POLINÔMIOS

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

POLINÔMIOS

Chegou o momento de você estudar os polinômios! Aqui você aprenderá a operar polinômios e conhecerá algumas maneiras de encontrar suas raízes.

Esta subárea é composta pelos módulos:

POLINÔMIOS E DIVISÕES POLINOMIAIS

1. (ITA 2020) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5 + n$, sendo m, n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, da equação $p(z) = 0$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z) = 0$ é igual a

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

2. (ITA 2020) Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1) = -\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.
b) $-\frac{19}{4}$.
c) $-\frac{3}{2}$.
d) $\frac{9}{4}$.
e) $\frac{9}{2}$.

3. (UNIOESTE 2019) Se o número real a é raiz do polinômio $P(x)$ e o número real b é raiz do polinômio $Q(x)$, então é CORRETO afirmar que

a) $(a + b)$ é raiz de $P(x) + Q(x)$.
b) a e b são raízes de $P(x) + Q(x)$.
c) (ab) é raiz de $P(x)Q(x)$.
d) a e b são raízes de $P(x)Q(x)$.
e) $(a + b)$ é raiz de $P(x)Q(x)$.

4. (Epcar (Afa) 2019) Considere $a \in \mathbb{R}$ e os polinômios $P(x) = \frac{a}{2}x^6 - 26x^3 - 27$ e $A(x) = 2x^2 + 4x + a$, tais que seus gráficos se intersectam em um único ponto de ordenada nula.

Sabendo também que, graficamente, $A(x)$ tangencia o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$, analise as afirmativas abaixo e escreva V para verdadeira e F para falsa.

( ) O gráfico de $P(x)$ corta o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em dois pontos.

( ) Os afixos das raízes de $P(x)$ que possuem menor módulo formam um triângulo cujo perímetro mede $3\sqrt{3}$ unidades de comprimento.

( ) A soma das raízes imaginárias de $P(x)$ é igual a -2.

A sequência correta é

a) V – V – V
b) V – F – F

c) F – V – F
d) F – V – V

5. (UECE 2019) Se $P(z)$ é um polinômio do quarto grau na variável complexa z, com coeficientes reais, que satisfaz as seguintes condições:

$P(i) = P(-i) = P(i+1) = P(1-i) = 0$ e $P(1) = 1$, então, $P(-1)$ é igual a

Observação: i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1.

a) 3.
b) –3.
c) 5.
d) –5.

6. (ACAFE 2019) Analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa correta.

a) A equação $x^3 + 2x^2 + 3 = 0$ possui pelo menos uma raiz irracional.
b) O resto da divisão de $p(x) = x^{15} - 3x^4 + 2x + 3$ por $q(x) = x + 1$ é 3.
c) Se $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ é divisível por $x + 1$ e o quociente dessa divisão é um polinômio com raiz dupla então a e b são primos entre si.
d) Se $\frac{2x}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$, então $A + B - C = 1$.

7. (ESPM 2019) O polinômio $P(x) = a \cdot x^b + b \cdot x^c + c \cdot x^a$ é tal que os números a, b e c são naturais consecutivos nessa ordem. Sabendo-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)$ é igual a 9, podemos afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)$ é igual a:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 5
e) 4

8. (IME 2018) Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4+3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6$
b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1$
c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2$
d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$
e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 6$

9. (UEPG 2018) Considerando que $Q_1(x)$ representa o quociente e R_1 o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^5 - 4$ por $x - 2$ e que $Q_2(x)$ e R_2 representam o quociente e o resto da divisão de $Q_1(x)$ por $x + 2$, respectivamente, assinale o que for correto.

01) O polinômio $Q_2(x)$ tem três raízes reais.
02) Os coeficientes do polinômio $Q_1(x)$ formam uma progressão geométrica, cuja soma de seus termos vale 31.
04) O grau do polinômio $P(x) \cdot Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ é um número múltiplo de seis.
08) Se $\frac{x+1}{Q_2(x)} = \frac{A}{Dx} + \frac{Bx+C}{x^2+E}$ então $A + B + C = 1$.
16) A diferença entre R_1 e R_2 é um número múltiplo de quatro.

10. (UFSC 2018) É correto afirmar que:

01) O polinômio $p(x) = x^3 + x$ não possui duas raízes complexas.
02) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^n + 1$ por $(x-1)$ é (-2).

04) Existem números reais a e b tais que o quociente da divisão exata do polinômio $p(x) = -x^4 + 5x^2 + ax + b$ por $(x^2 + 5x + 6)$ é $q(x) = -x^2 + 5x - 14$.

08) Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0$, então $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 20$.

16) Na equação algébrica $x^3 + kx^2 + tx - 4 = 0$, os valores de k e t são inteiros. Se $(1+i)$ e 2 são raízes dessa equação, então $k + t = 2$.

11. (UFJF-pism 3 2017) Qual é o polinômio que ao ser multiplicado por $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$ tem como resultado o polinômio $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$?

a) $x^3 + x^2 + x$.

b) $x^3 + x^2 - x$.

c) $x^3 + 3x^2 + x$.

d) $x^3 + 3x^2 + 2x$.

e) $x^3 + 3x^2 - x$.

12. (MACKENZIE 2017) Os valores de R, P e A para que a igualdade $\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 - x} = \frac{R}{x} + \frac{P}{x+1} + \frac{A}{x-1}$ seja uma identidade são, respectivamente,

a) $3, 1$ e -2

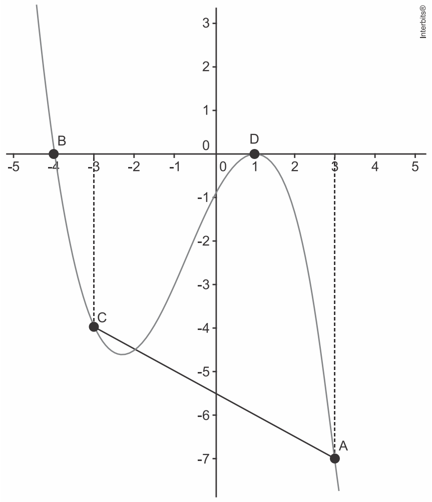
b) $1, -2$ e 3

c) $3, -2$ e 1

d) $1, 3$ e -2

e) $-2, 1$ e 3

13. (ACAFE 2017) O gráfico a seguir, que passa pelos pontos A, B, C e D, representa o polinômio $P(x)$.



I. O polinômio $P(x)$ é um polinômio do segundo grau.

II. O polinômio $D(x) = -\frac{3}{4}x - 3$ é divisor de $P(x)$.

III. A reta que passa pelos pontos A e C intercepta o eixo das ordenadas no ponto $\left(0, -\frac{11}{2}\right)$.

IV. $P(2) = P\left(-\frac{1}{2}\right)$

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I – II – III

b) II – III – IV

c) III – IV

d) II – III

14. (IME 2017) Sejam x, y e z números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é:

a) 210

b) 235

c) 250

d) 320

e) 325

15. (IME 2017) O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2. Qual é o valor de b?

a) 11

b) 13

c) 17

d) 23

e) 29

16. (Esc. Naval 2017) Seja $P(x) = x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ um polinômio de coeficientes inteiros e que $P(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$. O polinômio $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^3 - 3x - 1$. Determine a soma dos coeficientes de $R(x)$ e assinale a opção correta.

a) -51

b) -52

c) -53

d) -54

e) -55

17. (IME 2016) O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes reais $\alpha, -\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é:

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

18. (INSPER 2016) Considere um polinômio $P(x)$ do 4º grau, de coeficientes reais, tal que:

- $P(-3) = P(1) = P(5) = 0;$

- $P(0)$ e $P(2)$ são, ambos, números positivos.

Nessas condições, os sinais dos números $P(-5)$, $P(4)$ e $P(6)$ são, respectivamente,

a) positivo, negativo e negativo.

b) positivo, negativo e positivo.

c) negativo, negativo e negativo.

d) negativo, positivo e negativo.

e) negativo, positivo e positivo.

19. (EPCAR (Afa) 2016) Considere os polinômios $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $P(x) = x^3 - 3x^2 - ax + b$, sendo a e b números reais tais que $a^2 - b^2 = -8$.

Se os gráficos de $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então é INCORRETO afirmar sobre as raízes de $P(x)$ que

a) podem formar uma progressão aritmética.

b) são todas números naturais.

c) duas são os números $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

d) duas são números simétricos.

20. (FMP 2016) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial definida por $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 9$.

O fato de $x = 3$ ser um zero da função f é equivalente ao fato de o polinômio $x^4 - 3x^3 + 3x - 9$ ser divisível por

a) $x^2 - 9$

b) $x + 3$

c) 3

d) $x - 3$

e) x

GABARITO

1: [B]

Como $p(x)$ é de grau 3 e possui coeficientes reais, possui pelo menos 1 raiz real.

Seja α um número real tal que $p(\alpha) = 0.$

Daí,

$$\alpha = a + 0 \cdot i$$
$$\alpha = a$$

Logo,

$$\alpha = m \cdot 0^2 + n \cdot 0 - 1$$
$$\alpha = -1$$
$$p(-1) = 0,$$
$$0 = (-1)^3 - m \cdot (-1)^2 + (-1) + 5 + n$$
$$0 = -1 - m + 4 + n$$
$$m = 3 + n$$

Dessa forma, as raízes de $p(x)$ são $\alpha = -1, \beta = a + b \cdot i$ e $\gamma = a - b \cdot i.$

Então,

$$\begin{cases} a = mb^2 + nb - 1 \\ a = m(-b)^2 + n(-b) - 1 \end{cases}$$
$$mb^2 + nb - 1 = mb^2 - nb - 1$$
$$2nb = 0$$
$$nb = 0$$
$$n = 0 \text{ ou } b = 0$$

Se $b = 0, p(x)$ admite raiz tripla, ou seja,

$$p(x) = (x+1)^3$$
$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Isso é impossível, pois no $p(x)$ dado, o coeficiente de x é igual a 1.

Então,

$$n = 0$$

De $m = 3 + n$ e $n = 0,$

$$m = 3$$

Portanto

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 3$$
$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 3^2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 9$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \left(\underbrace{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}_{1} \right) = 9$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 = 9$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 7$$

2: [D]

Como $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4,$ 2 e -2 são raízes de $p(x).$

Daí, as raízes de $p(x)$ são: $2, -2, \alpha$ e β

Logo,

$$\begin{cases} 2 + (-2) + \alpha + \beta = 1 \\ 2 \cdot (-2) \cdot \alpha \cdot \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 & \text{(i)} \\ -4\alpha\beta = 3 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Da equação (i), $\beta = 1 - \alpha$

Substituindo $\beta = 1 - \alpha$ na equação (ii),

$$-4\alpha \cdot (1 - \alpha) = 3$$
$$4\alpha^2 - 4\alpha - 3 = 0$$
$$\alpha = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4}$$
$$\alpha = \frac{4 \pm 8}{8}$$
$$\alpha = \frac{3}{2} \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{2}$$

Se $\alpha = \frac{3}{2},$

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

Se $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$\beta = \frac{3}{2}$

Portanto, as raízes de $p(x)$ são:

$2, -2, \frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$

Dessa forma,

$$p(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Como $p(-1) = -\frac{15}{4}$,

$$-\frac{15}{4} = a \cdot (-1-2) \cdot (-1+2) \cdot \left(-1 - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{15}{4} = -\frac{15}{4}a$$

$$a = 1$$

Daí,

$$p(x) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$p(1) = (1-2) \cdot (1+2) \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$p(1) = (-1) \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}$$

$$p(1) = \frac{9}{4}$$

3: [D]

$P(a) = 0 \Rightarrow P(a) \cdot Q(a) = 0$, portanto a é raiz de $P(x) \cdot Q(x)$.

$Q(b) = 0 \Rightarrow P(b) \cdot Q(b) = 0$, portanto b é raiz de $P(x) \cdot Q(x)$.

Logo, a e b são raízes de $P(x) \cdot Q(x)$.

4: [A]

Como $A(x)$ tangencia o eixo $\overrightarrow{Ox}$,

$$4^2 - 4 \cdot 2 \cdot a = 0$$

$$a = 2$$

Então,

$$A(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

$$A(x) = 2 \cdot (x+1)^2$$

Fazendo $A(x) = 0$,

$$2 \cdot (x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

Como $a = 2$,

$$P(x) = x^6 - 26x^3 - 27$$

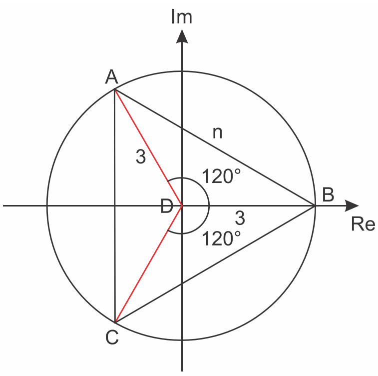
$$P(x) = \left(x^3\right)^2 - 26x^3 - 27$$

$$P(x) = \left(x^3 - 27\right) \cdot \left(x^3 + 1\right)$$

Fazendo $P(x) = 0$,

$x^3 - 27 = 0$ ou $x^3 + 1 = 0$.

As soluções da equação $x^3 - 27 = 0$ quando colocadas no plano de Argand-Gauss gera o seguinte triângulo equilátero.



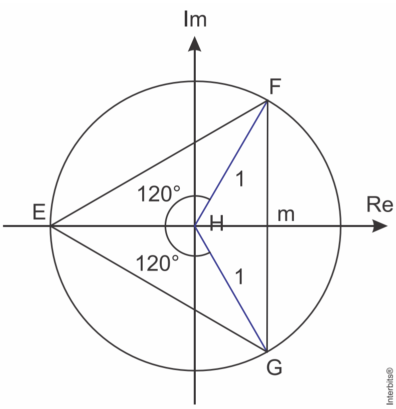
$B = 3$

$A = 3 \cdot (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

$A = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$C = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

As soluções da equação $x^3 + 1 = 0$ quando colocadas no plano de Argand-Gauss gera o seguinte triângulo equilátero.



$E = -1$

$F = 1 \cdot (\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

$F = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$G = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Dessa forma, o gráfico de P(x) corta o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em dois pontos.

No triângulo FHG,

$m^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120°$

$m = \sqrt{3}$

Então, o perímetro do triângulo EFG é $3\sqrt{3}.$

A soma das raízes imaginárias de P(x) é:

$$\left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right) + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -2$$

Logo, as afirmativas são todas verdadeiras, o que indica a sequência V – V – V como a correta.

5: [C]

Do enunciado, sendo a um número real,

$P(x) = a \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - (1 + i)) \cdot (x - (1 - i))$

$P(x) = a \cdot (x^2 - i^2) \cdot ((x - 1) - i) \cdot ((x - 1) + i)$

$P(x) = a \cdot (x^2 + 1) \cdot ((x - 1)^2 - i^2)$

$P(x) = a \cdot (x^2 + 1) \cdot ((x - 1)^2 + 1)$

Como $P(1) = 1,$

$1 = a \cdot (1^2 + 1) \cdot ((1 - 1)^2 + 1)$

$1 = a \cdot 2 \cdot 1$

$a = \frac{1}{2}$

Logo,

$P(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) \cdot ((x - 1)^2 + 1)$

$P(-1) = \frac{1}{2} \cdot ((-1)^2 + 1) \cdot ((-1 - 1)^2 + 1)$

$P(-1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5$

$P(-1) = 5$

6: [A]

[A] Como os coeficientes de $p(x)$ são todos reais e $g_r(p(x)) = 3, p(x)$ possui pelo menos uma raiz real.

As possíveis raízes racionais de $p(x)$ são: $1, -1, 3$ e $-3.$

Note que:

$p(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 3$

$p(1) = 6$

$p(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 3$

$p(-1) = 4$

$p(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3$

$p(3) = 48$

Logo, $p(x)$ não possui raízes racionais.

Dessa forma, a equação $x^3 + 2x^2 + 3 = 0$ possui pelo menos uma raiz irracional.

Então, a afirmação [A] é correta.

[B] De $p(x) = x^{15} - 3x^4 + 2x + 3,$

$p(-1) = (-1)^{15} - 3 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1) + 3$

$p(-1) = -1 - 3 - 2 + 3$

$p(-1) = -3$

Logo, o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$ é $-3,$ ou seja, a afirmação [B] é incorreta.

[C] Teremos:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x+1 \\ \hline 0 & q(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} -1 & 1 & 5 & a & b \\ \hline & 1 & 4 & a-4 & \underbrace{-a+b+4}_{\text{zero}} \end{array}$$

$-a + b + 4 = 0$

$a - b = 4$

$q(x) = x^2 + 4x + a - 4$

Como $q(x)$ possui uma raiz dupla,

$4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 4) = 0$

$16 = 4 \cdot (a - 4)$

$4 = a - 4$

$a = 8$

Substituindo $a = 8$ na equação $a - b = 4,$

$8-b=4$
$b=4$
$mdc(a,b)=mdc(8,4)$
$mdc(a,b)=4\neq 1$

Logo, a e b não são primos entre si, ou seja, a afirmação [C] é incorreta.

[D] Vamos admitir que $\frac{2x}{x^3-2x^2+4x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ para qualquer x real.

Daí,

$$\frac{2x}{x^3-2x^2+4x-8}\equiv\frac{A\cdot(x^2+4)+(Bx+C)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x^2+4)}$$

$$\frac{2x}{x^3-2x^2+4x-8}\equiv\frac{Ax^2+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)\cdot(x^2+4)}$$

$$2x\equiv x^2(A+B)+x(C-2B)+4A-2C$$

$$\begin{cases}A+B=0 & (i)\\ C-2B=2 & (ii)\\ 4A-2C=0 & (iii)\end{cases}$$

Da equação (i),

$B=-A$

Substituindo $B=-A$ na equação (ii),

$C-2\cdot(-A)=2$
$C=2-2A$

Da equação (iii),

$4A=2C$
$C=2A$

Substituindo $C=2A$ na equação $C=2-2A$,

$2A=2-2A$
$4A=2$
$A=\frac{1}{2}$

Substituindo $A=\frac{1}{2}$ na equação $B=-A$,

$B=-\frac{1}{2}$

Substituindo $A=\frac{1}{2}$ na equação $C=2A$,

$C=2\cdot\frac{1}{2}$
$C=1$

Daí,

$A+B-C=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)-1$
$A+B+C=-1$

Então, a afirmação [D] é incorreta.

7: [D]

Se o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)$ é 9, podemos escrever que: $a+b+c=9$

Como a, b e c são três números consecutivos, podemos escrever que $a=b-1$ e $c=b+1$, portanto:

$b-1+b+b+1=9\Rightarrow b=3$

Logo,

$a=2$ e $c=4$.

Com isso, nosso polinômio fica escrito na forma:

$P(x)=2\cdot x^3+3\cdot x^4+4\cdot x^2$

Logo, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)$ será dado por:

$P(x)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^4+4\cdot(-1)^2=5$

8: [A]

O polinômio $P(x)$ de menor grau que passa pelos pontos $A(2,-4+3\sqrt{3}), B(1,3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2},\sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3},\sqrt{2})$ é um polinômio do terceiro grau.

De $A(2,-4+3\sqrt{3})$, $x_0=2$ e $y_0=-4+3\sqrt{3}$.

De $B(1,3\sqrt{2}-2)$, $x_1=1$ e $y_1=3\sqrt{2}-2$.

De $C(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $x_2=\sqrt{2}$ e $y_2=\sqrt{3}$.

De $D(\sqrt{3},\sqrt{2})$, $x_3=\sqrt{3}$ e $y_3=\sqrt{2}$.

Pelo método de interpolação polinomial de Lagrange,

$$P(x)=\sum_{k=0}^{3} y_k\left(\prod_{i=0,\, i\neq k}^{3}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)$$

$$k=0\Rightarrow y_0\cdot\left(\prod_{i=1}^{3}\frac{x-x_i}{x_0-x_i}\right)=y_0\cdot\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right)$$

$$\left(-4+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2-1}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(-4+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{(x-1)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$k=1\Rightarrow y_1\cdot\left(\prod_{i=0,\, i\neq 1}^{3}\frac{x-x_i}{x_1-x_i}\right)=y_1\cdot\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right)$$

$$\left(3\sqrt{2}-2\right)\cdot\left(\frac{x-2}{1-2}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(3\sqrt{2}-2\right)\cdot\frac{(x-2)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}$$

$$k=2\Rightarrow y_2\cdot\left(\prod_{i=0,\, i\neq 2}^{3}\frac{x-x_i}{x_2-x_i}\right)=y_2\cdot\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right)$$

$$\sqrt{3}\cdot\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}-2}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$$

$$\sqrt{3}\cdot\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$$

$$k=3\Rightarrow y_3\cdot\left(\prod_{i=0}^{2}\frac{x-x_i}{x_3-x_i}\right)=y_3\cdot\left(\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\right)$$

$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}-2}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}\right)$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$

Então,

$$P(x)=\left(-4+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+\left(3\sqrt{2}-2\right)\cdot\frac{(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}+$$
$$+\sqrt{3}\cdot\frac{(x-2)(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}+\sqrt{2}\cdot\frac{(x-2)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$ é $P(3)$, logo,

$$P(3)=\underbrace{\left(-4+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{(3-1)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}_{(i)}+\underbrace{\left(3\sqrt{2}-2\right)\cdot\frac{(3-2)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}}_{(ii)}+$$
$$\underbrace{+\sqrt{3}\cdot\frac{(3-2)(3-1)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}}_{(iii)}+\underbrace{\sqrt{2}\cdot\frac{(3-2)(3-1)\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}}_{(iv)}$$

De (i),

$$\frac{\left(-4+3\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=-12-3\sqrt{2}+20\sqrt{3}+5\sqrt{6}$$

De (ii),

$$\frac{\left(3\sqrt{2}-2\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{6}-10\sqrt{3}$$

De (iii),

$$\frac{\sqrt{3}\cdot 2\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=15\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+18$$

De (iv),

$$\frac{\sqrt{2}\cdot 2\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=-17\sqrt{2}-8\sqrt{3}-9\sqrt{6}-12$$

Dessa forma,

$$P(3)=-12-3\sqrt{2}+20\sqrt{3}+5\sqrt{6}+\sqrt{6}-10\sqrt{3}+15\sqrt{2}+$$
$$15\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+18-17\sqrt{2}-8\sqrt{3}-9\sqrt{6}-12$$

$$P(3)=8\sqrt{3}-5\sqrt{2}-6$$

9: 02 + 04 + 08 + 16 = 30.

Calculando:

$$\left(x^5-4\right)\div(x-2)=Q_1=x^4+2x^3+4x^2+8x+16\Rightarrow R_1=28$$

$$\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)\div(x+2)=Q_2=x^3+4x\Rightarrow R_2=16$$

Analisando as alternativas uma a uma:

[01] INCORRETA. O polinômio $Q_2(x)$ possui apenas uma raiz real.

[02] CORRETA. Calculando: $1+2+4+8+16=31$

[04] CORRETA. O grau do polinômio $P(x)\cdot Q_1(x)\cdot Q_2(x)$ é igual a 60.

[08] CORRETA. Calculando:

$$\frac{x+1}{x^3+4x}=\frac{A}{Dx}+\frac{Bx+C}{x^2+E}\Rightarrow\frac{x+1}{x^3+4x}=\frac{A\cdot\left(x^2+E\right)+(Bx+C)\cdot Dx}{Dx\cdot\left(x^2+E\right)}$$

$$\frac{x+1}{x^3+4x}=\frac{Ax^2+AE+DBx^2+DCx}{Dx^3+DEx}$$

$D=1$

$DE=4\Rightarrow E=4$

$A+DB=A+B=0$

$AE=1\Rightarrow A=\frac{1}{4}\Rightarrow B=-\frac{1}{4}$

$DC=1\Rightarrow C=1$

[16] CORRETA. Calculando:

$$(x-2)-(x+2)=x-2-x-2=-4$$

10: 04 + 08 + 16 = 28.

[01] De $p(x) = x^3 + x,$

$x^3 + x = 0$

$x \cdot (x^2 + 1) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$

De $x^2 + 1 = 0,$

$x^2 = -1$

$x = i$ ou $x = -i$

Portanto, a afirmação [01] é falsa.

[02] O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^n + 1$ por $(x - 1)$ é $p(1).$

De $p(x) = x^n + 1,$

$p(1) = 1^n + 1$

$p(1) = 2$

Portanto, a afirmação [02] é falsa.

[04] De $x^2 + 5x + 6$ e $q(x) = -x^2 + 5x - 14,$

$= -x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 5x^3 + 25x^2 - 70 - 6x^2 + 30x - 84$

$(x^2 + 5x + 6) \cdot (-x^2 + 5x - 14) = -x^4 + 5x^2 + 30x - 154$

Assim, tomando $a = 30$ e $b = -154,$ $p(x)$ é divisível por $x^2 + 5x + 6.$

Portanto, a afirmação [04] é verdadeira.

[08] Como α, β e γ são raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0,$

$\alpha + \beta + \gamma = -4 \quad (i)$ e $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -2 \quad (ii)$

Da igualdade $(i),$

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \quad (iii)$

Das igualdades $(i), (ii)$ e $(iii),$

$(-4)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot (-2)$

$16 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 20$

Portanto, a afirmação [08] é verdadeira.

[16] Como k e t são inteiros, portanto, reais, se $1 + i$ é raiz da equação $x^3 + kx^2 + tx - 4 = 0,$ $1 - i$ também é raiz.

Dessa forma, as raízes da equação $x^3 + kx^2 + tx - 4 = 0$ são $1 + i, 1 - i$ e 2.

Seja $P(x) = x^3 + kx^2 + tx - 4.$

Pelo Teorema da Decomposição,

$P(x) = 1 \cdot (x - (1 + i)) \cdot (x - (1 - i)) \cdot (x - 2)$

$P(x) = ((x - 1) - i) \cdot ((x - 1) + i) \cdot (x - 2)$

$P(x) = ((x - 1)^2 - i^2) \cdot (x - 2)$

$P(x) = (x^2 - 2x + 1 - (-1)) \cdot (x - 2)$

$P(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 2)$

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + 2x - 4$

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

Assim,

$k = -4$ e $t = 6,$ ou seja, $k + t = 2.$

Portanto, a afirmação [16] é verdadeira.

11: [E]

Calculando:

$(3x^3 + 2x^2 + 5x - 4) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx) =$

$= 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$

$3ax^6 +$

$+(3bx^5 + 2ax^5) +$

$+(3cx^4 + 2bx^4 + 5ax^4) +$

$+(2cx^3 + 5bx^3 - 4ax^3) +$

$+(5cx^2 - 4bx^2) +$

$+(-4cx) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$

$3ax^6 = 3x^6 \Rightarrow a = 1$

$3bx^5 + 2ax^5 = 3bx^5 + 2x^5 = 11x^5 \Rightarrow 3bx^5 = 9x^5 \Rightarrow b = 3$

$3cx^4 + 2bx^4 + 5ax^4 = 3cx^4 + 6x^4 + 5x^4 = 8x^4 \Rightarrow 3cx^4 = -3x^4 \Rightarrow c = -1$

Assim:

$ax^3 + bx^2 + cx = x^3 + 3x^2 - x$

12: [B]

Para que $\dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 - x} = \dfrac{R}{x} + \dfrac{P}{x + 1} + \dfrac{A}{x - 1}$ seja uma identidade, devemos ter

Biologia total

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} \equiv \frac{R\cdot(x+1)\cdot(x-1)+P\cdot x\cdot(x-1)+A\cdot x\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$
$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} \equiv \frac{R\cdot\left(x^2-1\right)+P\cdot x^2-P\cdot x+A\cdot x^2+A\cdot x}{x^3-x}$$
$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} \equiv \frac{Rx^2-R+Px^2-Px+Ax^2+Ax}{x^3-x}$$
$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} \equiv \frac{(R+P+A)x^2+(A-P)x-R}{x^3-x}$$
$$\begin{cases} A+P+R=2 \\ A-P=5 \\ -R=-1 \end{cases}$$

De $-R=-1$,

$R=1$

Substituindo $R=1$ na equação $A+P+R=2$,

$A+P=1.$

Somando membro a membro as equações $A+P=1$ e $A-P=5$, temos:

$A+P+A-P=1+5$
$2A=6$
$A=3$

Substituindo $A=3$ na equação $A+P=1$,
$P=-2.$

Assim, os valores de R, P e A são, respectivamente iguais a 1, -2 e 3.

13: [D]

[I] FALSA. Um polinômio de segundo grau gera um gráfico de parábola.

[II] VERDADEIRA. Calculando:

$$P(x)=a\cdot(x+4)\cdot(x-1)^2$$
$$P(0)=-1=a\cdot(0+4)\cdot(0-1)^2 \Rightarrow 4a=-1 \Rightarrow a=-\tfrac{1}{4}$$
$$P(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot(x+4)\cdot(x-1)^2$$
$$D(x)=\frac{-3}{4}x-3=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow -4 \text{ é raiz de } P(x)!$$
$$\frac{P(x)}{D(x)} \Rightarrow \text{Resto}=P(-4)=0 \Rightarrow \text{é divisor!}$$

[III] VERDADEIRA. Calculando:
$$P(-3)=-\tfrac{1}{4}\cdot(-3+4)\cdot(-3-1)^2 \Rightarrow P(-3)=-4 \Rightarrow C(-3;-4)$$
$$P(3)=-\tfrac{1}{4}\cdot(3+4)\cdot(3-1)^2 \Rightarrow P(3)=-7 \Rightarrow A(3;-7)$$
$$r_{AC}: y=mx+b$$
$$m=\frac{-7-(-4)}{3-(-3)}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$
$$-7=\frac{-1}{2}\cdot 3+b \Rightarrow b=\frac{-11}{2}$$
$$r_{AC}: y=\frac{-1}{2}\cdot x-\frac{11}{2}$$
$$-\frac{11}{2}==\frac{-1}{2}\cdot 0-\frac{11}{2}$$

[IV] FALSA. Calculando:

$$P(2)=\frac{-1}{4}\cdot(2+4)\cdot(2-1)^2 \Rightarrow P(2)=\frac{-3}{2}$$
$$P\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{4}\cdot\left(\frac{-1}{2}+4\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}-1\right)^2 \Rightarrow P\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-21}{16}$$

14: [B]

$$(x+y+z)^2=7^2 \to x^2+y^2+z^2+2\cdot(xy+xz+yz)=$$
$$=49 \to 25++2\cdot(xy+xz+yz)=49$$
$$xy+xz+yz=12 \quad (\text{eq.}1)$$
$$4\cdot(xy+xz+yz)=xyz \to 4\cdot 12=xyz \to xyz=48 \quad (\text{eq.}2)$$

Utilizando polinômios e os valores das equações 1 e 2, pode-se escrever:
$$P(a)=(a-x)\cdot(a-y)\cdot(a-z)=a^3-a^2\cdot(x+y+z)+a\cdot(xy+xz+yz)-xyz$$
$$\begin{cases} P(x)=0 \to x^3-x^2\cdot(x+y+z)+x\cdot(xy+xz+yz)-xyz=0 \\ P(y)=0 \to y^3-y^2\cdot(x+y+z)+y\cdot(xy+xz+yz)-xyz=0 \\ P(z)=0 \to z^3-z^2\cdot(x+y+z)+z\cdot(xy+xz+yz)-xyz=0 \end{cases}$$
$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2)-(xy+xz+yz)\cdot(x+y+z)+3xyz$$
$$x^3+y^3+z^3=7\cdot 25-12\cdot 7+3\cdot 48$$
$$x^3+y^3+z^3=235$$

15: [E]
Calculando:
$$p_{(c)}=c^{n/2}$$
$$p_{(c)<c}=\frac{c^{n/2}}{c}$$
$$\frac{c^{n/2}}{c}=c^2 \to c^{n/2}=c^3 \to n=6$$
Sendo p e q números primos:

Caso 1: $c=p^2q$; Raízes de $P(x) \to pq$, q e 1

$$q+pq+pq^2=80$$

Fazendo: $q = 2 \to 2 + 2p + 4p = 80 \to p = 13;$
Raízes de $P(x) \to 26,\ 2$ e 1

$b = 26 + 2 + 1 = 29$ (R. Girard)

Caso 2: $c = p^2q;$ Raízes de $P(x) \to p^2,\ q$ e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

Caso 3: $c = p^5;$ Raízes de $P(x) \to p^3,\ p^2$ e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

Caso 4: $c = p^5;$ Raízes de $P(x) \to p^4,\ p$ e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

16: [E]

Como $P\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) = 0,\ x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ é uma raiz de $P(x).$

De $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3},$

Assim,

$P(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$

Dividindo $P(x)$ por $x^3 - 3x - 1$, obtém-se quociente $x^3 - 3x - 5$ e resto $R(x) = 3x^2 - 54x - 4.$

Dessa forma, a soma dos coeficientes de $R(x)$ é $3 + (-54) + (-4) = -55.$

17: [A]

Das Relações de Girard tem-se que a soma das raízes é igual ao coeficiente de x^2 dividido pelo coeficiente de x^3 multiplicado por -1. Ou seja:

$$\alpha - \alpha + \frac{1}{\alpha} = -\frac{a}{1} \to \frac{1}{\alpha} = -\frac{a}{1} \to a = -\frac{1}{\alpha}$$

Substituindo as outras raízes da equação, tem-se:

$$x^3 - \frac{1}{\alpha}x^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^3 - \dfrac{1}{\alpha}\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ -\alpha^3 - \dfrac{1}{\alpha}\alpha^2 - b\alpha + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha^3 - \alpha + b\alpha + c = 0 \\ -\alpha^3 - \alpha - b\alpha + c = 0 \end{cases}$$

$$-2\alpha + 2c = 0 \to c = \alpha$$

$$2\alpha^3 + 2b\alpha = 0 \to b = -\alpha^2$$

Assim, substituindo os valores e a, b e c na expressão dada, tem-se:

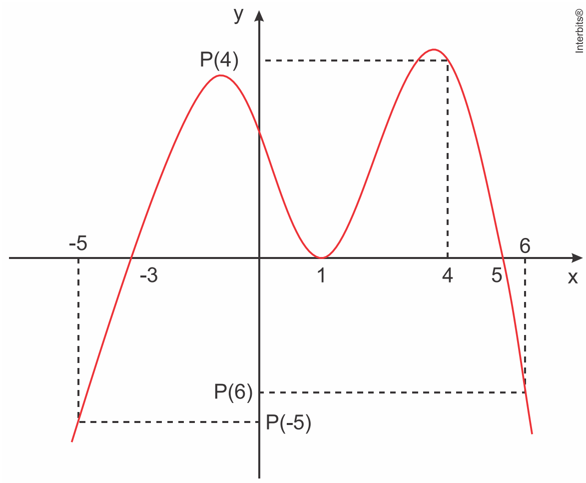
$$b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2} = -\alpha^2 + \alpha^2 + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\alpha + \frac{\left(-\alpha^2\right)}{\alpha^2} \to -1 - 1 = -2$$

18: [D]

Como $P(-3) = P(1) = P(5) = 0,$ temos $-3,\ 1$ e 5 como raízes de $P(x).$

Sabendo que $P(0)$ e $P(2)$ são ambos positivos, concluímos que 1 é raiz dupla.

Logo, o formato do gráfico de $P(x)$ será:



Portanto, de acordo com o gráfico, $P(-5) < 0,$ $P(4) > 0$ e $P(6) < 0.$

19: [B]

Se $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então ao menos uma raiz de $Q(x)$ é também raiz de $P(x).$ Calculando:

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_1 = x_2 = 1$

Substituindo essa raiz em $P(x),$ tem-se:

$x^3 - 3x^2 - ax + b = 0$

$1 - 3 - a + b = 0$

$-a + b - 2 = 0$

$b = 2 + a$

Substituindo o valor de b na equação dada $a^2 - b^2 = -8,$ tem-se:

$$a^2 - b^2 = -8$$
$$a^2 - (2+a)^2 = -8$$
$$a^2 - \left(4 + 4a + a^2\right) = -8$$
$$a^2 - 4 - 4a - a^2 = -8$$
$$-4a = -8 + 4$$
$$a = 1$$

Substituindo novamente o valor de a na equação dada $a^2 - b^2 = -8$, tem-se:

$$a^2 - b^2 = -8$$
$$1 - b^2 = -8$$
$$-b^2 = -9$$
$$b = 3$$

Assim, $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$ Pode-se perceber daí que, se 1 é raiz da equação, -1 também será raiz. Assim sendo, o conjunto de raízes de $P(x)$ é $\{-1, 1, 3\}$.

Analisando então as afirmativas da questão, temos:

[A] Correto (podem formar uma P.A. de razão 2).

[B] Incorreto (números negativos não são números naturais).

[C] Correto.

[D] Correto.

20: [D]

Pelo teorema do resto, sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-a)$ é igual a $P(a)$. Sabe-se também que um polinômio é dito divisível por outro quando seu resto é igual a zero. Logo, quando $P(a) = 0$ pode-se dizer que o polinômio $P(x)$ será divisível por $(x-a)$.

Fazendo $a = 3$, tem-se:

$$P(3) = f(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 - 9 \rightarrow P(3) = 0$$

Logo, $x^4 - 3x^3 + 3x - 9$ será divisível por $(x-3)$.

ANOTAÇÕES