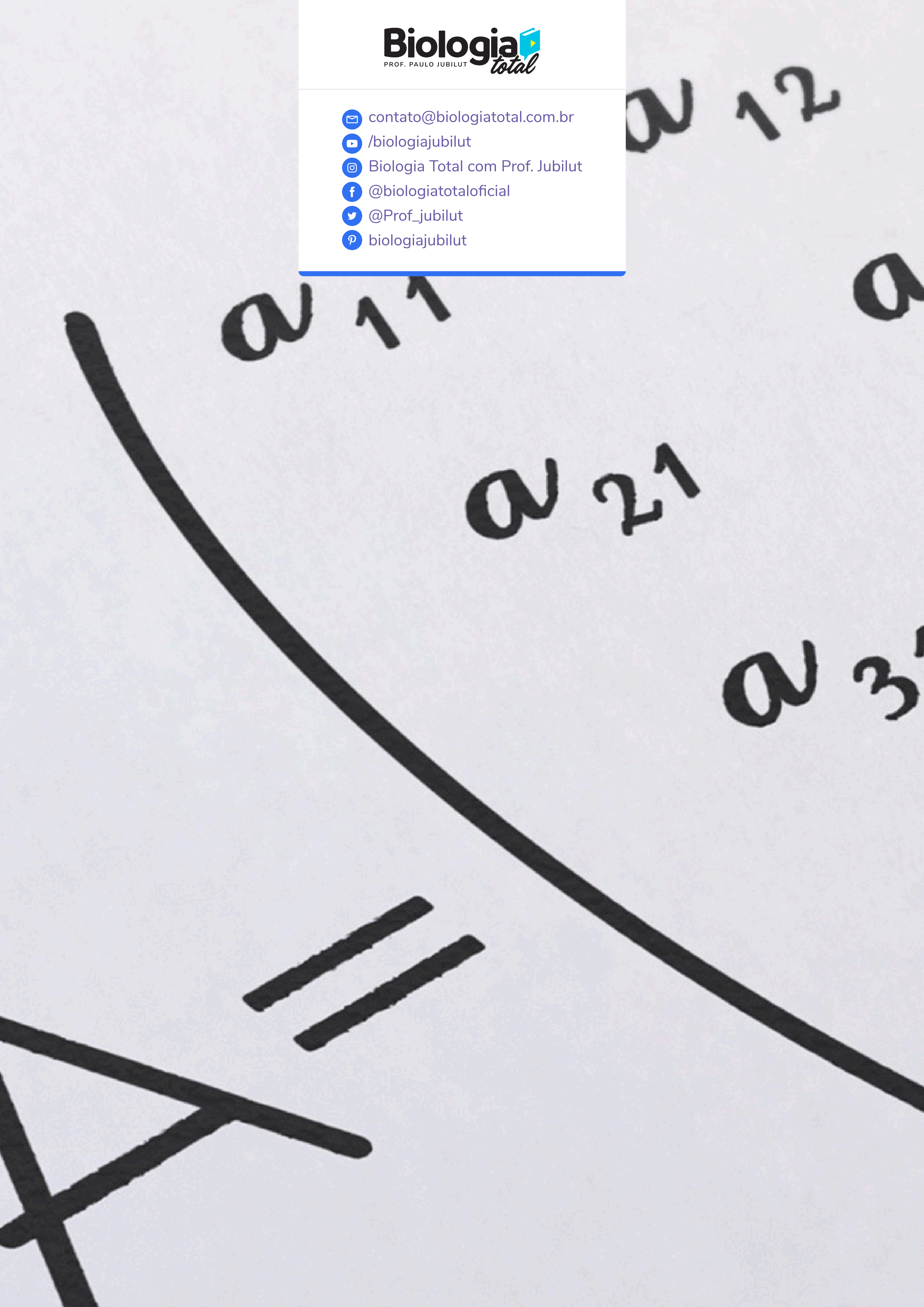
Solução: Pela propriedade da inversa temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -6 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

- Determinante da Matriz Triangular: O determinante de uma matriz triangular será sempre o produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, seu determinante é: $detA{=}1{\cdot}3{\cdot}4{=}12$

ANOTAÇÕES



Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut