Canguru de Matemática Brasil – 2015 – Nível J - Respostas

Problemas de 3 pontos

1. Qual dos números a seguir é o mais próximo de $20{,}15 \times 51{,}02$?

(A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

1. Alternativa B

Temos $20{,}15 \times 51{,}02 \cong 20 \times 50 = 1000$

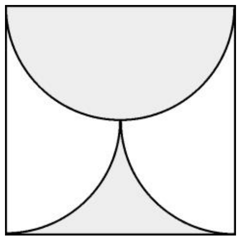
2. Dona Teresa pendurou várias camisetas para secar no varal. Depois ela pediu para Joãozinho pendurar uma meia, não um par, nos espaços entre as camisetas. No total ficaram para secar 29 peças de roupa. Quantas camisetas estão no varal?

(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

2. Alternativa E

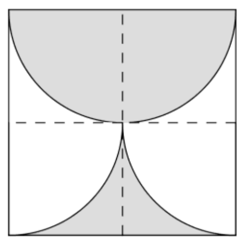
Seja x o número de camisetas. Há $x - 1$ espaços entre elas, logo foram penduradas $x - 1$ meias. Assim, $x + x - 1 = 29 \Leftrightarrow 2x = 29 + 1 = 30 \Leftrightarrow x = 15$

3. No quadrado de lado ℓ, na figura, a parte cinza é limitada por uma semicircunferência, dois arcos de circunferência e lados do quadrado. Qual é a área da região cinza?



(A) $\frac{\pi \ell^2}{8}$ (B) $\frac{\ell^2}{2}$ (C) $\frac{\pi \ell^2}{2}$ (D) $\frac{\ell^2}{4}$ (E) $\frac{\pi \ell^2}{4}$

3. Alternativa B



Observe que ao dividir o quadrado em quatro quadrados menores, obtemos um total de oito regiões, 4 brancas e 4 cinzas, com cada região branca tendo uma correspondente cinza de mesma área. Portanto a área total cinza é igual à área total branca. Assim, ambas são metade da área do quadrado, que é $\frac{\ell^2}{2}$.

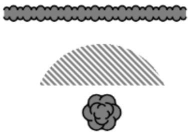
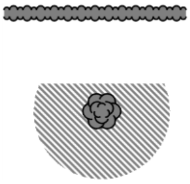
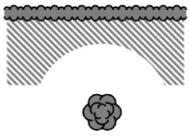
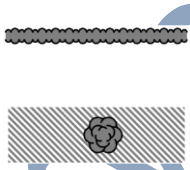
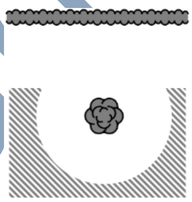
4. Três irmãs, Ana, Bete e Cíntia, compraram uma lata com 30 biscoitos, ficando cada uma com 10 biscoitos. Ana pagou 8 reais, Bete pagou 5 reais e Cíntia pagou 2 reais. Se elas tivessem repartido os biscoitos proporcionalmente ao que cada uma pagou, quantos biscoitos a mais Ana teria recebido?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

4. Alternativa A

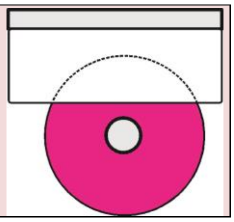
A lata de biscoitos custou $8+5+2=15$ reais, logo cada biscoito custou $\frac{15}{30}=0{,}50$ real. Com 8 reais, Ana teria direito a $\frac{8}{0{,}50}=16$ biscoitos. Como ela ficou com 10 biscoitos, teria direito a mais 16 – 10 = 6 biscoitos.

5. O senhor Esconde lembrou-se de um tesouro que enterrou em seu jardim há muito tempo. Mas ele conseguiu recordar apenas que o tesouro estava a cinco metros ou mais da cerca e no máximo a cinco metros do tronco do pé de goiaba. Qual dos esquemas abaixo indica a região em que ele deve procurar, para recuperar seu tesouro?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Alternativa B

A região está fora da faixa paralela ao muro e dentro do círculo com a árvore no centro (região em rosa na figura)



6. Qual é o algarismo das unidades do número $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$?

(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

6. Alternativa C

Os números $2015^2, 2015^1$ e 2015^5 tem 5 como o algarismo das unidades. Como $2015^0=1$, o algarismo das unidades de $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$ é o mesmo que o do número 5 + 5 + 5 + 1 =16, ou seja, 6.

7. Um professor perguntou aos seus 33 alunos quais as aulas de que mais gostavam. Somente Informática e Educação Física foram mencionadas. Três crianças mencionaram as duas aulas e o número de crianças que mencionaram somente Informática foi o dobro do número de crianças que mencionaram somente Educação Física. Quantas crianças mencionaram Informática?

(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 23

7. Alternativa E

Sendo *x* o número de crianças que mencionaram apenas Educação Física, então 2x é o número de crianças que mencionaram apenas Informática. Se 3 mencionaram as duas, então $2x+x+3=33 \Leftrightarrow 3x=30 \Leftrightarrow x=10$. Portanto, o número de crianças que mencionaram Informática (apenas Informática ou Informática junto com Educação Física) é $2x+3=2\times 10+3=23$.

8. Qual dos números a seguir não é quadrado nem cubo de um número inteiro?

(A) 6^{13} (B) 5^{12} (C) 4^{11} (D) 3^{10} (E) 2^{9}

8. Alternativa A

$5^{12}=\left(5^{6}\right)^{2}=\left(5^{4}\right)^{3}$; logo 5^{12} é quadrado e cubo.

$4^{11}=\left(2^{2}\right)^{11}=\left(2^{11}\right)^{2}$; 4^{11} é quadrado.

$3^{10}=\left(3^{5}\right)^{2}$; 3^{10} é quadrado.

$2^{9}=\left(2^{3}\right)^{3}$; 2^{9} é cubo.

Como 13 é um número primo, não podemos decompor os expoentes de $6^{13}=2^{13}\cdot 3^{13}$ num produto que tenha 2 ou 3 como fatores, como nos casos acima. Logo, esta potência não é quadrado nem cubo de nenhum número inteiro. Observação: para números reais, esta conclusão não é verdadeira. Por exemplo, $6^{13}=\left(6^{\frac{13}{2}}\right)^{2}=\left(\sqrt{6^{13}}\right)^{2}$.

9. Dona Cândida comprou 100 velas. Ela queima uma vela todo dia e fabrica uma vela igual com o resto de cera de cada sete velas usadas. Depois de quantos dias ela terá que comprar velas novamente**?**

(A) 102 (B) 112 (C) 114 (D) 115 (E) 116

9. Alternativa E

Dos tocos de 7 velas, pode-se fazer uma vela inteira. Dividindo-se 100 por 7, obtemos 14 e resto 2, ou seja, com os tocos de 100 velas podemos fazer exatamente 14 velas, sobrando 2 tocos. Dos tocos das 14 velas, podemos fazer exatamente 2 velas, sobrando 2 tocos destas velas. Assim, temos um total de 100 + 14 + 2 = 116 velas, sobrando 2 + 2 = 4 tocos. Logo, Dona Cândida deverá comprar novas velas depois de 116 dias.

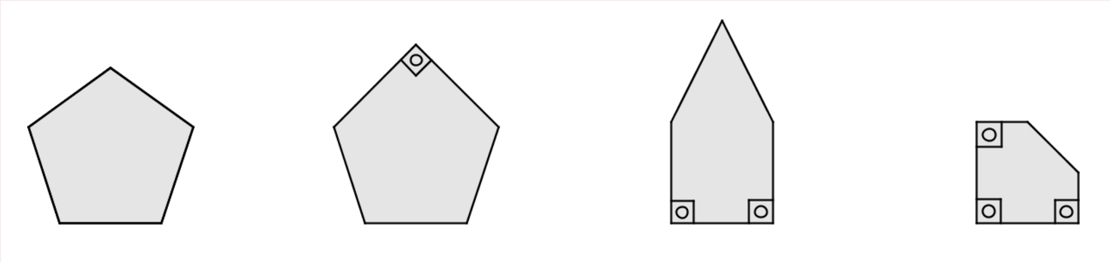
Outra maneira:

Cada vez que uma vela é queimada, podemos considerar que apenas $\frac{6}{7}$ dela são gastos e que a cera restante corresponde a $\frac{1}{7}$ de vela, que pode ser utilizada para fabricar uma nova vela. Assim, após $\frac{100}{\frac{6}{7}}=\frac{700}{6}\approx 116$ dias, sobrarão apenas $100-116\cdot\frac{6}{7}=\frac{700-696}{7}=\frac{4}{7}$ de vela, que é menos que uma vela inteira. Logo, após 116 dias, será necessário comprar novas velas.

10. Um pentágono convexo tem *n* ângulos internos retos. Qual é a lista de possíveis valores de *n*?

(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 (C) 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

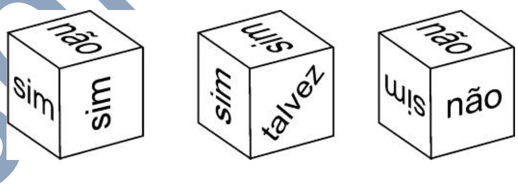
10. Alternativa C
Exemplos de pentágonos com 0, 1, 2 e 3 ângulos retos são mostrados a seguir.



Sabemos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é $(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$. Se 4 dos 5 ângulos de um pentágono forem retos, o quinto ângulo medirá $540^\circ - 4\cdot 90^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$, absurdo, logo não há como ter mais de 3 ângulos retos num pentágono.

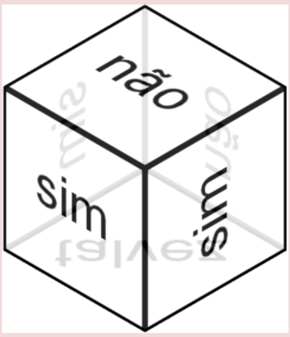
Problemas de 4 pontos

11. Sílvia tem um dado que a ajuda a tomar decisões, mostrado em três diferentes posições na figura ao lado. Ele tem as palavras **sim**, **não** e **talvez** escritas em suas faces. Qual é a probabilidade de sair **sim** quando o dado for lançado?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

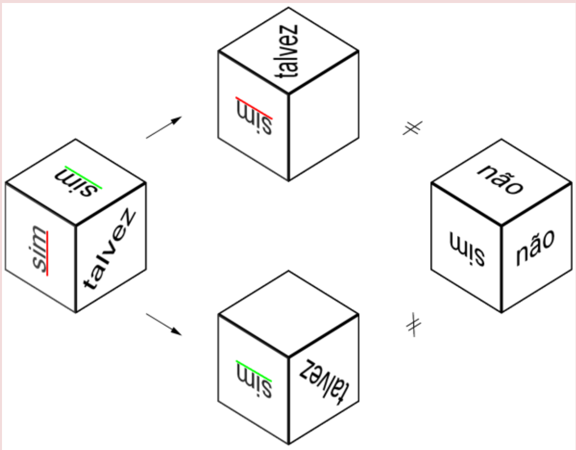
11. Alternativa B



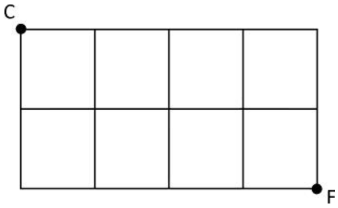
De acordo com as três vistas do dado, temos duas faces com *sim*, duas com *não* e uma com *talvez*. Precisamos descobrir o que está escrito na sexta face.

Caso as três faces ocultas na vista da esquerda fossem as três visíveis na vista central, teríamos apenas uma face *não*, o que é falso. Como a face superior da vista da esquerda é um *não* e a face superior da vista central é um *sim*, a face *talvez* é oposta à *não* da vista da esquerda. Caso a face *sim* da vista da direita fosse alguma das visíveis na vista central, a face *talvez* seria visível também nesta vista. Com isso, a sexta face é um *sim*, o que totaliza três faces *sim* neste dado. Portanto, a probabilidade de sair face *sim* no lançamento deste dado é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Outra maneira:
De acordo com as três vistas do dado, temos duas faces com *sim*, duas com *não* e uma com *talvez*. Precisamos descobrir o que está escrito na sexta face. Observe que os dois "*sim*" que aparecem na vista do meio não correspondem ao "*sim*" que aparece na última vista, logo há três "*sim*", dois "*não*" e um "*talvez*". Portanto, a probabilidade de sair face *sim* no lançamento deste dado é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

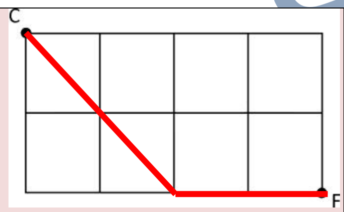


12. O quadriculado 4 x 2 ao lado é constituído por quadradinhos de lado 1. Qual é a menor distância que uma formiguinha pode andar do ponto C ao ponto F, se ela só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos quadradinhos?



(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ (C) $2+2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

12. Alternativa C



O número de segmentos de comprimento 1 ou $\sqrt{2}$ que ligam C a F pode ser seis, cinco ou quatro. Com quatro segmentos, há somente duas possibilidades: quatro diagonais ou duas diagonais e dois segmentos. Portanto, a menor distância é $2+2\sqrt{2}$.

13. Todo habitante do planeta Ligadão tem pelo menos duas orelhas. Três desses habitantes, It, Ix e Iz, encontraram-se numa cratera. It diz: "Eu vejo oito orelhas". Ix diz: "E eu vejo sete". Iz então diz: "Estranho, só consigo ver cinco orelhas". Quantas orelhas tem Iz?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

13. Alternativa C

Sejam t, x e z o número de orelhas de It, Ix e Iz, respectivamente. Então:

$$\left|\begin{array}{l} x+z=8 \\ t+z=7 \\ x+t=5 \end{array}\right. \Rightarrow 2(t+x+z)=8+7+5 \Leftrightarrow t+x+z=10$$

. Como $x+t=5$, temos $5+z=10$, isto é, Iz tem 5 orelhas.

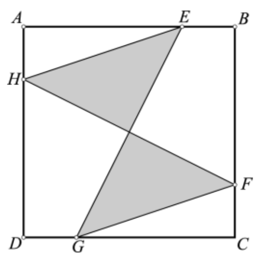
14. José quer colocar água numa cuba, na forma de um prisma retangular de base quadrada de lado 10 cm, até uma altura *h*. Um cubo de metal de lado 2 cm será colocado na cuba. Qual é o menor valor possível de *h* para o qual o cubo de metal fica totalmente submerso?

(A) 1,92 cm (B) 1,93 cm (C) 1,90 cm (D) 1,91 cm (E) 1,94 cm

14. Alternativa A

Quando o cubo de metal ficar apoiado, sua altura de 2 cm deve ser igual ao nível da água. Portanto, o volume da água mais o volume do cubo de metal é igual ao volume ocupado da cuba. Logo, $2^3+10^2h=10^2\cdot 2 \Leftrightarrow 100h=200-8=192 \Leftrightarrow h=1{,}92$ cm

15. O quadrado *ABCD* da figura tem área 80. Os pontos *E*, *F*, *G* e *H* estão sobre os lados do quadrado e $AE=BF=CG=DH$. Se $AE=3EB$, qual é a área da região cinza?



(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

15. Alternativa B

Se $EB = x$ então $AE = 3x$. Os triângulos AEH, EBF, FCG e GDH são congruentes. Como $AH = EB$, concluímos que a área do triângulo AEH é $\frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$. A área do quadrilátero $EFGH$ é igual à área do quadrado $ABCD$ menos a soma das áreas dos quatro triângulos, ou seja, $80 - 4 \cdot \frac{3x^2}{2} = 80 - 6x^2$. Mas $(x+3x)^2 = 80 \Leftrightarrow 16x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = 5$, logo a área do quadrilátero $EFGH$ é $80 - 6 \cdot 5 = 50$. Portanto, a área da região cinza, que é metade da área desse quadrilátero, é igual a 25.

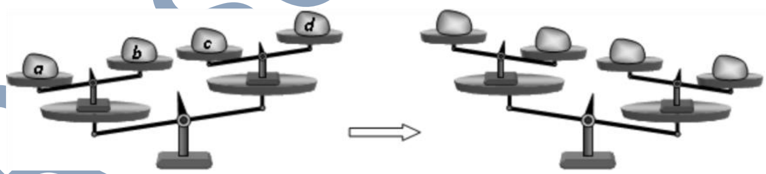
16. Pai e filho fazem aniversário hoje e o produto de suas idades é 2015. Qual é a diferença entre suas idades?

(A) 26 (B) 29 (C) 31 (D) 34 (E) 36

16. Alternativa D

Temos $2015 = 1 \times 5 \times 13 \times 31$. As idades são dois números que, multiplicados, resultam 2015. Esses números não podem ser iguais nem muito diferentes (por exemplo, 13 e $1 \times 5 \times 31 = 151$). Logo, devem ser 31 e 65. A diferença entre as idades é 65 – 31 = 34.

17. Quatro pesos *a*, *b*, *c*, *d* são colocados nos pratos de uma balança, conforme figura. Dois dos pesos são trocados de posição, resultando numa outra posição para os pratos. Quais pesos trocaram de posição?



(A) *a* e *b* (B) *b* e *d* (C) *b* e *c* (D) *a* e *d* (E) *a* e *c*

17. Alternativa D

Pela posição inicial da balança, temos que a pedra a ou c é a mais pesada, enquanto que a pedra b ou d é a mais leve. Como a balança maior pende para o outro lado após a troca, então uma das pedras a ou b deve trocar de lugar com uma das pedras c ou d.

Agora observe que se a pedra mais pesada ou a mais leve não se mover, a balança menor em que ela está não penderá para o outro lado. Portanto, para que as duas balanças menores pendam para o outro lado, a pedra mais pesada deve trocar com a mais leve. Neste caso, tanto a pedra mais pesada quanto a mais leve não podem estar no mesmo lado da balança maior, logo só duas trocas são possíveis: a com d ou b com c. Se ocorrer a troca de b com c, então c será a pedra mais pesada e b será a mais leve. Porém, teremos $c > a$, $d > b$ e $c + d > a + b$, um absurdo. Portanto, a única troca possível foi entre a e d.

18. Se as duas raízes da equação $x^2 - 85x + c = 0$ são números primos, qual é o valor da soma dos algarismos de *c*?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 21

18. Alternativa B

A soma das raízes é 85, número ímpar. Portanto, uma delas é par. Como é um número primo, só pode ser -2 ou 2. Se for -2 então a outra raiz é 87, que não é primo. Se for 2, a outra raiz é 83, que também é um número primo. Portanto, $c = 2 \times 83 = 166$. A soma dos algarismos desse número é 13.

19. Quantos números inteiros positivos de três algarismos são tais que a diferença de dois quaisquer de seus algarismos vizinhos é igual a 3?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 20 (E) 27

19. Alternativa D

Os números procurados são da forma abc, onde $b = a \pm 3$ e $c = b \pm 3$, com $1 \le a \le 9$, $0 \le b,c \le 9$ e $a,b,c \in N$. Assim, obtemos 20 números:

***a* =**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	141	252	303	414	525	630	741	852	963
	147	258	363	474	585	636	747	858	969
			369			696			

20. Qual dos números abaixo mostra que a sentença "Se n é primo então exatamente um dos números $n-2$ ou $n+2$ é primo" é falsa?

(A) $n=11$ (B) $n=9$ (C) $n=21$ (D) $n=29$ (E) $n=37$

20. Alternativa E

Explicação: Uma implicação (sentença do tipo $p \Rightarrow q$) só é falsa quando o antecedente (sentença *p*) é verdadeiro e o consequente (sentença *q*) é falso. Uma disjunção exclusiva (sentença do tipo $p \veebar q$)só é verdadeira quando uma das sentenças *p* ou *q* é verdadeira e a outra é falsa.

"$n=11$ é primo $\Rightarrow n-2=9$ é primo $\veebar$ $n+2=13$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 11 é primo , 9 não é primo e 13 é primo.

"$n=9$ é primo $\Rightarrow n-2=7$ é primo $\veebar$ $n+2=11$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 9 não é primo.

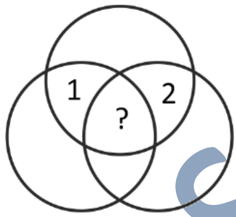
"$n=21$ é primo $\Rightarrow n-2=19$ é primo $\veebar$ $n+2=23$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 21 não é primo.

"$n=29$ é primo $\Rightarrow n-2=27$ é primo $\veebar$ $n+2=31$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 29 é primo , 27 não é primo e 23 é primo.

"$n=37$ é primo $\Rightarrow n-2=35$ é primo $\veebar$ $n+2=39$ é primo" é sentença FALSA, pois 37 é primo , 35 não é primo e 39 não é primo.

Problemas de 5 pontos

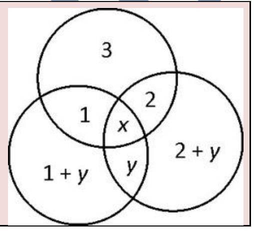
21. A figura mostra sete regiões limitadas por três circunferências. Foram escritos sete números, um em cada região, de modo que cada um deles é igual à soma dos números escritos nas regiões vizinhas. Duas regiões são vizinhas quando seus limites têm mais de um ponto comum. Dois desses números aparecem na figura. Qual número está escrito na região central, indicada pelo ponto de interrogação?



(A) 0 (B) -3 (C) 3 (D) -6 (E) 6

21. Alternativa A

No diagrama temos:



$$\begin{cases} x = 3 + y \\ 2 = 3 + x + 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = y \\ 0 = 3 + x + y \end{cases} \Rightarrow 0 = 3 + x + x - 3 \Leftrightarrow x = 0$$

22. Paula tem cinco livros diferentes, três dicionários e dois romances, em uma prateleira de sua estante. De quantas maneiras diferentes ela pode arrumar esses livros, de forma que os dicionários fiquem juntos e os romances fiquem juntos?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

22. Alternativa B

O bloco com os três dicionários pode ficar à esquerda ou à direita do bloco com os dois romances. No bloco dos dicionários, podemos embaralhá-los de 3! maneiras diferentes e no bloco dos romances, de 2! maneiras diferentes. Portanto, o número de maneiras diferentes com que Paula pode arrumar seus livros é igual a $2 \times 3! \times 2! = 2 \times 6 \times 2 = 24$.

23. Quantos números de dois algarismos podem ser escritos como a soma de exatamente seis diferentes potências de 2, incluindo 2^0 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

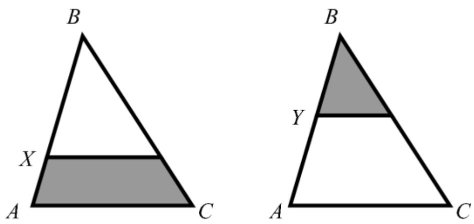
23. Alternativa C

As potências de 2, em ordem crescente, são os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

Devemos usar seis entre os menores do que 128. Se incluirmos entre eles o número 64, então a única soma possível é $1+2+4+8+16+64=96$. Sem o 64 a única soma possível é $1+2+4+8+16+32=63$. Logo, existem dois números que podem ser escritos como a soma de exatamente seis diferentes potências de dois.

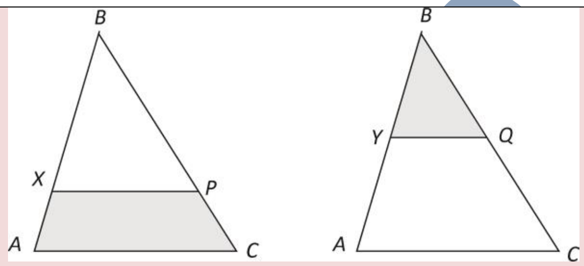
24. No triângulo ABC, podemos traçar as paralelas à base AC, pelos pontos X e Y, tais que as áreas das regiões cinzentas sejam iguais. Se a razão $BX:XA$ é igual a $4:1$ então qual é a razão $BY:YA$?

(A) 1:1 (B) 2:1 (C) 3:1 (D) 3:2 (E) 4:3



24. Alternativa D

Sejam P, Q os pontos em que as paralelas por X e Y cortam o lado BC, respectivamente. Seja também S_1 a área de cada região cinza e S_2 a área de cada região branca. Como $\Delta BXP \sim \Delta ABC \sim BYQ$, temos as seguintes razões entre áreas dos três triângulos:



$$\left|\begin{aligned}\frac{S_1+S_2}{S_2}&=\left(\frac{AX+BX}{BX}\right)^2\\ \frac{S_1+S_2}{S_1}&=\left(\frac{AY+BY}{BY}\right)^2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}1+\frac{S_2}{S_1}&=\left(1+\frac{AX}{BX}\right)^2\\ 1+\frac{S_2}{S_1}&=\left(1+\frac{AY}{BY}\right)^2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1}&=\left(1+\frac{1}{4}\right)^2-1=\left(\frac{5}{4}\right)^2-1=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}\\ \left(1+\frac{AY}{BY}\right)^2&=1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2\end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{AY}{BY}=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

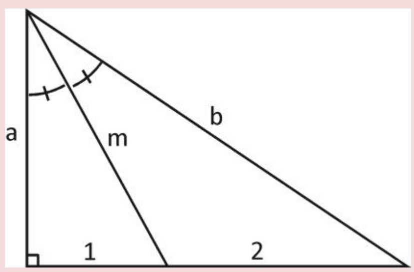
Portanto, $\frac{BY}{YA}=\frac{3}{2}$.

25. Num triângulo retângulo, a bissetriz de um dos ângulos agudos divide o lado oposto nos segmentos de comprimento 1 e 2. Qual é o comprimento da bissetriz?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

25. Alternativa C

Sendo a e b medidas de um cateto e da hipotenusa, respectivamente, e m a medida da bissetriz do ângulo entre eles, temos $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}\Leftrightarrow b=2a$ (pelo teorema das bissetrizes). Pelo teorema de Pitágoras, temos $b^2=a^2+(1+2)^2$. Logo, $(2a)^2=a^2+9\Leftrightarrow 4a^2=a^2+9\Leftrightarrow a^2=3$. No triângulo retângulo de hipotenusa m, pelo teorema de Pitágoras, temos $a^2+1=m^2$, logo $m^2=1+3=4\Rightarrow m=\sqrt{4}$.



26. Representamos por $\overline{ab}$ o número cujos algarismos são a e b, sendo a diferente de zero. De quantas maneiras você pode escolher os algarismos distintos a, b, c de forma que $\overline{ab}<\overline{bc}<\overline{ca}$?

(A) 84 (B) 96 (C) 125 (D) 201 (E) 502

26. Alternativa A

Os algarismos a, b e c são distintos. Como $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, basta considerar os algarismos das dezenas de cada número para concluirmos que $a < b < c$. Escolhendo três algarismos distintos dentre 1,2, ... , 9, falta apenas ordená-los para definirmos os valores de a, b e c. Assim, há $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$ maneiras de escolher a, b e c.

27. Marcos escreveu no quadro-negro os números naturais de 1 a *n*. Em seguida, apagou um desses números e obteve 4,75 para média aritmética dos números restantes. Qual foi o número apagado?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) impossível achar

27. Alternativa B

A média aritmética dos números de 1 a *n* é igual a $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$. Retirado um número *k*, a média aritmética dos números restantes é 4,75. Portanto,

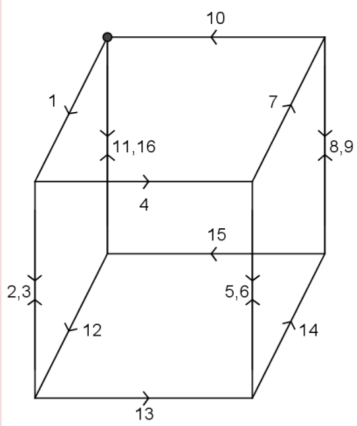
$(n-1)\cdot 4{,}75 + k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 9{,}5(n-1) + 2k = n(n+1) \Leftrightarrow 2k = n^2 - 8{,}5n + 9{,}5$. Nesta igualdade, devemos ter $0 < k \le n$, com *n* ímpar e maior do que 7. Para *n* = 9, temos $2k = 9^2 - 8{,}5\cdot 9 + 9{,}5 = 14 \Leftrightarrow k = 7$. Para valores maiores de *n*, o valor de *k* excederá o valor de *n*. Portanto, a sequência é a de 1 a 9, tendo sido apagado o número 7.

28. Uma formiguinha parte do vértice de um cubo de aresta 1 cm para percorrer todas as arestas e voltar ao ponto de partida, andando o mínimo possível. Quanto irá andar?

(A) 12 cm (B) 14 cm (C) 15 cm (D) 16 cm (E) 20 cm

28. Alternativa D

Observe que cada vez que a formiguinha chega num vértice do cubo, ela deve sair deste vértice por alguma aresta para continuar o caminho. Como cada vértice do cubo tem três arestas, a formiguinha deve entrar e sair de cada vértice duas vezes se quiser percorrer todas as arestas do cubo. O cubo possui 8 vértices e se a formiguinha sai duas vezes de cada vértice, então ela entra numa aresta $8\cdot 2 = 16$ vezes, ou seja, o menor caminho que a formiguinha percorre tem pelo menos $16\,\text{cm}$. Um exemplo de tal caminho é mostrado ao lado.



29. Marcos escreveu dez números diferentes no quadro-negro. Depois, pediu para Márcia sublinhar todos os números da lista que fossem iguais ao produto de todos os outros nove números. No máximo, quantos números Márcia conseguirá sublinhar?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 9 (E) 10

29. Alternativa B

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_9, a_{10}$ os números. Suponhamos que um número sublinhado seja a_1. Então $a_1 = a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Vamos supor que a_2 também tenha sido sublinhado. Então $a_2 = a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Seja $p = a_3 \cdot \ldots \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Temos $a_1 = a_2 \cdot p$ e $a_2 = a_1 \cdot p$ e então temos $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow a_1^2 = a_2^2$. Como $a_1 \neq a_2$ concluímos que a_1 e a_2 são números opostos e não nulos, logo $p = -1$. Suponhamos agora que a_3 seja sublinhado, isto é, $a_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Temos, analogamente, que $a_3^2 = a_1^2$ e $a_3^2 = a_2^2$ e como a_1 e a_2 são opostos, temos $a_3 = a_1$ ou $a_3 = -a_1 = a_2$. Mas isto não pode ocorrer, pois os números são todos distintos. Logo, Márcia conseguirá sublinhar no máximo 2 números.

30. Vários pontos for marcamados numa reta e se consideram todos os segmentos que têm dois desses pontos como extremidades. Um dos pontos marcados pertence ao **interior** de 80 desses segmentos e outro ponto pertence ao **interior** de 90 desses segmentos. Quantos pontos foram marcados na reta?

(A) 20 (B) 22 (C) 36 (D) 85 (E) 2015

30. Alternativa B

Seja n o número de pontos marcados na reta. Considere o ponto que pertence a 80 segmentos. À sua esquerda existem x pontos e à sua direita existem $n-x-1$ pontos. Cada ponto à esquerda e cada ponto à direita forma o par de extremidades dos segmentos que contêm este ponto no seu interior. Então $x\left((n-1)-x\right)=80$. Para o ponto que pertence a 90 segmentos, seja y o número de pontos à sua esquerda. Então $y\left((n-1)-y\right)=90$. Das duas equações podemos escrever $n-1=\frac{80}{x}+x=\frac{90}{y}+y$. Considerando todos os divisores positivos de 80 e 90, temos que $\frac{80}{x}+x \in \{1+80, 2+40, 4+20, 5+16, 8+10\} = \{81, 42, 24, 21, 18\}$ e $\frac{90}{y}+y \in \{1+90, 2+45, 3+30, 5+18, 6+15, 9+10\} = \{91, 47, 33, 23, 21, 19\}$. Assim, temos :

$$n-1=\frac{80}{x}+x=\frac{90}{y}+y \Leftrightarrow n-1=21 \Leftrightarrow n=22$$ ou seja, foram marcados 22 pontos na reta.