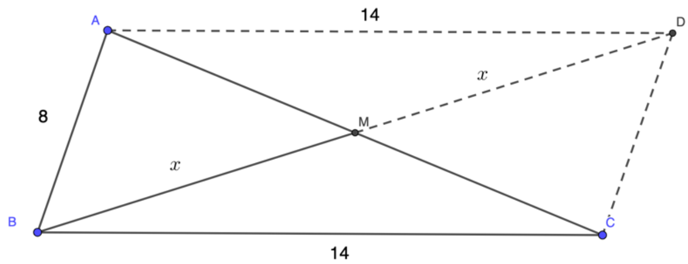
TRIÂNGULOS

GABARITO COMENTADO

1) (**Letra D**) Vamos montar a figura do problema, mas tentando criar uma situação geométrica em que seja vantajoso usar desigualdade triangular:

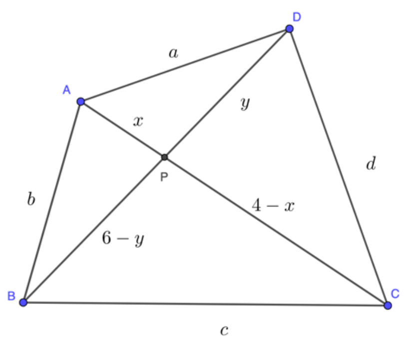


Prolongue BM até um ponto D, de maneira que BM = MD. Desta maneira, ABCD é um paralelogramo. Olhe agora para o triângulo ABD e escreva a desigualdade triangular:

$$2x < 8 + 14 \Leftrightarrow x < 11$$

Portanto, o maior valor inteiro para a mediana BM é 10.

2) (**Letra B**) Primeiramente, façamos a desigualdade triangular para os triângulos que tenham as diagonais como um de seus lados (ADC, ABC, BCD e ABD):



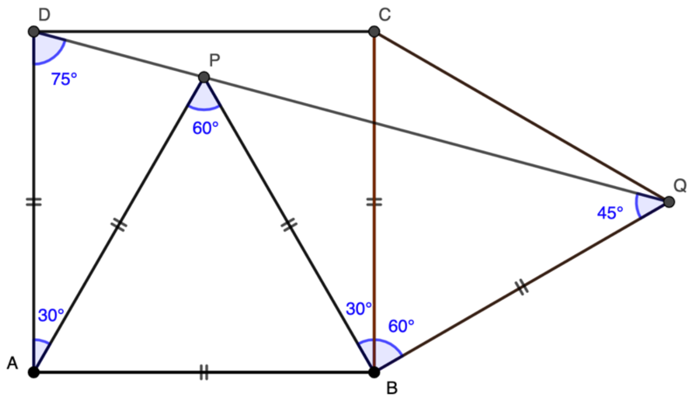
$$\begin{cases} a + d > 4 \\ d + c > 6 \\ b + c > 4 \\ a + b > 6 \end{cases} \Rightarrow 2(a + b + c + d) > 20 \Leftrightarrow a + b + c + d > 10$$

Agora, façamos desigualdade triangular nos triângulos internos ao quadrilátero:

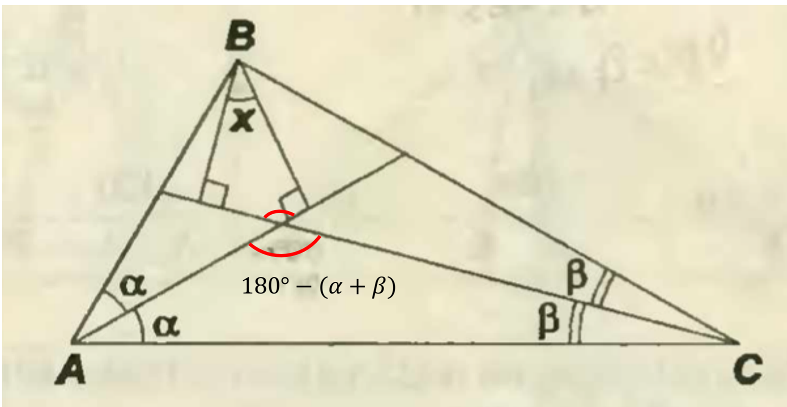
$$\begin{cases} x + y > a \\ y + 4 - x > d \\ 4 - x + 6 - y > c \\ 6 - y + x > b \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d < 20$$

Portanto, dentre as opções, a única possibilidade é 15 cm.

3) (**Letra B**) Montando a figura, perceba que o ângulo PAD mede 30° (dado que APB é equilátero); se AD = AP, o triângulo APD é isósceles com ângulos da base medindo 75°. Veja também que o triângulo BQP é retângulo isósceles; portanto, seus ângulos agudos medem 45°. Finalmente, como DPA mede 75°, APB mede 60° e BPQ mede 45°, o ângulo DPQ mede 180° (D, P e Q estão alinhados). Sendo assim, a soma dos ângulos pedidos é 75° + 45° + 180° = 300°.

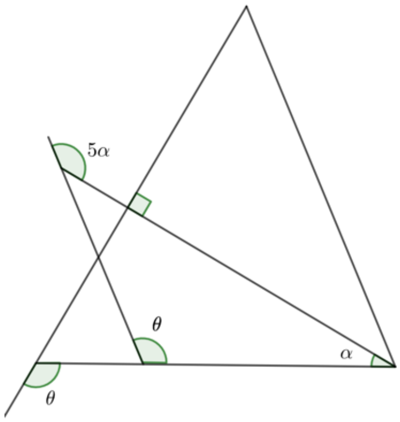


4) (**Letra B**) Como o ângulo interno B mede 100°, então $2\alpha + 2\beta = 80° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 40°$. O ângulo obtuso formado entre as bissetrizes mede $180° - (\alpha + \beta) = 140°$. Olhando agora para o quadrilátero formado entre as bissetrizes e as perpendiculares conduzidas por B, temos:



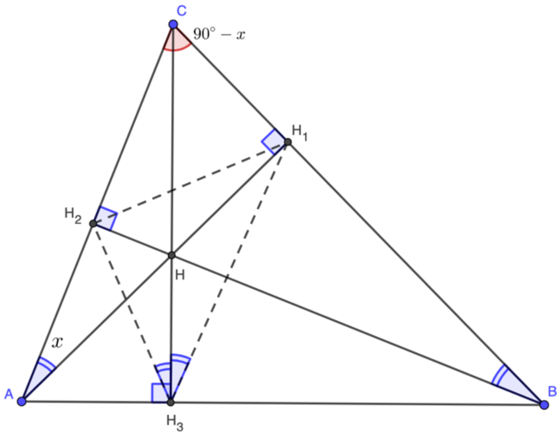
$$x + 90° + 90° + 140° = 360° \Leftrightarrow \boxed{x = 40°}$$

5) (**Letra D**) Note inicialmente que o ângulo de medida 5α é externo do triângulo cujos ângulos internos medem θ e α; assim sendo, $5\alpha = \theta + \alpha \Leftrightarrow \theta = 4\alpha$. Agora, veja que o ângulo inferior de medida θ é externo do triângulo de ângulos internos medindo 90° e α; assim sendo, $\theta = \alpha + 90°$. Juntando as informações:



$$4\alpha = \alpha + 90° \Leftrightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \theta = 4\alpha = \boxed{120°}$$

6) (**Letra D**) Esta configuração de triângulo acutângulo e suas alturas é bem especial, pois ela guarda uma propriedade interessante: cada altura bissecta um ângulo com extremos nos pés das alturas e vértice no pé desta altura considerada. Veja na figura os triângulos ACH_1 e BCH_2, ambos são semelhantes pois possuem os mesmos ângulos internos; sendo assim, os ângulos CAH_1 e CBH_2 são congruentes.



Agora note os quadriláteros AH_2HH_3 e BH_1HH_3, ambos inscritíveis pois possuem ângulos internos retos opostos. Assim, os ângulos H_2AH, H_2H_3H, HH_3H_1 e HBH_1 são todos congruentes entre si. Portanto, o ângulo $H_2H_3H_1$ foi bissectado pela altura CH_3, de maneira que $H_2H_3H_1 = 2x$ e o ângulo interno C mede $90° - x$.

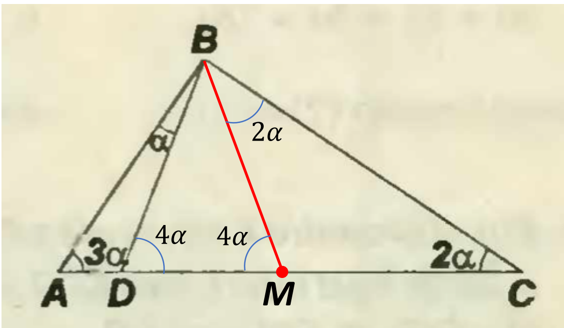
Comumente, chamamos o triângulo $H_1H_2H_3$ de triângulo órtico; veja que o incentro do triângulo órtico é ortocentro do triângulo AB .

No problema, se os ângulos internos do triângulo $H_1H_2H_3$ são 22° e 78°, necessariamente o terceiro mede 80°. Logo, os ângulos internos do triângulo ABC opostos a cada um destes ângulos medirá:

Oposto a 22° → $2x = 22° \Leftrightarrow x = 11° \Rightarrow$ ângulo interno $90° - x = 79°$
Oposto a 78° → $2x = 78° \Leftrightarrow x = 39° \Rightarrow$ ângulo interno $90° - x = 51°$
Oposto a 80° → $2x = 80° \Leftrightarrow x = 40° \Rightarrow$ ângulo interno $90° - x = 50°$

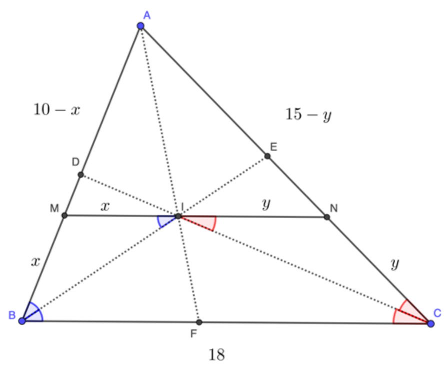
Portanto, o maior ângulo é 79°.

7) (**Letra C**) Seja M um ponto tal que MBC mede 2α. O ângulo DMB é externo do triângulo MBC, logo mede 4α. O ângulo MDB é externo do triângulo ABD, logo 4α. Desta maneira, o triângulo MDB é isósceles com DB = MB. Mas AC = 2BD, portanto se BD = BM = MC = a, o lado AC mede 2ª; com isso, M é ponto médio de AC e equidista dos vértices A, B e C. Assim, ABC é retângulo em B; portanto:



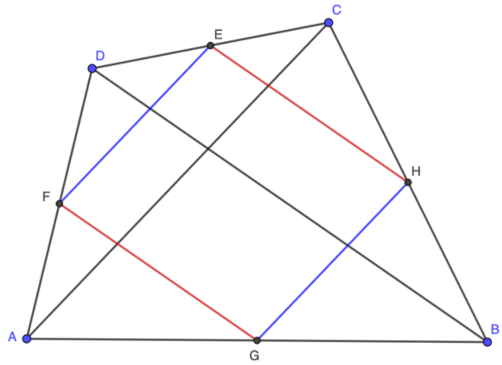
$$3\alpha + 2\alpha = 90° \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 18°}$$

8) (**Letra D**) Como MN é paralelo a BC, os ângulos MBI e MIB são congruentes, assim como os ângulos NIC e NCI. Portanto, MB = MI = x e NI = NC = y. O perímetro do triângulo AMN será dado por:



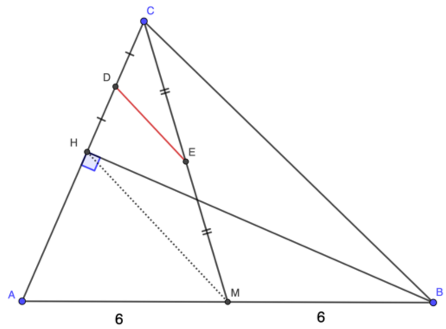
$$10 - x + x + y + 15 - y = \boxed{25}$$

9) (**Letra D**) Seja AC = 4 e BD = 6, e sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados de ABCD. Veja que, tanto no triângulo ADC quanto no triângulo ABC, os segmentos EF e GH são suas respectivas bases médias com respeito à base AC. Portanto, EF = GH = 2, pois AC = 4. De maneira semelhante, nos triângulos BCD e ABD, os segmentos EH e FG são suas respectivas bases médias com respeito à base BD. Portanto, EH = FG = 3, pois BD = 6.



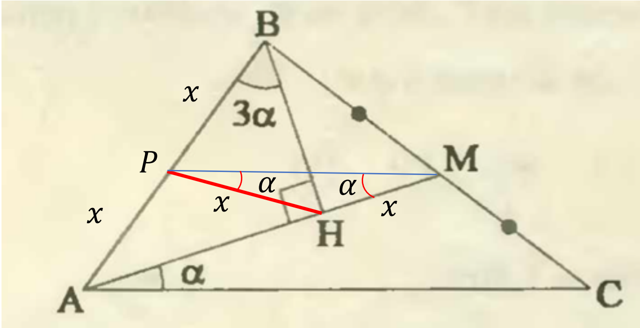
Sendo assim, o perímetro do quadrilátero EFGH é igual a 3 + 3 + 2 + 2 = 10.

10)(**Letra A**) Grave isto: mediana lembra ponto médio, e ponto médio lembra base média! Como D e E são os pontos médios dos lados HC e CM, então DE é base média do triângulo CHM.



Portanto, trace HM e veja que, no triângulo retângulo AHB, o segmento HM é mediana relativa à hipotenusa. Então, HM = 6 e com isso DE = 3, pois é base média com respeito à base HM.

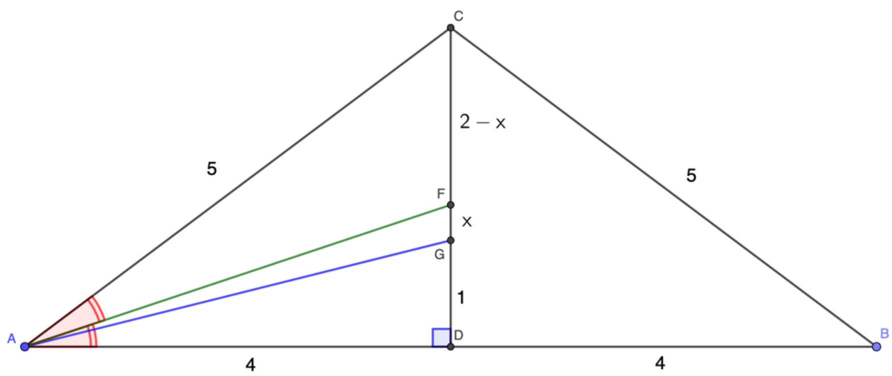
11)(**Letra B**) Seja P médio de AB. O segmento PH é mediana relativa à hipotenusa do triângulo ABH. Se AB = $2x$, então PH = x. Trace PM, base média do triângulo ABC com respeito à base AC. Logo, PM é paralelo a AC, e com isso o ângulo PMA é congruente ao ângulo MAC = α.



Como PH = HM = x, o triângulo PHM é isósceles e então o ângulo HPM mede α. Veja agora que o ângulo PHA é externo do triângulo PHM e, portanto, mede $\alpha + \alpha = 2\alpha$. Finalmente, o triângulo PHA é isósceles; sendo assim, os ângulos PHA e PAH medem 2α. Portanto, no triângulo retângulo ABH:

$$3\alpha + 2\alpha + 90° = 180° \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 18°}$$

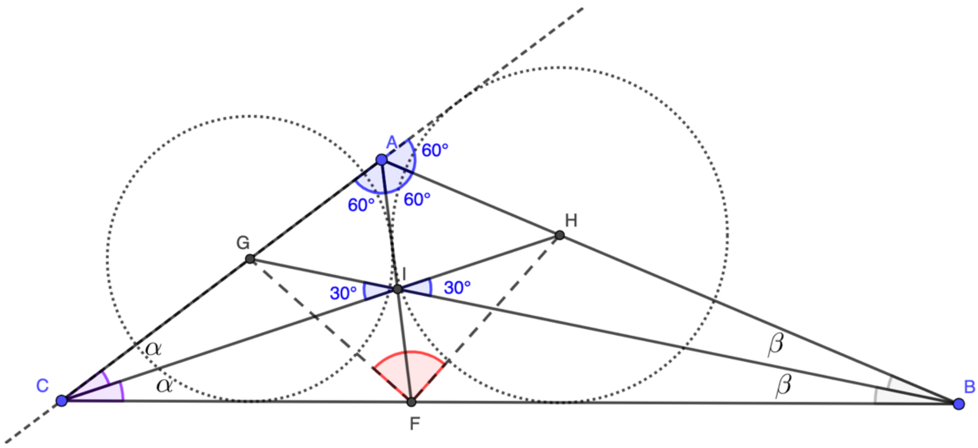
12)(**Letra B**) Como o triângulo é isósceles, baricentro e incentro estarão sobre a altura relativa à base, que também é mediana e bissetriz interna. Por Pitágoras, CD = 3 e, dado que o baricentro G divide a mediana CD na razão 2:1, então GD = 1.



Sendo AF bissetriz interna do ângulo A, e sendo FG = x, pelo teorema da bissetriz interna:

$$\frac{4}{1+x} = \frac{5}{2-x} \Leftrightarrow 8 - 4x = 5 + 5x \Leftrightarrow 9x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{3} \cong 0{,}3}$$

13)(**Letra B**) Esse problema exige algumas construções e "visões" não tão triviais assim. O fato de o ângulo interno Â medir 120° nos permite encarar o lado AB como sendo bissetriz externa do ângulo externo Â no triângulo AFC. Como CH é bissetriz interna, então o ponto H é ex-incentro do triângulo AFC com relação ao vértice C. Portanto, FH também é bissetriz externa do ângulo externo F no triângulo AFC, e daí AFH = $\frac{AFB}{2}$ (o segmento que liga o centro a um ponto externo ao círculo bissecta o ângulo entre as tangentes).

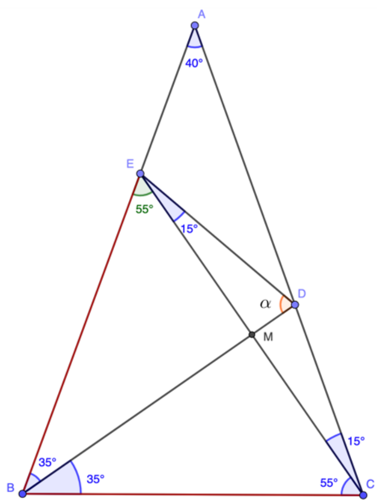


Repita o mesmo argumento para o ponto G, que será ex-incentro do triângulo AFB com relação ao vértice B. Sendo assim, AFG = $\frac{AFC}{2}$.

Como AFB + AFC = 180°, o ângulo HFG é igual à soma dos ângulos AFH e AFG, logo:

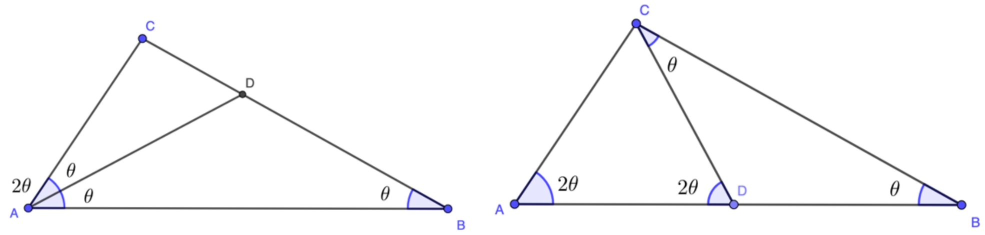
$$HFG = AFH + AFG = \frac{AFB}{2} + \frac{AFC}{2} = \frac{AFB + AFC}{2} = \frac{180°}{2} = \boxed{90°}$$

14)(**Letra D**) Marcando os ângulos dados, veja que BEC = 55°, de maneira que o triângulo BEC é isósceles de base CE. Veja também que BM é bissetriz relativa à base CE, logo também é mediatriz. Portanto, como D também está na mediatriz de CE, o triângulo CDE é isósceles de base CE e EMD = 90°. Logo:

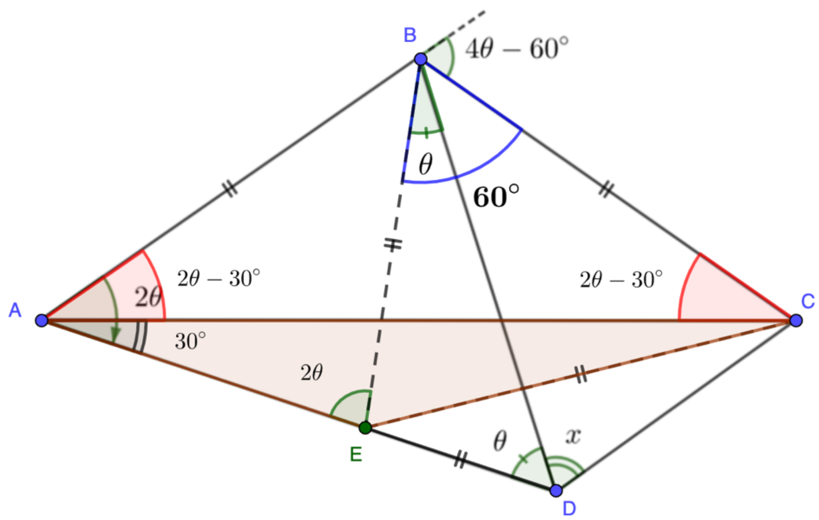


$$\alpha + 15° = 90° \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 75°}$$

15)(**Letra B**) Esse problema é bem difícil, mas tem algumas aprendizagens bem legais. Já usamos esse fato nessa lista, mas é bom relembrar. Quando numa situação geométrica em que aparecem ângulos θ e 2θ, duas saídas são comuns: ou traçamos a bissetriz de 2θ ou construímos outro ângulo 2θ, ambas com a finalidade de ganharmos triângulo isósceles.



Marcando os ângulos da figura, temos que BAC = BCA = $2\theta - 30°$, pois o ângulo de medida $4\theta - 60°$ é externo de ABC. Como o ângulo BAD mede 2θ, então CAD mede 30°. Agora, tracemos BE = BA de maneira que o ângulo BEA = 2θ. Veja que BEA é externo do triângulo BED, portanto o ângulo EBD mede θ e com isso temos um triângulo isósceles BED, com BE = ED.



Agora, um detalhe mais difícil de enxergar: o ponto B, nessa construção, equidista de A, de E e de C; logo, B é o **circuncentro** do triângulo AEC. Se o ângulo CAE mede 30°, então o ângulo centrar relativo ao mesmo arco CE mede 60°; logo, como B é o centro do círculo, o ângulo CBE mede 60°. Ótimo! Ganhamos um triângulo equilátero BEC.

Finalmente, o ângulo AEC mede $2\theta + 60°$ e é externo do triângulo isósceles EDC. Assim: $2\theta + 60° = \theta + x + \theta + x \Leftrightarrow \boxed{x = 30°}$.